



**HAL**  
open science

## Extension du modèle à deux rayons normalisé à une liaison en diversité d'espace

M. Sylvain

► **To cite this version:**

M. Sylvain. Extension du modèle à deux rayons normalisé à une liaison en diversité d'espace. [Rapport de recherche] Centre de recherches en physique de l'environnement terrestre et planétaire (CRPE). 1992, 42 p. hal-02191650

**HAL Id: hal-02191650**

**<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02191650>**

Submitted on 23 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RP 11639

**CENTRE NATIONAL D'ETUDES  
DES TELECOMMUNICATIONS**

**CENTRE NATIONAL DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**CENTRE DE  
RECHERCHES  
EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT  
TERRESTRE  
ET PLANETAIRE**

**CRPE**

**NOTE TECHNIQUE  
CRPE/194**

INGE  
TEL

**EXTENSION DU MODELE  
A DEUX RAYONS NORMALISE  
A UNE LIAISON EN DIVERSITE D'ESPACE**

Par  
**M. SYLVAIN**



**RPE/ETP  
38-40, rue du Général Leclerc  
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX, FRANCE**

G 100701

CENTRE NATIONAL D'ETUDES  
DES TELECOMMUNICATIONS  
Centre Paris B

CENTRE NATIONAL DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
Département SDU

**CENTRE DE RECHERCHES EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT TERRESTRE ET PLANETAIRE**

NOTE TECHNIQUE CRPE/194  
mars 1992

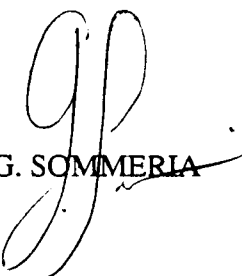
**EXTENSION DU MODELE A DEUX RAYONS NORMALISE  
A UNE LIAISON EN DIVERSITE D'ESPACE**

par

**M. SYLVAIN**

CRPE, 38-40 rue du Général Leclerc, 92131 ISSY LES MOULINEAUX

Le Directeur

  
G. SOMMERIA

Le Chef de Département

  
J.C. Bric

## EXTENSION DU MODELE A DEUX RAYONS NORMALISE A UNE LIAISON EN DIVERSITE D'ESPACE

### 1 - INTRODUCTION

La majorité des travaux récents de modélisation d'un canal hertzien en présence de trajets multiples, travaux ayant pour but de mettre au point une méthode de prévision de la qualité de la liaison, utilisent une description statistique de la fonction de transfert du canal atmosphérique associée aux courbes de signature du système de transmission utilisé (Rummler, Coutts et Liniger, 1988). L'efficacité de cette démarche résulte de ce que la fonction de transfert du canal atmosphérique peut être correctement représentée sur la largeur de bande utile (quelques dizaines de MHz) par des modèles mathématiques à trois paramètres (modèles de représentation). La plus ou moins grande sélectivité d'une liaison est alors représentée par la distribution de probabilité conjointe des paramètres de ce modèle de représentation, distribution de probabilité qui peut également faire l'objet d'une représentation mathématique dépendant des valeurs d'un nombre réduit de paramètres que nous appellerons "coefficients statistiques" (Lavergnat et Sylvain, 1985). Lorsqu'on a fait choix d'un critère de qualité de la transmission, les situations pour lesquelles ce critère n'est pas vérifié, et qui constituent le domaine de coupure de la liaison, sont représentées par les points d'un volume dans l'espace tridimensionnel des paramètres du modèle de représentation, volume dont la surface constitue la signature de l'équipement dans le modèle considéré (Lévy et Sylvain, 1989). Quant à la méthode de prévision, elle est établie dès lors que l'on sait relier la valeur des coefficients statistiques aux caractéristiques pertinentes du bond hertzien considéré.

Les techniques de diversité (par exemple diversité d'espace ou de fréquence) constituent un moyen très utilisé de lutte contre les effets néfastes des trajets multiples (Chamberlain et al., 1988). Il s'agit dans le principe de transmettre la même information par deux canaux partiellement décorrélés dont on espère qu'ils ne seront pas gravement affectés simultanément. Etendre à ce cas la méthode de modélisation d'un canal simple décrite précédemment ne pose pas de difficultés de principe : on représente les deux voies en diversité par le même modèle de représentation, ce qui donne donc un modèle mathématique à six paramètres, et on cherche à établir la loi de probabilité conjointe de ces six paramètres. Encore faut-il, pour que la démarche puisse être appliquée pratiquement, que le nombre des coefficients statistiques reste assez petit.

La présente note a pour but de discuter les problèmes que pose cette extension du modèle statistique de propagation à un canal en diversité. Nous nous placerons dans le cadre d'un modèle particulier de représentation, le modèle à deux rayons normalisé, modèle qui nous a servi dans le développement d'une méthode de prévision de la qualité sur une liaison sans diversité, et qui semble a priori présenter quelques chances de succès dans la mesure où il réduit le problème à la détermination d'une loi de probabilité double dont les lois marginales sont connues (Lavergnat, Sylvain et Bic, 1990). Après quelques rappels sur le modèle à deux rayons normalisé (Section 2), et une présentation plus précise du problème à résoudre (section 3), nous discutons des possibilités théoriques de le résoudre (Sections 4 et 5). L'applicabilité de ces méthodes à notre problème particulier est alors testée en les appliquant aux données de l'expérience Pacem 2, pour laquelle nous

disposons de quatre ans de mesure de fonctions de transfert sur une liaison en diversité d'espace (Section 6). Les résultats de cette expérience sont décrits dans Ghahremani (1990).

## 2 - LE MODELE A DEUX RAYONS NORMALISE

Le modèle à deux rayons normalisé représente la fonction de transfert du canal atmosphérique sur la bande de fréquence utile par la formule

$$H(f) = 1 - b \exp [i(2\pi f\tau + \varphi)] \quad (1)$$

formule dans laquelle  $f$  est la fréquence mesurée à partir de la fréquence centrale. Les trois paramètres de ce modèle sont  $b$ ,  $\tau$  et  $\varphi$ .

Dans ce modèle à deux rayons, la courbe de gain (module de la fonction de transfert complexe) est une sinusoïde donnée par (2)

$$G(f) = 1 + b^2 - 2b \cos (2\pi f\tau + \varphi) \quad (2)$$

Le paramètre  $b$  traduit l'atténuation dans la bande utile (parfois qualifiée de façon ambiguë d'atténuation apériodique),  $\varphi$  indique la position en fréquence du creux d'atténuation, et c'est  $\tau$  qui représente véritablement la forme de la fonction de transfert, c'est à dire la sélectivité en fréquence du canal.

Les propriétés du canal atmosphérique en ce qui concerne la propagation sont décrites statistiquement par la probabilité conjointe  $\Pr (b, \tau, \varphi)$ . En pratique, le modèle statistique de propagation ne vise pas à représenter toutes les situations mais uniquement les périodes de trajets multiples. Nous avons sélectionné celles-ci, un peu arbitrairement, par un critère de sélection ( $C$ ) portant sur l'atténuation, et qui consiste en ce que celle-ci dépasse un certain seuil  $S$  (fixé à 10 dB) en au moins une partie de la bande de fréquence. La loi de probabilité observée est donc en fait une probabilité conditionnelle  $\Pr (b, \tau, \varphi | C)$ . Pour la représenter mathématiquement, on la met sous la forme

$$\Pr (b, \tau, \varphi | C) = f(b, \tau, \varphi) I(b, \tau, \varphi; C) \quad (3)$$

$f$  présentant les propriétés mathématiques d'une densité de probabilité et  $I$  étant une fonction indicatrice sur l'espace des paramètres  $(b, \tau, \varphi)$  qui vaut 1 ou 0 suivant que le critère  $C$  est ou non satisfait.

Une propriété du modèle à deux rayons normalisé qui rend son emploi particulièrement commode est la possibilité de décrire statistiquement les paramètres, via la fonction  $f$ , comme s'ils étaient indépendants. On a ainsi :

$$f(b, \tau, \varphi) = f_b(b) f_\tau(\tau) f_\varphi(\varphi) \quad (4)$$

A partir, tant de considérations théoriques que de l'analyse des mesures disponibles sur quelques liaisons expérimentales, on a été conduit à choisir les formulations suivantes :

- $\varphi$  uniformément réparti sur  $[-\pi ; \pi]$
- $b$  défini sur l'intervalle  $[b_{\min} ; 1]$  avec  $f_b$  constitué de deux quarts d'ellipse se raccordant, et  $b_{\min}$  dépendant du seuil  $S$  par  $b_{\min} = 1 - 10^{-S/20}$ .
- $\tau$  réparti sur  $[0 ; +\infty]$  avec une distribution gamma, c'est à dire telle que

$$f_{\tau}(\tau) = \frac{\mu^{\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\mu\tau} \tau^{\nu-1} \quad \tau \geq 0 \quad (5)$$

On admet de plus que la distribution de  $b$  est indépendante du bond considéré. Dans ces conditions, la sélectivité d'un bond découle des valeurs des coefficients  $\mu$  et  $\nu$  de la distribution de  $\tau$ , qui sont pour ce modèle les coefficients statistiques dont il a été question plus haut de manière générale.

### 3 - POSITION DU PROBLEME

Le problème que nous nous posons est celui de l'extension du modèle de propagation à deux rayons normalisé à une liaison en diversité d'espace (la problématique serait identique pour une liaison en diversité de fréquence). Il s'agit donc de modéliser simultanément les fonctions de transfert correspondant aux deux voies de réception. Nous décrivons bien entendu chaque voie par un modèle à deux rayons normalisé, notant respectivement  $(b_1, \tau_1, \varphi_1)$  et  $(b_2, \tau_2, \varphi_2)$  leurs paramètres de représentation.

La question principale est alors d'obtenir une formulation mathématique adéquate de la loi de probabilité conjointe  $\Pr(b_1, \tau_1, \varphi_1, b_2, \tau_2, \varphi_2)$ , celle-ci devant de toute nécessité redonner les probabilités des canaux simples comme lois marginales. Le problème de la sélection des fonctions de transfert à modéliser se pose comme pour un canal simple. On va donc généraliser la relation (3) sous la forme

$$\Pr(b_1, \tau_1, \varphi_1, b_2, \tau_2, \varphi_2 | C_{12}) = f_{12}(b_1, \tau_1, \varphi_1, b_2, \tau_2, \varphi_2) I_{12}(b_1, \tau_1, \varphi_1, b_2, \tau_2, \varphi_2 ; C_{12}) \quad (6)$$

le critère étant cette fois-ci que le seuil d'atténuation soit dépassé simultanément sur les deux voies (trajets multiples sur les deux voies), soit  $C_{12} = C_1 \cap C_2$ . Un autre critère de sélection envisageable serait la présence de trajets multiples sur au moins l'une des voies ( $C_{12} = C_1 \cup C_2$ ). Nous préférons le premier critère pour deux raisons : d'une part, on peut admettre que si l'une des deux voies reçoit un signal peu perturbé, le dispositif de diversité doit assurer une transmission correcte ; d'autre part, lorsque le critère du canal simple n'est vérifié que sur l'une des deux voies, le modèle statistique du canal simple n'est a priori pas applicable tel quel à l'autre voie.

Le critère de sélection une fois choisi, il ne reste plus qu'à préciser la forme de la distribution double  $f_{12}$ . Nous pouvons la simplifier en éliminant a priori certaines dépendances statistiques. En

effet, chacun des paramètres du modèle pouvant être traité comme statistiquement indépendant des deux autres paramètres relatifs à la même voie, il est raisonnable de le considérer comme également indépendant des autres paramètres de l'autre voie. De plus,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , qui représentent les fréquences des creux sur les deux voies, sont très sensibles aux caractéristiques à petite échelle du milieu de propagation et on s'attend en conséquence à ce qu'ils soient également indépendants l'un de l'autre. Il reste alors simplement :

$$f_{12}(b_1, \tau_1, \varphi_1, b_2, \tau_2, \varphi_2) = f_\varphi(\varphi_1) f_\varphi(\varphi_2) g_{12}(b_1, b_2) h_{12}(\tau_1, \tau_2) \quad (7)$$

On est ainsi conduit, tant en ce qui concerne le couple  $(b_1, b_2)$  que le couple  $(\tau_1, \tau_2)$  à établir une loi de probabilité double satisfaisant à des lois marginales données. Le cas le plus simple est celui où les deux variables peuvent être considérées comme statistiquement indépendantes : la distribution double est alors simplement le produit des distributions marginales. Dans le cas général où les deux variables sont corrélées, la connaissance des lois marginales ne suffit évidemment pas à déterminer la forme de la distribution double. Comme nous voulons représenter la distribution double par une expression mathématique suffisamment simple pour qu'on puisse l'incorporer dans une méthode de prévision de la qualité des liaisons, nous cherchons à imposer la contrainte supplémentaire que la dépendance statistique entre les deux variables n'introduise qu'un seul coefficient statistique nouveau en plus de ceux des lois marginales, coefficient qui doit bien entendu traduire la plus ou moins grande corrélation existant entre les deux variables. Malgré tous les travaux des statisticiens, le problème ainsi posé ne comporte pas de solution systématique mais seulement quelques solutions particulières (Mardia, 1970). Au surplus, il n'est pas a priori assuré que le problème ait une solution satisfaisante, c'est à dire que la dépendance entre les variables puisse être correctement prise en compte à l'aide d'un seul paramètre.

La seule stratégie possible ne peut donc être qu'empirique : choisir une des solutions particulières connues conduisant à une loi de probabilité double ayant les bonnes lois marginales et dépendant d'un paramètre supplémentaire ; estimer la valeur de ce paramètre à partir d'un histogramme expérimental ; vérifier par tirage d'un échantillon aléatoire à partir de la distribution ainsi obtenue qu'elle représente correctement la distribution expérimentale de départ.

Nous considérons tout d'abord en détail la modélisation de la probabilité conjointe de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  (sections 4 et 5). Celle de  $b_1$  et  $b_2$  est ensuite examinée rapidement au § 5-8.

#### 4 - RECOURS A UNE DISTRIBUTION GAMMA DOUBLE.

Dans cette section, nous notons  $x$  et  $y$  les deux variables aléatoires dont on cherche la densité de probabilité conjointe (qui sont en fait les paramètres de représentation  $\tau_1$  et  $\tau_2$  du modèle de propagation),  $f(x)$  et  $g(y)$  leurs densités de probabilité et  $h(x,y)$  la densité de probabilité double. Plusieurs auteurs ont proposé des fonctions  $h(x,y)$  exprimables analytiquement et dont les lois marginales sont des lois gammas (cf Mardia, 1970).

#### 4-1 Loi proposée par Wicksell et Kibble.

La première distribution gamma double bidimensionnelle, due à Wicksell (1933) et Kibble (1941) a pour expression

$$h_1(x,y) = \frac{C^{-(v-1)/2}}{\Gamma(v) (1-C)} (xy)^{(v-1)/2} \exp\left(-\frac{x+y}{1-C}\right) I_{v-1}\left(\frac{2\sqrt{Cxy}}{1-C}\right) \quad (8)$$

expression dans laquelle C est le coefficient de corrélation entre les deux variables.

La distribution (8), que nous avons utilisée dans un précédent article (Lavergnat, Sylvain et Bic, 1990) où nous considérons d'un point de vue essentiellement méthodologique la construction d'un modèle de propagation pour un canal en diversité, présente cependant une limitation très contraignante en ce qu'elle suppose que les deux lois marginales sont identiques. Si l'on peut toujours rendre égaux les coefficients  $\mu$  par un changement de variable, en mettant la loi gamma sous sa forme réduite (cf. Annexe A), on ne peut rendre égaux les coefficients  $v$  s'ils ne le sont pas pour les variables initiales. Or les données expérimentales dont nous disposons (cf section 6 infra) présentent des distributions marginales dont les deux coefficients diffèrent. La formule (8) n'est donc pas adaptée à leur modélisation.

#### 4-2 Loi de probabilité proposée par Mc Kay.

On a cette fois-ci

$$h_2(x,y) = \frac{\mu^{v_1+v_2}}{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2)} x^{v_1-1} (y-x)^{v_2-1} e^{-\mu y} \quad (9)$$

La loi marginale de x est une loi gamma de paramètres  $\mu$  et  $v_1$  et celle de y une loi gamma de paramètres  $\mu$  et  $(v_1 + v_2)$ . Quant au coefficient de corrélation, il vaut  $r = [v_1/(v_1+v_2)]^{1/2}$ .

La loi double  $h_2$ , bien qu'elle s'accommode de distributions marginales de paramètres  $v$  différents, ne convient pas non plus à notre problème. Elle n'est en effet définie que pour  $y > x$ , ce qui est une restriction inacceptable. De plus, avec cette loi, des variables indépendantes imposent  $v_1 = 0$ , c'est à dire une forme très particulière pour la distribution marginale de x.

#### 4-3 Loi de probabilité proposée par Cherian.

Une troisième loi de probabilité gamma double a été proposée par Cherian (1941). Son expression analytique est

$$h_3(x,y) = \frac{e^{-(x+y)}}{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2) \Gamma(v_3)} \int_0^{\min(x,y)} z^{v_3-1} (x-z)^{v_1-1} (y-z)^{v_2-1} e^{-z} dz \quad (10)$$

Il est très difficile d'étudier les propriétés de cette distribution à partir de l'expression (10).



Elle se déduisent en revanche très simplement de sa construction à partir de trois variables aléatoires indépendantes suivant des lois gamma réduites (Annexe B). On vérifie ainsi que  $f(x)$  et  $g(y)$  sont deux lois gamma réduites de paramètres  $\nu_1 + \nu_3$  et  $\nu_2 + \nu_3$  et que le coefficient de corrélation de  $x$  et  $y$  est donné par  $\rho(x,y) = \nu_3 / [(\nu_1 + \nu_3)(\nu_2 + \nu_3)]^{1/2}$ .

La distribution  $h_3$  permet donc bien de représenter une distribution double à lois marginales gamma différentes. Elle comporte une restriction, déjà présente dans les deux distributions  $h_1$  et  $h_2$ , à savoir que le coefficient de corrélation doit être positif (ou nul) mais cela n'est pas gênant dans notre cas.

#### 4-4 Emploi de la distribution $h_3$ .

La modélisation de la distribution double des retards  $h_{12}(\tau_1, \tau_2)$  à l'aide de la fonction  $h_3$  en estimant les paramètres  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_3$  par la méthode des moments (annexe B4) est alors immédiate.

On commence par ajuster des lois gamma simples, de paramètres  $m_1, n_1$  et  $m_2, n_2$ , aux deux lois marginales que nous noterons, en désignant par  $G(\cdot)$  une distribution gamma,

$$f(\tau_1) = G(\tau_1 ; m_1, n_1) \quad g(\tau_2) = G(\tau_2 ; m_2, n_2) \quad (11)$$

Les variables réduites sont alors (cf Annexe A2)

$$t_1 = m_1 \tau_1 \quad t_2 = m_2 \tau_2 \quad (12)$$

et les trois paramètres définissant  $h_3(t_1, t_2)$  sont solutions du système (cf Annexe B) :

$$\nu_1^* + \nu_3^* = n_1 \quad (13a)$$

$$\nu_2^* + \nu_3^* = n_2 \quad (13b)$$

$$\nu_3^* = (n_1 n_2)^{1/2} r_{12} \quad (13c)$$

où  $r_{12}$  est le coefficient de corrélation expérimental de  $t_1$  et  $t_2$ , qui est évidemment le même que celui de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

Le système (13) une fois résolu, on dispose d'une estimation de la densité de probabilité double. Encore faut-il vérifier que cette distribution approxime bien la distribution double expérimentale. La façon de faire la plus directe consiste à tirer au sort un histogramme double simulé à partir de la loi estimée, et à évaluer sa "distance" à l'histogramme expérimental. Le tirage au sort est immédiat puisqu'on obtient chaque couple de la distribution simulée à partir de trois tirages selon trois lois gamma simples réduites de paramètres  $\nu_1^*$ ,  $\nu_2^*$  et  $\nu_3^*$ . Les histogrammes bidimensionnels estimé et expérimental sont en fait des histogrammes discrets, les domaines de variation des deux variables  $\tau_1$  et  $\tau_2$  étant découpés en classes d'indices respectifs  $i$  (de 1 à  $N_1$ ) et  $j$  (de 1 à  $N_2$ ), et nous utilisons comme distance la distance absolue entre les deux distributions, c'est à dire la somme des valeurs absolues des écarts de probabilité entre les deux distributions, somme portant sur les  $N = N_1 \cdot N_2$  classes de l'histogramme bidimensionnel, soit :



$$S = \sum_{i,j} |P_{ij} - P_{ij}^*| \quad (14)$$

où  $P_{ij}$  et  $P_{ij}^*$  sont respectivement les probabilités mesurée et estimée sur la classe  $(i,j)$  de l'histogramme.

Cette distance présente le double avantage de se calculer très simplement, et d'avoir une valeur comprise, indépendamment du découpage en classes choisi, entre les valeurs fixes 0 (pour des histogrammes identiques) et 2 (pour des histogrammes à supports disjoints).

## 5 - DISTRIBUTION DOUBLE A COEFFICIENT D'ASSOCIATION

### 5-1 Généralités.

La méthode décrite au § 4 utilise explicitement le fait que les lois marginales de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont des lois gamma. Une autre méthode d'obtention d'une loi de probabilité double possédant des lois marginales données et ne comportant qu'un seul coefficient pour traduire la dépendance statistique entre les deux variables découle des travaux de Fréchet (1951) et Plackett (1965). Cette méthode, qui peut s'appliquer quelles que soient les probabilités marginales, utilise les probabilités cumulées. Nous nous limiterons, ce qui est suffisant pour notre problème, au cas où les lois de probabilité marginales et conjointe admettent des densités de probabilité  $f(x)$ ,  $g(y)$  et  $h(x,y)$ , et où les variables aléatoires  $x$  et  $y$  sont à valeurs positives. On peut alors écrire les probabilités cumulées, ou fonctions de répartition,

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt \quad (15a)$$

$$G(y) = \Pr(Y \leq y) = \int_0^y g(t) dt \quad (15b)$$

$$H(x,y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^x \int_0^y h(u,v) du dv \quad (15c)$$

Comme nous le verrons, cette méthode permet d'obtenir  $H(x,y)$  algébriquement pour tout couple de valeurs  $(x,y)$  mais ne fournit pas d'expression analytique de la loi de probabilité obtenue.

### 5-2 Position du problème.

Pour qu'une fonction de deux variables  $H(x,y)$  puisse être considérée comme une fonction de probabilité conjointe, elle doit vérifier un certain nombre de propriétés.

- (A)  $H(x,y)$  doit être à valeurs positives comprises entre 0 et 1.
- (B)  $H(x,y)$  doit être une fonction strictement non décroissante vis à vis de  $x$  et de  $y$ .
- (C) On doit avoir  $H(0,0) = 0$  et  $H(\infty,\infty) = 1$

Nous voulons de plus que les lois marginales soient  $F(x)$  et  $G(y)$ , c'est à dire que

- (D)  $H(x,\infty) = F(x)$

$$(E) H(\infty, y) = G(y)$$

En fait, la probabilité conjointe est liée aux probabilités marginales par deux inégalités, appelées inégalités de Fréchet, qui s'écrivent (Annexe C)

$$H_0(x, y) \leq H(x, y) \leq H_1(x, y) \quad (16)$$

relation où l'on a posé

$$H_0(x, y) = \text{Max} \{0, F(x) + G(y) - 1\} \quad (17a)$$

$$H_1(x, y) = \text{Min}\{F(x), G(y)\} \quad (17b)$$

Si la fonction  $H$  vérifie les inégalités de Fréchet, elle satisfait du même coup aux conditions (D) et (E). En effet, on obtient lorsque  $x \rightarrow \infty$ ,  $H_0(x, y) \rightarrow \text{Max}\{0, G(y)\} = G(y)$  et  $H_1(x, y) \rightarrow \text{Min}\{1, G(y)\} = G(y)$ , d'où il résulte que l'on a bien  $H(\infty, y) = G(y)$ . On démontre de manière identique que  $H(x, \infty) = F(x)$ . Elle vérifie aussi de manière évidente la condition (A) et elle vérifie enfin la condition (C), comme on le voit en faisant  $x = y = 0$  et  $x = y = +\infty$  dans les inégalités de Fréchet.

En conclusion de cette discussion, une fonction  $H(x, y)$  sera solution du problème posé si elle vérifie les conditions (A) à (E) ou la condition (B) et les inégalités (16).

### 5-3 Fonctions de Fréchet.

Fréchet a introduit la famille de fonctions de probabilité dépendant d'un paramètre  $\lambda$ , variant entre 0 et 1, définie par

$$H(x, y) = \lambda H_0(x, y) + (1 - \lambda) H_1(x, y) \quad (18)$$

Ces fonctions sont évidemment positives, vérifient les inégalités de Fréchet et les propriétés (A) à (C). On a donc bien une solution du problème.

L'inconvénient majeur de la famille (18), inconvénient rédhibitoire ici, est qu'elle ne comprend pas comme l'un de ses membres la fonction  $F(x) G(y)$ . On ne peut donc pas représenter de cette façon les situations où les deux variables aléatoires sont statistiquement indépendantes, situation que l'on s'attend à rencontrer dans certains cas, par exemple en diversité d'espace dans le cas d'antennes très éloignées.

### 5-4 Fonctions de Plackett.

Plackett (1965) a introduit une autre famille de fonctions de répartition doubles, dépendant d'un paramètre  $\psi$  positif et définie par

$$\psi = \frac{H(1 - F - G + H)}{(F - H)(G - H)} \quad (19)$$

L'équation (19) s'appuie en fait sur la définition du coefficient d'association entre deux

variables aléatoires. Ce coefficient est d'abord défini pour deux variables ayant chacune deux états possibles ; on peut en étendre la définition à une distribution double en découpant celle-ci à partir d'un point  $(x,y)$  quelconque (Annexe D)

On vérifie (Annexe E) que les fonctions de répartition double  $H(x,y)$  données par (19) satisfont bien à toutes les conditions du problème, vérifiant la condition (B) et les inégalités de Fréchet. Lorsque  $\psi$  varie de 0 à  $+\infty$ ,  $H(x,y)$  varie uniformément de  $H_0$  à  $H_1$ . Enfin, l'indépendance de X et Y est cette fois bien prise en compte et correspond au cas  $\psi = 1$ .

La relation (19), lorsque  $\psi$  est connu, constitue une équation du second degré dont l'inconnue est H. Cette équation s'écrit

$$H^2 (\psi - 1) - H [1 + (F + G) (\psi - 1)] + \psi FG = 0 \quad (20)$$

Mardia (1967) a montré (cf Annexe F) que celle des deux racines de l'équation (20) à prendre en compte, c'est à dire celle qui est effectivement comprise entre  $H_0$  et  $H_1$ , est donnée par

$$H = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4 \psi (\psi - 1) FG}}{2 (\psi - 1)} \quad (21)$$

avec 
$$S = 1 + (\psi - 1) (F + G) \quad (22)$$

Lorsque les lois de probabilité marginales de x et de y admettent des densités de probabilité  $f(x)$  et  $g(y)$ , la probabilité double admet également une densité de probabilité donnée par

$$h(x,y) = \partial^2 H / \partial x \partial y = \partial^2 H / \partial F \partial G \partial F / \partial x \partial G / \partial y = fg \partial^2 H / \partial F \partial G \quad (23)$$

Le calcul, sans difficultés de principe (Annexe G), donne comme résultat final

$$h(x,y) = \frac{\psi fg [1 + (F + G - 2 FG) (\psi - 1)]}{[S^2 - 4 \psi (\psi - 1) FG]^{3/2}} \quad (24)$$

### 5-5 Estimation du coefficient d'association.

Les résultats des sections précédentes montrent que la distribution double de Plackett, solution du problème posé, est parfaitement définie une fois que l'on connaît la valeur du coefficient d'association  $\psi$ . Lorsqu'on veut pratiquement représenter une distribution double expérimentale par une distribution du type précité, il y a donc deux opérations à effectuer :

1°) Modéliser les lois marginales  $F(x)$  et  $G(y)$ .

2°) Déterminer une valeur estimée du coefficient d'association  $\Psi$ .

C'est à cette deuxième étape que nous nous intéressons dans ce paragraphe.

Ayant obtenu une expression de la densité de probabilité double  $h(x,y)$ , on pourrait chercher pour  $\psi$  l'estimateur du maximum de vraisemblance. L'équation obtenue est inextricable dans le cas

général, et ne peut être résolue que numériquement ou de façon approchée. Mardia en donne une valeur approchée, mais valable uniquement lorsque  $\psi$  est proche de 1, c'est à dire lorsque les deux variables aléatoires sont peu associées.

Un estimateur évident et simple à calculer est obtenu à partir de la définition du coefficient d'association (Annexe D). Il suffit de partager le domaine de définition en quatre parties (A), (B), (C) et (D) par deux axes parallèles à Ox et Oy (figure 1). On a alors

$$\Pr(A) = H(x,y) ; \Pr(B) = G(y) - H(x,y) ; \Pr(C) = F(x) - H(x,y)$$

$$\Pr(D) = 1 - [H(x,y) + (G(y) - H(x,y)) + (F(x) - H(x,y))] = 1 - [F(x) + G(y) - H(x,y)]$$

On a alors

$$\psi^* = [\Pr(A) \Pr(D)] / [\Pr(B) \Pr(C)] \quad (25)$$

Comme nous l'indiquons à la fin de l'annexe D, l'estimateur ainsi obtenu dépend des valeurs de x et de y choisies pour partager en quatre le domaine de définition de la loi de probabilité étudiée. Il convient donc de choisir pour ces valeurs celles qui conduisent au "meilleur" estimateur. On cherche en pratique à obtenir, par un choix convenable de x et y, l'estimateur de la famille ayant la plus petite variance.

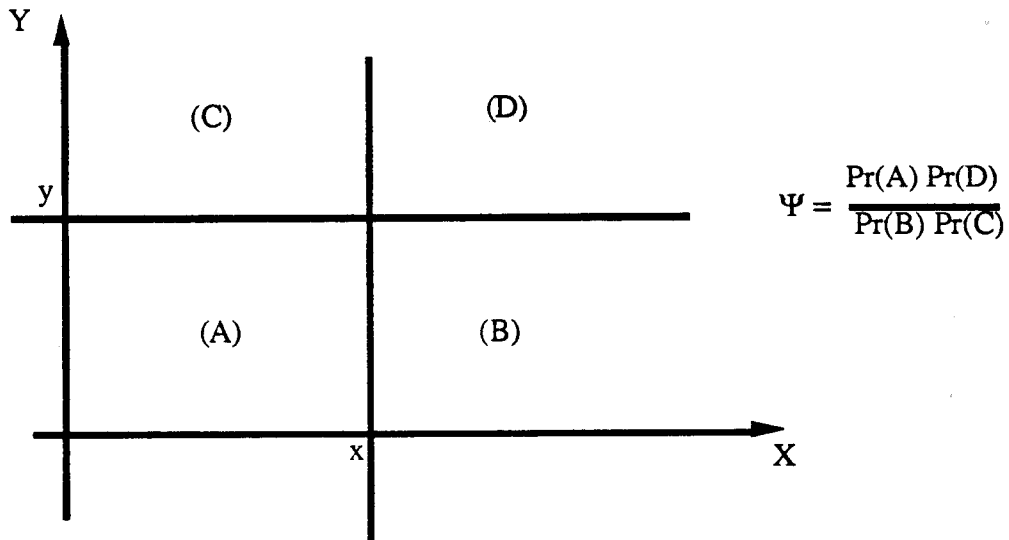


Figure 1

On montre (Annexe H) que la variance de l'estimateur (25) est donnée asymptotiquement (c'est à dire pour un nombre N d'observations tendant vers l'infini) par

$$\text{Var}(\psi^*) \cong \psi^{*2} / N [1/\Pr(A) + 1/\Pr(B) + 1/\Pr(C) + 1/\Pr(D)] \quad (26)$$

et se calcule de façon approchée en remplaçant dans (26) le coefficient d'association et les probabilités (inconnus) par leurs estimations, ce qui conduit à

$$\text{Var}(\psi^*) \cong \frac{\psi^{*2}}{N} \left[ \frac{1}{H(x,y)} + \frac{1}{G(y) - H(x,y)} + \frac{1}{1 - F(x) - G(y) + H(x,y)} + \frac{1}{F(x) - H(x,y)} \right] \quad (27)$$

L'estimateur retenu est donc celui qui correspond au choix de x et y rendant minimum le second membre de (27) c'est à dire la fonction

$$K(F,G) = 1/H + 1/(F-H) + 1/(G-H) + 1/(1-F-G+H) \quad (28)$$

On l'obtient comme solution du système d'équations

$$\partial K/\partial F = 0 \quad \partial K/\partial G = 0 \quad (29)$$

système dont la seule solution acceptable est donnée par (Annexe H)

$$F(x^*) = G(y^*) = 1/2 \quad (30)$$

c'est à dire que la partition du domaine est effectuée en utilisant les médianes  $x^*$  et  $y^*$  des lois marginales.

Bien que l'estimateur du maximum de vraisemblance ne soit en général pas calculable, on peut néanmoins calculer sa variance asymptotique lorsque les deux variables aléatoires sont peu associées ( $\psi$  proche de 1). Comparant avec la variance de  $\psi^*$  calculée dans les mêmes conditions, on observe que l'estimateur  $\Psi^*$  n'est pas très efficace, sa variance étant environ double de celle de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Mardia propose d'utiliser un autre estimateur  $\psi^\perp$ , asymptotiquement efficace lorsque  $\psi$  est peu éloigné de 1. La construction de cet estimateur repose sur le fait qu'on peut dans certains cas relier le coefficient d'association  $\psi$  au coefficient de corrélation  $\rho$ . En particulier, si les distributions marginales des deux variables aléatoires sont à répartition uniforme, on trouve entre ces deux paramètres la relation

$$\rho_u = \frac{(\psi^2 - 1 - 2\psi \text{Log}\psi)}{(\psi - 1)^2} \quad (31)$$

On peut se ramener à cette situation dans le cas général en remplaçant les variables aléatoires d'origine par leurs fonctions de répartition marginales. Celles-ci sont en effet bien des variables aléatoires à répartition marginales uniformes sur  $[0,1]$ , et de plus, elles ont, d'après sa définition, même coefficient d'association que les variables de départ. L'emploi de l'estimateur de Mardia consiste donc à calculer le coefficient de corrélation expérimental  $\rho(F,G)$ , et à prendre comme estimation du coefficient d'association la solution de l'équation

$$\rho_u(\psi^\perp) = \rho(F,G) \quad (32)$$

L'équation (32) étant transcendante, le plus commode est sans doute de tabuler une fois pour toutes la fonction  $\rho_u(\psi^\perp)$ , puis de déterminer dans chaque cas la solution par interpolation dans cette table.

#### 5-6 Vérification de la loi obtenue.

Une fois estimée la valeur de  $\psi$  la loi double théorique représentant les données est parfaitement déterminée. Encore convient-il de vérifier qu'elle les représente correctement. Pour cela, il faut obtenir un histogramme double comparable à l'histogramme expérimental. Le plus simple est ici de calculer directement les probabilités cumulées correspondant aux différentes classes de l'histogramme expérimental. Ainsi, soit à obtenir  $P_{ij} = \Pr(x_i < X < x_{i+1}; y_j < Y < y_{j+1})$ ; on a pour valeur estimée :

$$P_{ij}^* = H(x_{i+1}, y_{j+1}) + H(x_i, y_j) - H(x_i, y_{j+1}) - H(x_{i+1}, y_j) \quad (33)$$

relation dans laquelle les quatre valeurs de H sont obtenues à partir des valeurs de F, G et  $\psi$  par les formules (21) et (22).

Une fois l'histogramme ainsi construit classe par classe, on peut procéder à un calcul de distance comme pour la loi bigamma (formule 14).

#### 5-7 Tirage au sort d'un échantillon de la loi de Plackett.

Une autre méthode de validation de la loi obtenue serait de construire un histogramme par tirage au sort. Cette méthode n'est pas à conseiller dans le cas présent car elle est beaucoup plus lourde et moins précise que la précédente. Il peut cependant être utile d'obtenir un échantillon représentatif de la loi double théorique pour d'autres problèmes de simulation, par exemple pour obtenir un échantillon de fonctions de transfert.

Une méthode générale de tirage au sort dans une loi de distribution double consiste à se ramener au tirage de deux variables aléatoires U et V uniformément réparties sur l'intervalle [0,1]. La première représente la fonction de répartition marginale de l'une des variables, soit X, et la seconde la fonction de répartition conditionnelle de la seconde variable. On obtient donc x et y par résolution du système d'équations

$$u = F(x) \quad (34)$$

$$v = N(y | x ; \psi) \quad (35)$$

L'équation (34) s'inverse immédiatement pour donner x. On peut d'ailleurs faire directement dans notre cas un tirage dans la loi marginale de X qui est une loi gamma. L'équation (35) est moins commode, car la fonction N n'est pas connue. On doit donc, pour obtenir y, calculer tout d'abord la valeur de la fonction de répartition marginale G(y) correspondant aux valeurs de F et N tirées. Le détail du calcul est présenté en annexe I, et nous ne donnons ici que les résultats essentiels.

La première étape est d'établir la relation entre la fonction conditionnelle N et les distributions marginales F et G. On trouve que

$$N(y | x ; \psi) = \frac{1}{2} + \frac{(\psi + 1) G - (\psi - 1) F - 1}{2 [S^2 - 4 \psi (\psi - 1) FG]^{1/2}} \quad (36)$$

relation dans laquelle S est la quantité définie par (22). Il résulte de (36) que, pour des valeurs données de F et N, G est solution d'une équation du second degré dont on montre qu'elle a toujours deux racines positives comprises entre 0 et 1. Toutefois, le passage de (36) à l'équation du second degré, comportant une élévation au carré, introduit une racine parasite. On peut montrer que celle des deux racines en G à retenir est donnée par (Annexe I)

$$G = \{B - (1 - 2N) D\} / 2A \quad (37)$$

avec  $A = \psi + a (\psi - 1)^2$

$$B = 2a \{F \psi^2 + (1 - F)\} + \psi (1 - 2a)$$

$$D = \psi^{1/2} \{\psi + 4aF (1 - F) (1 - \psi^2)\}^{1/2}$$

$$a = N (1 - N)$$

On obtient donc la valeur de la seconde variable aléatoire, y, en inversant l'équation



$$G(y) = \{B - (1 - 2N) D\} / 2A \quad (38)$$

### 5-8 Modélisation de la probabilité double $g_{12}(b_1, b_2)$

Les probabilités marginales de  $b_1$  et  $b_2$ , contrairement à celle de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , ne sont pas représentées par une loi de probabilité classique de forme analytique simple. On ne peut donc pas trouver pour la loi double une forme mathématique a priori, comme la loi bigamma au § 4, dont il suffit de vérifier si elle convient ou non.

L'hypothèse la plus simple est de supposer que les deux variables sont indépendantes. Si tel n'était pas le cas, on pourrait utiliser la méthode de cette section, avec calcul d'un coefficient d'association, puisque cette méthode ne fait aucune hypothèse a priori sur la forme des lois marginales.

## 6 - APPLICATION A DES DONNEES EXPERIMENTALES

### 6-1 Rappels sur l'expérience PACEM 2.

Les données utilisées dans la présente étude ont été obtenues lors de l'expérience PACEM 2, réalisée en Beauce entre 1985 et 1988. La partie radioélectrique de cette expérimentation consistait en une liaison hertzienne d'essai de 50 km de longueur entre les tours de Bouffry et de Viabon (Golé, Lavergnat et Sylvain, 1987), équipée d'analyseurs de liaison (MLA) permettant de mesurer la fonction de transfert du canal atmosphérique entre 11,123 et 11,187 GHz. Le balayage en fréquence de la bande analysée, sinusoïdal à la fréquence de 17,5 Hz, permet une mesure de la fonction de transfert toutes les 28,5 ms. A la réception, deux chaînes identiques reliées à des antennes séparées verticalement de 15 m permettent l'analyse d'un canal en diversité d'espace. A l'exception de quelques rares pannes, les fonctions de transfert des deux voies en diversité ont été mesurées sans interruption pendant les quatre années de mesure et enregistrées dès que l'atténuation sur l'une d'entre elles dépassait 5 dB du fait de la présence de trajets multiples.

### 6-2 Modélisation de la distribution double $h_{12}(\tau_1, \tau_2)$

Dans la présente étude, nous nous sommes limitées aux situations vérifiant le critère d'occurrence  $C_{12}$ , avec un seuil d'atténuation de 10 dB. Pour une étude statistique, il n'est pas nécessaire de garder toutes les fonctions de transfert mesurées : d'une part, cela conduirait à des échantillons trop volumineux ; d'autre part, les données sont corrélées dans le temps et le fait de garder toutes les fonctions de transfert n'augmenterait en fait pas la signification statistique des résultats obtenus. On n'a donc gardé que 20 % des données satisfaisant au critère d'occurrence par tirage au sort, soit en moyenne une fonction de transfert toutes les secondes en période d'événement. Les nombres de fonctions de transfert ainsi sélectionnées sont donnés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Nombre de fonctions de transfert utilisées dans l'étude.

ANNEE	1985	1986	1987	1988
Nbre de données	660.429	666.323	890071	414.075



On a ensuite modélisé ces fonctions de transfert par un modèle à deux rayons normalisé et constitué par année les histogrammes des paramètres du modèle. Dans la suite, nous indiquons par 1 les valeurs relatives à l'antenne basse et par 2 celles relatives à l'antenne haute. Les valeurs des coefficients statistiques des lois marginales (moyenne et variance) et celles des paramètres des distributions gammas ajustées ( $\mu$  et  $\nu$ ) sont données par année dans le tableau 2.

Tableau 2 : Modélisation des lois marginales des retards par des lois gamma

Année	$E(\tau)$ (ns)	$Var(\tau)$ (ns <sup>2</sup> )	$\mu$ (ns <sup>-1</sup> )	$\nu$
Distributions marginales de $\tau_1$				
1985	0,3832	0,06723	5,6992	2,1839
1986	0,3669	0,06357	5,7755	2,1190
1987	0,3886	0,06961	5,5835	2,1701
1988	0,3931	0,08017	4,9037	1,9277
Distributions marginales de $\tau_2$				
1985	0,4198	0,07817	5,3701	2,2544
1986	0,5032	0,10187	4,9397	2,4857
1987	0,5476	0,11752	4,6592	2,5512
1988	0,5882	0,15281	3,8495	2,2644

On constate bien que les distributions sur les deux voies sont différentes. L'antenne haute présente des retards plus dispersés et en moyenne plus grands, ce qui signifie des fonctions de transfert statistiquement plus sélectives. On sait par ailleurs ( Golé, Sylvain et Ghahremani, 1988)) que c'est également l'antenne haute qui présente la plus grande occurrence d'évanouissements sélectifs. Les deux résultats jouent donc ensemble pour en faire le plus mauvais des deux canaux.

On a enfin établi les lois doubles ajustées aux histogrammes doubles expérimentaux par les deux méthodes décrites aux sections 4 et 5 ci dessus. Les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux 3 et 4. On y a également porté les valeurs des distances entre chaque histogramme expérimental et l'histogramme théorique correspondant : dans le cas de la loi bigamma de Cherian, celui-ci a été obtenu par tirage au sort de 100.000 valeurs.

Tableau 3 : Modélisation de  $h_{12}(\tau_1, \tau_2)$  par une loi gamma double

Année	$r_{12}$	$\nu_1^*$	$\nu_2^*$	$\nu_3^*$	distance
1985	0,3940	1,30967	1,38012	0,87428	0,1859
1986	0,4813	1,01436	1,38106	1,10464	0,2872
1987	0,4978	0,98434	1,36550	1,18572	0,3216
1988	0,5889	0,69723	1,03402	1,23043	0,2956

Tableau 4 : Modélisation de  $h_{12}(\tau_1, \tau_2)$  par une loi à coefficient d'association

Année	$\Psi$	distance
1985	2,8542	0,5294
1986	3,4968	0,4242
1987	5,6054	0,5217
1988	5,1395	0,5029

De l'observation des tableaux 3 et 4, on peut tirer un certain nombre de conclusions.

1°) Les deux méthodes de modélisation que nous avons envisagées a priori conduisent à des résultats satisfaisants, au sens où la distance entre distributions doubles expérimentale et théorique est relativement faible. Il y a globalement accord entre les dépendances statistiques entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$  telles qu'elles sont exprimées dans les deux méthodes, d'une part par le coefficient de corrélation, d'autre part par le coefficient d'association.

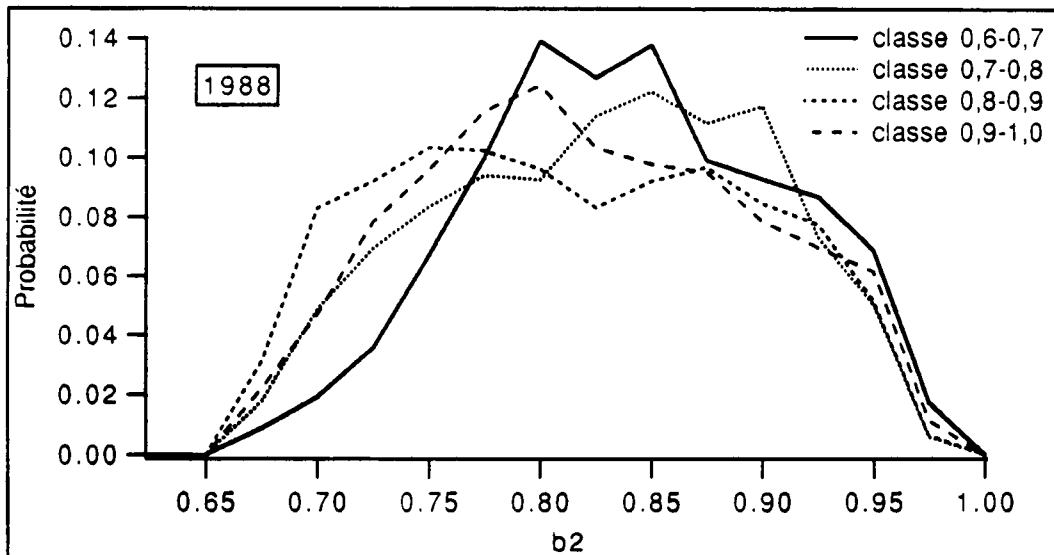
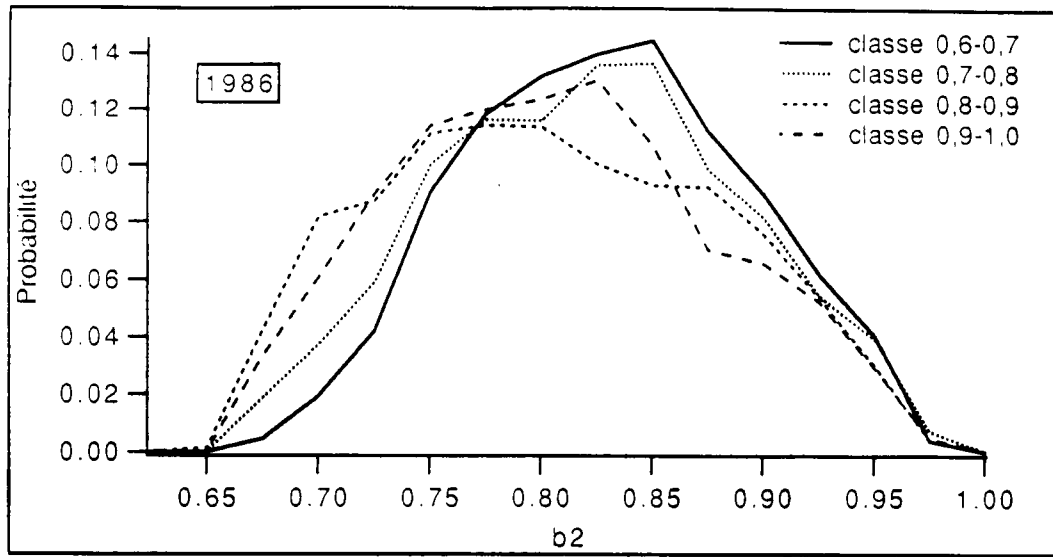
2°) L'ajustement obtenu par la loi gamma double de Chérian est très supérieur à celui fourni par la méthode du coefficient d'association (distance de l'ordre de 1,8 fois plus petite). On peut donner deux interprétations (non contradictoires) de ce résultat. L'estimation du coefficient d'association repose sur la détermination des médianes marginales expérimentales. L'histogramme étant connu par classes, les valeurs de ces médianes tombent à l'intérieur de classes : pour calculer les quatre termes du membre de droite de (25), on doit partager les contenus des classes frontières entre les quatre zones, ce qui a été fait en pratique par des interpolations linéaires ; dans la mesure où les médianes d'une loi gamma sont légèrement supérieures aux modes, elles tombent dans des cases de l'histogramme où la densité de probabilité est fortement décroissante et l'interpolation effectuée manque de précision. D'autre part, on peut également considérer que l'excellente modélisation obtenue par la loi gamma double traduit, même si on n'en a pas d'explication théorique, le fait que la loi expérimentale en est très proche ; on avait de même, sans interprétation théorique jusqu'ici, observé l'excellente représentation des lois marginales par des distributions gamma simples.

3°) Par l'une ou l'autre méthode, on observe d'importantes différences entre les lois de distribution doubles obtenues pour des années différentes. Fautes de données similaires provenant d'autres liaisons expérimentales, il n'a malheureusement pas été possible de comparer ces différences annuelles sur une liaison donnée aux différences qu'on observerait la même année entre deux liaisons.

### 6-3 Modélisation de la distribution double $g_{12}(b_1, b_2)$

Comme nous l'avons annoncé au § 5-8, l'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la loi double de  $b_1$  et  $b_2$  est de supposer que ces deux variables soient statistiquement indépendantes. Cette hypothèse ne peut qu'être approchée puisqu'on sait que les niveaux des deux canaux à la fréquence centrale (qui dépendent respectivement de ces deux paramètres ne sont pas parfaitement décorrélés), mais s'avérer suffisante pour notre projet de modélisation.

Pour la vérifier, nous avons découpé en quatre classes le domaine de variation du paramètre  $b_1$  et établi pour chacune la loi de distribution du paramètre  $b_2$ . Les résultats de cette analyse sont donnés figure 2 pour les deux années 1986 et 1988.



Probabilité de b2 conditionnée par b1  
 1986 et 1988

Figure 2

L'examen de ces figures montre que l'hypothèse d'indépendance statistique de  $b_1$  et  $b_2$  est tout à fait acceptable. Elle est d'ailleurs mieux vérifiée pour les grandes valeurs de  $b$  que pour les petites, ce qui traduit le fait que les événements sont d'autant mieux décorrélés qu'ils sont sélectifs ; c'est une des raisons du succès de la diversité.

## 7 - DISCUSSION DES RESULTATS OBTENUS ET CONCLUSION

L'objectif premier de notre étude était d'étudier la possibilité d'extension du modèle à deux rayons normalisé à un canal de propagation en diversité d'espace en n'augmentant que d'une unité le nombre des coefficients nécessaires à sa description statistique. Nous avons montré, en nous appuyant sur les résultats de l'expérience Pacem 2 qu'une telle extension est possible.

Dans le modèle en diversité, les paramètres  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont indépendants de tous les autres et à distribution uniforme ; les paramètres  $b_1$  et  $b_2$  sont également indépendants et ont de plus la même loi de probabilité sur les deux canaux. Enfin, la loi de distribution double des paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$  peut être modélisée de deux façons : soit en utilisant la distribution gamma double de Chérian, soit en utilisant la distribution à coefficient d'association de Plackett. La modélisation par une loi gamma double est d'ailleurs préférable, d'une part parce qu'elle donne une meilleure représentation des données, d'autre part parce qu'elle se prête à des calculs beaucoup plus simples, tant pour ce qui est de l'estimation des paramètres du modèle que pour son utilisation dans des études par simulation.

La mise au point d'un modèle statistique de représentation de la fonction de transfert du canal de propagation hertzien en période de trajets multiples n'est qu'une étape dans la construction d'une méthode de prévision de la qualité des liaisons. Dans ce contexte global, nos résultats ne constituent qu'une étape. Deux questions importantes doivent encore être résolues avant qu'une véritable méthode de prévision de la qualité d'une liaison en diversité d'espace soit disponible.

La modélisation en diversité s'est accompagnée de l'introduction d'un coefficient statistique nouveau, le coefficient de corrélation  $r_{12}$  entre les paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . La première question consiste à déterminer de quels paramètres de la liaison dépend ce coefficient et de quelle façon. Il est clair a priori qu'il doit dépendre de l'écartement entre les antennes ; mais on ne peut exclure la dépendance vis à vis d'autres paramètres comme la fréquence, la longueur du bond ou le diagramme d'antenne, dont dépendent déjà les coefficients statistiques  $\mu$  et  $\nu$ . Les données expérimentales dont on peut disposer sont tout à fait insuffisantes pour obtenir ces dépendances, mais on peut maintenant envisager de les étudier par des simulations à partir de tracés de rayons sur un modèle statistique de couches troposphériques ; le lecteur intéressé pourra se faire une idée de ces méthodes et des résultats qu'ils permettent d'obtenir en se reportant à (Ciarletti et Sylvain, 1991) et (Lavergnat et Golé, 1991).

La seconde question concerne la loi de probabilité marginale que l'on doit attribuer aux paramètres du modèle. Les modèles statistiques établis jusqu'ici l'ont été pour des canaux simples. Dans notre méthode, cette modélisation s'applique aux situations correspondant au critère de sélection  $C$  d'un seuil de 10 dB sur l'atténuation dans la bande utile. Lors du passage à la loi double du canal en diversité, on remplace ce critère par le critère  $C_{12} = C_1 \cap C_2$ . Du fait que les fonctions de transfert sur les deux voies en diversité sont corrélées, on ne peut exclure que ce changement de

critère de sélection aît une influence sur les distributions marginales des paramètres du modèle. C'est ce que nous avons vérifié sur nos données.

Les résultats concernant les paramètres  $b_1$  et  $b_2$  sont présentés aux figures 3 et 4. La figure 3 donne les lois marginales de  $b_1$  et  $b_2$  (pour les quatre années) lorsque le critère  $C$  est appliqué séparément à chacune des voies. La figure 4 donne les mêmes informations lorsqu'on utilise le critère  $C_{12}$ . On constate que la loi de probabilité du paramètre  $b$  est indépendante de la voie considérée comme du critère de sélection. La loi de probabilité obtenue pour un canal simple peut donc être utilisée pour un canal en diversité.

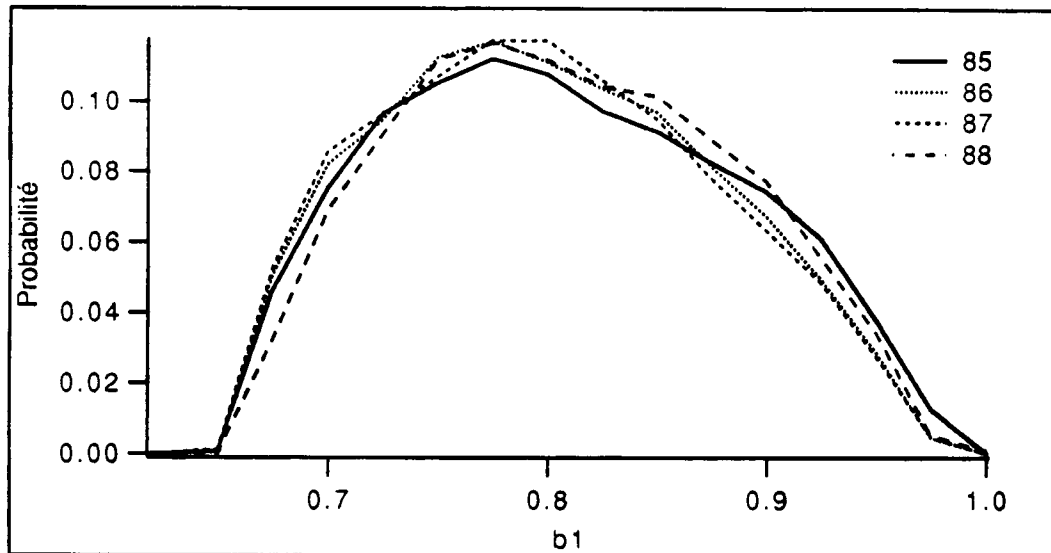
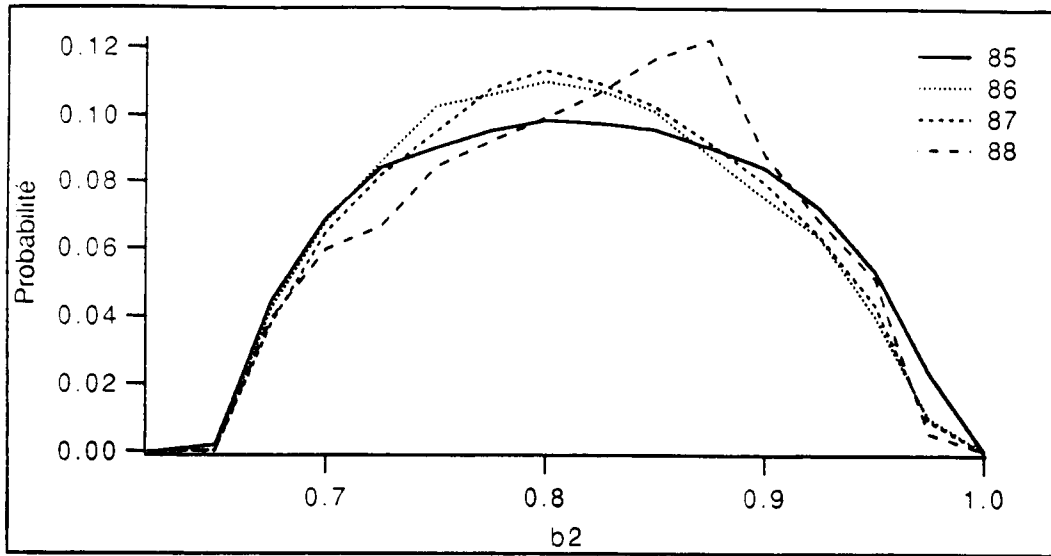
En revanche, les choses sont moins satisfaisantes dans le cas du paramètre  $\tau$  du modèle. Cela n'est d'ailleurs pas surprenant puisque  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont corrélés alors que  $b_1$  et  $b_2$  peuvent être considérés comme pratiquement indépendants. Nous donnons dans le tableau 5 les valeurs moyennes et variances de  $\tau$  ainsi que les coefficients  $\mu$  et  $\nu$  lorsque le critère  $C$  est appliqué séparément aux deux voies.

Tableau 5 : Modélisation des lois marginales des retards par des lois gamma

Année	$E(\tau)$ (ns)	$Var(\tau)$ (ns <sup>2</sup> )	$\mu$ (ns <sup>-1</sup> )	$\nu$
Distributions marginales de $\tau_1$ (seuil de 10 dB sur la voie 1)				
1985	0,3910	0,07017	5,5722	2,1787
1986	0,4065	0,06795	5,9823	2,4318
1987	0,4357	0,08696	5,0103	2,1830
1988	0,4618	0,1469	3,1436	1,4517
Distributions marginales de $\tau_2$ (seuil de 10 dB sur la voie 2)				
1985	0,6923	0,1828	3,7872	2,6219
1986	0,6613	0,1544	4,2830	2,8323
1987	0,7230	0,1700	4,2529	3,0748
1988	0,9843	0,2315	4,2518	4,1850

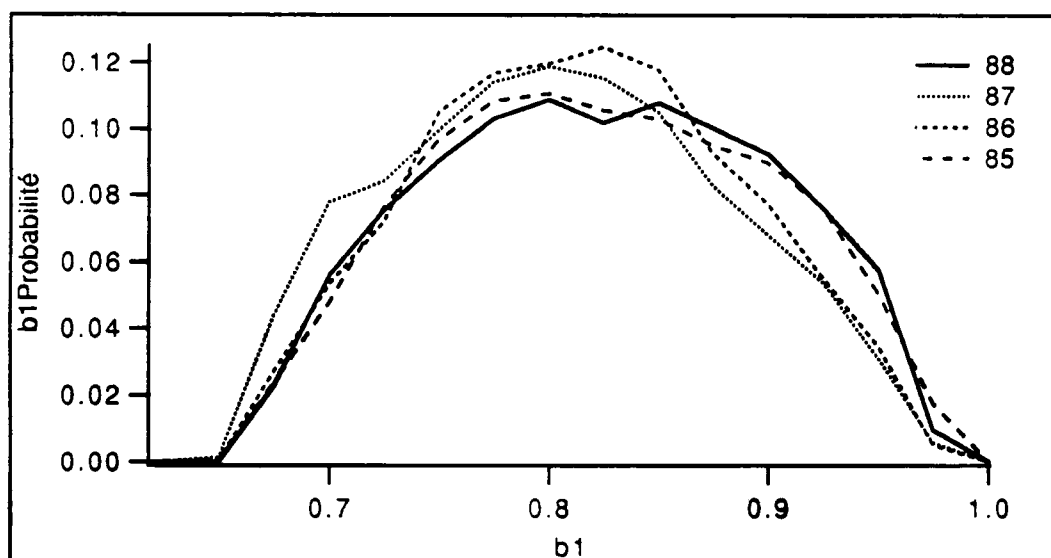
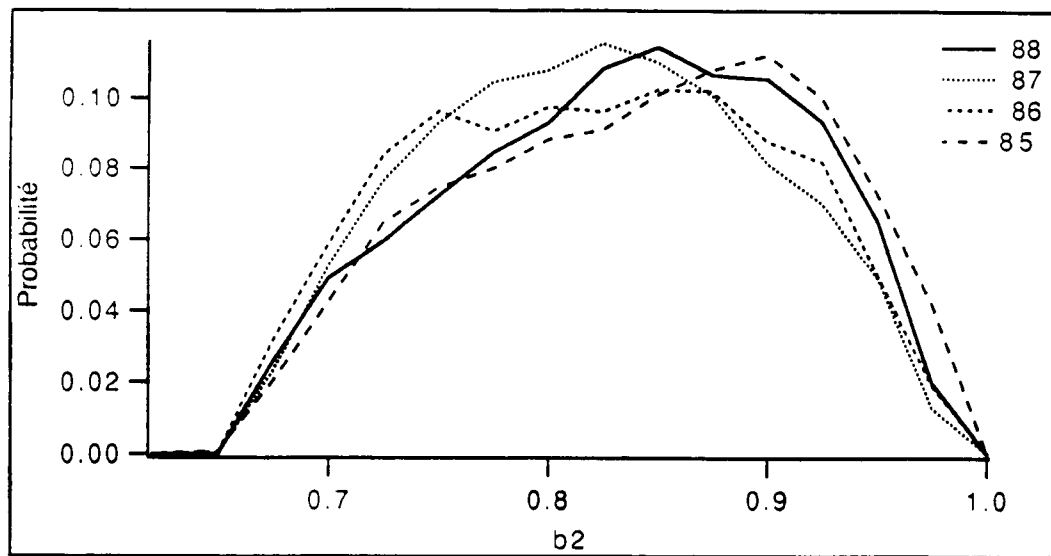
Par comparaison de ces valeurs avec celles du tableau 2 relatif au critère de sélection  $C_{12}$ , on constate que si les coefficients de la loi de  $\tau_1$  sont relativement peu différents, ceux de la loi de  $\tau_2$  le sont notablement. Compte tenu des fortes variations également présentés par ces coefficients d'une année à l'autre, il n'est pas facile de conclure définitivement sur l'importance du changement lié au changement de critère. Clairement, ce point devrait faire l'objet d'études plus approfondies, et là aussi, les mesures expérimentales pourraient être utilement complétées par des études de simulation.

Pour finir, on doit souligner que le succès obtenu dans l'extension de la modélisation d'un canal simple à un canal en diversité d'espace est prometteur en ce sens que la même méthodologie devrait pouvoir être appliquée avec le même succès aux autres types de liaisons en diversité. Il y a là tout un champ d'études pour qui s'intéresserait encore à la propagation hertzienne.



Répartitions normalisées de  $b$  par année (voie1 et voie2)  
*seuils séparés de 10dB sur les deux voies*

Figure 3



Répartitions de  $b$ , voie1 et voie2, par année  
seuils communs de 10dB sur les deux voies

Figure 4

## ANNEXE A : RAPPEL DE PROPRIETES DE LA LOI GAMMA

### A1 Densité de probabilité et moments

Nous rappelons dans cette annexe quelques propriétés classiques de la loi gamma qui nous sont utiles dans les développements du texte. La densité de probabilité gamma, densité de probabilité d'une variable aléatoire positive définie sur  $[0 - +\infty]$  est donnée par la formule

$$f(x) = \frac{\mu^v}{\Gamma(v)} e^{-\mu x} x^{v-1} \quad (A1)$$

Elle dépend des deux paramètres  $\mu$  et  $v$  et pourra être notée  $f_{\mu,v}(x)$ .

Le moment d'ordre  $n$  de la distribution se calcule sans difficultés. On obtient :

$$E(x^n) = \frac{\Gamma(v+n)}{\Gamma(v)} \frac{1}{\mu^n} \quad (A2)$$

La valeur moyenne est ainsi  $E(x) = v/\mu$  (A3)

et la variance  $V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = v/\mu^2$  (A4)

### A2 Forme réduite de la loi gamma.

On obtient la forme réduite de la densité gamma qui ne dépend plus que du seul paramètre  $v$  par le changement de variable  $t = \mu x$ . La conservation de la probabilité élémentaire  $f(x) dx = f_0(t) dt$  conduit immédiatement à la forme réduite :

$$f_0(t) = \frac{t^{v-1} e^{-t}}{\Gamma(v)} \quad (A5)$$

### A3 Propriété de stabilité vis à vis du produit de convolution.

Le produit de convolution de deux distributions gamma de même paramètre  $\mu$  et de paramètres  $v_1$  et  $v_2$  est une distribution gamma de paramètres  $\mu$  et  $v = v_1 + v_2$ .

En effet, notant  $p_x(x)$  et  $p_y(y)$  les deux distributions de départ, on a

$$\begin{aligned} [p_x * p_y](\tau) &= \frac{\mu^{v_1+v_2}}{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2)} \int_0^\tau x^{v_1-1} e^{-\mu x} (\tau-x)^{v_2-1} e^{-\mu(\tau-x)} dx \\ &= \frac{\mu^{v_1+v_2}}{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2)} e^{-\mu\tau} \int_0^\tau x^{v_1-1} (\tau-x)^{v_2-1} dx \end{aligned}$$

Faisant le changement de variable  $x = u\tau$ , on obtient une expression qui, à un facteur multiplicatif



près, n'est autre que la loi gamma de paramètres  $\mu$  et  $\nu_1 + \nu_2$ . Comme le produit de convolution de deux lois de probabilités est une loi de probabilité, le facteur multiplicatif vaut nécessairement 1, et le résultat annoncé est ainsi établi.

Il en résulte que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires gamma indépendantes de même paramètre  $\mu$  et de paramètres  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , la variable aléatoire  $Z = X + Y$  est une variable aléatoire gamma de paramètres  $\mu$  et  $\nu_1 + \nu_2$ . En particulier, la somme de deux variables gammas réduites est une variable gamma réduite.

#### A4 Estimation des paramètres d'une loi gamma.

Supposons qu'on ait  $N$  observations  $x_1, x_2, \dots, x_N$  d'une variable aléatoire  $X$  dont on suppose qu'elle suit la loi de probabilité  $f_{\mu, \nu}(x)$ . Le problème de l'estimation consiste à associer à chaque ensemble d'observations un jeu de valeurs des paramètres (les valeurs estimées). La fonction des observations d'où procède le calcul de la valeur estimée d'un paramètre en est un estimateur.

Un estimateur statistiquement satisfaisant est celui du maximum de vraisemblance, obtenu en choisissant pour  $\mu$  et  $\nu$  les valeurs qui maximisent la probabilité de tirage de l'échantillon effectivement observé soit

$$P(x_1, \dots, x_N) = \prod f_{\mu, \nu}(x_i)$$

Les valeurs estimées  $\mu^*$  et  $\nu^*$  vérifient alors le système d'équations

$$\nu^*/\mu^* = \sum(x_i) / N \tag{A6}$$

$$N[\text{Log}(\mu^*) - d\Gamma(\nu^*)/d\nu] + \sum \text{Log}(x_i) = 0 \tag{A7}$$

système qui conduit à la résolution d'une équation transcendante en  $\nu^*$ .

Devant la difficulté de l'estimation par le maximum de vraisemblance, dont la solution ne peut être qu'approchée, on préfère en général recourir à une estimation par la méthode des moments, en prenant pour les paramètres les valeurs qui conduisent à rendre la moyenne et la variance théoriques égales à la moyenne et à la variance expérimentales. Les valeurs estimées  $\mu^*$  et  $\nu^*$  sont données par le système d'équations

$$\nu^*/\mu^* = \sum(x_i) / N = X_{av} \tag{A8}$$

$$\nu^*/\mu^{*2} = 1/N \sum (x_i - X_{av})^2 \tag{A9}$$

On remarque que l'équation (A8) est identique à l'équation (A6) du maximum de vraisemblance.

Les propriétés statistiques de l'estimateur par la méthode des moments n'étant pas connues théoriquement, il convient de s'assurer de la qualité des estimations obtenues. On peut pour ce faire comparer un histogramme obtenu par tirage au sort à partir de la loi de probabilité estimée avec l'histogramme expérimental de départ. Une méthode plus partielle, mais beaucoup plus rapide porte sur la comparaison du moment centré du troisième ordre calculé à partir de  $\nu^*$  et  $\mu^*$  avec sa valeur expérimentale.

## ANNEXE B : LOI GAMMA DOUBLE DE CHERIAN

### B1 Généralités.

Lorsqu'une famille de lois de probabilité est invariante vis à vis du produit de convolution, on peut obtenir une loi de probabilité double avec variables corrélées, dont les lois marginales appartiennent à la famille, en partant de trois variables indépendantes ayant des lois de probabilité appartenant à la famille (ce qu'on nomme en anglais la méthode de la "trivariate reduction"). Comme la loi gamma réduite vérifie la propriété d'invariance indiquée (cf A3), la méthode lui est applicable et permet d'obtenir une loi de probabilité double dont les lois marginales sont des lois gamma réduites.

Soient en effet trois variables aléatoires indépendantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  suivant des lois de probabilité gamma réduites de paramètres  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_3$ . On considère les deux variables aléatoires

$$U = X + Z \quad (B1)$$

$$V = Y + Z \quad (B2)$$

Du fait de l'invariance vis à vis du produit de convolution,  $U$  et  $V$  suivent des lois gamma réduites de paramètres  $(\nu_1 + \nu_3)$  et  $(\nu_2 + \nu_3)$ , et la corrélation s'introduit par l'intermédiaire de la variable aléatoire commune  $Z$ .

### B2 Moments de la loi double obtenue.

D'après les définitions de  $U$  et  $V$ , et compte tenu de l'indépendance des variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , on a immédiatement :

$$E(U) = E(X) + E(Z) = \nu_1 + \nu_3 \quad (B3)$$

$$E(V) = E(Y) + E(Z) = \nu_2 + \nu_3 \quad (B4)$$

$$\text{Var}(U) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Z) = \nu_1 + \nu_3 \quad (B5)$$

$$\text{Var}(V) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(Z) = \nu_2 + \nu_3 \quad (B6)$$

Le coefficient de corrélation est défini par

$$\rho(U, V) = E\{[U-E(U)][V-E(V)]\} / [\text{Var}(U) \cdot \text{Var}(V)]^{1/2}$$

On obtient après quelques calculs sans difficultés

$$E\{[U-E(U)][V-E(V)]\} = \text{Var}(Z) = \nu_3$$

$$\text{d'où} \quad \rho(U, V) = \frac{\nu_3}{\sqrt{(\nu_1 + \nu_3)(\nu_2 + \nu_3)}} \quad (B7)$$

### B3 Expression analytique de la densité de probabilité double.

La densité de probabilité conjointe des variables aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  est



$$p(x,y,z) = \frac{e^{-(x+y+z)}}{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2) \Gamma(v_3)} x^{(v_1-1)} y^{(v_2-1)} z^{(v_3-1)} \quad (B8)$$

Faisons le changement de variable  $X = U - Z$  ;  $Y = V - Z$ .

La conservation de la probabilité donne

$$p(x,y,z) dx dy dz = p(u,v,z) du dv dz$$

et comme

$$|D(U,V,Z)/D(X,Y,Z)| = 1$$

on obtient

$$p(u,v,z) = \frac{e^{-(u+v-z)}}{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2) \Gamma(v_3)} (u-z)^{v_1-1} (v-z)^{v_2-1} z^{v_3-1} \quad (B9)$$

La densité de probabilité double cherchée s'obtient en intégrant la densité triple (B9) sur  $z$ . Mais comme  $X$  et  $Y$  doivent être des variables positives, il faut se limiter aux valeurs  $z$  de  $Z$  telles que  $z \leq \min(u,v)$ . D'où l'expression cherchée

$$h(u,v) = \frac{e^{-(u+v)}}{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2) \Gamma(v_3)} \int_0^{\min(u,v)} z^{v_3-1} (u-z)^{v_1-1} (v-z)^{v_2-1} e^z dz \quad (B10)$$

qui est bien l'expression (10) du texte.

#### B4 Estimation des paramètres de la loi double.

Nous avons vu à l'annexe A que l'estimation des paramètres d'une loi gamma par la méthode du maximum de vraisemblance conduisait à des calculs très lourds, et qu'il était plus commode de recourir à leur estimation par la méthode des moments.

Les lois marginales étant par hypothèse des lois gamma réduites, les trois paramètres  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  définissant la densité de probabilité double sont alors estimés en égalisant les moyennes  $m_u$  et  $m_v$  et le coefficient de corrélation  $r_{uv}$  de l'échantillon expérimental à leurs valeurs théoriques, ce qui conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} v_1^* + v_3^* &= m_u \\ v_2^* + v_3^* &= m_v \\ v_3^* &= (m_u m_v)^{1/2} r_{uv} \end{aligned}$$

## ANNEXE C : DEMONSTRATION DES INEGALITES DE FRECHET

La densité de probabilité double  $h(x,y)$  étant en tout point  $(x,y)$  positive ou nulle, il en résulte que

$$H(x,y) = \int_0^x \int_0^y h(u,v) \, du \, dv \leq \int_0^x \int_0^\infty h(u,v) \, du \, dv = F(x)$$

et que

$$H(x,y) = \int_0^x \int_0^y h(u,v) \, du \, dv \leq \int_0^\infty \int_0^y h(u,v) \, du \, dv = G(y)$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$H(x,y) \leq \text{Min} \{F(x), G(y)\} \quad (\text{C1})$$

La quantité  $F(x) + G(y) - 1$  s'exprime comme une somme d'intégrales doubles de  $h(u,v)$ . En ne notant, pour simplifier l'écriture, que les intégrales avec leurs bornes, d'abord sur  $u$ , ensuite sur  $v$ , et pas l'intégrande, on a

$$F(x) + G(y) - 1 = \int_0^x \int_0^\infty + \int_0^\infty \int_0^y - \int_0^\infty \int_0^\infty = \int_0^x \int_0^y + \int_0^x \int_y^\infty + \int_0^\infty \int_0^y - \int_0^\infty \int_y^\infty - \int_0^x \int_0^y$$

soit

$$F(x) + G(y) - 1 = \int_0^x \int_0^y - \int_x^\infty \int_y^\infty \leq \int_0^x \int_0^y = H(x,y)$$

On a évidemment aussi  $H(x,y) \geq 0$ , puisqu'il s'agit d'une loi de probabilité. Et donc

$$H(x,y) \geq \text{Max}\{0, F(x)+G(y) - 1\} \quad (\text{C2})$$

## ANNEXE D : RAPPELS SUR LE COEFFICIENT D'ASSOCIATION

D1 Association entre deux caractères aléatoires.

Considérons un système aléatoire pouvant présenter deux caractères A et B. Notons  $\alpha$  et  $\beta$  les non réalisations de A et de B respectivement. Le système a donc quatre états possibles correspondant aux situations (A, B), ( $\alpha$ , B), (A,  $\beta$ ) et ( $\alpha$ ,  $\beta$ ). Si on observe le système N fois, les observations se partagent entre ces quatre situations et peuvent être résumées sous la forme d'un tableau à deux entrées indiquant soit les nombres d'observation, soit les fréquences d'observation, ces dernières étant des estimations des probabilités de réalisation.

	B	non B	Totaux
non A	$N(\alpha B)$	$N(\alpha \beta)$	$N(\alpha)$
A	$N(AB)$	$N(A\beta)$	$N(A)$
Totaux	$N(B)$	$N(\beta)$	N

On pose habituellement, pour simplifier les notations

$$N(AB) = a ; N(A\beta) = b ; N(\alpha B) = c ; N(\alpha \beta) = d \quad (D1)$$

On dira que les deux caractères ne sont pas associés si la réalisation de l'un d'entre eux ne dépend pas de la réalisation de l'autre. Dans ce cas, la probabilité de réalisation de A doit être la même, que B soit réalisé ou non, ce qui se traduit par les relations

$$\begin{aligned} & a/(a+c) = b/(b+d) = (a+b)/N \\ \text{ou} & \quad a = (a+b) (a+c)/N \end{aligned} \quad (D2)$$

On dira en revanche que les deux caractères sont associés si la réalisation de l'un s'accompagne d'une augmentation de la probabilité de réalisation de l'autre, auquel cas

$$a/(a+c) > b/(b+d) \Rightarrow a > (a+b) (a+c)/N$$

et qu'ils sont dissociés dans le cas inverse où

$$a < (a+b) (a+c)/N$$

Il en résulte que le degré d'association entre les deux caractères peut-être mesuré par le paramètre

$$D = a - (a+b)(a+c) / N = (ad - bc) / N \quad (D3)$$

qui est positif en cas d'association, négatif en cas de dissociation et nul en l'absence d'association.

On préfère généralement utiliser au lieu de D le coefficient d'association de Yule défini par

$$Q = (ad - bc) / (ad + bc) = ND / (ad + bc) \quad (D4)$$

qui présente l'avantage de varier entre - 1 (a = 0 ou d = 0 ; dissociation complète) et + 1 (b = 0 ou c = 0 ; association complète) en passant par la valeur 0 lorsque les caractères ne sont pas associés.

On peut enfin mesurer l'association à l'aide du paramètre  $\psi = ad/bc$ , lié au coefficient de Yule par  $Q = (\psi - 1) / (1 + \psi)$  ou  $\psi = (1 + Q) / (1 - Q)$ , et qui varie de 0 à  $+\infty$  quand Q varie de -1 à +1, en passant par la valeur 1 pour  $Q = 0$ .

On remarquera que dans le cas des coefficients Q et  $\psi$ , on peut diviser numérateur et dénominateur par  $N^2$ , obtenant la même définition à partir des probabilités que des nombre d'événements. Cela n'est pas vrai dans le cas du coefficient D qui dépend de N.

#### D2 Extension à une distribution de probabilité double.

La notion d'association et sa mesure peuvent être étendues à une distribution double. Les caractères A et B sont maintenant remplacées par deux variables aléatoires X et Y. A partir d'un point (x,y) quelconque du domaine de définition des variables aléatoires, on peut se ramener au cas du § précédent en faisant correspondre aux caractères A et B les conditions  $X < x$  et  $Y < y$ . On a alors :

$$\psi = \frac{\Pr(X > x \text{ et } Y > y) \Pr(X < x \text{ et } Y < y)}{\Pr(X < x \text{ et } Y > y) \Pr(X > x \text{ et } Y < y)} \quad (D5)$$

Utilisant les fonctions de répartition marginales et la fonction de répartition double, on obtient

$$\begin{aligned} \Pr(X < x \text{ et } Y < y) &= H(x,y) \\ \Pr(X < x \text{ et } Y > y) &= \Pr(X < x, Y < \infty) - \Pr(X < x \text{ et } Y < y) = F(x) - H(x,y) \\ \Pr(X > x \text{ et } Y < y) &= \Pr(X < \infty, Y < y) - \Pr(X < x \text{ et } Y < y) = G(y) - H(x,y) \\ \Pr(X > x \text{ et } Y > y) &= 1 - \Pr(X < x \text{ et } Y < y) - \Pr(X > x \text{ et } Y < y) - \Pr(X < x \text{ et } Y > y) \\ &= 1 - H(x,y) - [G(y) - H(x,y)] - [F(x) - H(x,y)] = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) \end{aligned}$$

Reportant ces valeurs dans (D5), on obtient

$$\psi = [H(1 - F - G + H)] / [(F - H)(G - H)] \quad (D6)$$

On retrouve bien la formule (19) qui est à l'origine de la méthode de Plackett. Il faut

toutefois remarquer que dans le cas général, la valeur obtenue pour le coefficient d'association est fonction du point de dichotomie  $(x,y)$  choisi et n'est donc pas une caractéristique absolue de la distribution de probabilité double considérée.

## ANNEXE E : PROPRIETES DES FONCTIONS DE REPARTITION DE PLACKETT

La fonction de répartition double de Plackett H, correspondant à des lois de répartition marginales F et G, est donnée pour tout couple de valeurs (x,y) des variables aléatoires X et Y par la solution de l'équation

$$\psi = \frac{H(x,y) [1 - F(x) - G(y) + H(x,y)]}{[F(x) - H(x,y)] [G(y) - H(x,y)]} \quad (E1)$$

qui vérifie les inégalités de Fréchet. Le coefficient  $\psi$ , compris entre 0 et  $+\infty$ , traduit la dépendance statistique entre les variables aléatoires X et Y.

### E1 Variation de H(x,y) avec $\psi$ .

Dans un problème pratique, on cherchera à estimer la valeur de  $\psi$  et à en déduire les valeurs de H. Pour vérifier que H vérifie bien les conditions attendues d'une solution du problème posé, il vaut mieux procéder inversement et commencer par étudier, pour des valeurs fixées de F et G, le comportement de  $\psi$  lorsque H varie entre ses limites  $H_0$  et  $H_1$ .

L'étude, à partir de (E1) des variations de  $\psi$  considéré comme une fonction de H montre que  $d\psi/dH$  est du signe de

$$(1 - F - G + 2H) (F - H) (G - H) + H (1 - F - G + H) (F + G - 2H) \quad (E2)$$

L'inégalité de Fréchet (C1) implique  $(F - H) > 0$ ,  $(G - H) > 0$  et  $(F + G - 2H) > 0$

L'inégalité de Fréchet (C2) implique  $(1 - F - G + H) > 0$  et  $H > 0$ , et donc aussi  $(1 - F - G + 2H) > 0$

Il en résulte que  $d\psi/dH$  est positif sur tout l'intervalle  $[H_0-H_1]$ , et donc que  $\psi$  croît uniformément quand H varie de  $H_0$  à  $H_1$ . De plus, l'équation (E1) montre que  $\psi$  est toujours positif ou nul.

Il nous reste à chercher les valeurs extrêmes de  $\psi$ .

Quand  $H \rightarrow H_0$ , posons  $H = H_0 + \epsilon$ . Si  $F + G - 1 > 0$ ,  $H = F + G - 1 + \epsilon$  et

$$\psi \cong \frac{(F + G - 1) \epsilon}{(1 - F) (1 - G)} \rightarrow 0$$

Si  $F + G - 1 < 0$ ,  $H = \epsilon$  et

$$\psi \cong \frac{\epsilon (1 - F - G)}{FG} \rightarrow 0$$

Quand  $H \rightarrow H_1$ , posons  $H = H_1 - \epsilon$

Sous l'hypothèse  $F < G$ , on a  $H_1 = F - \epsilon$  et



$$\psi \cong \frac{F(1-G)}{\varepsilon(G-F)} \rightarrow +\infty$$

Il en résulte que  $\psi$  varie uniformément de 0 à l'infini lorsque  $H$  varie (à  $F$  et  $G$  donnés) de  $H_0$  à  $H_1$ . Inversement, si  $\psi$  varie de 0 à l'infini, l'une des solutions  $H(x,y)$  de l'équation (E1) varie de  $H_0$  à  $H_1$ , vérifiant ainsi les inégalités de Fréchet.

E2 Variation de  $H(x,y)$  avec  $x$  et  $y$ .

L'équation (D1) peut se mettre sous la forme

$$\psi [H^2 - H(F + G) + FG] = H^2 + H(1 - F - G) \quad (E3)$$

Considérons une variation de  $x$ ,  $y$  et  $\psi$  restant fixes. Il en résulte une variation  $dF$  de  $F(x)$  et une variation  $dH$  de  $H(x,y)$ . Différentiant (E3), on trouve sans difficultés

$$[\psi(G - H) + H] dF = [\psi(F + G - 2H) + 2H - F - G + 1] dH \quad (E4)$$

Comme  $\psi > 0$ ,  $G > H$ , et  $H > F + G - 1$ ,  $dH$  et  $dF$  sont de même signe, ce qui implique  $\partial H / \partial x > 0$ .

On montre de même que  $\partial H / \partial y > 0$ .

La fonction  $H$  vérifie donc bien la propriété (B).

## ANNEXE F : EXPRESSION ALGEBRIQUE DE LA FONCTION DE PLACKETT

Le coefficient d'association  $\psi$  étant connu, ainsi que les fonctions de répartition marginales  $F(x)$  et  $G(y)$ , la fonction de répartition conjointe  $H(x,y)$  est obtenue pour tout couple de valeurs  $(x,y)$  par résolution de l'équation algébrique du second degré

$$H^2 (\psi - 1) - H [1 + (F + G) (\psi - 1)] + \psi FG = 0 \quad (F1)$$

Si  $\psi = 1$ , l'équation se réduit à une équation du premier degré dont la seule solution est  $H = FG$ .

Dans le cas où  $\psi \neq 1$ , on pose  $S = 1 + (F + G) (\psi - 1)$  ce qui met l'équation (F1) sous la forme

$$H^2 (\psi - 1) - SH + \psi FG = 0 \quad (F2)$$

Le déterminant de cette équation est

$$\Delta = S^2 - 4 \psi (\psi - 1) FG \quad (F3)$$

On peut montrer que  $\Delta$  est toujours positif, et que (F2) a deux racines. Cela n'est cependant pas nécessaire puisque nous avons démontré à l'annexe E que l'équation comportait toujours une racine entre les valeurs  $H_0$  et  $H_1$ . L'équation a donc deux racines données par

$$H_{\pm} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4 \psi (\psi - 1) FG}}{2 (\psi - 1)} \quad (F4)$$

et la question se pose de déterminer laquelle satisfait aux inégalités de Fréchet.

Comme nous savons a priori qu'une des deux racines convient, il revient au même de montrer que la prise en compte de l'un des signes au numérateur de (F4) conduit à la solution ou de montrer que la prise en compte de l'autre signe conduit à une racine qui ne convient pas. Le plus simple est de montrer que la racine (F4) avec le signe + ne vérifie pas les inégalités de Fréchet, ce qui conduit au résultat que la fonction de Plackett est celle avec le signe -.

Deux cas doivent être distingués suivant que  $\psi$  est supérieur ou inférieur 1.

1°) Si  $\psi > 1$ , on a :

$$H_+ = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4 \psi (\psi - 1) FG}}{2 (\psi - 1)} \geq \frac{S}{2 (\psi - 1)} = \frac{1}{2 (\psi - 1)} + \frac{F + G}{2} \geq \frac{F + G}{2} \geq H_1$$

Cette racine ne convient donc pas et la solution est alors  $H_-$ .

2°) Si  $0 \leq \psi < 1$ , le produit des racines de (F2) est négatif. Seule la racine positive convient et comme  $(\psi - 1) < 0$ , il est clair qu'il s'agit à nouveau de  $H_+$ .

Enfin, quand  $\psi \rightarrow 1$ , cette solution tend bien vers la solution  $H = FG$  que nous avons alors trouvée.

On en conclut que la solution acceptable de (F2) est dans tous les cas

$$H_+ = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4\psi(\psi - 1)FG}}{2(\psi - 1)} \quad (F5)$$

## ANNEXE G : DENSITE DE PROBABILITE ASSOCIEE A LA SOLUTION DE PLACKETT

On a par définition de la densité de probabilité

$$h(x,y) = \partial^2 H / \partial x \partial y = \partial^2 H / \partial F \partial G \partial F / \partial x \partial G / \partial y = fg \partial^2 H / \partial F \partial G \quad (G1)$$

et H, donné par (F5), peut s'écrire

$$H = \frac{S - \sqrt{T}}{2(\psi - 1)} \quad (G2)$$

avec  $S = 1 + (F + G)(\psi - 1)$  et  $T = S^2 - 4\psi(\psi - 1)FG$

On a donc successivement :

$$\partial S / \partial F = \partial S / \partial G = (\psi - 1) \quad \partial^2 S / \partial F \partial G = 0$$

$$\partial T / \partial F = 2(\psi - 1)(S - 2\psi G)$$

$$\partial T / \partial G = 2(\psi - 1)(S - 2\psi F)$$

$$\partial^2 T / \partial F \partial G = -2(\psi - 1)(\psi + 1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial F} = \frac{1}{2(\psi - 1)} \left( \frac{\partial S}{\partial F} - \frac{1}{2\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial F} \right)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial F \partial G} = \frac{1}{2(\psi - 1)T^{3/2}} \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial T}{\partial F} \frac{\partial T}{\partial G} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial F \partial G} \right]$$

Remplaçant dans cette formule les dérivées partielles de T par leurs expressions calculées précédemment, on obtient

$$\frac{\partial^2 H}{\partial F \partial G} = \frac{\psi}{T^{3/2}} [1 + (F + G - 2FG)(\psi - 1)]$$

D'où finalement :

$$h(x,y) = \frac{\psi fg [1 + (F + G - 2FG)(\psi - 1)]}{[S^2 - 4\psi(\psi - 1)FG]^{3/2}} \quad (G3)$$



## ANNEXE H : ESTIMATION DU COEFFICIENT D'ASSOCIATION

H1 Variance asymptotique de  $\Psi^*$ 

Nous considérons que nous avons  $N$  observations  $(X_i, Y_i)$  de la distribution double de loi de répartition  $H(x,y ; \psi)$ . Pour un partage du domaine en quatre quadrants à l'aide des valeurs  $x$  et  $y$ , nous notons  $N_a, N_b, N_c$  et  $N_d$  les nombres de réalisation correspondant respectivement aux quatre possibilités

- (A)  $X < x$  et  $Y < y$
- (B)  $X > x$  et  $Y < y$
- (C)  $X < x$  et  $Y > y$
- (D)  $X > x$  et  $Y > y$

avec bien entendu  $N_a + N_b + N_c + N_d = N$

Les probabilités des quatre possibilités sont quant à elles

$$P_a = H(x,y)$$

$$P_b = G(y) - H(x,y)$$

$$P_c = F(x) - H(x,y)$$

$$P_d = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y)$$

et les observations  $(N_a, N_b, N_c, N_d)$  suivent une loi multinomiale de probabilités  $(P_a, P_b, P_c, P_d)$  et de taille  $N$ .

L'estimateur (25) du coefficient d'association est alors donné par

$$\psi^* = (N_a N_d) / (N_b N_c) \quad (H1)$$

Cet estimateur est sans biais car la valeur moyenne de  $N_i$  ( $i = a, \dots, d$ ) est  $NP_i$  et donc  $E(\psi^*) = \psi$ . De plus, lorsque  $N$  augmente, la variance de  $N_i/N$  diminue comme  $1/N$ .

Soit maintenant une observation de taille  $N$  pour laquelle  $N_a, N_b, N_c$  et  $N_d$  diffèrent de  $\Delta N_a, \Delta N_b, \Delta N_c$  et  $\Delta N_d$  de leurs valeurs moyennes et en conséquence  $\psi^*$  diffère de  $\Delta\psi$  de la valeur exacte de  $\psi$ . D'après (H1), les écarts en question sont liés par la relation

$$\Delta\psi/\psi = \Delta N_a/(NP_a) + \Delta N_d/(NP_d) - \Delta N_b/(NP_b) - \Delta N_c/(NP_c) \quad (H2)$$

Prenant l'espérance mathématique du carré de (H2), on obtient

$$E(\Delta\psi^2)/\psi^2 = 1/N^2 [E(\Delta N_a^2)/P_a^2 + E(\Delta N_d^2)/P_d^2 + E(\Delta N_b^2)/P_b^2 + E(\Delta N_c^2)/P_c^2 + 2 \{E(\Delta N_a \Delta N_d)/P_a P_d + \dots + E(\Delta N_b \Delta N_c)/P_b P_c\}] \quad (H3)$$

Les propriétés de la loi multinomiale nous donnent

$$E(\Delta N_i^2) = \text{Var}(N_i^2) = NP_i (1 - P_i) \quad (H4)$$

$$E(\Delta N_i \Delta N_j) = \text{cov}(N_i, N_j) = - NP_i P_j \quad (H5)$$

Reportant les valeurs (H4) et (H5) dans (H3), on trouve finalement :

$$E(\Delta\psi^2) = \text{Var}(\psi^*) = \psi^2/N [1/P_a + 1/P_b + 1/P_c + 1/P_d] \quad (\text{H6})$$

Pour un échantillon de taille  $N$  suffisamment grande, on pourra estimer la variance de l'estimateur  $\psi^*$  en remplaçant dans (H6) les valeurs inconnues de  $\psi$  et des probabilités par leurs estimations, ce qui donne

$$\text{Var}(\psi^*) \cong \psi^2 [1/N_a + 1/N_b + 1/N_c + 1/N_d] \quad (\text{H7})$$

expression qui n'est correcte qu'asymptotiquement.

### H2 Optimisation des valeurs de partition.

La variance de l'estimateur  $\psi(x,y)$  étant donnée par (H7), celle-ci est rendue minimale par le choix des valeurs  $x^*$  et  $y^*$  qui minimisent son second membre, c'est à dire encore telles que  $f(X^*)$  et  $G(y^*)$  minimisent la fonction

$$K(F,G) = 1/H + 1/(F-H) + 1/(G-H) + 1/(1-F-G+H)$$

Nous sommes à nouveau conduit dans ce calcul à distinguer deux cas suivant que  $\psi$  vaut ou non 1.

#### 1er cas : $\psi = 1$

On a alors  $H = FG$  et donc :

$$K = \frac{1}{FG} + \frac{1}{F(1-G)} + \frac{1}{G(1-F)} + \frac{1}{(1-F)(1-G)} = \frac{1}{FG(1-F)(1-G)} \quad (\text{H8})$$

Rechercher le minimum de  $K$  revient donc à trouver le maximum de  $K' = FG(1-F)(1-G)$ .

$$\partial K'/\partial F = G(1-F)(1-G) - FG(1-G) = G(1-G)(1-2F)$$

$$\partial K'/\partial G = F(1-F)(1-G) - FG(1-F) = F(1-F)(1-2G)$$

Les solutions  $F = 0$  ou  $1$  et  $G = 0$  ou  $1$  n'étant pas acceptables, la seule solution possible est

$$F = G = 1/2$$

#### 2ème cas : $\psi \neq 1$

On a dans le cas général :

$$K = \frac{1}{H} + \frac{F+G-2H}{(F-H)(G-H)} + \frac{1}{1-F-G+H} \quad (\text{H9})$$

Du fait de la symétrie en  $F$  et  $G$ , il suffit de calculer l'une des dérivées, par exemple  $\partial K/\partial F$ , l'autre s'en déduisant immédiatement en échangeant les rôles de  $F$  et  $G$ . Bien que sans difficulté particulière, le calcul est assez fastidieux. Nous ne donnons que les grandes lignes du calcul de la condition  $\partial K/\partial F = 0$ .

Utilisant (D6), on peut mettre (H9) sous la forme

$$K = \frac{H^2(1 - \psi) + \psi FG}{\psi H (F - H) (G - H)}$$

On remplace alors au numérateur  $\psi FG$  par son expression tirée de (F1), ce qui conduit, après simplification par  $H$  à

$$K = \frac{(\psi - 1) [1 + (\psi - 1) (F + G - 2H)]}{\psi (H - FG)}$$

La condition  $\partial H / \partial F = 0$  s'écrit alors

$$(\psi - 1) (1 - 2\partial H / \partial F) (H - FG) - (\partial H / \partial F - G) [1 + (\psi - 1) (F + G - 2H)] = 0$$

Soit, en utilisant  $S = 1 + (\psi - 1) (F + G)$

$$\partial H / \partial F [2 (\psi - 1) FG - S] + (\psi - 1) (H - FG - 2GH) + SG = 0 \quad (H10)$$

Dérivant l'équation (F1) par rapport à  $F$ , on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial F} = \frac{H (\psi - 1) - \psi G}{2H (\psi - 1) - S}$$

Reportant dans (H10), et ordonnant l'expression trouvée suivant les puissances de  $H$ , on obtient, après simplification par  $(\psi - 1)$

$$2H^2 (\psi - 1) (1 - 2G) + 2HS (2G - 1) + G [(1 - G) S - 2\psi FG] = 0$$

Remplaçant  $H^2 (\psi - 1)$  par  $SG - \psi FG$ , on obtient finalement

$$\partial K / \partial F = 0 \Leftrightarrow G (1 - G) [1 + \psi (G - F) - (F + G)] = 0$$

soit  $1 + \psi (G - F) - (F + G) = 0$

La condition  $\partial K / \partial G = 0$  conduirait de même à

$$1 + \psi (F - G) - (F + G) = 0$$

D'où on déduit que  $F = G = 1/2$ , solution identique à celle obtenue dans le cas  $\psi = 1$ .

Quelle que soit la valeur de  $\psi$ , l'estimateur le plus satisfaisant de la forme (H1) est donc obtenu en partitionnant le domaine de définition de la loi de probabilité double à l'aide des médianes  $x^*$  et  $y^*$  des distributions marginales.

## ANNEXE I : TIRAGE AU SORT DANS LA DISTRIBUTION DOUBLE DE PLACKETT

Une fois estimée la valeur de  $\psi$ , on dispose d'une loi de répartition double  $H(x,y ; \psi)$  ayant des lois marginales fixées  $F(x)$  et  $G(y)$ . Le problème que nous nous posons est le tirage au sort de couples de valeurs  $(x,y)$  obéissant à cette loi de probabilité.

La méthode classique de tirage au sort à partir d'une loi de probabilité double dont les deux variables ne sont pas statistiquement indépendantes consiste à en privilégier une et à utiliser le théorème des probabilités conditionnelles

$$\Pr (x \text{ et } y) = \Pr (x) \Pr (y | x)$$

On commence donc par tirer au sort une variable aléatoire  $u$  uniformément répartie sur  $[0 ; 1]$  et on lui fait correspondre la valeur  $x$  par  $F(x) = u$  ou  $x = F^{-1}(u)$ . Dans notre cas, cela revient à tirer au sort une variable aléatoire suivant la loi marginale de  $X$ , c'est à dire suivant une loi gamma.

La valeur  $x$  de  $X$  étant ainsi déterminée, il ne reste qu'à obtenir la valeur  $y$  de  $Y$  par tirage au sort dans la loi de probabilité conditionnelle de  $Y$  que nous noterons  $N(y | x ; \psi)$ .

On a entre les densités de probabilité la relation  $n(y | x) = h(x,y)/f(x)$ , et on déduit par intégration sur  $y$  la relation entre fonctions de répartition

$$N(y | x ; \psi) = \partial H / \partial F \tag{I1}$$

Utilisant les formules de l'annexe G, on obtient donc :

$$N(y | x ; \psi) = \frac{1}{2} + \frac{(\psi + 1) G - (\psi - 1) F - 1}{2 [S^2 - 4 \psi (\psi - 1) FG]^{1/2}} \tag{I2}$$

avec  $S^2 = \{ 1 + (F + G) (\psi - 1) \}^2$

Pour obtenir  $y$ , on tire donc une seconde variable aléatoire à distribution uniforme sur  $[0 ; 1]$  soit  $v$  et on cherche à résoudre  $N(y | x) = v$ . Connaissant  $\psi$  et ayant tiré les valeurs  $u$  et  $v$  de  $F$  et  $N$ , la relation (I2) peut-être considérée comme une équation dont l'inconnue est  $G$ . Cette équation s'écrit

$$(\psi + 1) G - (\psi - 1) u - 1 = \{ S^2 - 4 \psi (\psi - 1) u G \}^{1/2} (2v - 1) \tag{I3}$$

Après élévation au carré pour éliminer la racine et en ordonnant le résultat suivant les puissances de  $G$ , on obtient

$$A G^2 - B G + C = 0 \tag{I4}$$

avec

$$A = a (\psi - 1)^2 + \psi \tag{I5}$$

$$B = 2a \{ (\psi^2 - 1)u + 1 \} + \psi (1 - 2a) \tag{I6}$$

$$C = a \{ (\psi - 1) u + 1 \}^2 \tag{I7}$$

relations dans lesquelles on a posé  $a = v (1 - v)$ .

Comme  $v$  varie entre 0 et 1, la quantité  $a$  est toujours positive et atteint son maximum de 1/4



pour  $v = 1/2$ .  $u$  étant également compris entre 0 et 1, il en résulte que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont tous trois positifs.

Le discriminant de l'équation (I4) est  $B^2 - 4AC$ . Il peut se mettre sous la forme

$$\Delta = (1 - 4a) \psi \{ \psi + 4au (1 - u) (1 - \psi)^2 \} \quad (I8)$$

qui permet de vérifier qu'il est toujours positif.

Compte tenu des signes des coefficients de l'équation (I4) il en résulte qu'elle a toujours deux racines réelles positives  $G_1$  et  $G_2$ . Ces deux racines sont toutes deux inférieures à 1. En effet, le trinôme  $P(G) = A G^2 - B G + C$  a une dérivée seconde  $P''(G) = 2A$  partout positive. Sa dérivée première  $P'(G) = 2AG - B$  vaut en  $G = 1$

$$\begin{aligned} P'(1) &= 2A - B = 2\{ a (\psi - 1)^2 + \psi \} - 2a \{ (\psi^2 - 1)u + 1 \} - \psi (1 - 2a) \\ &= 2a \{ \psi^2 (1 - u) + u \} + \psi (1 - 2a) \end{aligned}$$

soit  $P'(1) > 0$ .

Enfin, la valeur du trinôme en 1 est, après simplification

$$P(1) = A - B + C = a \{ \psi^2 (1 - u)^2 + 2 \psi u (1 - u) + u^2 \} > 0.$$

Les deux racines de (I4) étant comprise entre 0 et 1, il nous reste à déterminer celle qui convient. Nous prendrons

$$G_1 = (B - \Delta^{1/2})/2A \quad G_2 = (B + \Delta^{1/2})/2A \quad (I9)$$

On a ainsi

$$0 \leq G_1 \leq G_2 \leq 1 \quad (I10)$$

D'après (I8), on voit que l'équation (I4) a une racine double lorsque  $a = 1/4$ , c'est à dire pour  $v = 1/2$ . Cette racine double vaut

$$G_0 = \{ 1 + (\psi - 1) u \} / (\psi + 1) \quad (I11)$$

Dans ce cas, l'équation générale (I3) se réduit à

$$(\psi + 1) G_0 - (\psi - 1) u - 1 = 0 \quad (I12)$$

On peut montrer que  $G_0$  est toujours compris entre les racines  $G_1$  et  $G_2$  de l'équation (I4).

En effet, calculant  $(\psi + 1)^2 P(G_0)$  et ordonnant suivant les puissances de  $\psi$ , on trouve

$$(\psi + 1)^2 P(G_0) = \psi (4a - 1) \{ u (1 - u) \psi^2 + [ (1 - u)^2 + u^2 ] \psi + u (1 - u) \} \quad (I13)$$

quantité négative du fait que  $u < 1$  et  $a < 1/4$ .

D'autre part, retranchant terme à terme (I12) de (I3), on obtient

$$(\psi + 1) (G - G_0) = \{ S^2 - 4 \psi (\psi - 1) u G \}^{1/2} (2v - 1) \quad (I14)$$

ce qui montre que

$$(G - G_0) / (2v - 1) > 0 \quad (I15)$$

Par suite, la racine à considérer doit être prise inférieure ou supérieure à  $G_0$  suivant que  $v$  est inférieur ou supérieur à  $1/2$ . Il en résulte que la solution à considérer est  $G = G_1$  pour  $v < 1/2$  et  $G = G_2$  pour  $v > 1/2$ .

On peut mettre les deux cas sous une formulation unique en remarquant que le discriminant (I8) peut se mettre sous la forme

$$\Delta = (2v - 1)^2 \psi \{ \psi + 4au (1 - u) (1 - \psi)^2 \} \quad (I16)$$

Comme on choisit la racine en fonction du signe de  $(2v - 1)$ , la racine à prendre est donc :

$$G = (B - |1 - 2v| D) / 2A \quad (I17)$$

$$\text{avec } D = \{ \psi [\psi + 4au (1 - u) (1 - \psi)^2] \}^{1/2} \quad (I18)$$

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Chamberlain J. K., Clayton F. M., Sari H. et Vandamme P., *Receiver techniques for microwave digital radio*, in Microwave Digital Radio (L. J. Greenstein et M. Shafi ed.), pp.131-141, IEEE Press, 1988
- Cherian K.C., (1941), *A bivariate correlated gamma-type distribution function*, J. Indian Math.Soc., 9, pp.133-144.
- Ciarletti V. et Sylvain M. , (1991), *Physical interpretation of the effect of the antennas heights on multipath propagation occurrence*, in Proceedings of 7th Inter. Conf. on Ant. and Propag. (York, 15-18 avril 1991), IEE CP-333, pp.50-53.
- Fréchet, M., (1951), *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, Annales de l'Université de Lyon, Section A, Série 3, 14, pp.53-77.
- Ghahremani T., (1990), *Modélisation d'un canal de transmission en diversité d'espace pendant les périodes de trajets multiples*, Note technique CRPE/184.
- Golé P., Lavergnat J. et Sylvain M., (1987), *Description and preliminary results of the PACEM 2 experimental program*, in Proceedings of GLOBECOM'87, pp. 38.5.1–38.5.5
- Golé P., Sylvain M. et Ghahremani T., (1988), *Long term multipath effects on a space-diversity channel*, in Proceedings of ISRP'88 (International Symposium on Radio Propagation, Pékin), pp.464-467.
- Lavergnat J. et Golé P., (1991), *Statistical behavior of a simulated microwave multipath channel*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., 39, n°12, pp.1697-1706
- Lavergnat J., et Sylvain M., (1985), *Statistiques de la fonction de transfert par trajets multiples pour des largeurs de bande moyennes*, Annales des Télécommunications, 40, n° 11-12, pp. 604-616.
- Lavergnat J., Sylvain M. et Bic J. C., (1990), *A method to predict multipath effects on a line-of-sight link*, IEEE Trans. on Comm., 38, n°10, pp. 1810-1822
- Lévy A. J., et Sylvain M., (1989), *Signatures et modèles de propagation pour faisceaux hertziens numériques*, Annales des Télécommunications, 44, n° 7-8, pp. 347-362.
- Mardia K. V., (1967), *Some contributions to contingency-type bivariate distributions*, Biometrika, 54, pp. 235-249

Mardia K. V., Families of bivariate distributions, GRIFFIN' STATISTICAL MONOGRAPHS & COURSES, GRIFFIN, LONDON, 1970

Plackett R. L., (1965), *A class of bivariate distributions*, J. Amer. Statis. Ass., 60, pp. 516-522

Rummler W. D., Coutts R. P., et Liniger M., *Multipath fading models for microwave digital radio*, in Microwave Digital Radio (L. J. Greenstein et M. Shafi ed.), pp.67-77, IEEE Press, 1988

*Remerciements : l'auteur tient à exprimer ses remerciements à Mme Cl. Marimont qui a conduit jusqu'au bout avec une grande patience le traitement informatique des données nécessaire à cette étude.*