



HAL
open science

Evaluation rapide du taux d'erreur numérique en présence d'interférence entre symboles

A.J. Levy

► **To cite this version:**

A.J. Levy. Evaluation rapide du taux d'erreur numérique en présence d'interférence entre symboles. [Rapport de recherche] Centre de recherches en physique de l'environnement terrestre et planétaire (CRPE). 1983, 48 p. hal-02191798

HAL Id: hal-02191798

<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02191798v1>

Submitted on 23 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RP 182 (57)

**CENTRE NATIONAL D'ETUDES
DES TELECOMMUNICATIONS**

B

**CENTRE NATIONAL DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**CENTRE DE
RECHERCHES
EN PHYSIQUE DE
L'ENVIRONNEMENT
TERRESTRE
ET PLANETAIRE**

CRPE

**NOTE TECHNIQUE
CRPE / 127**

**EVALUATION RAPIDE DU TAUX
D'ERREUR NUMERIQUE
EN PRESENCE D'INTERFERENCE
ENTRE SYMBOLES**

Par

A. J. LEVY

RPE/ETP

38-40 rue du Général Leclerc
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX, FRANCE

145



16 SEP. 1983

CENTRE DE RECHERCHES EN PHYSIQUE DE
L'ENVIRONNEMENT TERRESTRE ET PLANETAIRE

NOTE TECHNIQUE CRPE/127

EVALUATION RAPIDE DU TAUX D'ERREUR NUMERIQUE
EN PRESENCE D'INTERFERENCE ENTRE SYMBOLES

par

A.J. LEVY

RPE/ETP

38-40 rue du Général Leclerc
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX, FRANCE



Le Directeur

I. REVAH

Le Directeur Adjoint

P. BAUER

EVALUATION RAPIDE DU TAUX D'ERREUR NUMERIQUE

EN PRESENCE D'INTERFERENCE ENTRE SYMBOLES

RESUME

Nous présentons ici un cadre général qui rassemble la plupart des méthodes existantes de calcul de la probabilité d'erreur sur une liaison numérique, en présence de bruit et d'interférence entre symboles. De cette famille est extraite une méthode nouvelle, simple et à faible coût de calcul, et qui s'adapte aisément aux principaux types de modulations. Cette méthode présente la particularité de ne pas utiliser les moments de l'interférence entre symboles. Un logiciel FORTRAN la mettant en oeuvre est proposé, applicable aux modulations d'amplitude et de phase.

EVALUATION RAPIDE DU TAUX D'ERREUR NUMERIQUE

EN PRESENCE D'INTERFERENCE ENTRE SYMBOLES

I - INTRODUCTION

Le taux d'erreur est vraisemblablement le paramètre le plus représentatif des performances d'un système de transmission numérique. C'est pourquoi une attention considérable a été portée au problème de la détermination de la probabilité d'erreur, en présence de bruit et d'interférence entre symboles, attention dont témoigne une très abondante littérature [1-10].

La méthode d'évaluation la plus simple procède par énumération exhaustive de toutes les valeurs possibles de l'interférence. Son coût de calcul, croissant exponentiellement avec le nombre de coefficients de l'interférence, en fait une méthode lourde et parfois impraticable. HO et YEH, parallèlement à SHIMBO et CELIBILER ont les premiers développé une méthode dont le coût de calcul ne croît que linéairement avec ce nombre de coefficients, méthode basée sur un développement de Taylor et qui suppose le calcul des moments successifs de la variable interférence entre symboles [2-4].

Divers travaux ont suivi, ayant pour objectif d'accélérer la convergence de la méthode et donc de réduire, à précision du résultat fixé, le nombre de moments à calculer. BENEDETTO et al. utilisent une méthode d'intégration par une règle de quadrature de Gauss [7]. MURPHY substitue au développement de Taylor, un polynôme constituant la meilleure approximation au sens des moindres carrés [9].

BATES a mené une comparaison de ces différentes méthodes et met en avant les performances en rapidité de la méthode de MURPHY [10].

La nécessité d'une méthode numérique réellement très rapide ressort de plusieurs applications où le calcul de la probabilité d'erreur doit être répété un grand nombre de fois. Une méthode rapide permet, par exemple, d'envisager, lors de la conception d'un système de transmission numérique, l'optimisation des différents paramètres par rapport au critère essentiel qu'est la probabilité d'erreur. Par ailleurs, une telle méthode autoriserait, dans l'expérience PACEM en cours de dépouillement, à partir de données de propagation, d'inférer des statistiques non seulement sur les caractéristiques du canal de transmission, mais également sur la qualité d'une liaison théorique empruntant ce canal [13].

Dans cette note, nous présentons une classe très générale de méthodes qui inclut celles de HO et YEH et de MURPHY. Ensuite nous proposons une méthode nouvelle issue de cette famille, et dont les caractéristiques essentielles sont les suivantes :

- la méthode s'adapte sans difficulté à tout type de bruit défini par sa densité de probabilité,
- elle est simple et peu coûteuse en temps de calcul,
- elle est applicable à la modulation d'amplitude, à la modulation de phase et à la modulation d'amplitude en quadrature (démodulation cohérente).

En dernier lieu, nous présentons un logiciel écrit en FORTRAN, qui calcule les coefficients de l'interférence entre symboles et la probabilité d'erreur et ce, pour divers types de modulation.

II - UNE CLASSE DE METHODES

Nous adoptons, pour tous les signaux une représentation par enveloppe complexe. Nous rappelons qu'un signal $x_R(t)$, réel et à bande étroite autour de ω_0 , est relié à son enveloppe complexe $x(t)$ par les relations :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + j x_q(t) \\ x_R(t) &= x_p(t) \cos(\omega_0 t) - x_q(t) \sin(\omega_0 t) \\ &= \operatorname{Re}(x(t) \cdot \exp(j \omega_0 t)) \end{aligned} \quad (1)$$

L'enveloppe complexe de la réponse impulsionnelle du filtre, en bande de base, équivalent à la totalité du système de transmission est désignée par $h(t)$. (Figure 1).

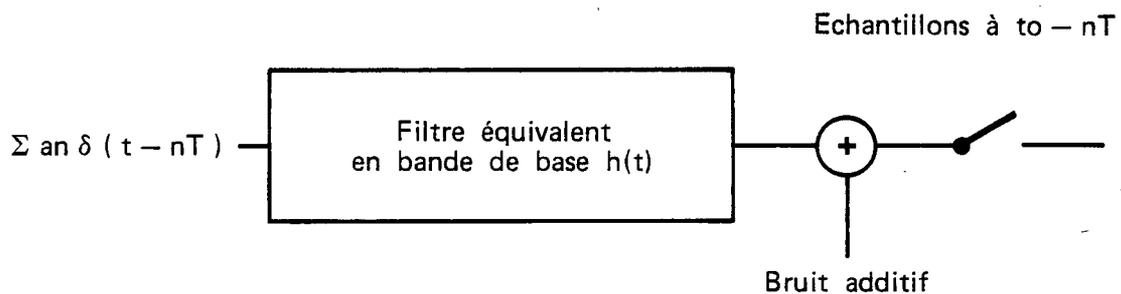


Figure 1 : Schéma représentatif du système de transmission

Dans l'hypothèse d'un bruit additif N , l'échantillon reçu à l'instant t_0 , à partir duquel le récepteur prend sa décision, s'exprime :

$$\begin{aligned} r_0 &= a_0 h_0 + \sum_n a_n \cdot h_n + N \\ \text{avec } h_n &= h(t_0 - nT) \end{aligned} \quad (2)$$

Dans un premier temps, nous nous intéressons exclusivement à la modulation d'amplitude binaire. Chaque symbole a_n peut prendre l'une des deux valeurs $+1$ et -1 avec égales probabilités. Les échantillons h_n peuvent éventuellement être complexes. Mais dans ce cas, seule leur partie réelle influe sur la décision. Nous pouvons donc, sans restreindre le problème supposer les h_n réels.

Le symbole a_0 valant $+1$, la probabilité d'erreur s'écrit :

$$P_e = \Pr \left\{ h_0 + \sum_{n=1}^L a_n h_n + N < 0 \right\} \quad (3)$$

L'interférence entre symboles $\sum a_n h_n$ a une densité de probabilité $g(x)$, symétrique et dont le support est borné à l'intervalle

$$I = [-r, +r] \quad \left(r = \sum_{n=1}^L |h_n| \right) \quad (4)$$

Par ailleurs, $f(x)$ désigne la densité de probabilité cumulée du bruit N .

$$f(x) = \Pr \{ N < -x \} \quad (5)$$

La probabilité d'erreur P_e s'exprime alors :

$$P_e = \int_I f(h_0 + x) \cdot g(x) dx \quad (6)$$

Nous nous proposons maintenant de décrire un cadre général dans lequel entre toute une gamme de techniques d'évaluation de cette expression.

Supposons définie, d'une part, un ensemble de M fonctions $b_i(x)$, $i=1, 2, \dots, M$ et d'autre part une combinaison linéaire de ces fonctions vérifiant :

$$f(h_0 + x) = \sum_{i=1}^M C_i b_i(x) + \varepsilon(x), \quad x \in I \quad (7)$$

Il est alors possible de déduire une valeur approchée de la probabilité d'erreur

$$P_e \cong \sum_{i=1}^M C_i \cdot E b_i \quad (8)$$

avec
$$E b_i = \int_I b_i(x) g(x) dx$$

L'erreur dévaluation commise étant
$$\int_I \varepsilon(x) g(x) dx$$

La méthode proposée par HO et YEH entre dans le cadre ainsi défini, avec comme fonctions $b_i(x) = x^i$, et comme décomposition (7), un développement de Taylor. Les quantités $E b_i$ sont les moments de la variable interférence entre symboles [2].

MURPHY observe que le développement de Taylor converge plus rapidement au centre de l'intervalle I qu'aux extrémités [9]. Il propose de lui substituer le développement constituant la meilleure approximation au sens des moindres carrés (c'est-à-dire minimisant $\int_I \varepsilon^2(x) dx$). Il choisit comme base $\{b_i\}$ les polynômes de Legendre orthogonaux sur I . L'approximation aux moindres carrés est meilleure que le développement de Taylor en ce sens qu'un nombre moindre de termes du développement permet d'aboutir à la même précision du résultat [10].

Enfin, LUVISON, à la suite des travaux de BENEDETTO et al. propose l'utilisation d'une formule de quadrature dont les noeuds sont régulièrement espacés. Ce qui revient à utiliser en (7) le polynôme de degré minimum coïncidant avec $f(h_0 + x)$ pour un certain nombre d'échantillons x_i [7,8].

On peut constater que la manière de réaliser un développement de $f(h_0 + x)$ a fait l'objet de larges investigations. Cependant, tous ces développements sont des polynômes, en raison de la relative facilité d'évaluation des moments de l'interférence entre symboles.

En ce qui concerne le jeu de fonctions b_i , et d'une manière très générale, la possibilité d'utiliser une fonction $b(x)$ dans le développement (7) est liée à la facilité d'évaluation des quantités $Eb = \int_I b(x)g(x)dx$. Or l'interférence entre symboles est une somme de variables aléatoires $a_n h_n$, chacune de ces variables prenant des valeurs discrètes. Si la densité probabilité $g(x)$ n'admet pas d'expression simple, en revanche, sa fonction caractéristique $G(\omega)$ est connue et est produit des fonctions caractéristiques de chacune des variables $a_n h_n$.

De la fonction caractéristique, on peut déduire les quantités Eb pour tout une gamme de fonctions $b(x)$. En effet :

$$G(\omega) = \int \exp(j\omega x) g(x) dx \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d^{2n} G(\omega)}{d\omega^{2n}} \right]_{\omega = \omega_2 - j\omega_1} = \int b(x) g(x) dx = Eb$$

pour $b(x) = (-1)^n x^{2n} \cdot \exp(\omega_1 x) \cdot \cos \omega_2 x$

(9)

En somme, une technique d'évaluation de la probabilité d'erreur est définie par le choix d'une part, d'une famille de fonctions b_i extraite de cette gamme et d'autre part, d'une manière de réaliser le développement :

$$f(h_0 + x) = \sum c_i b_i(x) + \varepsilon(x)$$

Observons que $g(x)$ est une fonction paire et que l'erreur commise $\int \varepsilon(x) g(x) dx$ est nulle si $\varepsilon(x)$ est impaire. En conséquence, dans ce développement seule la partie paire de $f(h_0 + x)$ mérite d'être considérée, la partie impaire pouvant être sans inconvénient rejetée dans le terme complémentaire $\varepsilon(x)$.

III - UNE METHODE UTILISANT UNE TRANSFORMEE EN COSINUS DISCRETE

Nous nous proposons de décrire maintenant, une méthode permettant, en toute généralité, d'évaluer :

$$Pe = \Pr \left\{ h_0 + II + N < 0 \right\}$$

lorsque sont connus, d'une part, la densité cumulée du bruit, $f(x)$, et d'autre part, la fonction caractéristique $G(\omega)$ de la variable II . Cette variable est supposée réelle, symétrique et bornée.

Il nous semble que de toutes les fonctions décrites en (9), les fonctions trigonométriques $b(x) = \text{COS}(\omega.x)$ sont les plus adéquates.

En effet, tout d'abord le calcul des intégrales E_b pour ces fonctions est simple, car contrairement au calcul des moments, il ne fait pas intervenir de dérivées de la fonction caractéristique mais seulement des évaluations de cette fonction.

Ensuite, la décomposition (7) est alors une décomposition en série de Fourier dont les propriétés et qualités sont bien connues. En particulier cette décomposition est une approximation aux moindres carrés.

Nous proposons de réaliser cette décomposition par échantillonnage sur $2.NM$ points de la partie paire de $f(h_0+x)$, suivie d'une transformation en cosinus discrète (qui coïncide avec la transformation de Fourier discrète pour les fonctions symétriques). Soit :

$$C_i = \sum_{k=-NM+1}^{NM} f_k \cos(ik \Pi/NM) \quad (10)$$

$$\text{avec } f_k = \frac{1}{2} \left[f(h_0 + kr/NM) + f(h_0 - kr/NM) \right]$$

Il en résulte une décomposition de $f(h_0 + x)$:

$$f(h_0 + x) = \sum_{i=-NM+1}^{NM} C_i \cos(\omega_i x) + \varepsilon(x) \quad (11)$$

Puis ne retenant que les M premiers termes de la série, une expression du taux d'erreur est ainsi déduite de (7) et (9) :

$$P_e \cong \sum_{i=-M+1}^M C_i G(\omega_i) \quad \text{avec } \omega_i = i\Pi/r \quad (12)$$

Pour nous résumer la méthode comprend les quatre étapes suivantes :

- évaluation de NM échantillons de la partie paire de $f(h_0 + x)$,
- transformée en cosinus discrete de cette séquence,
- évaluation de M échantillons de la fonction caractéristique $G(\omega)$,
- évaluation de P_e par (12).

En raison du repliement de spectre dû à l'échantillonnage et de la troncature de la série, l'évaluation (12) est seulement approximative. Malgré tout, pour un nombre croissant d'échantillons, la série de Fourier converge et l'erreur tend vers zéro.

D'un point de vue qualitatif, la convergence est plus lente lorsque la fonction de distribution présente des variations rapides. En conséquence, lorsque l'intervalle d'interférence croît ou lorsque le niveau de bruit diminue, l'évaluation du taux d'erreur requiert un nombre de terme M accru.

IV - MODULATIONS D'AMPLITUDE

IV.1. Modulation d'amplitude binaire

En modulation d'amplitude binaire la fonction caractéristique $G(\omega)$ s'écrit :

$$G(\omega) = \prod_{n=1}^L \cos(h_n \omega) \quad (13)$$

Compte tenu des symétries, les calculs à mener peuvent être com- plètement ainsi décrit :

- $f_k = f_{-k} = \frac{1}{2} \left[f(h_o + kr/NM) + f(h_o - kr/NM) \right]$
, $k = 0, 1, \dots, NM$
- $C_i = \sum_{k=-NM+1}^{NM} f_k \cos(ik \Pi/NM)$, $i = 0, 1, \dots, M$
- $P_e \cong C_o + 2 \cdot \sum_{i=1}^M C_i \prod_{n=1}^L \cos(i \Pi h_n / r)$

(14)

La séquence C_i , qui est la transformée en cosinus discrète de la séquence f_k peut éventuellement être calculée au moyen d'un algorithme rapide [11].

A titre d'application, la probabilité d'erreur a été calculée pour un filtre passe bande idéal, avec un décalage variable de l'instant de décision et pour un bruit gaussien. Les autres paramètres prenant les valeurs suivantes : $NM = 8$, $M = 5$, $L = 10$. Dans ces conditions, le temps d'unité centrale correspondant au calcul du taux d'erreur P_e à partir des coefficients h_n , sur un ordinateur CDC Cyber 170-750 était inférieur à une milliseconde. Les résultats des évaluations comparées aux valeurs exactes sont données dans les tables 1 et 2.

t_0/T	Taux d'erreur calculé	Valeur exacte
0.1	0.151457E-05	0.149789E-05
0.2	0.221138E-02	0.219405E-02
0.3	0.413479E-01	0.413484E-01
0.4	0.133854E+00	0.133847E+00
0.5	0.249979E+00	0.250015E+00

Table 1 : Probabilité d'erreur pour un filtre passe-bas idéal et un décalage variable de l'instant de décision.

(modulation d'amplitude binaire, SNR = 16 dB)

SNR	Taux d'erreur calculé	Valeur exacte
10	0.112740E-02	0.112734E-02
13	0.138387E-04	0.138346E-04
16	0.667112E-08	0.665487E-08
19	0.923311E-14	0.904746E-14
22	0.167656E-24	0.151330E-24

Table 2 : Probabilité d'erreur pour un filtre passe-bas idéal et un niveau de bruit variable

(modulation d'amplitude binaire, $t_0/T = 0.05$).

Par ailleurs nous avons observé la vitesse de convergence de la méthode décrite ci-dessus, mesurée par le nombre de termes M (Figure 2). A ce propos, il faut noter que le volume du calcul des moments successifs de l'interférence croît très rapidement avec l'ordre de ces moments tandis que tous les éléments E_b ont un coût de calcul identique pour la méthode proposée.

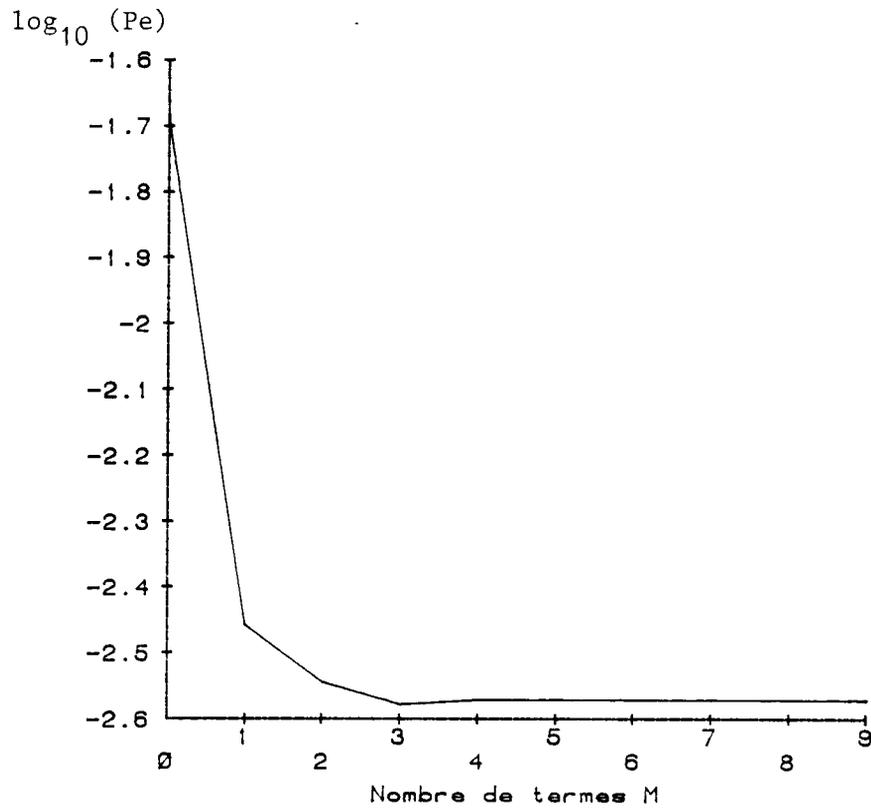


Figure 2 : Taux d'erreur calculé en fonction du nombre de terme M retenus
(filtre passe-bas idéal, SNR = 16 dB, $t_0/T = 0.2$, $NM = 16$).

IV.2 - MODULATION D'AMPLITUDE A NL NIVEAUX

Dans le cas d'une modulation d'amplitude à NL niveaux, le symbole a_n peut prendre les valeurs $\pm 1, \pm 3, \dots \pm(NL - 1)$ (NL étant pair). L'expression de l'échantillon reçu (2) est inchangée. La probabilité de commettre une erreur sur le symbole a_0 s'exprime [3] :

$$P_e = \frac{2(NL-1)}{NL} \Pr \left\{ h_0 + \sum a_n h_n + N < 0 \right\} . \quad (15)$$

Le développement de la méthode décrite précédemment peut être suivi identiquement, seule la fonction caractéristique $G(\omega)$ est modifiée, ainsi que l'intervalle d'interférence :

$$G(\omega) = \prod_{n=1}^L \sum_{k=1}^{NL/2} \cos((2.k-1) . \omega . h_n) \quad (16)$$

$$r = (NL-1) . \sum |h_n| \quad (17)$$

IV.3 - MODULATION D'AMPLITUDE EN QUADRATURE

L'existence d'une composante en quadrature du signal utile entraîne l'impossibilité de négliger la partie imaginaire des échantillons h_n qui sont désormais complexes : $h_n = h_{pn} + j h_{qn}$.

Le symbole a_n peut prendre NL^2 états :

$$a_n = e_n + j d_n \quad (18)$$

$$e_n, d_n \in \left\{ \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(NL-1) \right\}$$

L'échantillon à l'instant de décision se scinde en deux échantillons, l'un en phase, l'autre en quadrature. Il est supposé pour la simplicité des expressions, et bien que cela ne soit pas absolument nécessaire, que la réception cohérente est parfaite (pas d'erreur de phase) et donc que h_o est réel.

$$\begin{aligned} r_o &= a_o h_o + \sum a_n h_n + N \\ &= e_o h_o + \sum (e_n h_{pn} - d_n h_{qn}) + N_p \\ &\quad + j(d_o h_o + \sum (d_n h_{pn} + e_n h_{qn}) + N_Q) \end{aligned} \quad (19)$$

Il est clair que chacune des composantes en phase et en quadrature peut être considérée indépendamment et a une forme semblable à l'échantillon reçu dans le cas d'une modulation d'amplitude à NL niveaux.

Le calcul du taux d'erreur sur e_n ou d_n utilisera :

$$r = (NL-1) (\sum |h_{pn}| + |h_{qn}|) \quad (20)$$

$$G(\omega) = \prod_{n=1}^L \left[\sum_{k=1}^{NL/2} \frac{2}{NL} \cos((2k-1) \omega h_{pn}) \cdot \sum_{k=1}^{NL/2} \frac{2}{NL} \cos((2k-1) \omega h_{qn}) \right]$$

V - MODULATION DE PHASE A NL ETATS

Dans le cas de la modulation de phase, le symbole a_n prend les valeurs complexes

$$a_n = \exp(j \phi_n) \quad \phi_n = 0, 2\psi, 4\psi \dots 2(NL-1)\psi \quad (21)$$

$$\psi = \Pi/NL$$

Le symbole a_0 valant 1, l'échantillon reçu r_0 induira une erreur s'il n'appartient pas à un secteur angulaire du plan complexe d'angle au sommet 2ψ (Figure 3).

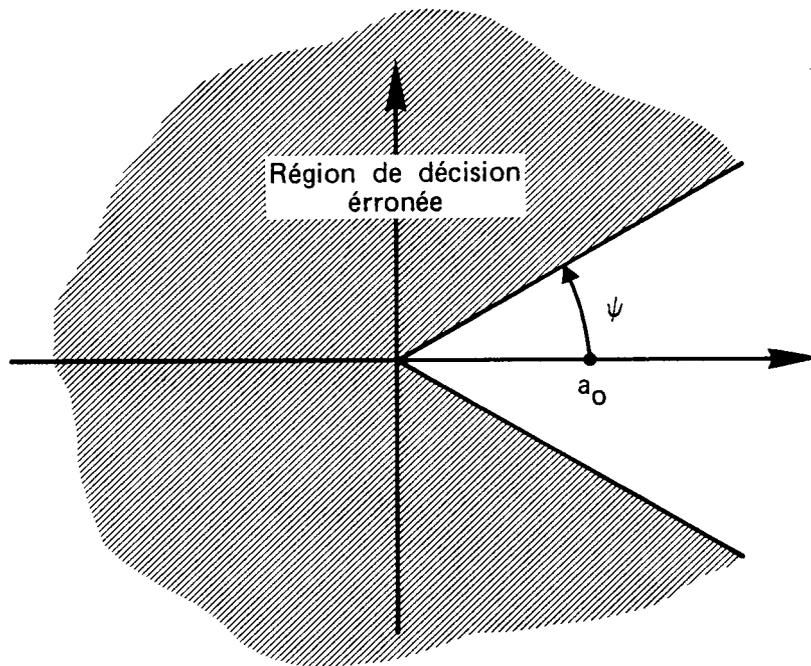


Figure 3 : Modulation de phase. Région R du plan complexe induisant une erreur sur le symbole a_0 .

Nous présentons ici deux manières de généraliser la méthode décrite en III au cas de la modulation de phase.

V.1 - Généralisation à deux dimensions

Il est possible de tenir un raisonnement calqué sur celui développé pour la modulation d'amplitude, mais à deux dimensions.

Appelons $F(x)$ la densité de probabilité du bruit N et définissons la densité cumulée $f_{\psi}(x)$.

$$f_{\psi}(x) = \int_R F(t-x) dt \quad (22)$$

$f_{\psi}(x)$ est la probabilité pour que le bruit N , centré en x , appartienne au domaine R . L'expression de cette densité cumulée n'est généralement pas simple. Par exemple, pour un bruit gaussien, l'expression de f_{ψ} fait intervenir la fonction normale bivariable cumulée (voir l'ouvrage d'ABRAMOWITZ p. 936 et p. 956-957 [13]).

Désignons par $g(x)$ la densité de probabilité de la variable complexe $II = \sum_n a_n h_n$. Cette variable est bornée et on peut définir une région carrée I , de côté $2r$, du plan complexe, telle que $g(x)$ soit nulle en dehors de I . La probabilité d'erreur peut alors s'exprimer :

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_x \Pr \left\{ (h_o + II + N) \in R / II=x \right\} \Pr \left\{ II = x \right\} \\ &= \int_I f_{\psi}(h_o+x) g(x) dx \end{aligned} \quad (23)$$

La transformée de Fourier discrète de NM^2 échantillons de $f_\psi(h_0+x)$ de la région I fourni un développement de f_ψ :

$$f_\psi(h_0+x) = \sum_{i=-NM+1}^{NM} \sum_{e=NM+1}^{NM} C_{i,e} \exp(j(\omega_i x_p + \omega_e x_q))$$

avec $\omega_i = i\Pi/r$ $\omega_e = e \Pi/r$ (24)

et $x = x_p + j x_q$

De ce développement on déduit une expression de la probabilité d'erreur

$$P_e \cong \sum_i \sum_e C_{i,e} E_{b_{i,e}}$$

(25)

avec $E_{b_{i,e}} = G(\omega_i, \omega_e)$

où G est la fonction caractéristique bidimensionnelle correspondant à la densité $g(x)$.

Cette fonction caractéristique est le produit des fonctions caractéristiques de chacune des variables $a_n h_n$

$$G(\omega_i, \omega_e) = \prod_{n=1}^L \frac{1}{NL} \sum_{k=1}^{NL} \exp(j \cdot \text{Re} [(\omega_i - j\omega_e) \cdot h_n \cdot \exp(j2k\psi)]) \quad (26)$$

Une généralisation bidimensionnelle est donc tout à fait réalisable avec cependant un volume de calcul nettement plus important. En particulier, la densité cumulée f_ψ peut être assez difficile à évaluer. C'est pourquoi la méthode permettant de revenir à des variables à une dimension qui va être décrite doit avoir la préférence.

V.2 - Généralisation à une dimension

Par intégration des variables bidimensionnelles sur des demi-plans, il est possible de revenir à des variables à une dimension.

La probabilité d'erreur peut ainsi être majorée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_e &= \Pr \{ r_o \in R \} \\ &\leq \Pr \{ r_o \in R_1 \} + \Pr \{ r_o \in R_2 \} \end{aligned} \quad (27)$$

Les régions R_1 et R_2 sont deux demi-plans complexes délimités par les droites à l'origine de pente $+\psi$ et $-\psi$ (Figure 4).

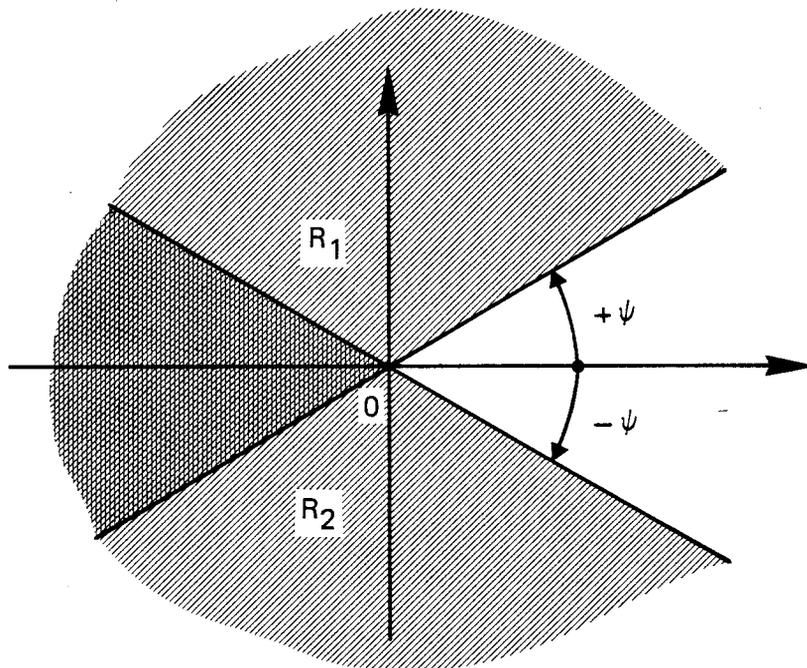


Figure 4 : Région R_1 et R_2 ($R_1 \cup R_2 = R$)

Un complexe r_o appartient à la région R_1 lorsque la partie réelle de $r_o \cdot \exp(j(\pi/2 - \psi))$ est négative.

$$P_1 = \Pr \{ r_o \in R_1 \} \quad (28)$$

$$= \Pr \left\{ h'_o + \sum \operatorname{Re} \left[h_n \exp(j(\phi_n - \psi + \pi/2)) \right] + N' < 0 \right\}$$

$$\text{avec } h'_o = \operatorname{Re} (h_o \exp(j(\pi/2 - \psi)))$$

$$N' = \operatorname{Re} (N \exp(j(\pi/2 - \psi)))$$

Cette expression de P_1 est semblable à celle qui intervient en modulation d'amplitude. Le terme d'interférence entre symboles est différent mais reste une somme de variables aléatoires indépendantes dont la fonction caractéristique s'exprime aisément :

$$G(\omega) = \prod_{n=1}^L G_n(\omega) \quad (29)$$

$$G_n(\omega) = \frac{2}{NL} \sum_{k=1}^{NL/2} \cos(\omega \cdot \operatorname{Re}(h_n \exp(j((2k-1)\psi + \pi/2))))$$

Les coefficients c_i se déduisent de la densité cumulée du bruit N' (équation 10) et P_1 est évalué :

$$P_1 = C_o + 2 \sum_i c_i G(\omega_i) \quad \omega_i = i \pi/r \quad (30)$$

Le terme $P_2 = \Pr \left\{ r_o \in R_2 \right\}$ s'obtient de manière similaire. D'une façon générale, il est possible de calculer la probabilité pour r_o d'appartenir à n'importe quel demi-plan. Le demi-plan $\operatorname{Re}(r_o) > 0$ est particulièrement intéressant car il permet de majorer l'erreur commise par excès en assimilant P_e à $P_1 + P_2$.

Il est clair que les fonctions caractéristiques qui interviennent en modulation de phase sont nettement plus complexes que celles correspondant à la modulation d'amplitude. L'avantage qu'il y a, dans ce cas, à ne pas devoir calculer les dérivées successives de ces fonctions est considérable.

La méthode ci-dessus décrite a été appliquée à une modulation à 4, 8, et 16 états de phase, pour un niveau de bruit variable (figure 5). Les coefficients de l'interférence entre symboles utilisés pour cet exemple sont donnés en table 3 et sont empruntés à SHIMBO et al [5].

h_{-1}	=	4.23550	10^{-1}	h_4	=	7.35696	10^{-2}
h_0	=	4.71399	10^0	h_5	=	-1.82525	10^{-1}
h_1	=	5.00070	10^{-1}	h_6	=	1.59577	10^{-1}
h_2	=	-4.10356	10^{-1}	h_7	=	-5.42662	10^{-2}
h_3	=	1.54698	10^{-1}	h_8	=	-5.74256	10^{-2}

Table 3 : Coefficients de l'interférence entre symboles utilisés à titre d'exemple

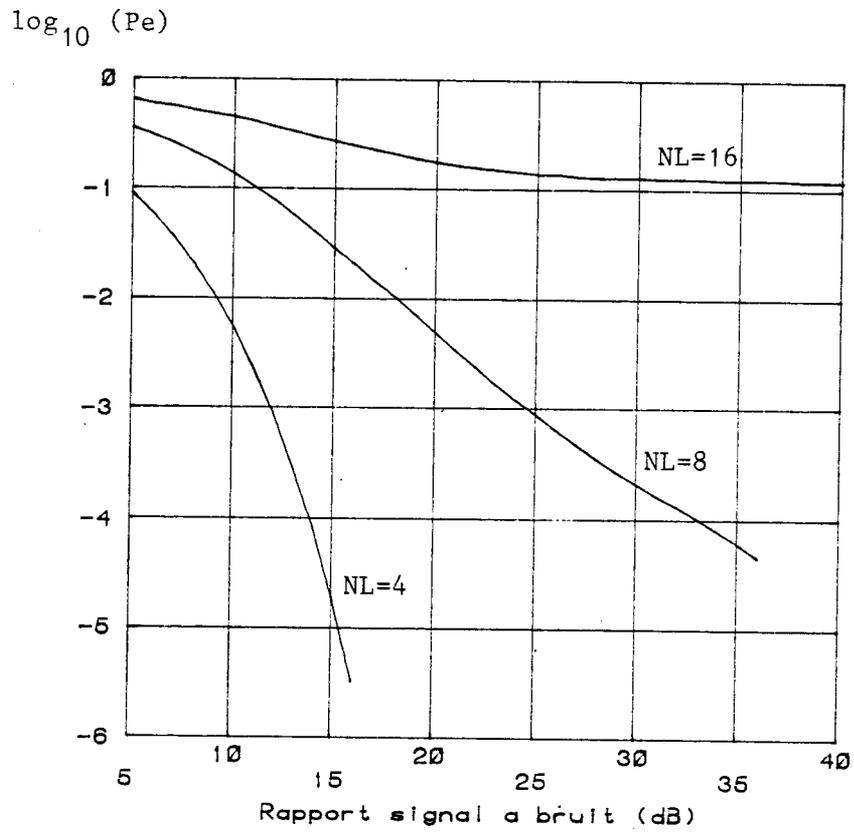


Figure 5 : Dégradation du taux d'erreur par rapport au niveau de bruit. Modulation de phase à 4, 8 et 16 états.

VI - CONCLUSION

Nous avons décrit une méthode de calcul de la probabilité d'erreur en présence de bruit et d'interférence entre symboles, méthode caractérisée par sa grande souplesse. Cette méthode s'applique à tout type de bruit défini par sa densité de probabilité cumulée. Les principaux types de modulation peuvent être traités sans difficulté (tandis que les méthodes existantes sont quelque peu lourdes, appliquées à la modulation de phase). Le coût de calcul ne croît que linéairement avec la précision du résultat requis (mesurée en nombre M de termes conservés). Enfin la mise en oeuvre de la méthode est simple et conduit à des calculs particulièrement rapides.

VII - LOGICIEL FORTRAN

Nous proposons ici des sous-programmes de calcul des coefficients de l'interférence entre symboles et des probabilités d'erreurs.

VII.1 - Coefficients de l'interférence entre symboles

Les sous-programmes INCR et INCC calculent le coefficient central h_0 et les L coefficients h_n , à partir de la représentation de Fourier $h(\omega)$ de l'enveloppe complexe du filtre équivalent en bande de base.

$\tilde{h}(\omega)$ est fourni au sous-programme par la fonction "external" F qui est ainsi normalisée :

$$F(\omega/\omega_N) = \tilde{h}(\omega) \quad \omega_N = \Pi / T$$

Pulsation de Nyquist

Les coefficients recherchés sont des échantillons de la réponse percussionnelle $h(t)$. Afin de ne calculer que les échantillons utiles et afin de réduire le nombre de points sur lequel s'opère la transformation de Fourier discrète, le spectre $\tilde{h}(\omega)$ est préalablement replié.

Ces sous-programmes supposent une démodulation cohérente parfaite (h_0 toujours réel) mais les conséquences d'une erreur de phase pourraient être étudiées par une modification du coefficient multiplicateur correcteur de phase qui ramène la phase de h_0 à zéro (EPH1).

Le problème de la détermination de l'instant de décision t_0 n'est pas traité ici.

INCR est applicable à la modulation d'amplitude : $H\emptyset = \text{Real}(h_0)$ et $H(N) = \text{Real}(h_n)$ sont réels.

INCC sert en modulation de phase : $H\emptyset = h_0$ et $H(N) = h_n$ sont alors complexes.

INCR Appel du sous-programme

CALL INCR (H \emptyset , H, L, F)

Paramètres

H \emptyset réel (sortie) : coefficient central de l'interférence

H tableau réel (sortie) : autres coefficients

L entier (entrée) : nombre de coefficients conservés

F fonction complexe (entrée) : filtre équivalent en bande de base.

Common

/C1/ PI

PI 3,1415 ...

Sous-programmes utilisés

CXFORT transformation de Fourier discrète.

INCC Ce sous programme est identique à INCR mais H \emptyset et H sont complexes.

```

1 c calcul des coefficients de l'interference
2 c     entre symboles
3 c
4     subroutine incc(hC,h,l,f)
5     common /cl/pi
6     complex d(64),s(64),f
7     complex hC,h(1)
8 c
9     n=6
10    nn=2**n
11    nn2=nn/2
12    d(1)=f(0.)+f(2.)+f(-2.)
13    d(nn2+1)=f(1.)+f(-1.)+0.5*(f(3.)+f(-3.))
14    do 10 i=2,nn2
15    or=(i-1.)/float(nn2)
16    d(i)=f(or)+f(2.+or)+f(-2.+or)
17 10 d(nn-i+2)=f(-or)+f(2.-or)+f(-2.-or)
18 c
19    call cxfort(d,n,s,2,iferr)
20 c
21    j=nn2-1
22    ephi=conjg(d(1)/cabs(d(1)))
23    hC=d(1)*ephi
24    do 20 i=1,1
25    h(i)=d(nn2+1-j)*ephi
26    j=-j
27 20 if(j.gt.0) j=j-1
28 c
29    return
30    end

```

```

1 c calcul des coefficients de l'interference
2 c     entre symboles
3 c
4     subroutine incr(hC,h,l,f)
5     common /cl/pi
6     complex d(64),s(64),f
7     real hC,h(l)
8 c
9     n=6
10    nn=2**n
11    nn2=nn/2
12    d(1)=f(0.)+f(2.)+f(-2.)
13    d(nn2+1)=f(1.)+f(-1.)+0.5*(f(3.)+f(-3.))
14    do 10 i=2,nn2
15    or=(i-1.)/float(nn2)
16    d(i)=f(or)+f(2.+or)+f(-2.+or)
17 10 d(nn-i+2)=f(-or)+f(2.-or)+f(-2.-or)
18 c
19    call cxfort(d,n,s,2,iferr)
20 c
21    j=nn2-1
22    ephi=conjg(d(1)/cabs(d(1)))
23    hC=real(d(1)*ephi)
24    do 20 i=1,l
25    h(i)=real(d(nn2+1-j)*ephi)
26    j=-j
27 20 if(j.gt.0) j=j-1
28 c
29    return
30    end

```

VII.2 - Calcul du taux d'erreur

Ce calcul se fait en quatre étapes :

- Echantillonnage de la densité de probabilité cumulée du bruit.

Ici le bruit est gaussien et $f(x) = 1/2 \operatorname{erfc}(x/\sqrt{2}\cdot\sigma)$.

- Transformation en cosinus directe. Cette étape suppose que la matrice AL de la transformation a été préalablement calculée (sous programme EAL).

- Calcul des intégrales E_b qui sont des échantillons de la fonction caractéristique.

- Calcul du taux d'erreur.

Trois programmes de calcul sont proposés :

TCD2 applicable en modulation d'amplitude binaire

TCD4 applicable en modulation d'amplitude à quatre niveaux (mais peut, bien sûr, être appliqué aux composantes en phase ou en quadrature d'une modulation MAQ-16).

TCDPSK applicable à la modulation de phase à NL états.

TCDPSKR applicable à la modulation de phase dans le cas particulier où les coefficients de l'interférence sont réels.

EAL Appel au sous-programme

CALL EAL (NM , AL)

Paramètres

NM entier (entrée) : AL est de dimension $(NM+1) \times (NM+1)$

AL tableau réel (sortie) : matrice de la transformation
en cosinus discrète de fonctions symétriques réelles.

Common

/C1/ PI

PI réel : 3,1415 ...

TCD2 Appel au sous-programme

CALL TCD2 (HØ, H, L, SIG, PE).

Paramètres

HØ réel (entrée) : coefficient central de l'interférence

H tableau réel (entrée) : autres coefficients

L entier (entrée) : nombre de coefficients

SIG réel (entrée) : écart type du bruit

PE réel (sortie) : taux d'erreur

Common

/C1/ PI

PI réel : 3,1415 ...

/C2/ NM, AL

NM entier : AL est de dimension (NM+1)x(NM+1)

AL tableau réel : matrice de la transformation en cosinus
discrète.Sous-programme utilisé

ERFC fonction erreur complémentaire.

TCD4 Même mode d'appel et mêmes paramètres que TCD2.

TCDPSK Appel du sous-programme

CALL TCDPSK (HØ, H, L, NL, SIG, PE)

Paramètres

HØ complexe (entrée) : coefficient central
H tableau complexe (entrée) : autres coefficients
L entier (entrée) : nombre de coefficients
NL entier (entrée) : nombre d'états
SIG réel (entrée) : écart type du bruit
PE réel (sortie) : taux d'erreur

Common

/CI/ PI

Sous-programme utilisé

CPE, ERFC

TCDPSKR Mêmes paramètres, mais HØ et H sont réels.

CPEAppel du sous-programme

CALL CPE(H \emptyset , H, L, NL, SIG, EPSI, R, P)

Paramètres

H \emptyset , H, L, NL, SIG \rightarrow voir TCDPSK

P réel (sortie) : le sous-programme calcule la probabilité P pour que l'échantillon complexe r_0 reçu soit dans un demi plan donné.

EPSI complexe (entrée) : ce paramètre définit le demi-plan (représenté dans le plan complexe, EPSI* est normal à la frontière du demi-plan et pointe à l'extérieur)

R réel (entrée) : l'interférence est dans [-R, +R].

Common

/C1/ PI

/C2/ NM, AL voir EAL.

```
1 c calcul de la matrice de la transformation en
2 c cosinus discrete appliquee a une fonction
3 c      symetrique
4 c
5     subroutine eal(nm,al)
6     real al(1)
7     common /cl/pi
8 c
9     nml=nm+1
10    pim=pi/nm
11    do 10 i=1,nml
12    al(1+(i-1)*nml)=1./(2.*nm)
13    al(i*nml)=((-1.)**(i+1))/(2.*nm)
14    do 10 j=2,nm
15    10 al(j+(i-1)*nml)=cos(pim*(i-1)*(j-1))/nm
16 c
17    return
18    end
```

```

1 c calcul du taux d'erreur en presence d'interference
2 c     entre symboles
3 c     modulation d'amplitude binaire
4 c
5     subroutine tcd2(hC,h,l,sig,pe)
6     common /c1/pi
7     common /c2/nm,al
8     real h(1),al(1),er(17),c(17),eb(17)
9     complex ce,cee
10 c
11     m=8
12     ml=m+1
13     nml=nm+1
14     pim=pi/nm
15 c
16     r=0.
17     do 20 i=1,1
18     20 r=r+abs(h(i))
19     if((r/sig).lt.1.e-5) go to 80
20 c
21 c echantillonnage de la densite cumulee du bruit
22 c
23     sig2=sig*sqrt(2.)
24     er(1)=0.5*erfc(hC/sig2)
25     do 30 i=2,nml
26     30 er(i)=0.25*(erfc((hC+(i-1)*r/nm)/sig2)+erfc((hC-(i-1)*r/nm)/sig2))
27 c
28 c transformation en cosinus discrete
29 c
30     k=0
31     do 40 i=1,ml
32     c(i)=0.
33     do 40 j=1,nml
34     k=k+1
35     40 c(i)=c(i)+al(k)*er(j)
36 c
37 c calcul d'echantillons de la fonction caracteristique
38 c
39     do 60 i=1,ml
40     60 eb(i)=1.
41     do 65 i=1,1
42     ph=pi*h(i)/r
43     cee=cplx(cos(ph),sin(ph))
44     ce=cee
45     eb(2)=eb(2)*real(cee)
46     do 65 j=3,ml
47     cee=cee*ce
48     65 eb(j)=eb(j)*real(cee)
49 c
50 c calcul du taux d'erreur
51 c
52     pe=eb(1)*c(1)
53     do 70 i=2,ml
54     70 pe=pe+2.*c(i)*eb(i)
55 c
56     return
57     80 pe=0.5*erfc(hC/(sig*sqrt(2.)))
58     return
59     end

```

```

1 c calcul du taux d'erreur en presence d'interference
2 c      entre symboles
3 c      modulation d'amplitude a quatre niveaux
4 c
5      subroutine tcd4(hC,h,l,sig,pe)
6      common /c1/pi
7      common /c2/nm,al
8      real h(1),al(1),er(17),c(17),eb(17)
9      complex ce,cee
10 c
11      m=8
12      ml=m+1
13      nml=nm+1
14      pim=pi/nm
15 c
16      r=0.
17      do 20 i=1,1
18      20 r=r+abs(h(i))
19      r=3.*r
20      if((r/sig).lt.1.e-5) go to 80
21 c
22 c echantillonage de la densite cumulee du bruit
23 c
24      sig2=sig*sqrt(2.)
25      er(1)=0.5*erfc(hC/sig2)
26      do 30 i=2,nml
27      30 er(i)=0.25*(erfc((hC+(i-1)*r/nm)/sig2)+erfc((hC-(i-1)*r/nm)/sig2))
28 c
29 c transformation en cosinus discrete
30 c
31      k=l
32      do 40 i=1,ml
33      c(i)=0.
34      do 40 j=1,nml
35      k=k+1
36      40 c(i)=c(i)+al(k)*er(j)
37 c
38 c calcul d'echantillons de la fonction caracteristique
39 c
40      do 60 i=1,ml
41      60 eb(i)=1.
42      do 65 i=1,1
43      ph=pi*h(i)/r
44      ce=cplx(cos(ph),sin(ph))
45      ce=cee
46      eb(2)=eb(2)*(real(cee)+real(cee*cee*cee))/2.
47      do 65 j=3,ml
48      ce=cee*ce
49      65 eb(j)=eb(j)*(real(cee)+real(cee*cee*cee))/2.
50 c
51 c calcul du taux d'erreur
52 c
53      pe=1.5*eb(1)*c(1)
54      do 70 i=2,ml
55      70 pe=pe+3.*c(i)*eb(i)
56 c
57      return
58      80 pe=0.75*erfc(hC/(sig*sqrt(2.)))
59      return
60      end

```

```

1  c calcul du taux d'erreur en présence d'interference
2  c          entre symboles
3  c          modulation de phase
4  c          coefficients de l'interference reels
5  c
6      subroutine todpskr(hC,h,1,n1,sig,pe)
7      real hC,h(1),al(1),er(17),c(17),eb(17),ph(2)
8      complex hh(30),cc(8),cee(8),epsi,enl,aal
9      common /c1/pi
10     common /c2/nm,al
11  c
12     m=8
13     ml=m+1
14     nml=nm+1
15     nl2=nl/2
16  c
17     psi=pi/nl
18     epsi=cplx(sin(psi),cos(psi))
19     r=C.
20     hhC=real(hC*epsi)
21     do 10 i=1,1
22     hh(i)=h(i)*epsi
23 10  r=r+abs(h(i))
24     r=r*cos(psi)
25     if((r/sig).lt.1.e-5) go to 80
26  c
27     sig2=sig*sqrt(2.)
28     er(1)=0.5*erfc(hhC/sig2)
29     do 30 i=2,nml
30 30  er(i)=0.25*(erfc((hhC+(i-1)*r/nm)/sig2)+erfc((hhC-(i-1)*r/nm)/sig2
31     &))
32  c
33     k=C
34     do 40 i=1,ml
35     c(i)=C.
36     do 40 j=1,nml
37     k=k+1
38 40  c(i)=c(i)+al(k)*er(j)
39  c
40     do 60 i=1,ml
41 60  eb(i)=1.
42     enl=cplx(cos(2.*psi),sin(2.*psi))
43     do 65 i=1,1
44     aal=pi*hh(i)/r
45     ph(1)=real(aal)
46     do 66 k=2,nl2
47     aal=aal*enl
48 66  ph(k)=real(aal)
49  c
50     s=C.
51     do 67 k=1,nl2
52     cc(k)=cplx(cos(ph(k)),sin(ph(k)))
53     cee(k)=cc(k)
54 67  s=s+real(cee(k))
55     eb(2)=eb(2)*s/nl2
56  c

```

```
57      do 65 j=3,m1
58      s=0.
59      do 68 k=1,n12
60      cee(k)=cee(k)*ce(k)
61      68 s=s+real(cee(k))
62      65 eb(j)=cb(j)*s/n12
63  c
64      pe=2.*eb(1)*c(1)
65      do 70 i=2,m1
66      70 pe=pe+4.*c(i)*eb(i)
67  c
68      return
69      80 pe=erfc(hh0/sig2)
70      return
71      end
```

```
1 c calcul du taux d'erreur en presence d'interference
2 c     entre symboles
3 c     modulation de phase
4 c
5     subroutine tcdpsk(hC,h,l,nl,sig,pe)
6     complex hC,h(l),epsi
7     common /cl/pi
8 c
9     psi=pi/nl
10    r=0.
11    do 10 i=1,l
12    10 r=r+cabs(h(i))
13 c
14    epsi=cplx(sin(psi),cos(psi))
15    call cpe(hC,h,l,nl,sig,epsi,r,p1)
16    epsi=conjg(epsi)
17    call cpe(hC,h,l,nl,sig,epsi,r,p2)
18    pe=p1+p2
19    return
20    end
```

```

1      subroutine cpe(hC,h,l,nl,sig,epsi,r,pe)
2      real a1(1),er(17),c(17),cb(17),ph(8)
3      complex hC,h(1),hh(3C),ce(8),cee(8),cpsl,enl,aal
4      common /c1/pi
5      common /c2/nm,a1
6      c
7      if((r/sig).lt.1.e-5) go to 8C
8      m=0
9      ml=m+1
10     nml=nm+1
11     nl2=nl/2
12     psi=pi/nl
13     c
14     hhC=real(hC*epsi)
15     do 2C i=1,l
16     2C hh(i)=h(i)*epsi
17     c
18     sig2=sig*sqrt(2.)
19     er(1)=0.5*erfc(hhC/sig2)
20     do 3C i=2,nml
21     3C er(i)=0.25*(erfc((hhC+(i-1)*r/nm)/sig2)+erfc((hhC-(i-1)*r/nm)/sig2
22     &))
23     c
24     k=0
25     do 4C i=1,ml
26     c(i)=0.
27     do 4C j=1,nml
28     k=k+1
29     4C c(i)=c(i)+a1(k)*er(j)
30     c
31     do 6C i=1,ml
32     6C eb(i)=1.
33     enl=cplx(cos(2.*psi),sin(2.*psi))
34     do 65 i=1,l
35     aal=pi*hh(i)/r
36     ph(1)=real(aal)
37     do 66 k=2,nl2
38     aal=aal*enl
39     66 ph(k)=real(aal)
40     c
41     s=0.
42     do 67 k=1,nl2
43     ce(k)=cplx(cos(ph(k)),sin(ph(k)))
44     cee(k)=ce(k)
45     67 s=s+real(cee(k))
46     eb(2)=eb(2)*s/nl2
47     c
48     do 65 j=3,ml
49     s=0.
50     do 68 k=1,nl2
51     cee(k)=cee(k)*ce(k)
52     68 s=s+real(cee(k))
53     65 eb(j)=eb(j)*s/nl2
54     c

```

```
55     pe=eb(1)*c(1)
56     do 70 i=2,m1
57       70 pe=pe+2.*c(i)*eb(i)
58   c
59     return
60     80 pe=0.5*erfc(hhC/sig2)
61     return
62     end
```

VII.3 - Exemple d'application

Le filtre équivalent en bande base est un filtre en cosinus surélevé. La modulation est une modulation d'amplitude binaire. Le rapport signal à bruit vaut 16 dB. Le retard de l'instant d'échantillonnage vaut $0.05 T$.

La probabilité d'erreur est calculée :

1) pour une largeur de bande en excès quasi-nulle. Le filtre est alors un passe bande idéal ($\text{ALPHA} = 1$).

2) pour une largeur de bande en excès de 50% ($\text{ALPHA} = 1.5$).

```

1  c programme principal: exemple d'application
2  c
3  c modulation d'amplitude binaire
4  c filtre en cosinus surélevé
5  c bande en excès C% puis 5C%
6  c rapport signal a bruit 16 dB
7  c
8  c
9      real hC,h(2C)
10     complex f
11     real a1(289)
12     common /c1/pi
13     common /c2/nm,a1
14     common /c3/alpha,q
15     external f
16     pi=4.*atan(1.)
17     nm=0
18     call eal(nm,a1)
19     l=1C
20     q=C.05
21  c
22     alpha=1.000001
23     call incr(hC,h,l,f)
24     sig=hC*1C**(-16./2C.)
25     call tcd2(hC,h,l,sig,pe)
26     print ,"pe=",pe
27  c
28     alpha=1.5
29     call incr(hC,h,l,f)
30     call tcd2(hC,h,l,sig,pe)
31     print ,"pe=",pe
32  c
33     stop
34     end
35  c
36     complex function f(x)
37     complex fcos,delay
38     common /c3/alpha,q
39     f=fcos(x,alpha)*delay(x,q)
40     return
41     end
42  c
43     complex function fcos(x,alpha)
44     common /c1/pi
45     ax=abs(x)
46     fcos=cplx(1.,C.)
47     if(abs(ax-1).le.(alpha-1.)) fcos=cplx(C.5*(1.-sin((ax-1.)*pi/(2.*
48     &(alpha-1.))),C.)
49     if(ax.gt.alpha) fcos=cplx(C.,C.)
50     return
51     end
52  c
53     complex function delay(x,q)
54     common /c1/pi
55     delay=cplx(cos(pi*x*q),sin(pi*x*q))
56     return
57     end

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. JOINDOT, "Synthèse bibliographique sur les méthodes de calcul de la probabilité d'erreur en présence d'interférence entre symboles dans un système de transmission numérique". Note Technique C.N.E.T. NT/ETN/S, Mai 1979.
- [2] E.Y. HO and Y.S. YEH, "A new approach for evaluating the error probability in the presence of intersymbol interference and additive noise", Bell Syst. Tech. J., Vol. 49, n° 9, pp. 2249-2265, 1970.
- [3] E.Y. HO and Y.S. YEH, "Error probability of a multilevel digital system with intersymbol interference and Gaussian noise", Bell Syst. Tech. J., vol. 50, pp. 1017-1023, Mar. 1971.
- [4] O. SHIMBO and M.I. CELEBILER, "The probability of error due to intersymbol interference and Gaussian noise in digital communication systems", IEEE Trans. on Commun., Vol. COM-19, pp. 113-120, 1971.
- [5] O. SHIMBO, R.J. FANG and M. CELEBILER, "Performance of M-ary PSK systems in Gaussian noise and intersymbol interference", IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol., IT-19, pp.44-58, 1973.
- [6] V.K. PRABHU, "Error probability performance of M-ary CPSK systems, with intersymbol interference", IEEE Trans. on Commun., Vol. COM-21, pp. 97-109, 1973.
- [7] S. BENEDETTO, G. DE VINCENTIIS and A. LUVISON, "Error probability in the presence of intersymbol interference and additive noise for multilevel digital signals", IEEE Trans on Commun., Vol. COM-21, pp. 181-188, 1973.
- [8] A. LUVISON, "Interpolatory quadrature rules and error rate of digital communication systems". Electronics Letters Jan. 1980, Vol., 16, pp. 16-17.

- [9] J.V. MURPHY, "Binary error rate caused by intersymbol interference and Gaussian noise". IEEE Trans. on Commun. Sept. 1973, pp. 1039-1046.
- [10] R.J.S. BATES, "Methods of calculating the error rate of digital transmission systems". IEE Conference Proceeding, 1981.
- [11] R.D. PREUSS, "Very fast computation of the radix-2 discrete Fourier transform". IEEE Trans. on ASSP, Vol. 30, Aug. 1982, pp. 595-607.
- [12] M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN, "Handbook of mathematical functions". Dover Publications, New York, 1964.
- [13] C. KLAPISZ, B. NUTTEN et M. SYLVAIN, "Description du projet PACEM d'étude de propagation en air clair". Note technique CRPE/111, février 1982.