



HAL
open science

**Influences de collisions sur les plasmas et
magnétoplasmas linéaires homogènes par une méthode
Fokker-Planck**
Jean-Robert Burgan

► **To cite this version:**

Jean-Robert Burgan. Influences de collisions sur les plasmas et magnétoplasmas linéaires homogènes par une méthode Fokker-Planck. [Rapport de recherche] Note technique CRPE n°24, Centre de recherches en physique de l'environnement terrestre et planétaire (CRPE). 1976, 108 p. hal-02191555

HAL Id: hal-02191555

<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02191555>

Submitted on 23 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RP 182 (7)

**CENTRE NATIONAL D'ETUDES
DES TELECOMMUNICATIONS**

**CENTRE NATIONAL DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**CENTRE DE
RECHERCHES
EN PHYSIQUE DE
L'ENVIRONNEMENT
TERRESTRE
ET PLANETAIRE**

CRPE

**NOTE TECHNIQUE
CRPE / 24**

*Influence des collisions sur les plasmas
et magnétoplasmas linéaires homogènes
par un modèle FOKKER-PLANCK*

par

J.R. BURGAN

Centre de Recherche en Physique
de l'Environnement Terrestre et Planétaire

Note Technique CRPE/24

Influences de collisions sur les plasmas
et magnétoplasmas linéaires homogènes
par une méthode Fokker - Planck

par

Jean - Robert BURGAN

CRPE - PCE

45045 ORLEANS CEDEX FRANCE

octobre 1976

p.o. 
Le Directeur
J. HIEBLOT

Remerciements

Avant de présenter cette étude je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Dr M.R. FEIX qui me guida et me conseilla si utilement tout au long de ce travail.

Monsieur le Professeur CHAPELLE a bien voulu accepter la présidence du jury, je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie également le Dr F. ENGELMANN, Monsieur le Professeur SALMON, le Dr L.R.O. STOREY et Monsieur VUILLEMIN d'avoir aimablement accepté de participer au jury.

Je suis redevable au Dr E. FIJALKOW de sa précieuse et efficace collaboration sans laquelle ce travail n'aurait pu être mené à terme aussi rapidement.

Enfin que tous ceux qui, en quelque manière que ce soit, ont contribué à ce travail, soient assurés de ma gratitude.

PLAN

- Abstract	
- Notations utilisées	
- Introduction	1
- <u>Chapitre I</u> - Formulation du problème	3
A - <u>Les modèles statistiques</u>	4
1. Modèle Markovien :	
Fokker-Planck, Lenard et Bernstein, Dougerthy	4
2. Modèle cinétique :	
Frey-Salmon - Rattachement à l'équation de Lenard et Balescu	5
B - <u>Equations des plasmas binaires</u>	7
1. Linéarisation des équations	7
2. Justification du modèle choisi	9
- <u>Chapitre II</u> - Traitement mathématique	11
A - <u>Résolution du système</u>	11
1. Transformations intégrales	13
2. Solution aux valeurs propres	17
3. Calcul formel de la fonction diélectrique	22
4. Calcul des coefficients	24
5. Expression du prolongement analytique	30
6. Expression intégrale - Résumé des formules obtenues	34
B - <u>Etudes des principales limites</u>	36
1. Collisions évanescentes (Beta tendant vers zero)	36
2. Limite amagnétique (Bo tendant vers zero)	38
3. Ondes parallèles (Theta nul)	39
4. Diagramme général des limites	41

C - <u>Propriétés des racines de l'équation de dispersion</u>	42
1. Unicité de la solution "amortie"	42
2. Symétrie des zeros de ϵ	44
D - <u>Remarques sur le chapitre II</u>	45
- <u>Chapitre III - Le traitement numérique</u>	47
1 - Problèmes liés au traitement numérique	48
2 - Organigramme du calcul de la fonction diélectrique	50 à 53
3 - Les programmes FORTRAN utilisés	50
	55 à 63
4 - Résolution de l'équation de dispersion	50
- <u>Chapitre IV - Etude de l'influence des collisions sur les principaux problèmes de propagation</u>	65
A - <u>Influence sur les caractéristiques du plasma en l'absence de champ magnétique</u>	66
1. Influence sur la fonction diélectrique de plasma	66
2. Suivi des pôles de Landau	66
3. Oscillations forcées	66
B - <u>Influence sur les termes d'excitation</u>	73
1. Les facteurs d'excitation	73
2. Résonances et leur amortissement collisionnel	78
3. Etude de l'amortissement des excitations en présence de champ magnétique	87
C - <u>Propagation perpendiculaire</u>	99
1. Les modes de Bernstein en plasma collisionnel	99
2. Influence sur les échos linéaires	111
- Conclusions	126
- Appendice 1 - Calcul de l'intégrale "J"	129
- Bibliographie	133

Abstract

Dispersion relation in collisional plasma with magnetic field **

The linearized Vlasov equation with uniform external magnetic field \vec{B} , and a Fokker-Planck collision term, can be written in the Laplace-Fourier formalism for longitudinal plasma oscillations :

$$(1) \quad \frac{1}{2} \Delta f + \left(\vec{v} + \frac{e\vec{v}}{m\beta} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla f + \left(\gamma - (ikv - \frac{s}{\beta}) \right) f = \tilde{E} \cdot \nabla f^0 + f^i$$

where β is an effective collision frequency, f the perturbed distribution. In solving this equation, jointly with Poisson's relation, it is convenient to make a Fourier analysis in velocity space. After many algebraic transformations we obtained the eigenfunctions of the system which consist in Hermite and Laguerre polynomials plus the classical Fourier expansion. Using the eigenfunctions, we obtained for the dispersion relation the Dougherty's formula :

$$(2) \quad 1 + k^2 D^2 = \frac{s}{\beta} \int_0^1 \exp(\mu(1-x) + \eta(\cos 2\Phi - x \cos(2\Phi - \text{tg} \Phi \ln x))) x^{s/\beta + \mu + \eta - 1} dx$$

where $\mu = \frac{W_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{\beta^2}$; $\eta = \frac{[W_0 k \sin \theta \cos \Phi]^2}{\beta^2}$; $\Phi = \text{Arctg}(\frac{eB}{m\beta})$ and D the Debye length.

The new interesting results consist in the analytic prolongation which permits an easier computation of the classical problems in linear plasma and in the investigation of the limits.

**Title of a communication - Book of abstracts (M3) -
Second International Congress on Waves and Instabilities in Plasmas
March 17-21, 1975 - Innsbruck, Austria

Notations utilisées

1 - Symboles mathématiques

$$\int f(\vec{v}) d^3v$$

(sans indication des bornes d'intégration) est une contraction de l'écriture correcte :

$$\iiint_{-\infty-\infty-\infty}^{\infty\infty\infty} f(v_1, v_2, v_3) dv_1, dv_2, dv_3$$

 $\vec{\vec{A}}$

tenseur de rang deux

•

produit tensoriel

 $\frac{D}{Dt}$

dérivée convective :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$$

 $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f$

≡ grad(f) gradient

 $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{A}$
≡ div \vec{A} divergence de \vec{A}
 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \wedge \vec{A} \\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \end{array} \right.$
≡ rot \vec{A} rotationnel de \vec{A}
 $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$
produit mixte : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$
 $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$

produit hermitique

 $\|\psi\|$
norme fonctionnelle : $\|\psi\|^2 = \langle \psi, \psi \rangle > 0$

o(f)

valeur asymptotique de la fonction f

 \hat{D}

opérateur linéaire

2 - Fonctions usuelles

$H_n(x)$	polynôme d'Hermite d'ordre n
$L_n^\alpha(x)$	polynôme de Laguerre d'ordre n, généralisé au rang α
$\Gamma(x)$	fonction eulérienne de 2e espèce
$Im(x)$	fonction modifiée de Bessel de 1er espèce d'ordre m

3 - Notations réservées aux principales grandeurs physiques

\vec{k}	vecteur d'onde
ω	pulsation de l'onde
s	pulsation complexe, variable de Laplace
D	longueur de Debye
ω_c	fréquence gyromagnétique
ω_p	fréquence de plasma électronique
ρ	rayon de Larmor
β	fréquence de collision
W_0	vitesse thermique moyenne
B_0	induction magnétique uniforme extérieure
θ	angle azimutal
$k_{ }$	composante de k dans la direction B_0

k_{\perp} composante de \vec{k} dans la direction perpendiculaire
à \vec{B}_0

- les termes longitudinal et transversal sont relatifs aux positions de \vec{E} par rapport à \vec{k}
- les termes parallèle et perpendiculaire sont relatifs aux positions de \vec{E} par rapport à \vec{B}_0

Les grandeurs intermédiaires sont définies ou explicitées dans le texte.

Introduction

L'étude des perturbations linéaires dans les plasmas dilués fortement ionisés a fait l'objet d'un nombre considérable de travaux dans ces dernières décennies en raison des applications directes à la fusion thermonucléaire et à la physique de l'ionosphère.

Après l'étude des magnetoplasmas (GORDEYEV-BERNSTEIN) les physiciens ont tenté d'élucider le rôle joué par les interactions individuelles (encore appelées collisions) entre les particules ionisées ainsi que les interactions électrons-neutres. Après les premières démarches phénoménologiques (Bathnagar - Gross - Krook) des modèles plus élaborés ont été proposés ou étudiés. Compte tenu de la complexité du problème, la discrimination entre différents modèles proposés est malaisée et seul le bon sens (physique !), la cohérence logique, le bon accord avec les données expérimentales peuvent plaider en faveur de telle ou telle théorie. Il n'en reste pas moins vrai que certains auteurs s'étonnent encore de la présence de terme phénoménologique dans les équations ou s'expliquent mal leur rôle physique.

Quelques physiciens, convaincus que le seul rôle des collisions dans les problèmes de propagation d'onde est le lissage des courbes obtenues, se bornent à substituer dans les équations de la théorie non collisionnelle une pulsation complexe $\omega + i\nu$ à la pulsation originelle (encore ne faut-il pas le faire dans tous les termes). Cette méthode en gros justifiable en plasma froid relève du plus pur empirisme en plasma chaud.

L'excès en sens opposé est tout aussi regrettable. Certains auteurs se plaisent à compliquer le problème en surajoutant aux collisions prédominantes des termes d'interactions multiples, dont le seul rôle semble de rendre impossible les résolutions analytiques et de multiplier les coefficients phénoménologiques. Un lourd et pénible calcul numérique donne après ajustement de ces coefficients un bon accord avec l'expérience !!

Le meilleur modèle proposé à ce jour dérive de la théorie des processus stochastiques et est une adaptation de l'équation de Fokker et Planck. Amorcé par Chandrasekhar (Rev. Mod. Phys. 15.1(1943)) étudié par Lénard et Bernstein, il a été étendu aux magnétoplasmas par Dougherty.

Le but du présent travail est la résolution analytique complète des équations inhérentes à ce modèle, la construction d'un programme numérique d'utilisation et l'application aux principaux problèmes de propagation d'ondes dans les magnétoplasmas.

Nous avons ainsi en vue la justification du modèle choisi qui nous semble, dans la plus grande gamme des problèmes envisagés être le meilleur compromis entre la théorie, l'aisance d'emploi et la réalité physique de ces conséquences.

Le premier chapitre sera consacré à la formulation du modèle et à l'élaboration des équations qui le gouvernent. Nous en donnerons deux justifications théoriques à l'aide de la théorie de Fokker-Planck et de la théorie cinétique de Frey-Salmon.

Ce deuxième chapitre sera consacré aux résolutions analytiques.

Le troisième chapitre sera consacré au traitement numérique.

Enfin le dernier chapitre sera consacré aux applications.

CHAPITRE I

Formulation du modèle

La distribution d'un plasma à une composante est régie par l'ensemble des équations cinétiques et des équations de Maxwell.

$$I-0-1 \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_0 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_0} + \frac{1}{m_0} \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial \vec{r}_0} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_0} \right\} f_0 = \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{oe} + \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{oi} + \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{oo}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_h \frac{\partial}{\partial \vec{r}_h} + \frac{1}{m_h} \left(\frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial \vec{r}_h} - Z_h e (\vec{E}_{ex} + \vec{E}_{in} + \vec{w}_h \wedge (\vec{B}_{ex} + \vec{B}_{in})) \right) \frac{\partial}{\partial \vec{w}_h} \right\} f_h =$$

$$\left(\frac{\delta f_h}{\delta t} \right)_{he} + \left(\frac{\delta f_h}{\delta t} \right)_{ho} + \left(\frac{\delta f_h}{\delta t} \right)_{hi} \quad h \in \{e, i\}$$

$$I-0-2 \quad \frac{\partial \vec{E}_{in}}{\partial \vec{r}} = -\frac{e}{\epsilon_0} (N_e - \sum_i Z_i N_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \wedge \vec{E}_{in} = -\frac{\partial \vec{B}_{in}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{B}_{in} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \wedge \vec{B}_{in} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{in} - \sum_h Z_h e \int \vec{w}_h f_h d\vec{w}_h$$

φ_{ex} , \vec{E}_{ex} , \vec{B}_{ex} désignent respectivement les potentiel, champ électrique, induction magnétique extérieure. h est l'indice de la population considérée ion ou électron, Z la valence de l'ion correspondant et l'indice o désigne la population de neutres restants.

Si le plasma est complètement ionisé ce que nous supposons, l'évolution cinétique de la population d'électrons est régie, en l'absence de potentiel extérieur, par l'équation :

$$I-0-3 \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{w} \wedge \vec{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \right\} f = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{ee} + \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{ei}$$

(où l'indice e a été omis pour alléger l'écriture, et où \vec{E} et \vec{B} désignent les champ et induction auto-compatibles).

Il faut alors expliciter les termes d'interaction électron-électron et électron-ion. Dans ce but nous examinerons les principaux modèles statistiques proposés :

A - Les modèles statistiques

1 - Modèle Markovien

Les forces d'interaction à l'intérieur du plasma sont d'origine électromagnétique, leur action est à longue portée. Un électron subit de ce fait un grand nombre de petites déviations. Ce processus markovien est assimilable au mouvement brownien et l'on convient de décrire ce type d'interaction par l'équation de Fokker-Planck.

$$I-A-1-1 \quad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left(\vec{A}_{ei} f + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{w}} f \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left(\vec{A}_{ee} f + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{w}} f \right)$$

écrivant alors les équations de conservation de la charge, de la quantité de mouvement et de l'énergie et exigeant une solution maxwellienne à l'équilibre, le terme de collision prend la forme (Lenard - Bernstein - Dougherty) :

$$I-A-1-2 \quad \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right) = \beta_{ee} \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left((\vec{w} - \vec{u}) f + w_0^2 \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} \right) + \beta_{ei} \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left(\vec{w} f + w_0^2 \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} \right)$$

où w_0^2 est le carré de la vitesse thermique, β_{ee} et β_{ei} sont des constantes phénoménologiques ; leur dimension leur confère une analogie certaine avec les fréquences de collisions habituelles en théorie des plasmas.

En toute rigueur les coefficients de friction et de diffusion sont anisotropes en présence de champ magnétique et doivent dépendre de la vitesse et l'équation I-A-1-2 doit être considérée dans une large mesure comme un développement au premier ordre de la véritable équation de Fokker-Planck.

2 - Modèle cinétique

On peut renoncer à l'interprétation brownienne des phénomènes et introduire des potentiels d'interaction interparticulaires ce qui permet le retour au formalisme classique de la hiérarchie BBGKY*.

La fermeture de la hiérarchie s'effectue grâce à l'hypothèse Frey-Salmon ([22] à [25]): la relaxation au pseudo équilibre local ψ_{123}^0 de la fonction de distribution triple f_{123} est linéaire et s'effectue en un temps moyen τ , durée de passage de l'électron dans la zone répulsive du potentiel. Le couplage des deux premières équations de la hiérarchie BBGKY est ainsi assuré et le terme d'interaction prend la forme (cf Valton [21]).

$$I-A-2-1 \quad \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) = \frac{n}{2} w_0^2 \tau_e B \frac{\partial}{\partial \vec{w}} (\vec{w} - \vec{u} f + w_0^2 \frac{\partial}{\partial \vec{w}} f) + \frac{n_i w_{ei}^2}{2} \tau_{ie} B \frac{\partial}{\partial \vec{w}} (\vec{w} f + w_{oi}^2 \frac{\partial}{\partial \vec{w}} f)$$

où B est une intégrale dépendant du potentiel d'interaction envisagé.

Si l'on se contente des termes du premier ordre significatifs, il vient :

$$I-A-2-2 \quad \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) = \frac{N}{2} e w_0^2 (\tau_B)^0 \frac{\partial}{\partial \vec{w}} ((\vec{w} - \vec{u}) f + w_0^2 \frac{\partial}{\partial \vec{w}} f) + \frac{N e_i w_{ei}^2}{2} (\tau_B)^{(0)} \frac{\partial}{\partial \vec{w}} (\vec{w} f + w_{oi}^2 \frac{\partial}{\partial \vec{w}} f)$$

les termes $\frac{N e}{2} w_0^2 (\tau_B)^0$ sont des constantes et on retrouve ainsi une complète analogie avec I-A-1-2..

* Bogolioubov - Born - Green - Kirkwood - Yvon

Enfin notons que cet opérateur de collision se rattache aussi à l'équation cinétique générale étudiée par Lénard et Balescu. Dans cette équation cinétique on tient compte des collisions triples en introduisant les corrélations entre trois particules sous la forme d'un développement de la fonction de distribution qui s'écrit :

I-A-2-3

$$f_{123} = f_1 f_2 f_3 + f_1 h_{12} + f_2 h_{23} + f_3 h_{31}$$

On calcule alors l'effet d'écran dû à l'influence du nuage qui entoure la "particule-test". Cet effet d'écran se traduit par un facteur de forme \tilde{D} sur le potentiel d'interaction. Moyennant quelques hypothèses sur le mouvement de la "particule-test" qui consistent en général à admettre que la trajectoire est peu perturbée par les fluctuations rapides de densité de son cortège (ou hypothèses adiabatiques) on est conduit à des équations de Lénard - Gernsey - Balescu, de Fokker-Planck avec mémoire ou de Silin.

On trouvera le détail de ces théories dans les ouvrages suivants :

- R.L. GERNSEY : "The kinetic theory of fully ionized gases" -
-Thèse-University of Michigan (60)

- A. LENARD : Ann. Phys. 10 390 (60)

- R. BALESCU : Phys. Fluids 3 52 (60)

- I. PRIGOGINE - R. BALESCU : Phys.

1) 25 281 302 (59)

2) 26 146 (60)

(On trouvera les ouvrages sur la théorie Frey-Salmon dans la bibliographie).

B - Equation des plasmas binaires

Nous nous placerons dans tout ce qui suit dans le cadre habituel des approximations de plasma infini, linéaire, homogène, dilué et complètement ou presque complètement ionisé. Toutes les perturbations apportées au plasma, à l'équilibre thermodynamique, seront des perturbations faibles entrant dans le domaine linéaire. L'induction magnétique \vec{B} sera créée par une induction extérieure \vec{B}_0 et l'on négligera les effets d'induction des charges du plasma.

L'état d'équilibre thermodynamique sera décrit par une distribution de Maxwell globale.

$$f_i^{(N)} = \left(\frac{m_i N_i}{2\pi k T_i} \right) \exp\left(-\left(\frac{w_i^2}{2W_{oi}^2}\right)\right)$$

La perturbation n'affectera que la population électronique et en raison du rapport des masses très peu la population ionique qui se comportera comme un fond continu toujours à l'équilibre.

Enfin nous ne nous occuperons que de propagation longitudinale, de loin la plus caractéristique dans les problèmes envisagés.

Dans ces conditions, il apparaît que le terme prédominant est l'interaction électron-ion, due au nuage d'ions, de la sphère de Debye qui "habille" l'électron. L'interaction électron-électron est du second ordre et nous la négligerons. Notons que sa prise en compte dans les équations est tout à fait possible au prix de calculs supplémentaires.

1 - Linéarisation des équations

Compte tenu des conditions exigées pour le plasma et du choix du terme de collision I-A-1-2, le système général I-0-1, I-0-2 se réduit à l'ensemble :

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{w} \wedge \vec{B}) \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = \beta \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \left(\vec{w} f + w_0^2 \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} \right)$$

I-B-1-1 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} = -\frac{e}{\epsilon_0} (n - N) \quad ; \quad n = \int f d^3 w$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} = \vec{0}$$

Toutes les perturbations étant faibles, posons :

I-B-1-2 $\vec{E} = \vec{E}^{(1)}$
 $f = f^{(M)} + f^{(1)} \quad , \quad f^{(M)} = \left(\frac{N - w_0^2}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{w^2}{2w_0^2}\right)$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}^{(1)}$$

il vient en ne conservant que les termes du premier ordre et en rappelant que $\vec{w} \wedge \vec{B} \frac{\partial f^{(M)}}{\partial \vec{w}} = 0$ en raison de la colinéarité de \vec{w} et de $\frac{\partial f^{(M)}}{\partial \vec{w}}$:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} \vec{E}^{(1)} \frac{\partial f^{(M)}}{\partial \vec{w}} - \frac{e}{m} \vec{w} \wedge \vec{B}_0 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{w}} = \beta \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \left(\vec{w} f^{(1)} + w_0^2 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{w}} \right)$$

I-B-1-3

$$\frac{\partial \vec{E}^{(1)}}{\partial \vec{r}} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int (f - f^{(M)}) d^3 w = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f^{(1)} d^3 w$$

$$\frac{\partial \vec{E}^{(1)}}{\partial \vec{r}} = \vec{0}$$

Notons que la fonction de distribution perturbée $f^{(1)}$ est d'ordre asymptotique $o\left(e^{-\frac{w^2}{2w_0^2}}\right)$ comme il résulte immédiatement de l'équation, si l'on y fait $\beta = 0$; $\vec{B}_0 = \vec{0}$. Cette remarque nous sera utile lors du traitement mathématique.

2 - Justification du modèle choisi

Résumons brièvement les principales propriétés physiques du terme de collision de Fokker-Planck I-0-2. Tout d'abord il assure manifestement la conservation de la charge électrique. Il rend l'équation de Vlasov irréversible ce qui assure la croissance de l'entropie. Il n'y a plus conservation de la quantité de mouvement ; la friction sur le fond infini, continu des ions assure le mécanisme de dissipation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, conformément à l'équation de Langevin.

Multipliant l'équation I-B-1-3 par $\vec{w} d^3w$ et intégrant, il vient en posant

I-B-2-1

$$\vec{N}\vec{u} = \int \vec{v} f^{(1)} d^3v$$

I-B-2-2

$$mN \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{u} + \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{r}} = Ne \left(\vec{E}^{(1)} + \vec{u} \wedge B_0 \right) - \beta N \vec{u}$$

qui est précisément l'équation de Langevin. ($\vec{\Psi}$ est le tenseur des pressions interparticulaires)

Enfin ce terme ne contient qu'une seule constante phénoménologique : la fréquence de collision . La théorie de Fokker-Planck ou de Frey-Salmon permet en principe de calculer cette fréquence.

(Diverses estimations de ce paramètre permettent d'en fixer l'ordre de grandeur :

SPITZER :

$$\beta \approx (11.44 T^{3/2} A^{1/2})^{-1} N \log \Lambda$$

$$\text{ou } \Lambda = (3/2e^3) (k^3 T^3 / \pi N)^{1/2}$$

et A est la masse atomique considérée.

FOKKER-PLANCK :

$$\beta \approx 4\pi e^4 N / m^2 w_0^3)$$

Faisons une dernière remarque en ce qui concerne le caractère isotrope des coefficients choisis. Si la longueur de Debye du plasma est sensiblement plus petite que le rayon de Larmor, on peut raisonnablement faire l'hypothèse que le spectre des fluctuations du champ $\vec{E}^{(1)}$ est isotrope et ce cas est on le sait le plus fréquent. (Thompson, Hubbard - Rev. Mod. Phys. (1960), Dougherty - Physics of Fluids (1964)).

CHAPITRE II

Traitement mathématique

A - Résolution du système

Il existe deux principales méthodes pour résoudre le système intégral-différentiel :

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(1)} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{r}} - \frac{e \vec{E}^{(1)}}{m} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{w}} - \frac{e}{m} [\vec{w} \wedge \vec{B}_0] \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{w}} = \beta \frac{\partial}{\partial \vec{w}} (\vec{w} f^{(1)}) + w_0^2 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial w_0^2}$$

II-A-0-1
$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{E}^{(1)} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f^{(1)} d^3 w$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \wedge \vec{E}^{(1)} = \vec{0}$$

La première a été développée par Dougherty dans "Model Fokker-Planck equation for a plasma and its solution"[8] paragraphe V : procédure pour résoudre l'équation de Boltzmann. Elle consiste à déterminer la fonction de Green $G(\vec{r}, \vec{w}, t, \vec{r}_0, \vec{w}_0, t_0)$ pour une source ponctuelle $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) \cdot \delta^3(\vec{w}-\vec{w}_0) \cdot \delta(t-t_0)$ et d'en déduire la fonction de distribution $f^{(1)}$ associée à la vraie source $h(\vec{r}_0, \vec{w}_0, t_0)$ par la convolution sextuple :

II-A-0-2
$$f^{(1)}(\vec{r}, \vec{w}, t) = \int_{(7)} h(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{w}-\vec{w}_0, t-t_0) G(\vec{r}, \vec{w}, t, \vec{r}_0, \vec{w}_0, t_0) d^3 r_0 d^3 w_0 dt_0$$

Ce résultat étant purement formel, il faudra encore prendre les transformées de Laplace et Fourier qui conduisent à une intégrale d'où l'on peut déduire l'expression de la fonction diélectrique.

Nous n'utiliserons pas cette méthode pour trois principales raisons :

. Le formalisme à employer est extrêmement compliqué, il exige de développer une algèbre antisymétrique particulière en raison de la présence du tenseur magnétique et nécessite des calculs longs et délicats qui ont été développés dans le cadre d'une théorie très générale.

. Il faut faire ensuite l'hypothèse que la fonction $f^{(1)}(t, \vec{k}, \vec{v})$ varie comme $e^{i\{\omega t - \vec{k}\vec{r}\}} f(\vec{v})$ pour utiliser la convolution sextuple II-A-0-2. Ce qui est justifiable a posteriori, (il suffit de montrer que les zéros de l'équation de dispersion obtenue sont tous simples) mais semble quelque peu limiter la généralité de la méthode.

. Enfin cette technique intégrale donnant comme résultat... une intégrale, il faut en déduire son prolongement analytique en deçà de l'abscisse de convergence de la variable de Laplace. Ce prolongement, bien qu'étant unique, admet plusieurs formes équivalentes de séries pour le représenter (voir au sujet de la manipulation numérique de ces séries les remarques du Chapitre III-paragraphe 1).

La seconde méthode, que nous adopterons, consiste à calculer les fonctions propres et valeurs propres associées au système.

Elle ne nécessite comme hypothèse que les seules conditions requises pour assurer la validité des transformations de Laplace et Fourier. Elle donne un ensemble de fonctions propres complètes pour la fonction de distribution ce qui permet d'en calculer les moments.

Enfin la solution s'exprime sous forme d'une série ce qui fournit d'emblée le prolongement analytique correct cherché.

Les paragraphes suivants sont consacrés au développement de la méthode et aux détails des calculs.

1 - Transformations intégrales

Introduisons les variables réduites :

$$\text{II-A-1-1} \quad v_j = \frac{w_j}{\sqrt{2w_0}} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

et définissons les transformations de Laplace et Fourier :

$$f_1(s, \vec{k}, \vec{v}) = \int_0^\infty e^{-st} \int e^{-i\vec{k}\vec{r}} f^{(1)}(t, \vec{r}, \vec{v}) d^3r dt$$

$$\text{II-A-1-2} \quad \vec{\epsilon}(s, \vec{k}) = \int_0^\infty e^{-st} \int e^{-i\vec{k}\vec{r}} E^{(1)}(t, \vec{r}) d^3r dt$$

$$f_0(\vec{k}, \vec{v}) = \int e^{-i\vec{k}\vec{r}} f^{(1)}(t=0, \vec{r}, \vec{v}) d^3r$$

les intégrales étant définies pour $\text{Re}(s) > 0$

Appliquées à (II-A-0-1) ces transformations conduisent au nouveau système :

$$\text{II-A-1-3} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}^2} f_1 + \left(\vec{v} + \frac{e}{m\beta} \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \right) \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} + \left(3 - \frac{\sqrt{2w_0}}{\beta} i\vec{k}\vec{v} \right) f_1 - \frac{s}{\beta} f_1 = \frac{e}{m\beta} \frac{\vec{\epsilon}}{\sqrt{2w_0}} \left(\frac{\partial f^{(M)}}{\partial \vec{w}} \right)_{\vec{v} + \frac{e}{\beta}}$$

$$\text{II-A-1-4} \quad i\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = -\frac{e}{\epsilon_0} (2w_0^2)^{3/2} \int f_1 d^3v$$

$$\text{II-A-1-5} \quad i\vec{k} \wedge \vec{\epsilon} = \vec{0}$$

II-A-1-5 entraîne la colinéarité des vecteurs \vec{k} et $\vec{\epsilon}$ le terme

$\left(\frac{\partial f^{(M)}}{\partial \vec{w}} \right)_{\vec{v}}$ peut alors s'écrire :

$$\text{II-A-1-6} \quad \vec{\epsilon} \cdot \left(\frac{\partial f^{(M)}}{\partial \vec{w}} \right)_{\vec{v}} = -(i\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}) \frac{i\vec{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial f^{(M)}}{\partial \vec{v}}$$

où :

$$\text{II-A-1-7} \quad f_M(\vec{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-v^2)$$

Dans le but de simplifier quelque peu l'écriture, introduisons les vecteurs "sans dimension" $\vec{b}, \vec{\kappa}$

$$\text{II-A-1-8} \quad \vec{b} = \left(-\frac{2eB_0}{m\beta}\right) \frac{\vec{B}_0}{B_0} = -2 \frac{\omega_c}{\beta} \frac{\vec{B}_0}{B_0}$$

où ω_c n'est autre que la fréquence gyromagnétique : $\omega_c = \frac{e}{m} B_0$

$$\text{II-A-1-9} \quad \vec{\kappa} = \frac{\sqrt{2} w_0 \vec{k}}{\beta}$$

puis définissons la transformation intégrale :

$$\text{II-A-1-10} \quad \Phi(s, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) = (ik\epsilon)^{-1} A \int e^{i\vec{\xi}\vec{v} + \frac{1}{2}v^2} f_1(s, \vec{k}, \vec{v}) d^3v$$

$$G(\vec{\kappa}, \vec{\xi}) = 2A \int e^{i\vec{\xi}\vec{v} + \frac{1}{2}v^2} f_0(\vec{k}, \vec{v}) d^3v$$

Cette transformation n'est autre que l'intégrale de Fourier appliquée à la fonction $e^{\frac{1}{2}v^2} f_1(s, \vec{k}, \vec{v})$ (resp. $e^{\frac{1}{2}v^2} f_0$). Or la fonction $f^{(1)}(t, \vec{r}, \vec{v})$ (resp. $f^{(0)}$) donc la fonction $f_1(s, \vec{k}, \vec{v})$ (resp. f_0) est d'ordre asymptotique : $o(e^{-v^2})$ (cf chapitre I), ce qui valide la transformation II-A-1-10, en raison de la convergence en $o(\exp(-\frac{v^2}{2}))$ de l'intégrant. A est une constante multiplicative dont le seul rôle est de simplifier les expressions obtenues :

$$\text{II-A-1-11} \quad A = -\frac{mw_0^2 k^2}{2Ne} (2\pi w_0^2)^{3/2}$$

Appliquant cette transformation aux équations II-A-1-3 et II-A-1-4, il vient :

$$\text{II-A-1-12} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{\xi}^2} + (\vec{b} \wedge \vec{\xi} - 2\vec{\kappa}) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\xi}} + \left(3 - \frac{2s}{\beta} - \xi^2\right) \Phi = \frac{G}{(ik\epsilon)} - (2\pi)^{3/2} \frac{\vec{\kappa} \vec{\xi}}{\kappa \xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\text{II-A-1-13} \quad 1 = \frac{4Ne^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{\beta^2 \pi^{3/2} \kappa^2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{-\frac{v^2}{2}} \int e^{-i \vec{\xi} \vec{v}} \Phi(s, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) d^3 \xi d^3 v$$

Introduisons alors deux vecteurs, qui sont en fait essentiellement deux facteurs intégrants de l'équation.

$$\text{II-A-1-14} \left\{ \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{4\vec{\kappa} + (\vec{b}\vec{\kappa})\vec{b}}{b^2 + 4} \\ \vec{e}_2 &= \frac{2}{b^2 + 4} \vec{b} \wedge \vec{\kappa} \end{aligned} \right.$$

(ces deux vecteurs étant manifestement orthogonaux), et effectuons dans II-A-1-12 et II-A-1-13 le changement de fonction inconnue et de variable auxiliaire :

$$\text{II-A-1-15} \left\{ \begin{aligned} \Psi(s, \vec{\kappa}, \vec{\sigma}) &= \frac{\exp(e_2^2)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\vec{\zeta}\vec{e}_1} \Phi(s, \vec{\kappa}, \vec{\zeta}) \\ \vec{\sigma} &= \vec{\zeta} + \vec{e}_2 \end{aligned} \right.$$

il vient ainsi après simplification :

$$\text{II-A-1-16} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vec{\sigma}^2} + \vec{b} \wedge \vec{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{\sigma}} + (\gamma - \sigma^2) \Psi = \frac{Ge}{ik\epsilon} e^{e_2^2 - \vec{\sigma}\vec{e}_1} \frac{\sigma^2}{-\vec{\kappa}\cdot\vec{\sigma}e} - \frac{\sigma^2}{2} + \Delta \vec{e}\cdot\vec{\sigma}$$

où l'on a posé :

$$\text{II-A-1-17} \left\{ \begin{aligned} \Delta \vec{e} &= \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \\ \gamma &= 3 - \frac{2s}{\beta} + (e_1^2 + e_2^2 - 2\vec{\kappa}\cdot\vec{e}_1) \end{aligned} \right.$$

Afin de bien mettre en évidence la structure de l'équation, définissons l'opérateur :

$$\text{II-A-1-18} \quad \hat{D} = \frac{\partial^2}{\partial \vec{\sigma}^2} + (\vec{b}, \vec{\sigma}, \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}}) - \sigma^2 \hat{\uparrow}$$

où $(\vec{b}, \vec{\sigma}, \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}})$ est l'opérateur défini par l'identité :

$$\forall \psi, (\vec{b}, \vec{\sigma}, \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}}) \psi \equiv \vec{b} \wedge \vec{\sigma} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\sigma}}$$

et $\hat{\uparrow}$ est l'opérateur unitaire.

puis posons :

$$\text{II-A-1-20} \quad \Psi_0(\vec{\kappa}, \vec{\sigma}) = -\vec{\kappa} \vec{\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \vec{\sigma} \cdot \Delta \vec{e}}$$

$$\text{II-A-1-21} \quad S(\vec{\kappa}, \vec{\sigma}) = G(\vec{\kappa}, \vec{\sigma} - \vec{e}_2) \exp\left(\frac{e^2}{2} - \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_1\right)$$

Ce symbolisme permet d'écrire II-A-1-17 sous forme opératoire :

$$\text{II-A-1-22} \quad (\widehat{D+\gamma}) \Psi = \Psi_0 (ik\epsilon)^{-1} S$$

L'équation II-A-1-13 se transforme également, posant :

$$\text{II-A-1-23} \quad J = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{-\frac{1}{2}v^2} \int e^{-i \vec{\xi} \cdot \vec{v}} \Phi d^3\xi d^3v$$

L'intégrale $\int e^{-i \vec{\xi} \cdot \vec{v}} \Phi d^3\xi$ étant uniformément convergente comme réciproque d'une transformée de Fourier, on peut écrire :

$$\text{II-A-1-24} \quad J = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \Phi \left\{ \int e^{-\frac{1}{2}(\vec{v} + i\vec{\xi})^2 + \frac{1}{2}(i\vec{\xi})^2} d^3v \right\} d^3\xi$$

Soit

$$J = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \Phi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d^3\xi \left(\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\vec{v} + i\vec{\xi})^2} d^3v \right)$$

l'intégrale $\int \int \int e^{-\frac{1}{2}(\vec{v} + i\vec{\xi})^2} d^3v$ est bien connue et vaut $(2\pi)^{3/2}$ d'où

$$\text{II-A-1-25} \quad J = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \Phi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d^3\xi$$

Soit compte tenu des transformations II-A-1-15 et II-A-1-16 :

$$J = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int (2\pi)^{3/2} e^{-\frac{1}{2}(\vec{\sigma} - \vec{e}_2)^2 + (\vec{\sigma} - \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 - \frac{e^2}{2}} \Psi(s, \vec{\kappa}, \vec{\sigma}) d^3\sigma$$

Soit encore (on rappelle l'orthogonalité de \vec{e}_1 et \vec{e}_2)

$$\text{II-A-1-26} \quad J = \int e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{\sigma} + \vec{e}_1 \cdot \vec{\sigma} - \frac{e^2}{2}} \Psi(s, \vec{\kappa}, \vec{\sigma}) d^3\sigma$$

Par suite la relation II-A-1-13 s'écrit simplement :

$$\text{II-A-1-27} \quad \left[e^{\frac{2}{2}} \right] \frac{m \epsilon_0 \beta^2 \pi^{3/2} \kappa^2}{Ne^2} = \int e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \vec{\sigma} \vec{e}_3} \Psi d\vec{\sigma}$$

où l'on a posé :

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Tous ces calculs sont simples, se résumant à des changements de fonctions ou de variables. Il sont plus longs à décrire qu'à exécuter et ont l'avantage de substituer aux équations II-A-0-1 quelque peu encombrantes, le système opératoire équivalent :

$$\text{II-A-1-28} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{D} + \nu I) \Psi = \Psi_0 + (ik\epsilon)^{-1} S \\ e^{\frac{2}{2}} \frac{m \epsilon_0 \beta^2 \pi^{3/2} \kappa^2}{4Ne^2} = \int e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \vec{e}_3 \vec{\sigma}} \Psi d\vec{\sigma} \end{array} \right.$$

2 - Solution aux valeurs propres

Il faut montrer à présent que l'opérateur \hat{D} admet un ensemble complet de fonctions propres orthogonales. A cet effet il est nécessaire de résoudre l'équation :

$$\text{II-A-2-1} \quad \hat{D} \psi = \lambda \psi$$

Soit sous forme explicite :

$$\text{II-A-2-2} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \vec{b} \wedge \vec{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\sigma}} - \sigma^2 \psi = \lambda \psi$$

Choisissons un repère cartésien de vecteur unitaire \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 pour lequel $\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}}{b}$ et des coordonnées cylindriques définies par l'égalité :

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{e}_1 + r \sin \theta \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

II-A-2-2 s'écrit dans ce système de coordonnées :

$$\text{II-A-2-3} \quad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + b \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - (r^2 + z^2) \psi = \lambda \psi$$

On pose (II-A-2-4) $\psi = Z(z) \cdot \psi_1(r, \theta)$ il vient par substitution dans II-A-2-4 puis réduction du facteur $Z \psi_1$:

$$\text{II-A-2-5} \quad \psi_1 \left(\frac{d^2 Z}{dz^2} + (2-z^2) Z \right) + Z \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - r^2 \psi_1 + b \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) = (1+\lambda) Z \psi_1$$

L'équation classique :

$$\text{II-A-2-6} \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + (1-z^2) Z = -2nZ \text{ admet la fonction de Weber-Sonine}$$

$$\text{II-A-2-7} \quad Z = e^{-\frac{1}{2}z^2} H_n(z) \text{ où } H_n(z) \text{ est le polynôme d'Hermite d'ordre } n, \text{ comme fonction propre associée à la valeur } -2n.$$

II-A-2-5 se réduit compte tenu de cette solution à l'équation :

$$\text{II-A-2-8} \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - r^2 \psi_1 + b \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = (1+\lambda+2n) \psi_1$$

On pose ensuite :

$$\text{II-A-2-9} \quad \psi_1(r, \theta) = e^{im\theta} \psi_2(r) \text{ [} m \in \mathbf{Z} \text{] il vient :$$

$$\text{II-A-2-10} \quad \frac{d^2 \psi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_2}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \psi_2 - r^2 \psi_2 = (1+\lambda+2n-imb) \psi_2$$

$$\text{II-A-2-11} \quad \text{Enfin en écrivant } \psi_2 = e^{-\frac{r^2}{2}} r^{|m|} \psi_3(r) \text{ on obtient après réduction :}$$

$$\text{II-A-2-12} \quad \frac{d^2 \psi_3}{dr^2} + \left(\frac{2|m|+1}{r} - 2r \right) \frac{d\psi_3}{dr} = (3+2n-imb+2|m|) \psi_3$$

Le choix de $|m|$ n'est pas arbitraire, la valeur ^+m conviendrait mais conduirait à des intégrales divergentes (cf ci-après II-A-2-26).

Le changement de variable $r^2 = u$ ramène le premier membre à l'équation bien connue :

$$\text{II-A-2-13} \quad u \frac{d^2 \psi_3(u)}{du^2} + (|m| + 1 - u) \psi_3 = (3 + \lambda + 2n + 2|m| - imb) \psi_3$$

qui admet comme fonction propre le polynôme de Laguerre généralisé :

$$\text{II-A-2-14} \quad \psi_3(u) = L_1^{|m|}(u)$$

associé à la valeur propre $-4l$, il vient donc :

$$\text{II-A-2-15} \quad (3 + \lambda + 2n + 2|m| + 4l - imb) \psi_3 = 0$$

Soit :

$$\text{II-A-2-16} \quad \lambda_{n,m,l} = imb - 3 - 2|m| - 2n - 4l$$

En remontant les transformations fonctionnelles on trouve en définitive :

$$\text{II-A-2-17} \quad \psi_{n,m,l} = e^{-\frac{1}{2}(z^2 + r^2) + im\theta} H_n(z) L_1^{|m|}(r^2) r^{|m|}$$

Soit en revenant à la variable $\vec{\sigma}$, dans le repère $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\text{II-A-2-18} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{n,m,l} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + im \text{Arctg}(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})} \sigma^{|m|} H_n(\sigma_3) L_1^{|m|}(\sigma_2^2 + \sigma_1^2) \\ \lambda_{n,m,l} = imb - 3 - 2|m| - 2n - 4l \end{array} \right.$$

Enfin montrons l'orthogonalité de ces fonctions. A cet effet il faut calculer :

$$\text{II-A-2-19} \quad \langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q}^* \rangle = \int \psi_{n,m,l} \psi_{k,p,q}^* d\vec{\sigma}$$

où ψ^* désigne le conjugué de ψ (produit hermitique).

Prenant des coordonnées cylindriques pour calculer l'intégrale du membre droit, il vient :

II-A-2-20 $d^3\sigma = r dr d\theta dz$

II-A-2-21 $\langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q} \rangle = \iiint e^{-r^2 - z^2 + im\theta - ip\theta} r^{(|m| + |p|)} H_n(z) H_k(z) \dots$
 $\dots \times L_1^{|m|}(r^2) L_q^{|p|}(r^2) r dr d\theta dz$

II-A-2-22 $= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_k(z) dz \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r^2)^{\frac{|m| + |p|}{2}} L_1^{|m|}(r^2) L_q^{|p|}(r^2) d(r^2) \dots$
 $\dots \times \int_0^{2\pi} e^{i(m-q)\theta} d\theta$

utilisant les résultats bien connus :

II-A-2-23 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n H_k dz = \delta_{n,k} \sqrt{\pi} 2^n n!$

II-A-2-24 $\int_0^{2\pi} e^{i(m-q)\theta} d\theta = \delta_{m,q} 2\pi$

On en déduit :

II-A-2-25 $\langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q} \rangle = \delta_{n,k} \delta_{m,p} \pi^{3/2} 2^n n! \int_0^{\infty} e^{-x} x^{|m|} L_1^{|m|}(x) L_q^{|m|}(x) dx$

A noter que l'intégrale de la forme :

II-A-2-26 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_1^\alpha L_q^\alpha dx = 1! \Gamma(\alpha+1) \delta_{1,q}$

ne converge que si $\text{Ré}(\alpha) > -1$ ce qui justifie le choix de la valeur absolue de m dans le changement de fonction II-A-2-11, il vient

II-A-2-27 $\langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q} \rangle = \delta_{k,p,q}^{n,m,l} (\pi^{3/2} 2^n n! 1!(|m|+1)!)$

Où $\delta_{k,p,q}^{n,m,l}$ est le symbole de Kronecker généralisé :

$$\text{II-A-2-28} \quad \delta_{k,p,q}^{n,m,l} = \delta_{n,k} \cdot \delta_{m,p} \cdot \delta_{l,q}$$

Enfin notons que le produit

$$\text{II-A-2-29} \quad \pi^{3/2} 2^n n! l! (|m| + 1)!$$

n'est autre que le carré de la norme associée au produit hermitique :

$$\text{II-A-2-30} \quad \langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q} \rangle = \left\| \psi_{n,m,l} \right\|^2 = \delta_{k,p,q}^{n,m,l} N_{n,m,l}^2$$

Il nous faut alors utiliser ces résultats pour résoudre le système II-A-1-28.

A cet effet, posons :

$$\text{II-A-2-31} \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n,m,l} \psi_{n,m,l}$$

$$\text{II-A-2-32} \quad \psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n,m,l}^{(0)} \psi_{n,m,l}$$

$$\text{II-A-2-33} \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} S_{n,m,l} \psi_{n,m,l}$$

Substituant ces valeurs dans la première équation de II-A-1-28 :

$$\text{II-A-2-34} \quad \sum_{nml} a_{n,m,l} (\hat{D} \psi_{n,m,l} + \gamma \psi_{n,m,l}) = \sum_{nml} (a_{n,m,l}^{(0)} + (ik\epsilon)^{-1} S_{n,m,l}) \psi_{n,m,l}$$

utilisant alors l'égalité II-A-2-30:

$$\hat{D} \psi_{n,m,l} = \lambda_{n,m,l} \psi_{n,m,l}$$

$$\text{II-A-2-35} \quad \sum_{nml} (a_{n,m,l} (\lambda_{n,m,l} + \gamma)) \psi_{n,m,l} = \sum_{nml} (a_{n,m,l}^{(0)} + (ik\epsilon)^{-1} S_{n,m,l}) \psi_{n,m,l}$$

Multipliant II-A-2-31 par $\psi_{k,p,q}^*$ et intégrant sur $\{\vec{\sigma}\}$:

II-A-2-36

$$\sum_{nml} (a_{n,m,l} (\lambda_{n,m,l} + \nu)) \langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q} \rangle = \sum_{nml} (a_{n,m,l}^{(0)} + (ik\epsilon)^{-1} S_{n,m,l}) \times$$

$$\dots \times \langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q} \rangle$$

En vertu de l'orthogonalité il vient alors :

II-A-2-37

$$a_{n,m,l} (\lambda_{n,m,l} + \nu) = a_{n,m,l}^{(0)} + (ik\epsilon)^{-1} S_{n,m,l}$$

d'où

II-A-2-38

$$\psi(\vec{\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{n,m,l}^{(0)} + (ik\epsilon)^{-1} S_{n,m,l}}{(\lambda_{n,m,l} + \nu)} \psi_{n,m,l}$$

Ce résultat est bien sûr fondamental puisque la connaissance analytique de $\Psi(\vec{\sigma})$ permet en effectuant les transformations inverses du paragraphe 1 d'expliciter la fonction de distribution en espace de Fourier-Laplace :

II-A-2-39

$$f_1 = \left(\frac{ik\epsilon}{k^2} \right) \frac{2Ne e^{-3/2} e_2^2}{m w_0^2 (2\pi)^3 w_0^3} e^{-\frac{1}{2}(\vec{v} - i\vec{e}_2)^2} \int e^{-i\vec{\sigma}(\vec{v} + i\vec{e}_1)} \psi(\vec{\sigma}) d\vec{\sigma}$$

les \vec{e}_1, \vec{e}_2 étant les vecteurs intégrants exprimés en II-A-1-14

3 - Calcul formel de la fonction diélectrique

Nous n'avons en vue dans ce travail que d'expliciter la fonction diélectrique longitudinale. Il nous faut donc à cet effet calculer seulement l'intégrale II-A-1-28.

Dans ce but décomposons l'intégrant sur la base des fonctions propres :

II-A-3-1

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \vec{e}_3 \vec{\sigma}} = \sum_{nml} Q_{n,m,l} \psi_{n,m,l} = \sum_{nml} Q_{n,m,l}^* \psi_{n,m,l}^*$$

Posons : $\Psi_{k,p,q} = a_{k,p,q} \psi_{k,p,q}$
 et substituons dans l'intégrale :

$$e^{-e^2} m \epsilon_0 \beta^2 \pi^{3/2} \frac{\kappa^2}{4Ne^2} = \int \left[\sum_{nml} Q_{l,m,n}^* \sum_{kpq} \Psi_{k,p,q} \psi_{l,m,n}^* \right] d^3\sigma$$

II-A-3-2

$$= \sum_{nml} \sum_{kpq} Q_{n,m,l}^* a_{k,p,q} \langle \psi_{k,p,q} \psi_{n,m,l} \rangle$$

$$= \sum_{nml} Q_{n,m,l}^* a_{n,m,l} N_{n,m,l}^2$$

On en déduit l'égalité :

$$ik\epsilon = \frac{\sum_{nml} \frac{S_{n,m,l} Q_{n,m,l}^* N_{n,m,l}^2}{(\lambda_{n,m,l} + \nu)}}{e^{-e^2} m \epsilon_0 \frac{\pi^{3/2} \kappa^2}{\beta^{-2} 4Ne^2} - \sum_{nml} \frac{(a_{n,m,l}^{(o)}) Q_{n,m,l}^* N_{n,m,l}^2}{\lambda_{n,m,l} + \nu}}$$

Soit encore :

II-A-3-3

$$\rightarrow ik\epsilon = \frac{\frac{4Ne^2 e^{-e^2}}{m \epsilon_0 \beta^2 \pi^{3/2} \kappa^2} \sum_{nml} \frac{S_{n,m,l} Q_{n,m,l}^* N_{n,m,l}^2}{\lambda_{n,m,l} + \nu}}{1 - \frac{4Ne^2}{m \epsilon_0 \beta^2 \pi^{3/2} \kappa^2} e^{-e^2} \sum_{nml} \frac{a_{n,m,l}^{(o)} Q_{n,m,l}^*}{\lambda_{n,m,l} + \nu}}$$

Le numérateur et le dénominateur de cette expression admettent les mêmes pôles : $\lambda_{n,m,l} + \nu = 0$

Il en résulte que les seuls pôles de $ik\epsilon$ sont les zéros du dénominateur. En outre le numérateur, qui provient de la transformation de la fonction de perturbation $f_0(\vec{k}, \vec{\nu})$ est équivalent à un terme de source densité de charge extérieure (cf Shafranov 1963).

Sans excitation extérieure l'équation II-A-3-3 s'écrit donc :

II-A-3-4

$$\vec{\rightarrow} ik\epsilon = 0$$

et on en déduit que la fonction diélectrique longitudinale doit s'écrire :

$$\text{II-A-3-5} \quad \epsilon_{\parallel}(s, \vec{\kappa}) = 1 - \frac{4Ne}{m \epsilon_0 \beta^2 \pi^{3/2} \kappa^2} e^{-e^2/2} \sum_{nml} \frac{a_{n,m,l}^{(0)} Q_{n,m,l}^* N_{n,m,l}^2}{\lambda_{n,m,l} + \nu}$$

Introduisant dans cette formule la fréquence électronique de

$$\text{II-A-3-6} \quad \text{plasma : } \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}} \text{ et la longueur de Debye :}$$

$$\text{II-A-3-7} \quad D = \frac{W_0}{\omega_p}$$

en se rappelant que $\kappa^2 = \frac{2W_0^2 k^2}{\beta^2}$ on obtient ainsi l'expression formelle de la fonction diélectrique longitudinale de plasma :

$$\text{II-A-3-8} \quad \epsilon_{\parallel}(s, \vec{k}) = 1 - \frac{2}{k^2 D^2} \left(\frac{e^{-e^2/2}}{\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{n,m,l}^{(0)} Q_{n,m,l}^* N_{n,m,l}^2}{\lambda_{n,m,l} + \nu} \right)$$

4 - Calcul des coefficients

Reste à calculer les coefficients qui interviennent dans la série.

Le premier $a_{n,m,l}^{(0)}$ s'obtient aisément en formant le produit hermitique sur l'égalité II-A-2-32 :

$$\text{II-A-4-1} \quad \langle \psi_0, \psi_{n,m,l} \rangle = \sum_{k,p,q} \sum \sum \sum a_{k,p,q}^{(0)} \langle \psi_{k,p,q}, \psi_{n,m,l} \rangle$$

$$\text{II-A-4-2} \quad = a_{n,m,l}^{(0)} N_{n,m,l}^2$$

d'où

$$\text{II-A-4-3} \quad a_{n,m,l}^{(0)} = \frac{1}{N_{n,m,l}^2} \int \psi_0 \psi_{n,m,l}^* d^3\sigma$$

$$\text{II-A-4-4} \quad a_{n,m,l}^{(0)} = \frac{1}{N_{n,m,l}^2} \int e^{-\vec{\kappa} \cdot \vec{\sigma}} e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta e}} \psi_{n,m,l}^* d\vec{\sigma}$$

et remarquons que l'on peut aussi écrire :

$$\text{II-A-4-5} \quad a_{n,m,l}^{(0)} = \frac{-\vec{\kappa}}{N_{n,m,l}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\Delta e}} \int e^{\vec{\Delta e} \cdot \vec{\sigma} - \frac{\sigma^2}{2}} \psi_{n,m,l}^* d\vec{\sigma}$$

Le second coefficient $Q_{n,m,l}^*$ s'obtient de même par formation du produit hermitique sur II-A-3-1, puis en conjugant le produit obtenu :

$$\text{II-A-4-6} \quad \langle e^{-\frac{\sigma^2}{2} + \vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma}}, \psi_{k,p,q} \rangle^* = \sum_{kpq} Q_{n,m,l}^* \langle \psi_{n,m,l}, \psi_{k,p,q} \rangle^*$$

$$= Q_{n,m,l}^* N_{n,m,l}^2$$

d'où l'on déduit :

$$\text{II-A-4-7} \quad Q_{n,m,l}^* = \frac{1}{N_{n,m,l}^2} \left(\int e^{\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_3} \left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \psi_{n,m,l}^* \right) d\vec{\sigma} \right)^*$$

L'intégrale est à rapprocher de II-A-4-5. Si l'on définit en effet la fonction :

$$\text{II-A-4-8} \quad g(\vec{a}) = \int e^{\vec{a} \cdot \vec{\sigma}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \psi_{n,m,l}^* d\vec{\sigma}$$

les coefficients se déduiront de $g(\vec{a})$ par les formules :

$$\text{II-A-4-9} \quad \begin{cases} a_{n,m,l}^{(0)} = \frac{-\vec{\kappa}}{N_{n,m,l}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\Delta e}} g(\vec{\Delta e}) \\ Q_{n,m,l}^* = \frac{g(\vec{e}_3)^*}{N_{n,m,l}^2} \end{cases}$$

Il suffit donc de calculer l'intégrale II-A-4-8

A cet effet posons :

$$\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = a_1 r \cos \theta + a_2 r \sin \theta + a_3 z$$

II-A-4-10

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = R \cos \varphi \\ a_2 = R \sin \varphi \\ a_3 = Z \end{array} \right.$$

Il vient dans ce système de variables :

$$\text{II-A-4-11} \quad g = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2 + Z \cdot z} H_n(z) dz \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2 + Rr \cos \varphi \cos \theta + Rr \sin \varphi \sin \theta - im\theta} \dots$$

$$\dots \times r^{|m|} L_1^{|m|}(r^2) r dr d\theta$$

Utilisant alors l'identité bien connue de définition de la fonction génératrice des polynômes d'Hermite :

$$\text{II-A-4-12} \quad e^{-\left(\frac{Z}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{Z}{2}\right)z} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^q}{q!} H_q(z)$$

d'où

$$\text{II-A-4-13} \quad g(\vec{a}) = Z^n \sqrt{\pi} e^{\left(\frac{Z}{2}\right)^2} \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2 + Rr \cos(\varphi - \theta) - im\theta} r^{|m|} L_1^{|m|}(r^2) r dr d\theta$$

Utilisons encore la formule classique :

$$\text{II-A-4-14} \quad e^{Rr \cos(\varphi - \theta)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_k(Rr) e^{ik(\varphi - \theta)}$$

(où $I_k(\)$ désigne la fonction modifiée de Bessel de première espèce d'ordre k).

$$\text{II-A-4-15} \quad g(\vec{a}) = Z^n \sqrt{\pi} e^{\left(\frac{Z}{2}\right)^2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_0^{\infty} e^{-r^2} I_k(Rr) r^{|m|} L_1^{|m|}(r^2) r dr \int_0^{2\pi} e^{ik(\varphi - \theta) - im\theta} d\theta$$

avec $\int_0^{2\pi} e^{ik(\varphi-\theta)-im\theta} d\theta = \delta_{k,m} 2\pi e^{-im\varphi}$

il vient :

II-A-4-16

$$g(\vec{a}) = Z^n (\pi)^{3/2} e^{(Z/2)^2 - im\varphi} \int_0^\infty I_{(m)}(Rr) e^{-r^2|m|} L_1^{|m|}(r^2) 2r dr$$

Or $I_m(Rr) = I_{-m}(Rr) = I_{|m|}(Rr)$ d'où en posant $M = |m|$ et en effectuant le changement de variable $x = r^2$

II-A-4-17

$$g(\vec{a}) = Z^n \pi^{3/2} e^{-im\varphi} e^{(Z/2)^2} \int_0^\infty e^{-x} I_M(R\sqrt{x}) x^{\frac{M}{2}} L_1^M(x) dx$$

C'est une intégrale qui se rattache à la théorie des transformations de Hankel dont la valeur est

II-A-4-18

$$\int_0^\infty e^{-x} I_M(R\sqrt{x}) x^{M/2} L_1^M(x) dx = e^{(R/2)^2} \left(\frac{R}{2}\right)^{M+2} (-1)^1$$

(Le calcul un peu long et sans intérêt est explicité dans l'appendice 1)

d'où en définitive :

II-A-4-19

$$g(\vec{a}) = \pi^{3/2} Z^n \left(\frac{R}{2}\right)^{|m|+2} (-1)^1 e^{-im\varphi} e^{\frac{a^2}{4}}$$

Pour achever le calcul il suffit de "positionner" les vecteurs

II-A-4-20

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \vec{e} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 &= \frac{1}{4+b} (2\vec{b} \wedge \vec{\kappa} - 4\vec{\kappa} - (\vec{b}, \vec{\kappa}) \vec{b}) \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_1 &= \frac{1}{4+b} (2 \vec{b} \wedge \vec{\kappa} + 4\vec{\kappa} + (\vec{b}, \vec{\kappa}) \vec{b}) \end{aligned} \right.$$

dans le repère cylindrique correspondant (fig. 1)

Ce qui permet d'écrire d'emblée les décompositions :

$$\text{II-A-4-21} \quad \begin{cases} \vec{e}_3 = R \cos \varphi \vec{\epsilon}_1 + R \sin \varphi \vec{\epsilon}_2 + Z \vec{\epsilon}_3 \\ \vec{\Delta e} = R \cos(\pi - \varphi) \vec{\epsilon}_1 + R \sin(\pi - \varphi) \vec{\epsilon}_2 - Z \vec{\epsilon}_3 \end{cases}$$

et d'en déduire la relation utile :

$$\text{II-A-4-22} \quad \begin{cases} g(\vec{e}_3) = g(R, \varphi, Z) \\ g(\vec{\Delta e}) = g(R, \pi - \varphi, -Z) \end{cases}$$

d'où un calcul immédiat de $g^*(\vec{e}_3)$:

$$\text{II-A-4-23} \quad \begin{aligned} g^*(\vec{e}_3) &= g(R, \varphi, Z) * = \pi^{3/2} Z^n (R/2)^{|m|+2l+im\varphi+\frac{e_3^2}{4}} (-1)^l \\ g(\vec{\Delta e}) &= \pi^{3/2} Z^n (R/2)^{|m|+2l+im\varphi+\frac{e_1^2+e_2^2}{4}} (-1)^{n+m+1} \end{aligned}$$

Enfin il vient :

$$\begin{aligned} \text{II-A-4-24} \quad \kappa \frac{\partial}{\partial \vec{\Delta e}} g(\vec{\Delta e}) &= -\kappa_l \left(\frac{\partial g}{\partial R} \cos \varphi - \frac{\partial g}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{R} \right) - \kappa_n \frac{\partial g}{\partial Z} \\ &= \left(\frac{-\kappa_l \cos \varphi}{R} \left(\frac{R^2}{2} + |m| + 2l - im \tan \varphi \right) - \frac{\kappa_n (Z+n)}{Z} \right) g(\vec{\Delta e}) \end{aligned}$$

Eu égard aux formules II-A-4-3, on en déduit en définitive :

$$\begin{aligned} \text{II-A-4-25} \quad a_{n,m,l}^{(o)} Q_{n,m,l}^* &= \left(\frac{-\kappa_l \cos \varphi}{R} \left(\frac{R^2}{2} + |m| + 2l - im \tan \varphi \right) + \kappa_n \left(\frac{Z^2/2+n}{Z} \right) \right) \frac{g(\vec{\Delta e}) g(\vec{e}_3)}{N_{n,m,l}^2} \\ &= \frac{\pi^3}{N_{n,m,l}^2} \left(\frac{-\kappa_l \cos \varphi}{R} \left(\frac{R^2}{2} + |m| + 2l - im \tan \varphi \right) + \frac{\kappa_n (Z^2/2+n)}{Z} \right) (-Z^2)^n \left(-\frac{R^2}{4} \right)^{|m|+2l} x \dots \\ &\dots x e^{2im\varphi + \frac{e_1^2+e_2^2}{2}} \end{aligned}$$

Fig. 1

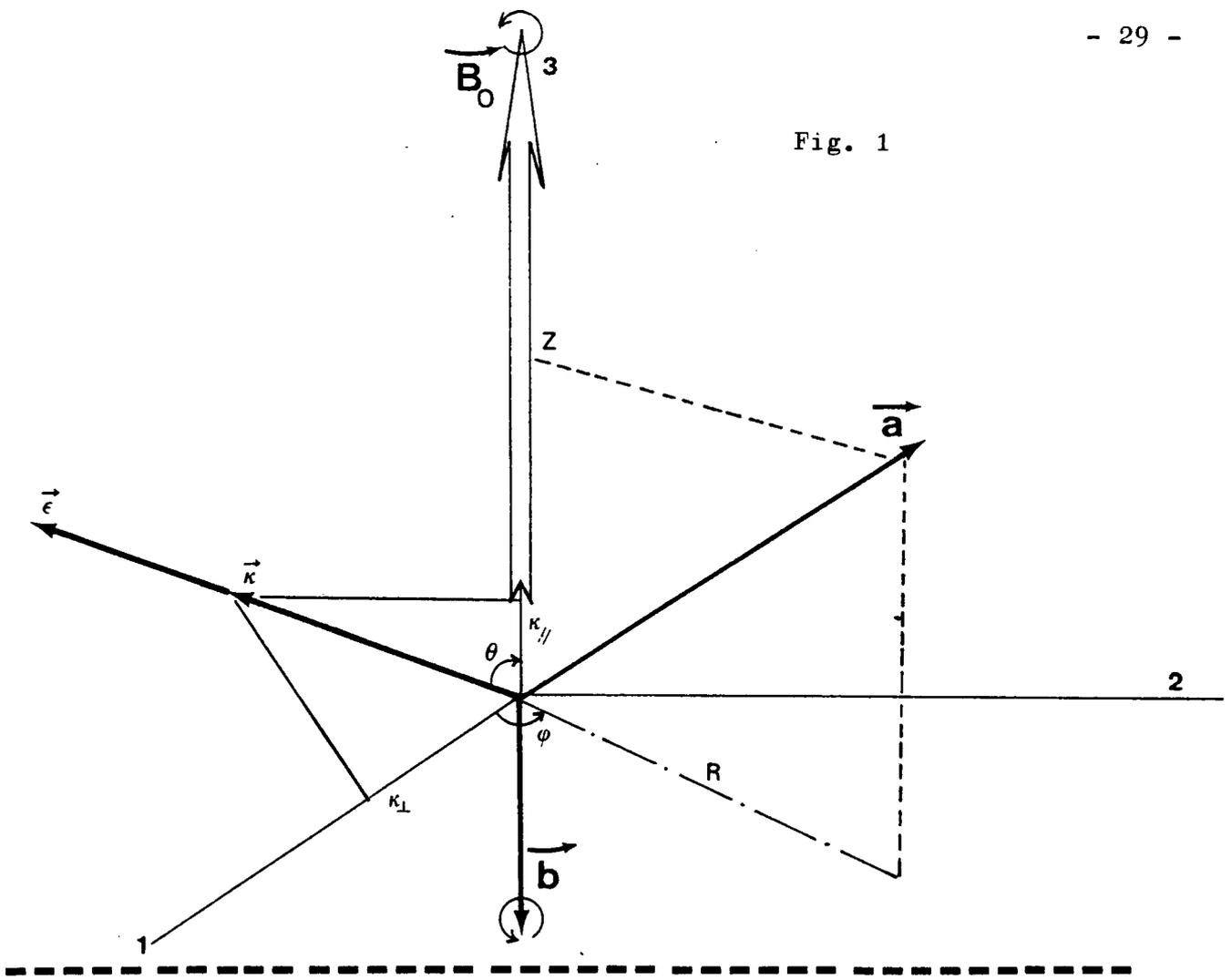
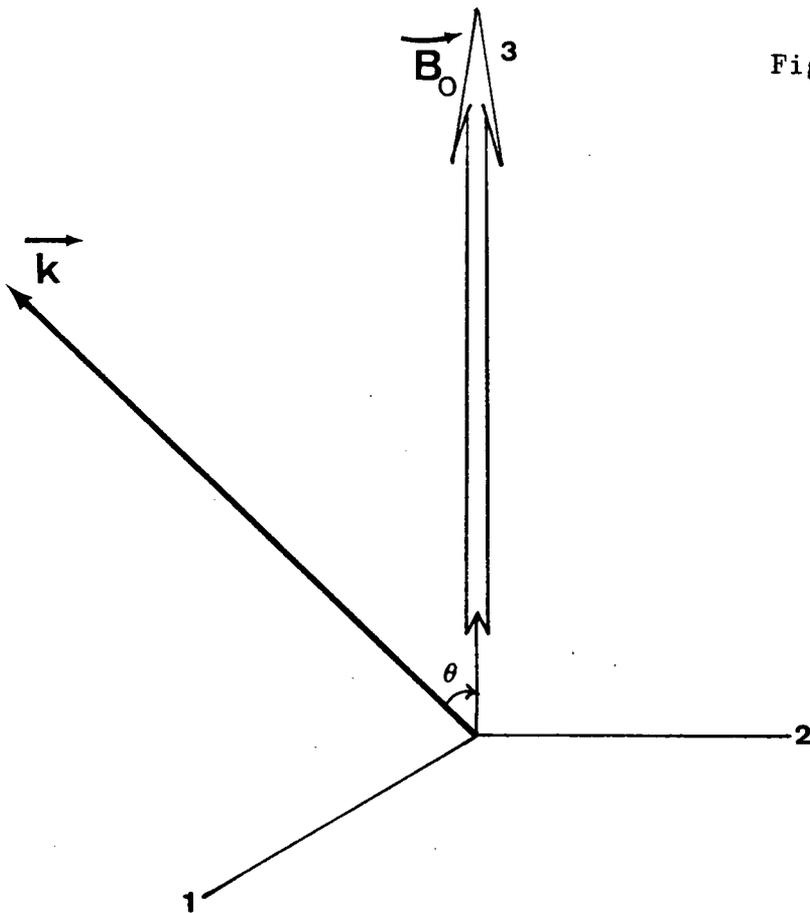


Fig. 2



5 - Expression du prolongement analytique

Tous les coefficients de l'expression formelle II-A-3-8 sont maintenant calculés ou connus. Il faut donc les regrouper et les exprimer dans un système uniforme de variables. Afin de se rattacher aux notations classiques dans les problèmes de plasma, nous exprimerons donc dans tout ce qui suit les composants des vecteurs dans le repère défini par la figure (2).

Dans ce repère les coordonnées cylindriques R, ϕ, Z sont des fonctions des composantes $b, \kappa, \kappa_{\parallel}$ des vecteurs \vec{b} et $\vec{\kappa}$ anticolinéaire et colinéaire respectivement aux vecteurs \vec{B}_0 et \vec{k} .

Rapprochant en effet les formules II-A-1-14, II-A-1-17 et II-A-4-21 :

$$\text{II-A-5-1} \quad R \cos \varphi = \frac{4\kappa_{\perp}}{b^2 + 4}$$

$$\text{II-A-5-2} \quad R \sin \varphi = \frac{2}{b^2 + 4} b \kappa_{\perp}$$

$$\text{II-A-5-3} \quad Z = \frac{4\kappa_{\parallel} + b^2 \kappa_{\parallel}}{b^2 + 4} = \kappa_{\parallel}$$

On en déduit :

$$R = \frac{2\kappa_{\perp}}{\sqrt{b^2 + 4}}$$

$$\text{II-A-5-4} \quad \text{tg } \varphi = \frac{b}{2} ; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

$$Z = \kappa_{\parallel}$$

Soit en revenant aux grandeurs ω_c et \vec{k} (II-A-1-8, II-A-1-9) :

$$\text{II-A-5-5} \quad R^2 = \frac{2W_0^2 k_{\perp}^2}{(\omega_c^2 + \beta^2)}$$

$$\text{tg } \varphi = \left(\frac{\omega_c}{\beta} \right) ; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

$$Z^2 = 2 \frac{k_{\parallel}^2}{\beta^2} W_0^2$$

Calculons à présent le dénominateur de l'expression II-A-3-8.

D'après II-A-1-17 et II-A-2-16 :

$$\text{II-A-5-6} \quad \lambda_{n,m,l} + \gamma = -3 + im + b - 2|m| - 2n - 4l + 3 - \frac{2s}{\beta} + e_1^2 + e_2^2 - 2\vec{\kappa} \vec{e}_1$$

Or

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$\text{II-A-5-7} \quad -2\vec{\kappa} \vec{e}_1 = \frac{-8\kappa^2 - 2b^2 \kappa_{\parallel}^2}{b^2 + 4}$$

$$e_1^2 + e_2^2 = \frac{16\kappa^2 + b^4 \kappa_{\parallel}^2 + 8b^2 \kappa_{\parallel}^2 + 4b^2 \kappa_{\perp}^2}{(b^2 + 4)^2}$$

d'où

$$\text{II-A-5-8} \quad \lambda_{n,m,l} + \gamma = -2 \left(\frac{s}{\beta} - im \frac{\omega_c}{\beta} + n + |m| + 2l + \frac{W_0^2 k^2}{\omega_c^2 + \beta^2} + \frac{W_0^2 k_{\parallel}^2 \omega_c^2}{\beta^2 (\omega_c^2 + \beta^2)} \right)$$

Substituant ces valeurs dans la série II-A-3-8 :

$$\text{II-A-5-9} \quad \epsilon_{\parallel}(s, \vec{k}) = 1 + \frac{e_1^2/2 - e_2^2/2}{k^2 D^2} \left(\pi^{3/2} \sum_{n,m,l} \dots \right)$$

$$\dots \frac{\left(\frac{R^2}{2} + |m| + 2l - im \tan \varphi + \frac{Z^2}{2} \right) (-Z^2)^n \left(-\frac{R^2}{4} \right)^{|m|+2l} e^{2im\varphi}}{N_{n,m,l}^2 \left(s/\beta - im \tan \varphi + n + |m| + 2l + \frac{W_0^2 k^2}{\omega_c^2 + \beta^2} + \frac{W_0^2 k_{\parallel}^2 \omega_c^2}{\beta^2 (\omega_c^2 + \beta^2)} \right)}$$

Et notons que

$$\text{II-A-5-10} \quad \frac{R^2 + Z^2}{2} = \frac{W_0^2 k^2}{\omega_c^2 + \beta^2} + \frac{\omega_c^2 W_0^2 k^2}{\beta^2 (\omega_c^2 + \beta^2)}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\epsilon_{\parallel}(s, \vec{k}) = 1 + \frac{e^2/2 - e_2^2/2}{k^2 D^2} \pi^{3/2} \left(\sum_{n,m,l} \frac{(-Z^2)^n \left(-\frac{R^2}{4}\right)^{|m|+2l} e^{2im\varphi}}{N_{n,m,l}^2} \dots \right)$$

II-A-5-11

$$\dots - \frac{s}{\beta} \sum_{n,m,l} \frac{(-Z^2)^n \left(-\frac{R^2}{4}\right)^{|m|+2l} e^{2im\varphi}}{N_{n,m,l}^2 (s/\beta - imtg\varphi + n + |m| + 2l + \frac{W_0^2 k^2}{\omega_c^2 + \beta^2} + \frac{W_0^2 k^2 \omega_c^2}{\beta^2 (\omega_c^2 + \beta^2)})}$$

La première série se calcule aisément, compte tenu du résultat II-A-2-29

$$N_{n,m,l}^2 = (\pi^{3/2}) n! 2^n (|m| + 1)!!$$

II-A-5-12

$$\frac{1}{\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Z^2/2)^n}{n!} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2im\varphi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{R^2}{4}\right)^{|m|+2l}}{(|m|+1)!!} =$$

$$\frac{e^{-Z^2/2}}{\pi^{3/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{|m|} \left(-\frac{R^2}{2}\right) e^{im(2\varphi)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(Z^2 + R^2 \cos 2\varphi)}}{\pi^{3/2}}$$

Or

$$(Z^2 + R^2 \cos 2\varphi) = (Z^2 + R^2 \left(\frac{4-b^2}{4+b^2}\right)) = (16\kappa^2 + 8b^2 \kappa_{\parallel}^2 + b^4 \kappa_{\parallel}^2 - 4b^2 \kappa_{\perp}^2) = e_1^2 - e_2^2$$

d'où

$$\text{II-A-5-13} \quad \epsilon_n(s, \vec{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 D^2} \left(1 - \frac{s}{\beta}\right) e^{e_1^2 - e_2^2} \sum_{n, m, l} \dots$$

$$\dots \frac{(-Z^2/2)^n (-R^2/4)^{|m|+2l+2im\varphi}}{(s/\beta - imtg\varphi + n + |m| + 2l + \frac{R^2 + Z^2}{2}) n! l! (|m|+1)!}$$

Afin d'alléger l'écriture, introduisons les notations suivantes :

$$\text{II-A-5-14} \quad \Phi = \text{Arctg} \frac{\omega_c}{\beta} \text{ avec } 0 \leq \Phi \leq \pi/2$$

$$\text{II-A-5-15} \quad \mu = \frac{W_o^2 k^2 \text{Cos}^2 \theta}{\beta^2}$$

$$\text{II-A-5-16} \quad \eta = \frac{W_o^2 k^2 \text{Sin}^2 \theta}{\beta^2} \text{Cos}^2 \Phi$$

La série s'écrit alors (en effectuant la permutation $m \leftrightarrow -m$)

$$\text{II-A-5-17} \quad \epsilon(s, \vec{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 D^2} \left(1 - \frac{s}{\beta}\right) e^{\mu + \eta \text{Cos} 2\Phi} \sum_{n, m, l} \dots$$

$$\dots \frac{(\mu)^n (\eta/2)^{|m|+2l} (-1)^{n+m} e^{2im\Phi}}{(s/\beta - im\frac{\omega_c}{\beta} + n + |m| + 2l + \mu + \eta) n! l! (|m|+1)!}$$

remarquons que cette série converge pour tous les s du plan complexe à l'exception des points :

$$s/\beta = im\frac{\omega_c}{\beta} - n - |m| - 2l - \mu - \eta$$

où elle possède des pôles simples. La formule II-A-5-17 représente donc le prolongement analytique, que nous noterons :

$\widehat{\epsilon}(s, \vec{k})$ de la fonction diélectrique en deça de l'abscisse de convergence de la variable de Laplace.

6 - Expression intégrale - résumé des formules obtenues

Il est aisé à partir de l'expression II-A-5-17 de déduire la représentation intégrale de $\epsilon(s, \vec{k})$ pour $\text{Ré}(s) > 0$

En effet si $\text{Ré}(s) > -(\mu + \eta)\beta$ on peut poser :

$$\text{II-A-6-1} \quad \frac{1}{s/\beta - im \text{tg} \Phi + n + m + 2l + \mu + \eta} = \int_0^1 x^{s/\beta - im \text{tg} \Phi + n + m + 2l + \mu + \eta - 1} dx$$

et la série étant uniformément convergente, il est légitime d'écrire :

$$\text{II-A-6-2} \quad \sum_{n, m, l} \frac{(-\mu)^n (-\eta/2)^{m+2l} e^{2im\Phi}}{n! l! (m+1)!} \int_0^1 x^{s/\beta - im \text{tg} \Phi + n + m + 2l + \mu + \eta - 1} dx =$$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu x)^n}{n!} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\eta x/2)^{m+2l} e^{im(2\Phi - \text{tg} \Phi \text{Ln } x)}}{l! (m+1)!} x^{s/\beta + \mu + \eta - 1} dx$$

$$\text{II-A-6-3} \quad = \int_0^1 e^{-\mu x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m(-\eta x) e^{im(2\Phi - \text{tg} \Phi \text{Ln } x)} x^{s/\beta + \mu + \eta - 1} dx$$

et en vertu de l'identité déjà mentionnée (II-A-4-15)

$$\text{II-A-6-4} \quad = \int_0^1 e^{-\mu x - \eta x (\text{Cos}(2\Phi - \text{tg} \Phi \text{Ln } x))} x^{s/\beta + \mu + \eta - 1} dx$$

d'où finalement :

$$\text{II-A-6-5} \quad \epsilon(s, \vec{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 D^2} - \frac{s}{\beta k^2 D^2} \int_0^1 e^{\mu(1-x) + \eta (\text{Cos } 2\Phi - x \text{Cos}(2\Phi - \text{Ln } x \text{tg} \Phi))} \dots$$

$\dots x^{s/\beta + \mu + \eta - 1} dx$ avec $\text{R}(s) > -(\mu + \eta)\beta$

Nous noterons ϵ^+ cette expression

Les formules II-A-5-17 et II-A-6-5 constituent le résultat cherché. Elles donnent la forme analytique de la fonction diélectrique longitudinale de plasma, valable dans tout le plan des s pour toutes les valeurs des paramètres $\theta, \beta, \omega c, \omega p$ et \vec{k}, D . Nous y ferons sans cesse référence par la suite aussi paraît-il bon de les résumer :

$$\text{II-A-6-6} \quad \epsilon(s, \theta, \omega c, kD, \omega p, \beta) = \begin{cases} \epsilon^+ & \text{si } \text{Ré}(s) > -(\mu+\eta)\beta \\ \hat{\epsilon} & \text{si } \text{Ré}(s) < -(\mu+\eta)\beta \end{cases}$$

$$\text{II-A-6-7} \quad \epsilon = 1 + \frac{1}{k^2 D^2} - \frac{s}{\beta k^2 D^2} e^{\mu+\eta \cos 2\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \dots$$

$$\dots \frac{(-1)^{m+n} \mu^n (\eta/2)^{m+2l} e^{2im\Phi}}{n! l! (m+1)! (s/\beta - im \text{tg} \Phi + n + m + 2l + \mu + \eta)}$$

$$\text{II-A-6-8} \quad \epsilon^+ = 1 + \frac{1}{k^2 D^2} - \frac{s}{\beta k^2 D^2} \int_0^1 e^{\mu(1-x) + \eta(\cos 2\Phi - x \cos(2\Phi - \text{tg} \Phi \ln x))} \dots x^{s/\beta + \mu + \eta - 1} dx$$

où

$$\Phi = \text{Arctg}\left(\frac{\omega c}{\beta}\right) \quad 0 < \Phi < \pi/2$$

$$\left[\begin{array}{l} \mu = \frac{W_o^2 k^2}{\beta^2} \cos^2 \theta \\ \eta = \frac{W_o^2 k^2}{\beta^2} \sin^2 \theta \cos^2 \Phi \end{array} \right.$$

B - Etude des principales limites

La fonction diélectrique obtenue dépend de nombreux paramètres, et en particulier de la valeur de la fréquence gyro-magnétique ω_c , de la fréquence de collision β , de l'angle θ d'azimut .

Il semble alors nécessaire au stade de cet exposé, d'étudier les valeurs limites $\omega_c=0$ et $\beta=0$ afin de retrouver les résultats classiques déjà mentionnés (cf chapitre 1).

Cette étude s'avérerait inutile s'il ne s'agissait que de la forme intégrale ϵ^+ (II-A-7-8), qui ainsi que nous le montrerons, est équivalente à l'intégrale "H" de Dougherty, cet auteur en ayant examiné les cas limites.

Toutefois la présence du prolongement analytique qui n'est pas susceptible des mêmes techniques de passage à la limite nécessite la reprise du problème.

Afin de ne pas alourdir exagérément l'écriture, nous conduirons l'étude non pas sur ϵ^+ et $\hat{\epsilon}$ mais sur les fonctions équivalentes :

$$\text{II-B-0-1} \quad D^+(s) = 1+k^2 D^2 - k^2 D^2 \epsilon^+$$

$$\text{II-B-0-2} \quad \hat{D}(s) = 1+k^2 D^2 - k^2 D^2 \hat{\epsilon}$$

1 - Collisions évanescentes

Tout d'abord montrons l'équivalence de $D^+(s)$ et de l'intégrale "H" de Dougherty.

Effectuons à cet effet dans II-A-7-8 le changement de variable :

II-B-1-1

$$x=e^{-\beta t}$$

II-B-1-2

$$D^+(s)=s \int_0^{\infty} e^{\mu(1-e^{-\beta t})+\eta(\cos 2\phi-e^{-\beta t}\cos(2\phi+\omega ct))} e^{-st-(\mu+\mu)\beta t} dt$$

qui est exactement aux notations près (il faut poser $\phi=\frac{\pi}{2}-\frac{\chi}{2}$ pour retrouver la formule 65 page 1797)

le résultat trouvé par Dougherty.

Effectuons dans II-B-1-2 le développement de l'intégrant pour les petits β :

II-B-1-3

$$e^{-W_0^2 k^2 \cos^2 \theta \frac{t^2}{2} + \frac{W_0^2 k^2 \sin^2 \theta}{\omega_c^2} (\cos \omega_c t - 1) + o(\beta^2)}$$

puis le changement de variable

II-B-1-4

$$y = \omega_c t ; \quad \lambda_1 = \frac{W_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{\omega_c^2} ; \quad \lambda_2 = \frac{W_0^2 k^2 \sin^2 \theta}{\omega_c^2}$$

Il vient

II-B-1-5

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} D^+(s) = \frac{s}{\omega_c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\omega_c} y - \frac{1}{2} \lambda_1 y^2 - \lambda_2 (1 - \cos y)} dy$$

qui n'est autre que la célèbre intégrale de Gordeyev que l'on obtient dans le traitement sans collision (cf BERNSTEIN formule 97).

Il est clair qu'un développement asymptotique sous le signe d'intégration est un procédé mathématique difficilement transposable au cas de la triple série infinie qui définit $\widehat{D}(s)$. Cette dernière est manifestement divergente pour $\beta \rightarrow 0$ dans le cas d'un angle quelconque. Pour $\theta = \pi/2$, ce qui correspond aux modes de Bernstein que l'on étudiera ultérieurement, la limite est finie et se raccorde à la prolongation analytique de l'intégrale de Gordeyev-Bernstein.

Posant en effet $\theta = \pi/2$ dans II-A-7-7 la triple série dégénère en une double série qui s'écrit :

$$\text{II-B-1-6} \quad \widehat{D}(s) = e^{\eta \cos 2\Phi} s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^m e^{2im\Phi} (\eta/2)^{|m|+2p}}{(s - im\omega_c + \beta(|m|+2p) + \beta\eta) p! (|m|+p)!}$$

Or on a pour $\beta \rightarrow 0$:

$$\beta \rightarrow 0$$

$$\Phi \rightarrow \pi/2$$

II-B-1-7

$$e^{2im\Phi} \rightarrow (-1)^m$$

$$\cos 2\Phi \rightarrow -1$$

$$\eta \rightarrow \frac{W_0^2 k^2}{\omega_c^2} = \lambda$$

d'où

$$\text{II-B-1-8} \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \widehat{D}(s) = s e^{-\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^{|m|+2p}}{(s - i\omega_c) p! (|m|+p)!}$$

$$= s e^{-\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(\lambda)}{s - i\omega_c}$$

C'est la très célèbre relation de Bernstein. Il est finalement remarquable qu'elle soit la limite "sans collision" de $\widehat{D}(s)$. Nous reviendrons sur ce fait dans l'étude des modes de Bernstein.

2 - Limite amagnétique $\omega_c \rightarrow 0$

Effectuons dans II-A-7-8 le passage à la limite $\omega_c \rightarrow 0$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c \rightarrow 0 \\ \Phi \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

II-B-2-1

$$\mu + \eta = \frac{k^2 W_0^2}{\beta^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{k^2 W_0^2}{\beta^2}$$

d'où

II-B-2-2

$$\lim_{\omega_c \rightarrow 0} \hat{D}(s) = \frac{s}{\beta} \int_0^1 e^{-\frac{k^2 W_0^2}{\beta^2} (1-x)} x^{s/\beta + \frac{k^2 W_0^2}{\beta^2} - 1} dx$$

qui est le résultat obtenu par Lenard et Bernstein (formule 32) dans le traitement collisionnel amagnétique.

Notons qu'annulant le champ magnétique, on dispose d'un degré de liberté supplémentaire, à savoir, on peut choisir arbitrairement la valeur de θ .

Utilisant cette circonstance, posons alors $\theta = 0$ (donc $\eta = 0$) dans la formule II-A-7-7. Il vient

II-B-2-3

$$\hat{D}(s) = s/\beta e^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n! (s/\beta + \mu + n)}$$

qui est exactement le prolongement analytique de l'intégrale de Lenard et Bernstein.

3 - Ondes parallèles

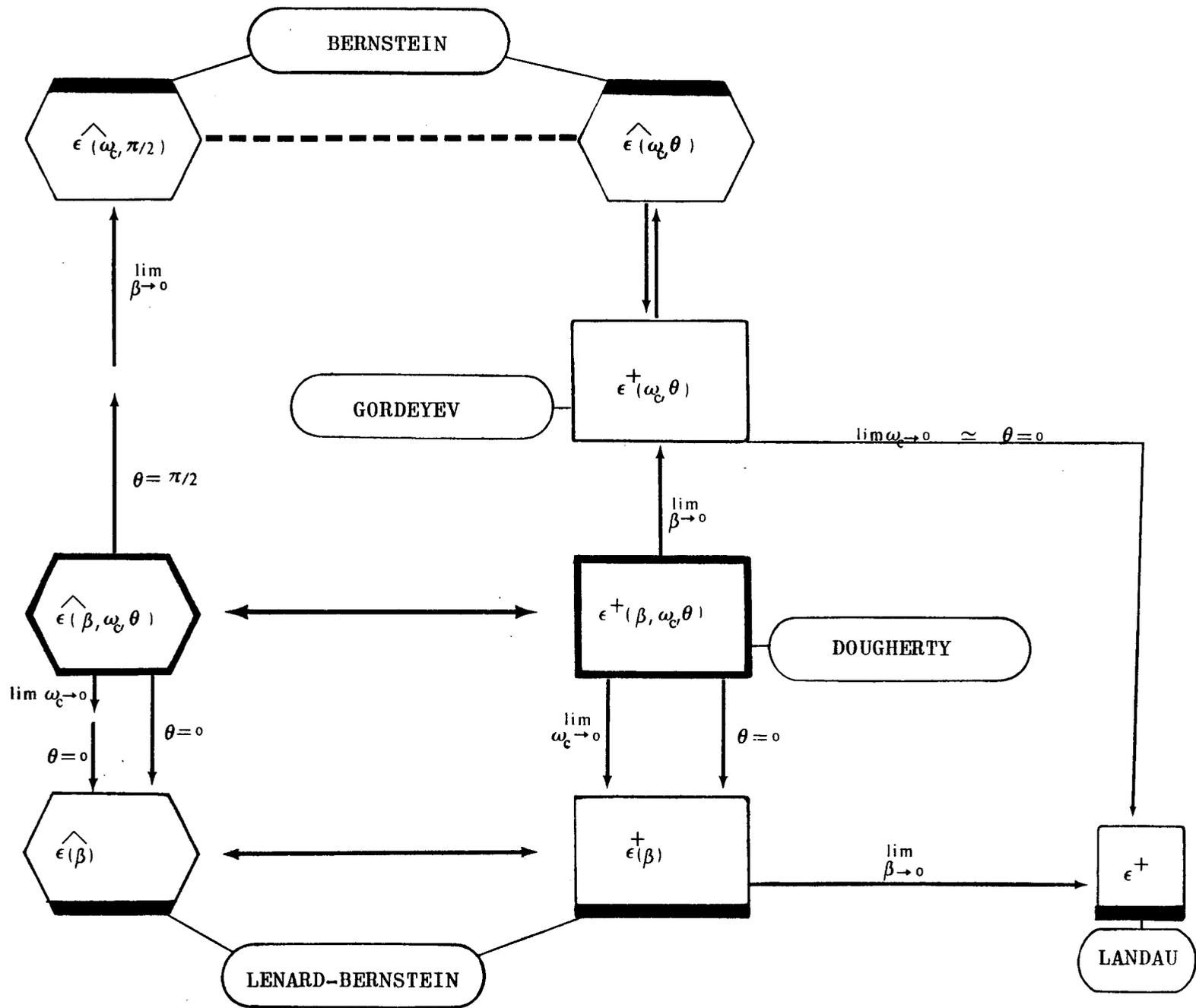
Pour $\theta = 0$, on retrouve les résultats précédents du cas amagnétique. La seule anisotropie du problème étant celle créée par le champ magnétique (puisque la diffusion est isotrope) il est satisfaisant de la voir disparaître avec l'azimut magnétique.

Enfin les limites successives $(\beta \rightarrow 0 ; \omega_c \rightarrow 0) ; (\beta \rightarrow 0 ; \theta \rightarrow 0)$ n'ont de sens que pour la forme intégrale D^+ . Elles commutent comme il est aisé de le vérifier et conduisent au résultat bien connu de Landau. Nous n'en reproduirons pas la démonstration qui est aujourd'hui très classique.

(LENARD et BERNSTEIN - DOUGHERTY)

4 - Diagramme des limites

Le diagramme suivant résume la discussion en distinguant les diverses commutations séries-intégrales.
resp($\hat{\epsilon}$, ϵ^+).



4. Diagramme général des limites

C - Propriétés des racines de l'équation de dispersion

L'équation de dispersion du mode longitudinal $\hat{\epsilon}_{\parallel} = 0$, se traduit simplement, eu égard à II-B-0-2, par l'équation :

II-C-0-1 $1+k^2 D^2 = \widehat{D}(s)$

Avant d'étudier numériquement cette équation on peut tirer quelques conclusions sur la forme des racines, du moins lorsque k est réel.

1. Unicité de la solution amortie

Considérons l'équation II-C-0-1, avec k réel et montrons qu'il ne saurait exister de racines pour lesquelles $\text{Re}(s) > 0$.

A cet effet notons que l'inversion de la transformée de Laplace de f_1 s'écrit :

II-C-1-1 $f_1(t, \vec{k}, \vec{v}) = \sum_J t^n e^{S_j t} A_{j,n} g(\vec{k}, \vec{v})$

où S_j est une racine d'ordre n de l'équation II-C-0-1.

En raison de la linéarité des équations il suffit d'étudier un terme arbitraire de la série II-C-1-1 pour conduire la démonstration.

Soit alors :

II-C-1-2 $f_j = t^n e^{\lambda t + i\vec{k}\vec{r} - \frac{1}{2}v^2} g(\vec{v}, \vec{k})$

un tel terme qui correspond à l'harmonique E_j du champ :

II-C-1-3 $E_j = t^n e^{\lambda t + i\vec{k}\vec{r}}$

avec

II-C-1-4 $\lambda = S_j$ d'ordre n (éventuellement)

solution de II-C-0-1. Substituant dans le système II-A-0-1 en prenant des unités telles que :

$$\text{II-C-1-5} \quad \beta = 1, w_0^2 = 1, \vec{v} = \vec{w}, \frac{e\vec{B}}{m} \cdot \vec{0} = \vec{B}$$

ce qui ne nuit en rien à la démonstration et allège sensiblement les notations.

$$\text{II-C-1-6} \quad (\lambda + i\vec{k}\vec{v} + \frac{n}{t}) g e^{-\frac{1}{2}v^2} + \frac{e\vec{E}_j}{m} \vec{v} e^{-\frac{1}{2}v^2} + \vec{B} \wedge \vec{v} e^{-\frac{1}{2}v^2} \frac{\partial g}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (e^{-\frac{1}{2}v^2} \frac{\partial g}{\partial \vec{v}})$$

$$\text{II-C-1-7} \quad \vec{E}_j = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{i\vec{k}}{k^2} \int e^{-\frac{1}{2}v^2} g d^3v$$

multipliant II-C-1-6 par d^3v puis intégrant :

$$\text{II-C-1-8} \quad (\lambda + \frac{n}{t}) \int g e^{-\frac{1}{2}v^2} d^3v = -i\vec{k} \cdot \int \vec{v} g e^{-\frac{1}{2}v^2} d^3v$$

les autres termes étant manifestement nuls.

Multipliant encore II-C-1-6 par $g^* d^3v$ puis intégrant :

$$\text{II-C-1-9} \quad (\lambda + \frac{n}{t}) \int e^{-\frac{1}{2}v^2} \|g\|^2 d^3v + i\vec{k} \cdot \int \vec{v} e^{-\frac{1}{2}v^2} \|g\|^2 d^3v + \frac{e\vec{E}_j}{m} \int \vec{v} e^{-\frac{1}{2}v^2} g^* d^3v + \vec{B} \wedge \int \vec{v} \frac{\partial g}{\partial \vec{v}} g^* e^{-\frac{1}{2}v^2} d^3v = - \int e^{-\frac{1}{2}v^2} \|\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}\|^2 d^3v$$

conjugant l'expression II-C-1-8, il vient :

$$\text{II-C-1-10} \quad (\lambda^* + \frac{n}{t}) \int g^* e^{-\frac{1}{2}v^2} d^3v = i\vec{k} \cdot \int \vec{v} g^* e^{-\frac{1}{2}v^2} d^3v$$

d'où d'après II-C-1-7 :

$$\text{II-C-1-10} \quad \vec{E}_j \int \vec{v} e^{-\frac{1}{2}v^2} g^* d^3v = \frac{e}{\epsilon_0} (\lambda^* + \frac{n}{t}) \left\| \int e^{-\frac{1}{2}v^2} g d^3v \right\|^2$$

Enfin additionnons II-C-1-9 avec son conjugué en tenant compte de la relation précédente :

$$\text{II-C-1-10} \quad (\lambda + \lambda^* + \frac{2n}{t}) \int e^{-\frac{1}{2}v^2} \|g\|^2 d^3v + (\lambda + \lambda^* + \frac{2n}{t}) \frac{e^2}{m \epsilon_0 k^2} \left\| \int e^{-\frac{1}{2}v^2} g d^3v \right\|^2 = - 2 \int e^{-\frac{1}{2}v^2} \|\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}\|^2 d^3v - \frac{e\vec{B}}{m} \wedge \int \vec{v} \cdot \frac{\partial \|g\|^2}{\partial \vec{v}} e^{-\frac{1}{2}v^2} d^3v$$

où la dernière intégrale est manifestement nulle, ainsi que le montre une intégration par parties, il vient donc :

$$\text{II-C-1-11} \quad (\lambda + \lambda^* + \frac{2n}{t}) = \frac{-2 \int e^{-\frac{1}{2}v^2} \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}} \right\|^2 d^3v}{\int e^{-\frac{1}{2}v^2} \left\| \mathbf{g} \right\|^2 d^3v + \frac{e^2}{m\epsilon_0 k} \int e^{-\frac{1}{2}v^2} g d^3v \left\| \right\|^2}$$

On en déduit :

$$\text{II-C-1-12} \quad (\lambda + \lambda^* + \frac{2n}{t}) < 0 \text{ où encore}$$

$$2\text{Ré}(\lambda) < -\frac{2n}{t} < 0$$

d'où clairement :

$$\text{II-C-1-13} \quad \underline{\text{Ré}(S_j) < 0}$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation de dispersion doivent être "amorties", c'est-à-dire avoir un argument réel strictement négatif. Ce résultat était physiquement prévisible. Compte tenu du terme collisionnel tout mode libre qui se propage dans le plasma ne peut que perdre de l'énergie, donc voir son amplitude décroître avec le temps.

2 - Symétrie des zéros de $\hat{\epsilon}_\nu$

Signalons simplement cette propriété que nous utiliserons par la suite :

Eu égard à la forme de $D(s)$:

si S_j est racine à k réel, S_j^* est aussi racine.

si k est racine à S imaginaire, k^* est aussi racine.

D - Remarques sur le chapitre II

On a obtenu à l'aide d'un formalisme original l'expression de la constante diélectrique sous forme d'une triple série, ce qui constitue un résultat nouveau. On a soigneusement étudié les différents cas limites et les raccordements aux théories déjà existantes.

En particulier on a montré que cette triple série était le prolongement analytique d'une intégrale développée par Dougherty la série s'avérant indispensable dans presque tous les cas pour le calcul des pôles.

Une simple manipulation de l'intégrale nous redonne le calcul de Gordeyev pour le cas $\beta = 0$ tandis que les ondes de Bernstein ($\theta = \pi/2 ; \beta = 0$) se retrouve directement à partir de notre série.

Le cas sans champ magnétique peut être traité toujours par la série et dans certains cas par l'intégrale, ces expressions recoupant celles données par Lenard et Bernstein.

Cette dualité entre l'intégrale et la série et la nécessité d'exploiter dans certains cas l'une ou l'autre de ces formes vont apparaître très clairement dès qu'il s'agira d'aborder la partie numérique qui fait l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE III

Traitement numérique

Ce chapitre est consacré à l'élaboration d'un programme de calcul automatique de la fonction diélectrique de plasma et au traitement numérique de l'équation de dispersion.

Cet aspect souvent négligé est ici essentiel, l'un des buts principaux de ce travail est en effet la mise au point d'un programme de calcul de la fonction diélectrique, suffisamment opérationnel pour se substituer aux standards déjà existants dans la physique des magnétoplasmas linéaires avec l'avantage pour son utilisateur d'aborder l'aspect collisionnel dans une gamme assez étendue de problèmes.

C'est en pensant "numérique" que nous avons choisi la résolution en fonctions propres, et c'est dans ce même souci que nous avons poussé à l'extrême, dans le chapitre précédent, la décomposition en fonctions "aisément calculables" : polynômes, exponentiels, fractions rationnelles simples de la fonction diélectrique.

La série triple II-A-7-7 se prête en effet à une programmation élégante et efficace. En outre, essentielle dans une large gamme de variations des paramètres, elle se révèle à l'usage plus souple que son intégrale associée. Nous avons toutefois inclus cette dernière dans le programme dans un souci de continuité. Il serait en effet absurde de "pousser" le calcul de la série dans la zone de convergence de l'intégrale, au risque d'un grave déficit de temps de calcul. Le programme d'intégration prend ici le relais. Il est d'ailleurs remarquable que dans son domaine de convergence, les résultats physiques exigent notamment moins de précision, étant peu intéressants. Cette circonstance est heureuse, l'intégrant étant une fonction très oscillante, pour certaines valeurs de ses paramètres, la précision obtenue est peu stable.

Nous allons étudier en détail la structure du programme utilisé. Cet étude, les organigrammes joints ainsi que les programmes FORTRAN, devrait faciliter une éventuelle utilisation.

1 - Problèmes liés au traitement numérique

Tous les familiers de l'informatique savent que la difficulté réside dans le compromis indispensable entre le temps de calcul nécessairement limité et la précision indispensable, garant de la fiabilité des résultats. La recherche de cet optimum ne peut se faire que par tâtonnements, mais cette phase pudiquement baptisée "mise au point" a du moins l'avantage de mettre en relief les contraintes et de préciser les limitations.

L'une de ces limitations est la nécessaire troncature de la série triple. On peut remarquer que cette dernière étant absolument convergente, on peut permuter l'ordre des sommations ; étant de plus monotone décroissante, on peut appliquer le critère de d'Alembert pour fixer l'ordre de convergence et la précision.

L'usage montre qu'il suffit de 50 termes pour la série en n, 100 termes pour la série en m, et 100 termes pour celle en l, pour couvrir la gamme utile d'utilisation en des temps raisonnables. La précision obtenue est de 6 chiffres significatifs pour exprimer la valeur de ϵ dans les cas les plus difficiles et pour un temps de calcul de l'ordre de 0,05 seconde, en précision simple (sur un ordinateur CDC 6400). Ce temps décroît jusqu'à 0,02 seconde, temps moyen pour un calcul "normal".

L'une des contraintes est liée à la convergence. Celle-ci s'effectue grâce à la factorielle du dénominateur et il est clair que si le numérateur prend des valeurs trop grandes le nombre de termes à sommer devient important, les erreurs d'arrondi se cumulant la précision devient mauvaise. L'expérience montre que la valeur normalisée des arguments des môme du numérateur doit être bornée par 10, soit :

$$\text{III-1-1} \quad \text{Sup} \left[\frac{W_0^2 k^2 \text{Cos}^2 \theta}{\beta^2}, \frac{W_0^2 k^2 \text{Sin}^2 \theta}{2(\alpha \epsilon^2 + \beta^2)} \right] < 10$$

Cette valeur est minimale, elle peut être majorée dans bien des cas. Elle est aussi utilisée comme critère d'interface entre la série et l'intégrale.

Cette dernière est calculée par une méthode de ROMBERG qui donne pleinement satisfaction.

Malheureusement la continuité de l'interface n'est pas complètement assurée : si le critère III-1-1 n'est pas satisfait et si de plus l'intégrale est dans sa zone de divergence :

III-1-2

$$\frac{+\text{Ré}(s)}{\beta} < -\mu - \eta$$

il faut alors renoncer purement et simplement au calcul et bien que ce cas soit rare, il constitue la faiblesse principale du programme.

Abordant l'aspect structural du programme, il a semblé utile de le scinder en trois modules :

le premier initialise et mémorise les paramètres indépendants des variables numériques principales k et s (INIT),

le second constitue le programme principal à proprement parler (EPSI),

en utilisant le troisième module qui est essentiellement une fonction auxiliaire ($B(1,n,m)$) dont le rôle est le calcul du terme dominant de la série.

En modifiant cette seule fonction, on a aisément accès aux dérivées successives :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial s^2} \quad , \quad \text{etc...}$$

c'est donc par raison de commodité qu'on l'a détachée du programme principal.

Enfin on a effectué à l'intérieur du programme principal des débranchements qui permettent d'accélérer le calcul dans les cas particuliers de dégénérescence de la triple série à une série double (modes de Bernstein par exemple).

2 - Organigrammes de calcul

Les pages suivantes contiennent les principaux organigrammes nécessaires à l'élaboration des programmes.

3 - Programmes FORTRAN utilisés

Les pages suivantes contiennent la version standard (FORTRAN IV, CDC) utilisée. D'autres versions optimisées ont été testées avec succès. Elles ne sont pas reproduites ici pour des raisons évidentes d'encombrement. Enfin il existe une version double précision exploitable sur ordinateur IBM.

4 - Résolution de l'équation de dispersion

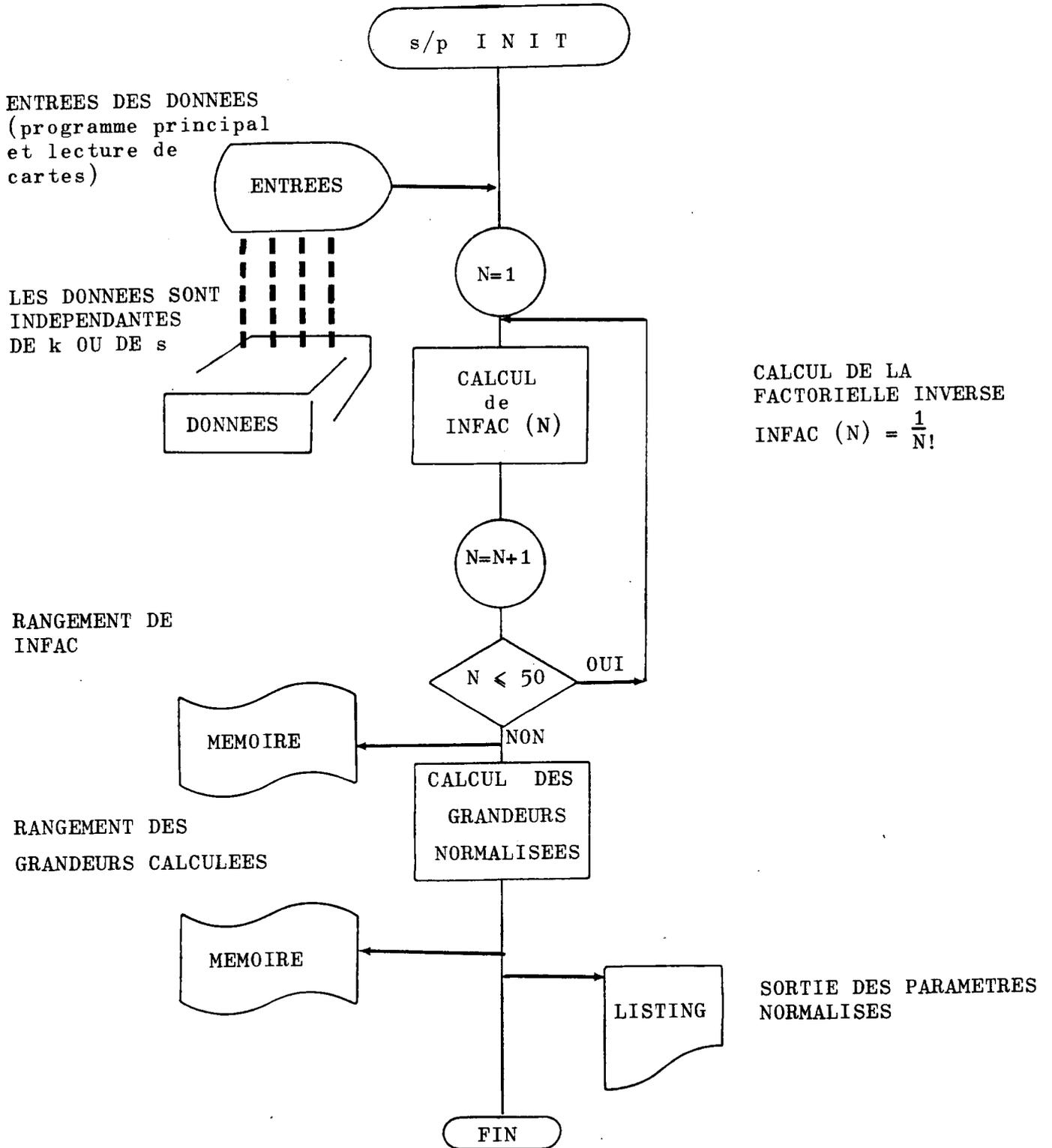
Nous avons utilisé pour résoudre l'équation de dispersion la méthode bien connue de Bach (Journal of applied Mathematics) qui consiste en la recherche du minimum de la fonction :

$$\text{III-4-1} \quad Z = |X| + |Y|$$

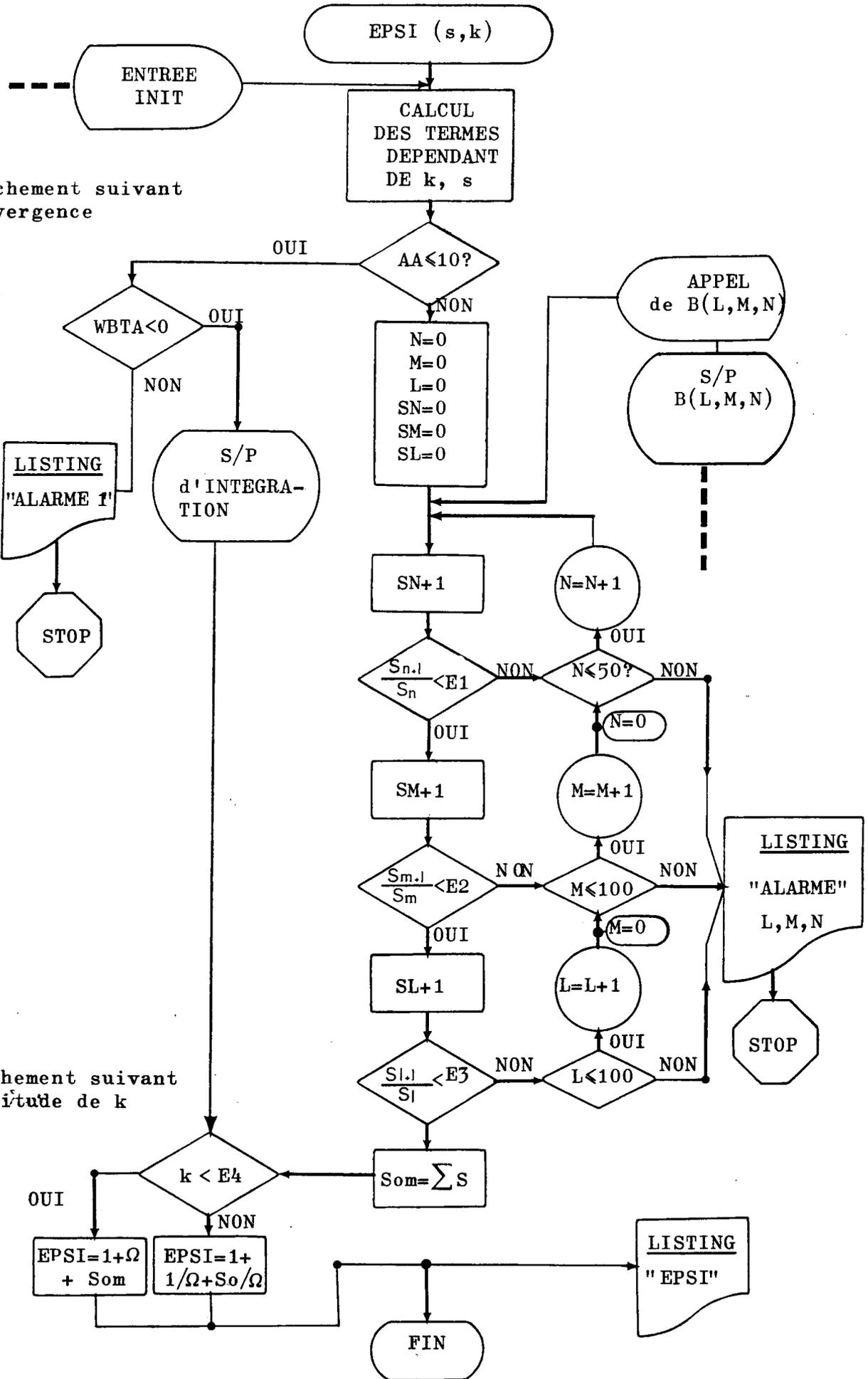
somme des modules des parties réelles et imaginaires de la fonction analytique (sauf peut-être ponctuellement) :

$$\text{III-4-2} \quad X + iY = f(x + iy)$$

Cette recherche s'effectue par une méthode itérative de triangulation dans le plan complexe, ce qui exige en moyenne 50 fois le calcul de $\epsilon(\vec{k}, s)$ pour une racine, avec une précision relative de 10^{-5} . Dans les cas limites les plus exigeants, on doit compter 3 à 4 minutes de temps calcul (d'ordinateur CDC 6400) pour environ 30 racines.



STRUCTURE d'INITIALISATION du PROGRAMME



Débranchement suivant la convergence

Débranchement suivant la magnitude de k

Structure du Programme EPSI

SUBROUTINE INIT

```
C *****
C *
C * INITIALISATION DES TERMES INDEPENDANTS *
C * DE K OU DE S POUR LE CALCUL DU S/P EPSI. *
C *
C *
C * INFAC EST UN BLOC DE FACTORIELLES *
C * INVERSESES *
C * EPSO EST UN BLOC D'EXPOSANTS COMPLEXES *
C *****

COMMON AO, EXP0, K2, IX, OMEGA0, A01, AA0, AB0, INFAC, PHI
1, B0, SB, BETA2, BETA
COMMON/FNT/AB, LAM, LMCOS, TGPHI, DPHI, WBTA
COMMON/INIT/WP, W0, WC, THETA, RHO
COMPLEX K, EPS, OMEGA, A0, K2, EXP0(30), IX, S, SB, AB, LAM
1, LMCOS, WBTA
REAL INFAC(55)
IX=CMPLX(0., 1.)
INFAC(1)=1.
INFAC(2)=1.
DO 11 I=3, 55
J=I-1
11 INFAC(I)=INFAC(J)/FLOAT(J)
THEDE=THETA
THETA=THETA*3.14159265358979/180.
WP2=WP*WP
W02=W0*W0
DEBYE=W0/WP
BETA=BETA*WP
WC=WC*WP
WC2=WC*WC
SN=SIN(THETA)
CN=COS(THETA)
A0=-IX*WC/BETA
TGPHI=WC/BETA
PHI=ATAN(TGPHI)
DPHI=2.*PHI
EXP0(1)=1.
EXP0(2)=CEXP(IX*DPHI)
DO 12 I=3, 30
J=I-1
12 EXP0(I)=EXP0(J)*EXP0(2)
A01=W02*SN*SN/(WC2+BETA2)+W02*CN*CN/BETA2
OMEGA0=W02/WP2
AA0=-W02*SN*SN/(2.*(WC2+BETA2))
AB0=-W02*CN*CN/BETA2
B0=W02/BETA2*(CN*CN+SN*SN*COS(PHI)*COS(PHI)*COS(DPHI))
RHO=W0/WC
HUP=SQRT(WP2+WC2)
HUP1=HUP*WP/WC
RETURN
END
```

```
      SUBROUTINE EPSI(K, EPS, S)
C *****
C *
C *   CALCUL DE LA FONCTION DIELECTRIQUE
C *
C *   LES TERMES INDEPENDANTS DE K OU DE S SONT
C *   INITIALISES DANS LE S/P INIT.
C *
C *****
C
      COMMON A0, EXPO, K2, IX, OMEGA0, A01, AA0, AB0, INFAC, PHI,
1B0, SB, BETA2, BETA
      COMMON/FNT/AB, LAM, LMCOS, TGPHI, DPHI, WBTA
      COMPLEX ABL, AA2N, BZ, IX, B, PSUM, QSUM, AUX(257), SUMN, SUML
1, SUMM, TERMM, TERML, TERMN, AAM, YEP, YET, FUNCT, K, EPS,
2OMEGA, A0, K2, EXPO(30), AA, AB, AA2, LAM, LMCOS, S, SB, WBTA
      REAL INFAC(55)
      EXTERNAL FUNCT
C
      SB=S/BETA
      WBTA=IX*SB
      K2=K*K
      AA=AA0*K2
      AB=AB0*K2
      AA2=AA*AA
      OMEGA=OMEGA0*K2
      BZ=B0*K2
C
C   DEBRANCHEMENT SUIVANT LA
C   CONVERGENCE DE LA SERIE
C
      IF((CABS(AA).GT.10.).OR.(CABS(AB).GT.10.))GOTO 119
C
C   CALCUL DE LA SERIE TRIPLE
C
      SUMN=0.
      DO 115 N=1,55
      SUML=0.
      DO 111 L=1,100
      SUMM=0.
      DO 105 M1=1,100
      M=M1-1
      MN=M+N
      IF(M) 101,101,102
101 AAM=INFAC(N)
      TERMM=AAM*B(L,N,M)
      TMO=CABS(TERMM)
      SUMM=TERMM/TMO
      PSUM=0.
      GO TO 105
102 AAM=AAM*AA/FLOAT(MN-1)
      TERMM=AAM*B(L,N,M)/TMO
      IF(MOD(M,2)) 103,103,104
103 PSUM=TERMM
      GO TO 105
```

```
104  SUMM=SUMM+(PSUM+TERMM)
      TM1=CABS(TERMM)
      IF(TM1-1.E-8)106,106,105
105  CONTINUE
      WRITE(6,199) K
106  SUMM=SUMM*TMO
C
C  DEBRANCHEMENT SUIVANT
C  L'AZIMUT MAGNETIQUE
C
      IF(AB.EQ.0.)GO TO 1120
C
      IF(L-1)107,107,108
107  ABL=1.
      TERML=ABL*SUMM
      TLO=CABS(TERML)
      SUML=TERML/TLO
      LT=L-1
      IF(MOD(LT,2) )109,109,110
109  QSUM=TERML
      GO TO 111
110  SUML=SUML+(QSUM+TERML)
      TL1=CABS(TERML)
      IF(TL1-1.E-7)112,112,111
111  CONTINUE
      WRITE(6,198) K
112  SUML=SUML*TLO
      GO TO 1121
1120 SUML=SUMM
1121 CONTINUE
      IF(N-1)113,113,114
113  AA2N=1.
      TERMN=AA2N*SUML
      TNO=CABS(TERMN)
      SUMN=TERMN/TNO
      GO TO 115
114  AA2N=AA2N*AA2/FLOAT(N-1)
      TERMN=AA2N*SUML/TNO
      SUMN=SUMN+TERMN
      TN1=CABS(TERMN)
      IF(TN1-1.E-6)116,116,115
115  CONTINUE
      WRITE(6,197) K
116  SUMN=SUMN*TNO
C
C  DEBRANCHEMENT SUIVANT LA
C  MAGNITUDE DE K
C
      IF( CABS(K)-1.E-8 )117,117,118
C
117  EPS=1.+OMEGA-SUMN*CEXP(BZ)
      RETURN
118  EPS=1.+1./OMEGA-SUMN*CEXP(BZ)/OMEGA
      RETURN
```

```
119 CONTINUE
C
C   CALCUL PAR INTEGRATION
C
      LMCOS=BZ+AB
      LAM=LMCOS/COS(DPHI)
      WBTA=WBTA+LAM-AB-1.
C
C   VERIFICATION DE LA CONVERGENCE
C   DE L'INTEGRALE:
C
      IF( REAL(WBTA+1.) ) 202,202,203
202 WRITE(6,201) WBTA
      STOP 202
203 CONTINUE
C
C   INTEGRATION PAR LA METHODE
C   DE ROMBERG.
C
      YET=0.
      XHL=1.
      XHD=5.E-3
      XHS=XHL-XHD
      DO 120 IL=1,190
      CALL DQATR(XHL,XHS,1.E-7,257,FUNCT,YEP,IERR,AUX)
      YET=YET+YEP
      IF(IL.LT.100)GOTO 200
      TESTF=CABS(YEP/YET)
      IF(TESTF.LT.1.E-9)GOTO 121
200 CONTINUE
      XHL=XHS
120 XHS=XHS-XHD
121 IF(CABS(K)-1.E-8)122,122,123
C
C   DEBRANCHEMENT SUIVANT LA
C   MAGNITUDE DE K
C
122 EPS=1.+OMEGA+IX*YET*SB
      WRITE(6,195)
      RETURN
123 EPS=1.+1./OMEGA+IX*YET*SB/OMEGA
      RETURN
195 FORMAT(2X,*LA VALEUR DE K EST 0.*)
197 FORMAT(2X,*MAUVAISE CONVERGENCE N*,2F10.5)
198 FORMAT(2X,*MAUVAISE CONVERGENCE L*,2F10.5)
199 FORMAT(2X,*MAUVAISE CONVERGENCE M*,2F10.5)
201 FORMAT(2X,*L'INTEGRALE EST DIVERGENTE*,2X,2E13.6)
      END

      COMPLEX FUNCTION B(L,N,M)
C   CALCUL DU TERME GENERAL DE LA SERIE
      COMMON A0,EXPO,K2,IX,OMEGA0,A01
      COMMON/FNT/AB,LAM,LMCOS,WBTA
      COMPLEX K, EPS,A0,K2,EXPO(30),IX,AB,LAM,LMCOS,WBTA,A
      M1=M+1
```

```
A=K2*A01+(A0-3.)*FLOAT(M)+L+N+N
IF(M)201,201,200
200 B=EXP0(M1)/(A/WBTA+1.)+1./((EXP0(M1))*((A-2.*M*A0)/WBTA+1.))
RETURN
201 B=1./(A/WBTA+1.)
RETURN
END
```

COMPLEX FUNCTION FUNCT(X)

C

C CALCUL DE L'INTEGRANT

C

```
COMMON/FNT/AB,LAM,LMCOS,TGPHI,DPHI,WBTA
COMPLEX AB,LAM,LMCOS,Z,WBTA
REAL LNX
LNX=ALOG(X)
Z=-AB*(1.-X)+LMCOS+LAM*(-X*COS(DPHI-TGPHI*LNX))+
1WBTA*LNX
FUNCT=CEXP(Z)
RETURN
END
```

CHAPITRE IV

Etude de l'influence des collisions sur les principaux problèmes de propagation

Nous nous proposons dans ce dernier chapitre d'entreprendre l'étude de l'influence des collisions sur les problèmes de propagation d'ondes dans les plasmas et magnetoplasmas.

Compte tenu de l'ampleur de la tâche envisagée, nous avons été contraints de limiter notre investigation à trois groupes de problèmes dans l'espoir qu'ils seront assez représentatifs sinon exhaustifs pour nous permettre de formuler des conclusions suffisamment synthétiques.

Nous traiterons ainsi dans le premier groupe l'influence directe des collisions sur la fonction diélectrique du plasma, le suivi des pôles de Landau et le problème des oscillations forcées. Cette étude sur les plasmas sans champ magnétique doit permettre essentiellement de tester la validité des résultats obtenus.

Dans le second groupe nous nous sommes attachés au calcul des termes d'excitation et des facteurs de corrélations avec et sans champ magnétique.

Cette étude a pour but de mettre en évidence l'influence des collisions sur le déphasage des fréquences de résonances.

Enfin le troisième groupe doit permettre de mettre en relief le rôle essentiel des collisions sur les ondes de Bernstein et dans la destruction des échos linéaires. Le mode de destruction de ces échos caractéristique du modèle collisionnel adopté est un résultat original [6].

A - Influence sur les caractéristiques du plasma en l'absence de champ magnétique

1 - Influence sur la fonction diélectrique du plasma

L'influence la plus immédiate des collisions est évidemment la modification de la structure mathématique de la fonction diélectrique longitudinale.

Cette modification est visible sur le graphe 1, où l'on a porté les parties réelle et imaginaire de ϵ en fonction du nombre d'ondes k/D , pour une fréquence $\omega = 1.1\omega_p$ et pour 3 valeurs de la fréquence de collision β (normalisée ω_p) : 0., 0.2, 0.4. La courbe $\beta=0$ et le graphe 2 qui donnent les mêmes grandeurs mais pour $\beta=0$, $\omega=1.1\omega_p$, $\omega=1.2\omega_p$ sont calculés à partir des résultats de Fried et Conte [20]. On voit clairement que pour les β croissants les courbures (donc les gradients) sont nettement diminuées.

2 - Suivi des pôles de Landau

La figure 3 montre l'évolution en fonction du nombre d'ondes k du pôle de Landau, pour différents β . On s'aperçoit que la fréquence ω_r décroît avec β tandis que l'amortissement croît. L'allure générale des courbes en fonction de k reste par contre identique même pour des fréquences de collisions élevées : (0.8 ω_p) pour des fréquences plus faibles (mais non négligeables) de l'ordre de 0.1 ω_p , la courbe est presque confondue (sauf peut-être pour les petits k) avec celle donnée par Canosa [7] pour $\beta=0$.

3 - Oscillations forcées

On peut obtenir un second suivi du pôle, dans le cas des oscillations forcées. On fixe une fréquence ω , et l'on cherche

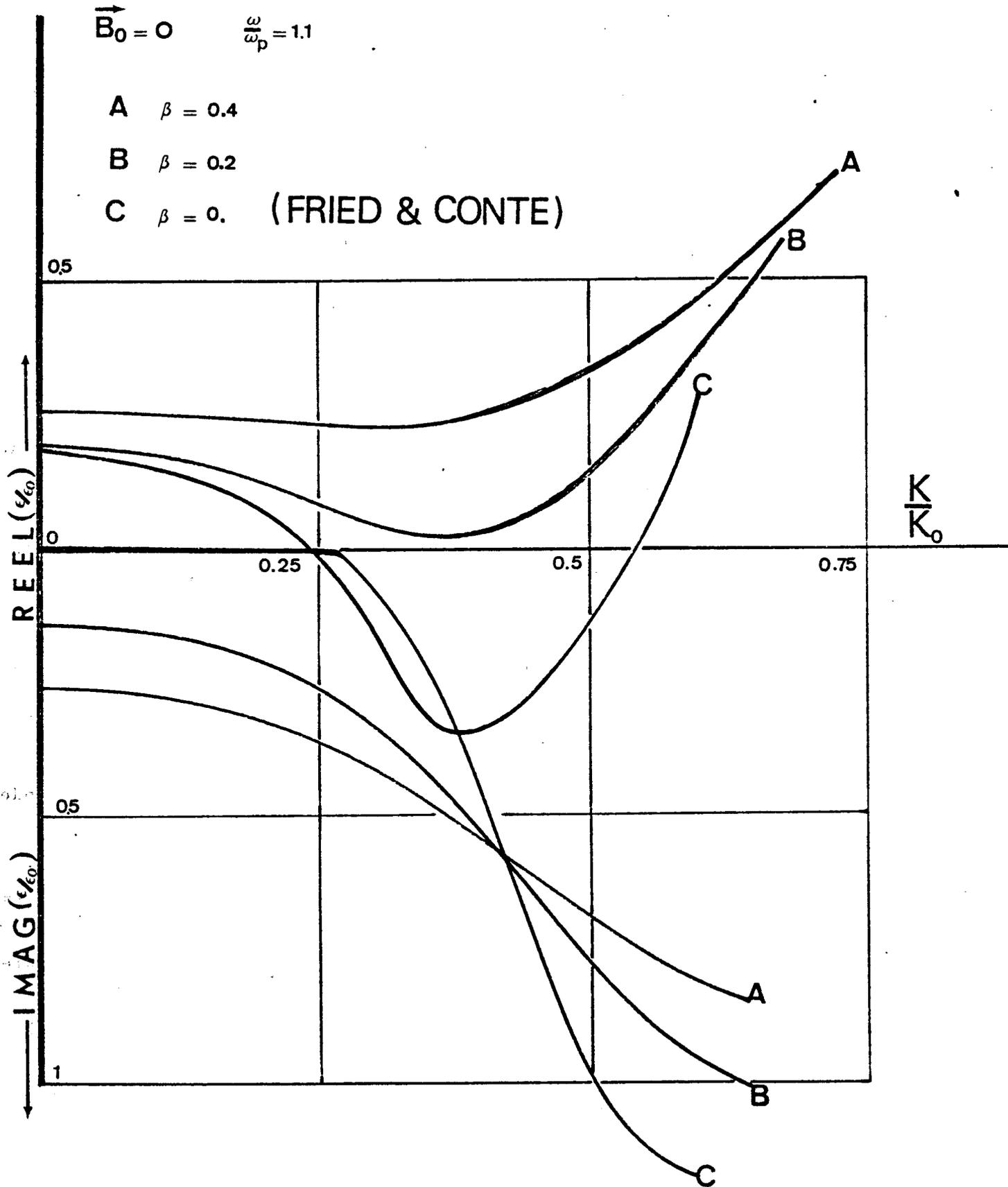


FIG. 1 – COMPARAISON AVEC FRIED ET CONTE

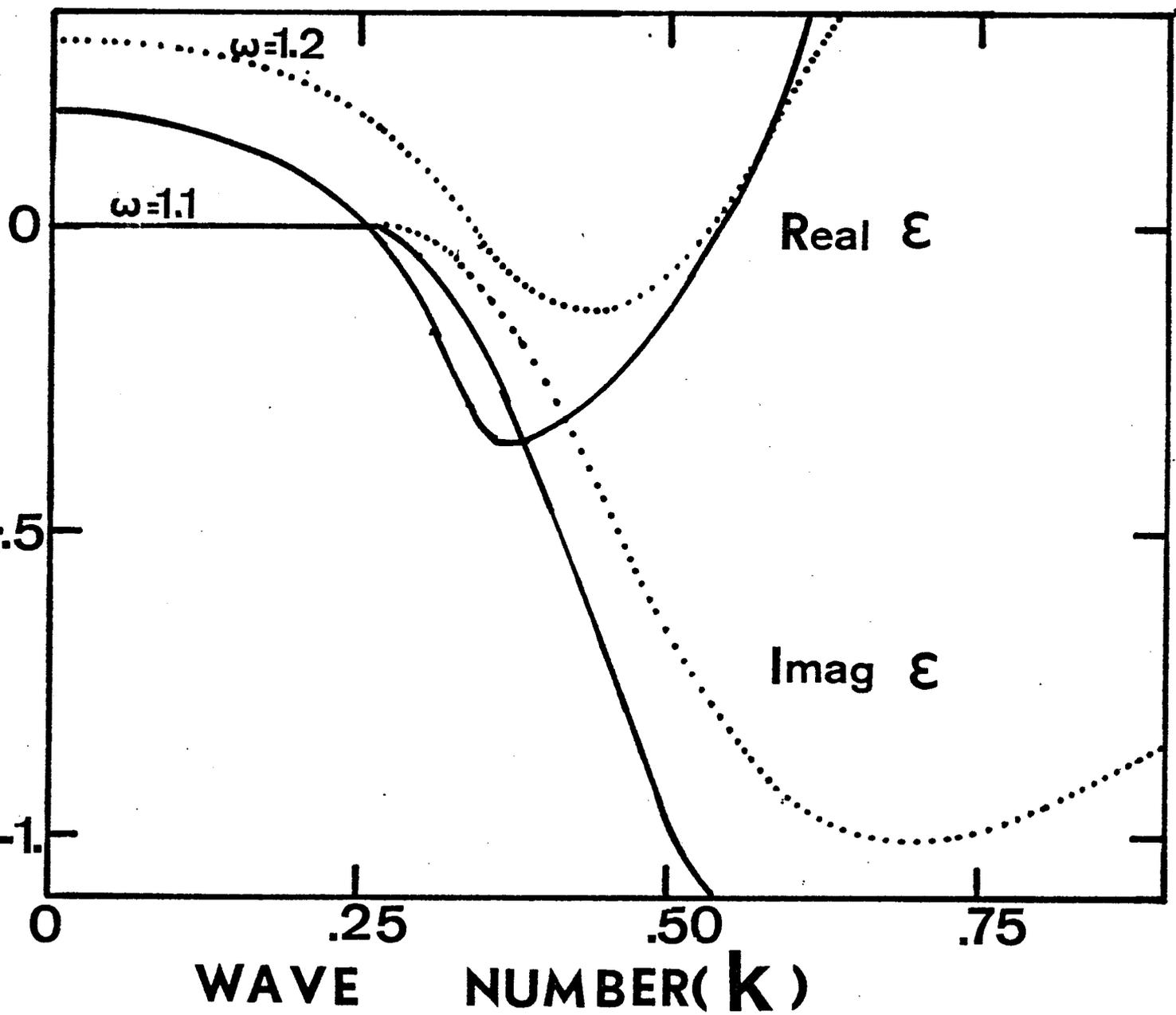


FIG. 2 - FRIED ET CONTE

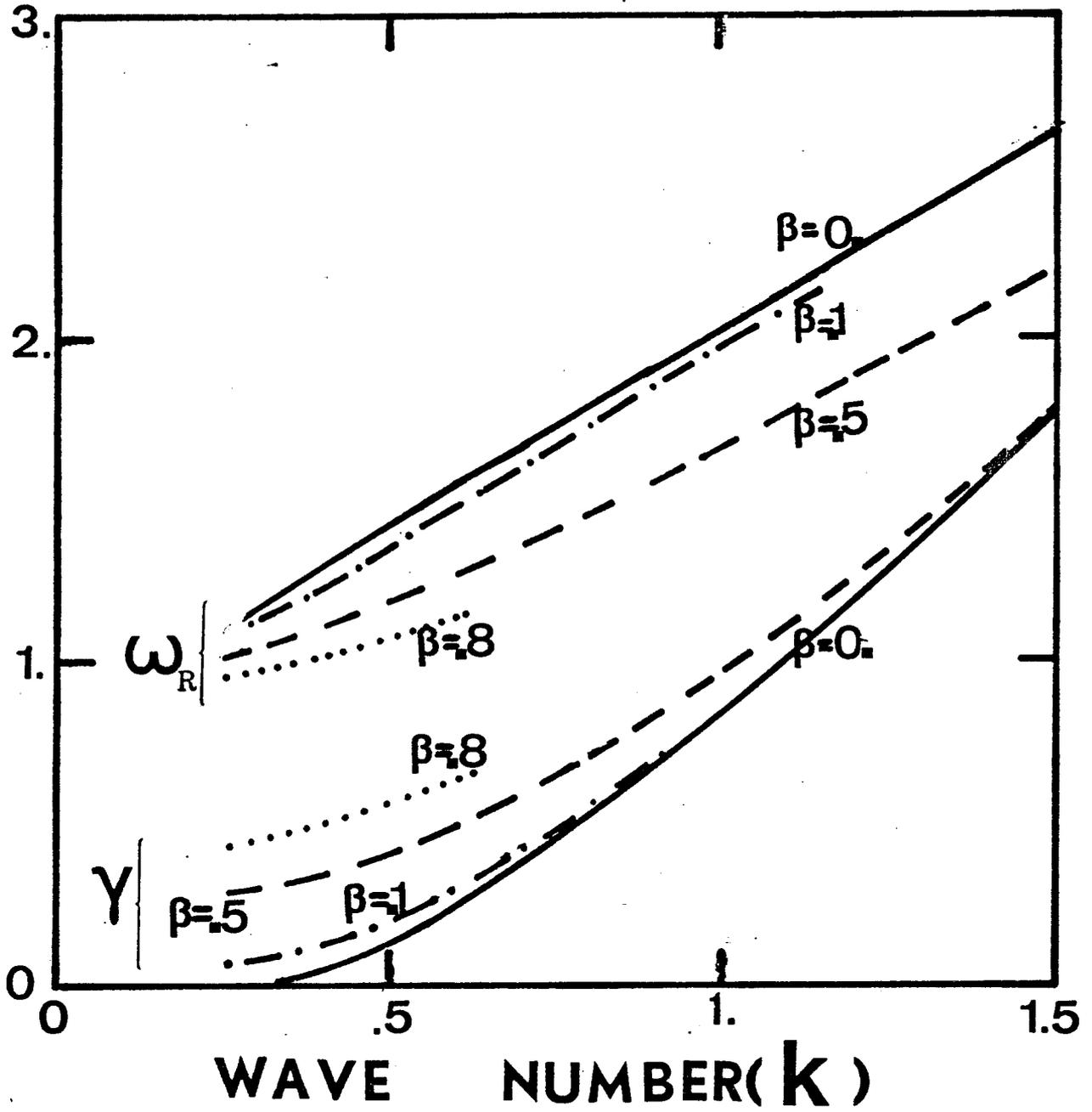


FIG. 3 – SUIVI DES POLES DE LANDAU

la solution de l'équation de dispersion dans le plan complexe des k . Le suivi se fait par continuité et le résultat est porté sur le graphe n° 4. On s'aperçoit que les courbes $\omega(k \text{ réel})$ forment un faisceau compact pour différentes valeurs de la fréquence de collisions. Le faisceau $\omega(k_{im})$ présente au contraire des branches distinctement séparées. Cette allure s'explique du fait que l'amortissement spatial (donc k_{im}) ne peut que croître avec β . Les branches se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à l'axe des k_{im} de module à peu près proportionnelle à β .

Ces résultats donnent à penser qu'en l'absence de champ magnétique les collisions modifient peu les spectres de fréquence et l'allure général des phénomènes. Elles diminuent seulement les distances d'atténuation (mais de manière sensible).

Enfin les différentes courbes obtenues se déduisent des cas de référence ($\beta=0$) de manière remarquablement continue en β .

Ces constatations permettent d'apprécier la bonne cohérence physique du modèle choisi.

B - Influences sur les termes d'excitation

1 - Les facteurs d'excitation

Sans entrer dans le détail de la théorie des facteurs d'excitation du plasma (on consultera par exemple à ce sujet Sitenko : Electro-magnetic fluctuations in plasma - academic press).

Rappelons brièvement leur définition :

Dans le champ des variables de Fourier-Laplace, les équations de Maxwell fournissent la relation entre le champ électrique et le courant d'une part et l'équation de propagation d'autre part.

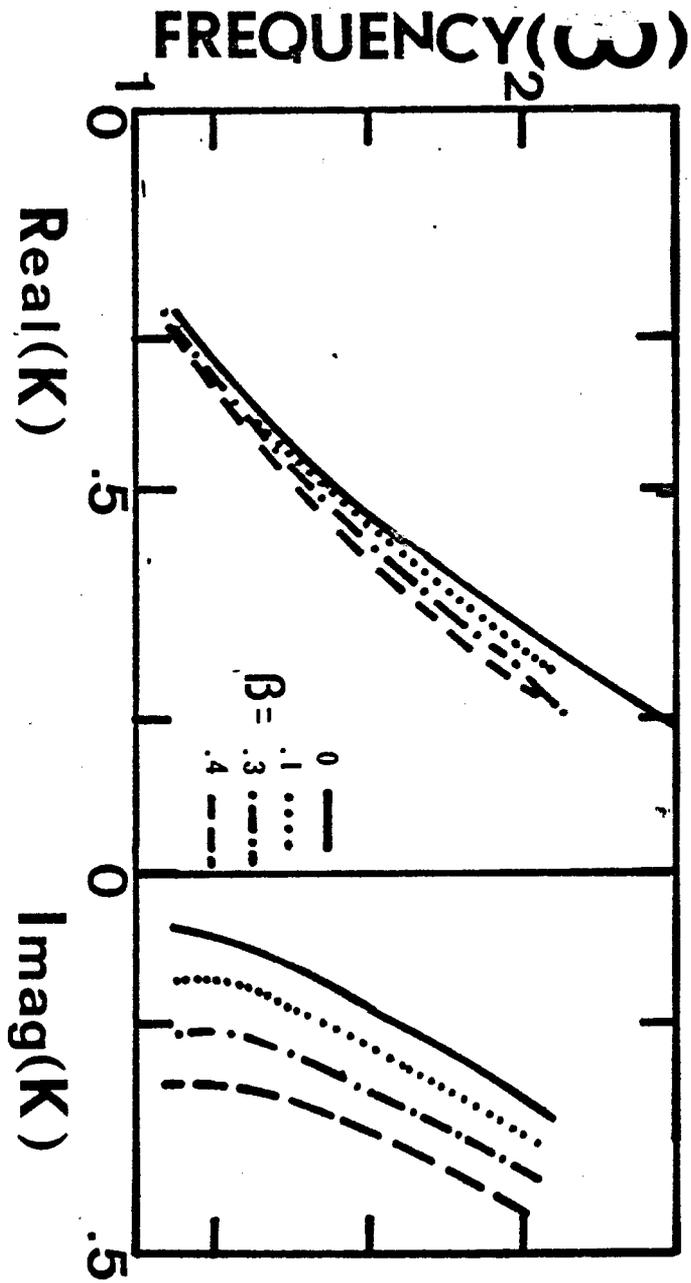


FIG. 4 - OSCILLATIONS FORCEES

$$\text{IV-B-1-1} \quad \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \left[\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right] E_j = \frac{4\pi}{(i)\omega} J_i$$

(Convention de sommation d'Einstein)

$$\text{IV-B-1-2} \quad \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij}\right) + \epsilon_{ij} \right] E_j = 0 \quad \forall i$$

Or dans un milieu homogène isotrope on peut écrire ces expressions en séparant les parties longitudinale et transversale :

$$\text{IV-B-1-3} \quad \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{ij} + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left(\epsilon_{\perp} - \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \right) \right\} E_j = 0$$

Si l'on définit par

$$\text{IV-B-1-4} \quad \vec{\sigma} \otimes \vec{E} = \vec{J}$$

le tenseur de conductivité, l'équation quantique de corrélation des fluctuations de courant dans un gaz de bosons s'écrit :

$$\text{IV-B-1-5} \quad \langle J_i J_j \rangle = \frac{\hbar(i)}{\exp(\hbar\omega/\Theta) - 1} [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ji}]$$

utilisons alors la relation de continuité (en variables de Fourier-Laplace).

$$\text{IV-B-1-6} \quad \omega \rho = k_j J_j$$

il vient en substituant dans IV-B-1-5 :

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{1}{\omega^2} \langle k_i J_i, k_j J_j \rangle = \frac{\hbar(i)}{\omega^2 (\exp(\hbar\omega/\Theta) - 1)} [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ji}] k_i k_j$$

mais alors d'après IV-B-1-1 à IV-B-1-4

$$\text{IV-B-1-7} \quad (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ji}) k_i k_j = (i) \frac{\omega^2 k^2}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_{ij}^* - \epsilon_{ij}}{\epsilon_{ij}^* \epsilon_{ij}} \right)$$

où en définitive :

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{\hbar/2\pi}{\exp(\hbar\omega/\Theta) - 1} \frac{\text{Im}(\epsilon_{ij})}{\|\epsilon_{ij}\|^2} k^2$$

effectuons alors le passage à la mécanique classique :

$$\hbar\omega \ll \Theta$$

$$\langle \rho^2 \rangle \approx \frac{\Theta}{2\pi} \frac{k^2}{\omega} \frac{\text{Im}(\epsilon_n)}{\|\epsilon_n\|^2}$$

C'est cette quantité que nous calculerons (à la constante $\frac{\Theta}{2\pi}$ près) sous le vocable de facteur d'excitation (ou excitation).

2 - Résonances et leur amortissement collisionnel

Les graphes 5-6 et 7 représentent les valeurs des excitations en fonction de la fréquence ω ; pour différentes valeurs de k , et différents β , dans le cas où le champ magnétique est nul. Le tableau ci-après résume les caractéristiques de ces courbes :

$B_0 = 0$
$k = 0.1 , 0.2 , 0.5 , 0.8 , 1. , 2. , 3.$
$\beta = 0.001 , 0.25 , 0.5 , 1. , 1.5$

La tendance générale de ces courbes est un lent élargissement des pics de résonance avec décalage vers la gauche des fréquences de résonance et ce pour des k constants et des β croissants. Ce phénomène est particulièrement bien mis en évidence sur le graphe N° 8 où pour $k = 0.5$ on a représenté les excitations en fonction de la fréquence pour des β croissants (0.001 , 0.1, 0.25, 0.5).

Pour les très hautes fréquences de collision ($\beta = 1.5$ fig.6) il y a disparition pure et simple des résonances, quelque soit k (alors que seules les $k > 1$ n'indiquaient pas de résonances pour les β inférieurs).

Notons que le décalage des fréquences de résonances est un excellent moyen de calculer les fréquences de collisions : la mesure

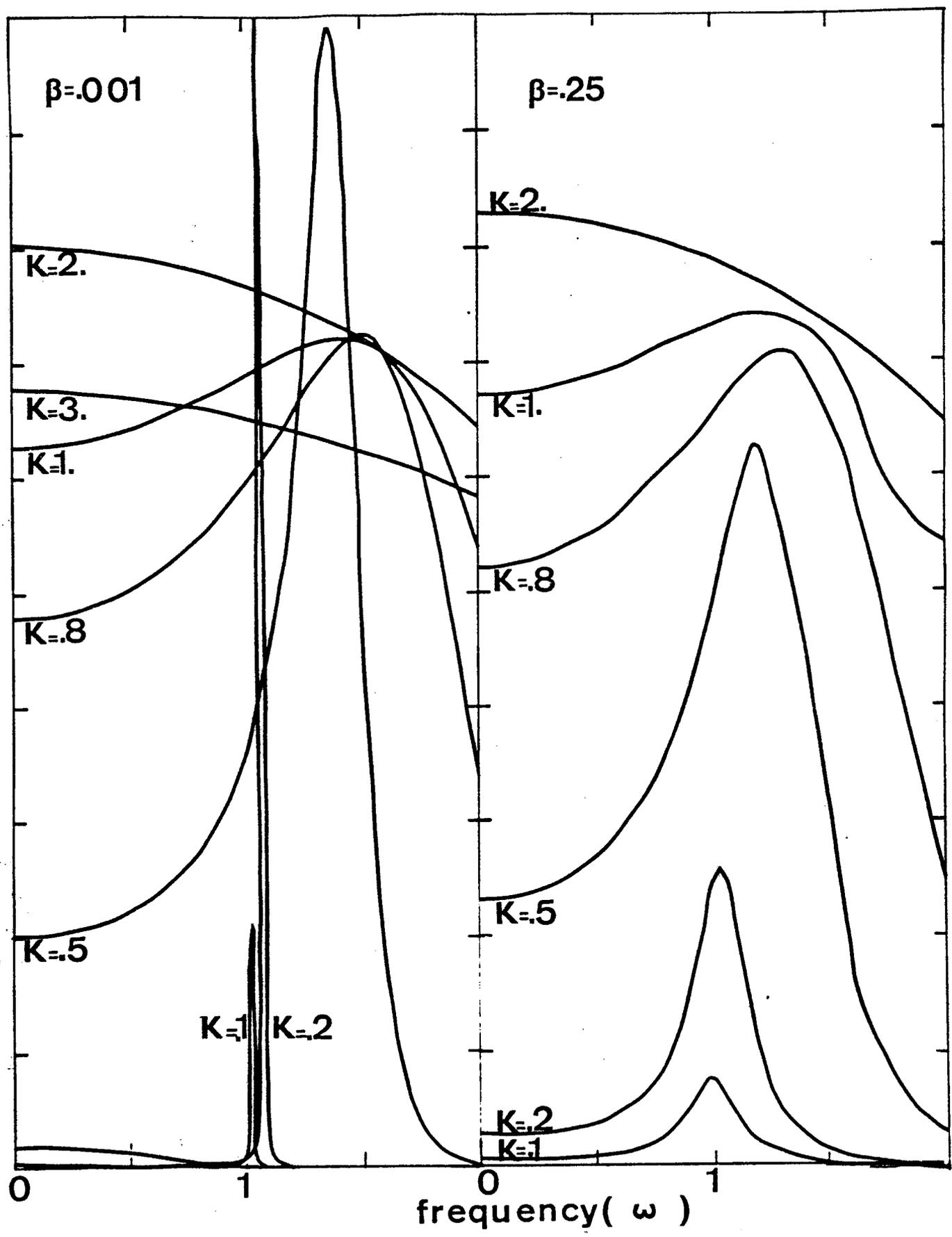


FIG. 5 - EXCITATION EN FONCTION DE BETA (I)

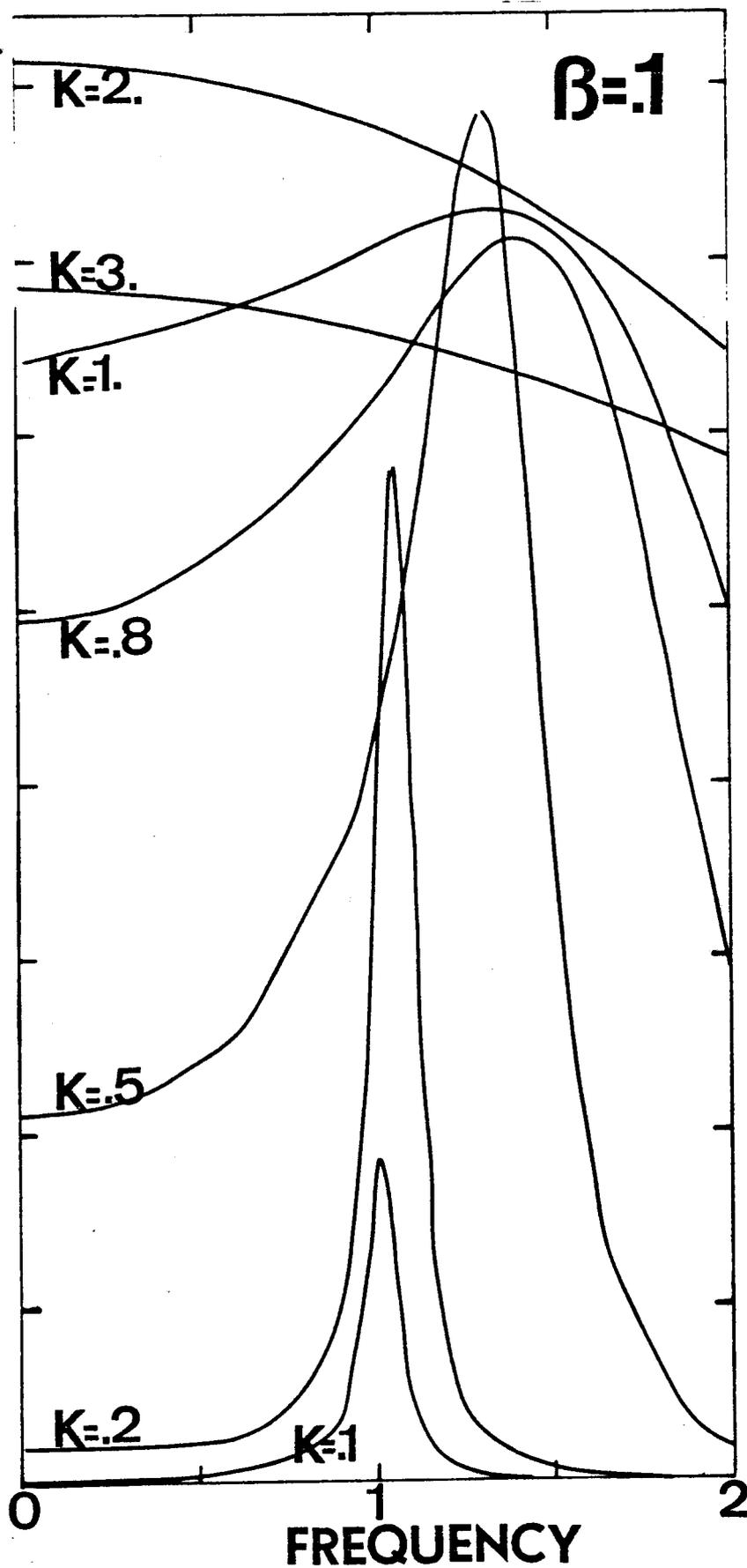


FIG. 6 - EXCITATION EN FONCTION DE BETA (II)

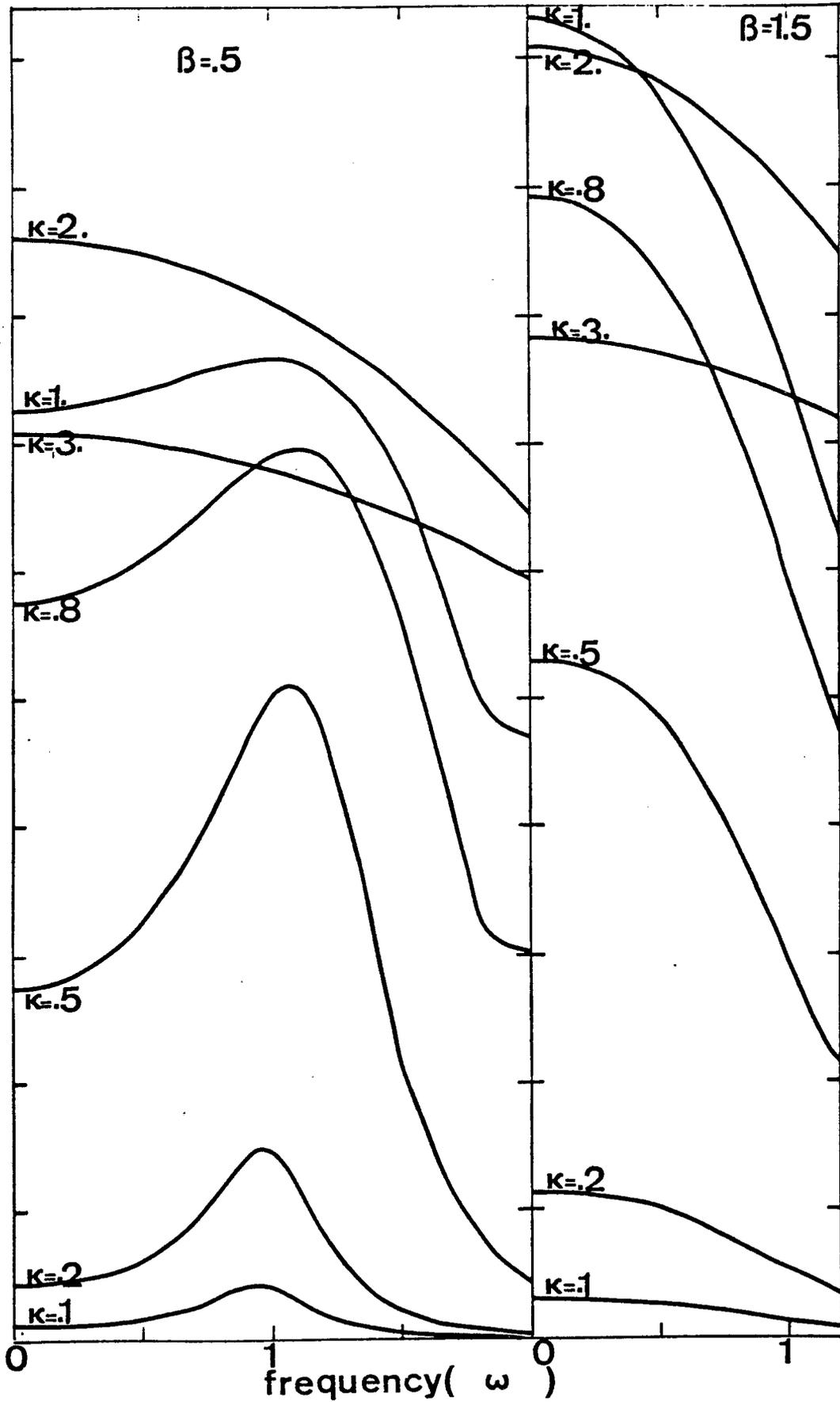
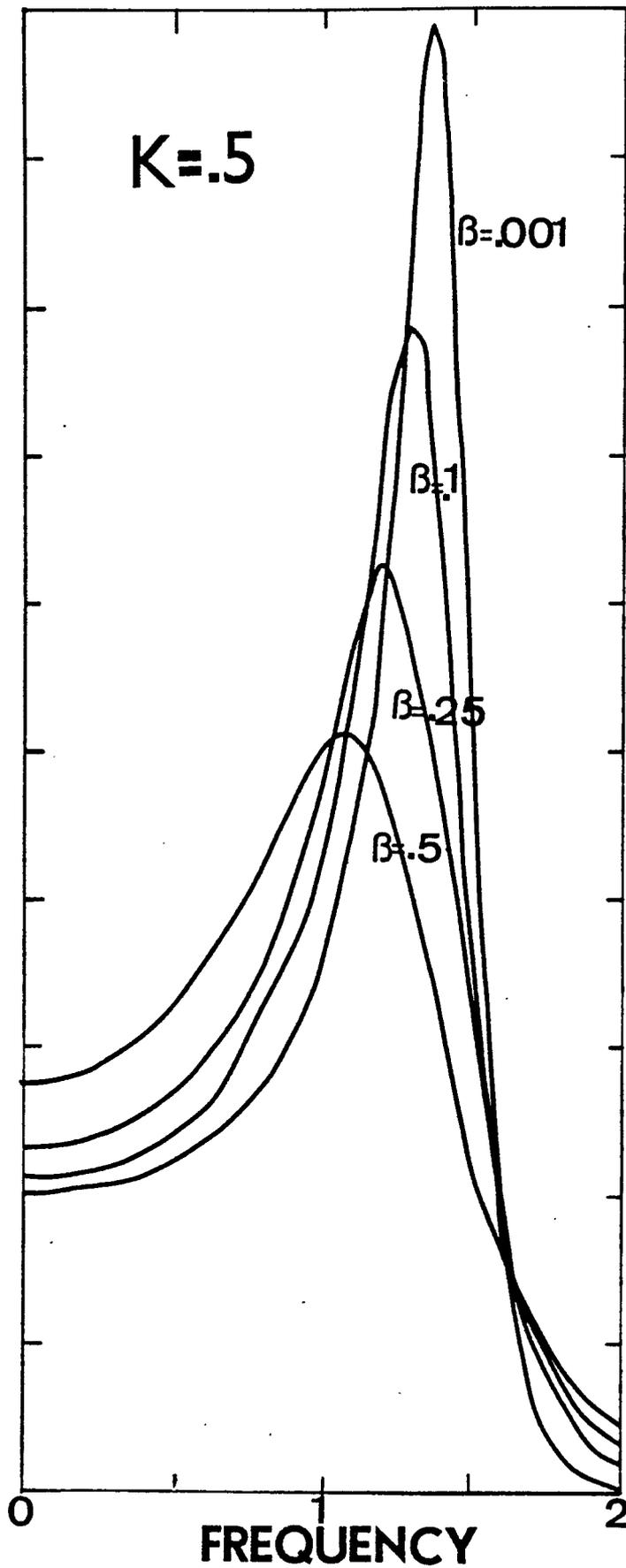


FIG. 7 – EXCITATION EN FONCTION DE BETA (III)

FIG. 8 — EXCITATION A_k CONSTANT EN FONCTION DE BETA

expérimentale par diffusion incohérente de $\langle \rho^2 \rangle$ fournirait après comparaison des réseaux $\beta = \beta(\omega, k)$ une estimation de β . Toutefois la construction complète (et précise) du réseau n'a pas été envisagée dans ce travail en raison du coûteux temps machine nécessaire.

3 - Etude de l'amortissement des excitations en présence de champ magnétique

Les figures suivantes 9 et 10 auxquelles on peut adjoindre la figure 5 représentent les valeurs des excitations pour une fréquence de collision égale à $\beta = 0.1 \omega_p$, pour différents k , un angle azimutal égal à 20° , et des fréquences gyromagnétiques (normées à ω_p) de 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.5

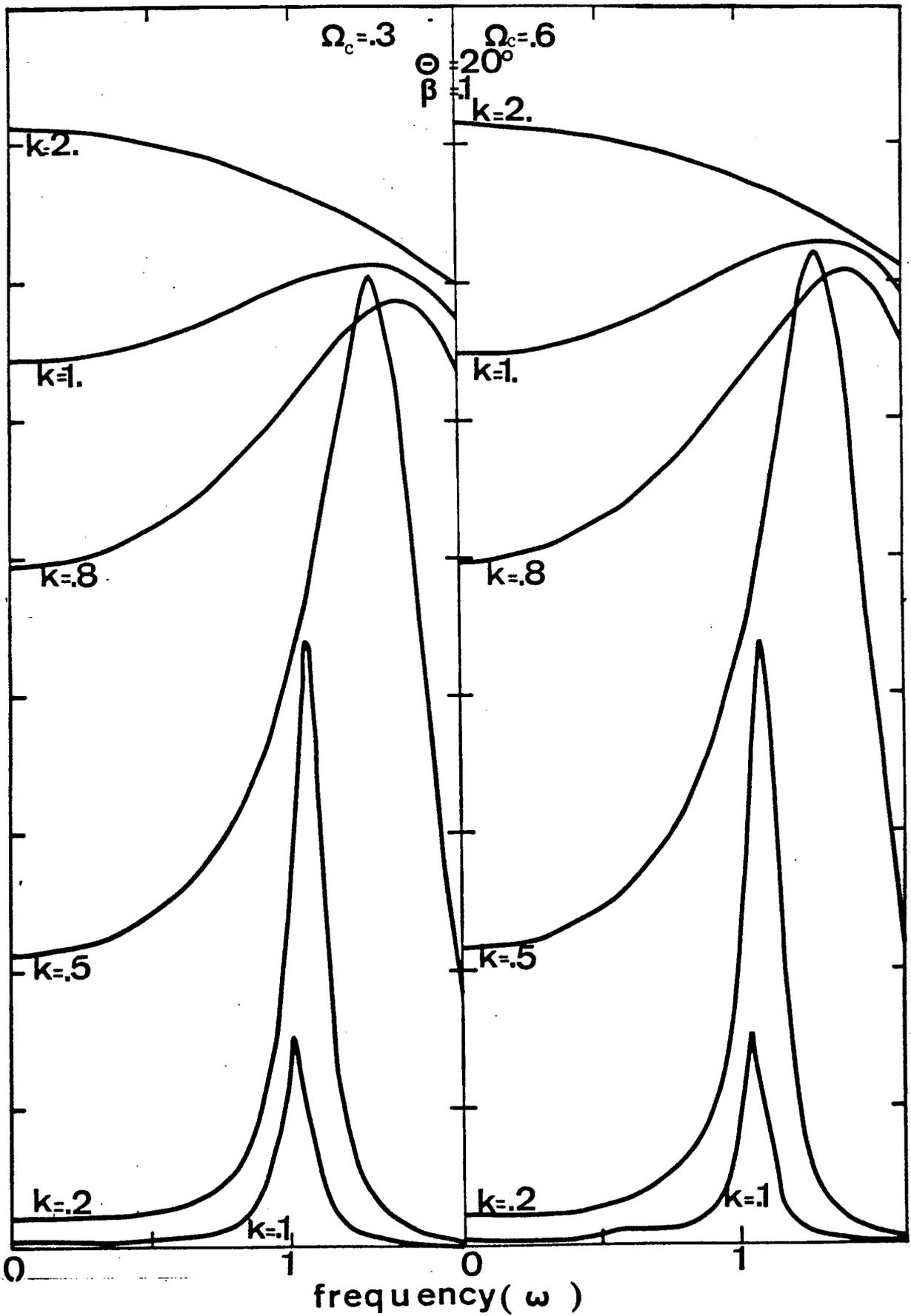
On aperçoit nettement une tendance à l'élargissement des pics de résonances, mais avec ici un décalage vers la droite des fréquences de résonances.

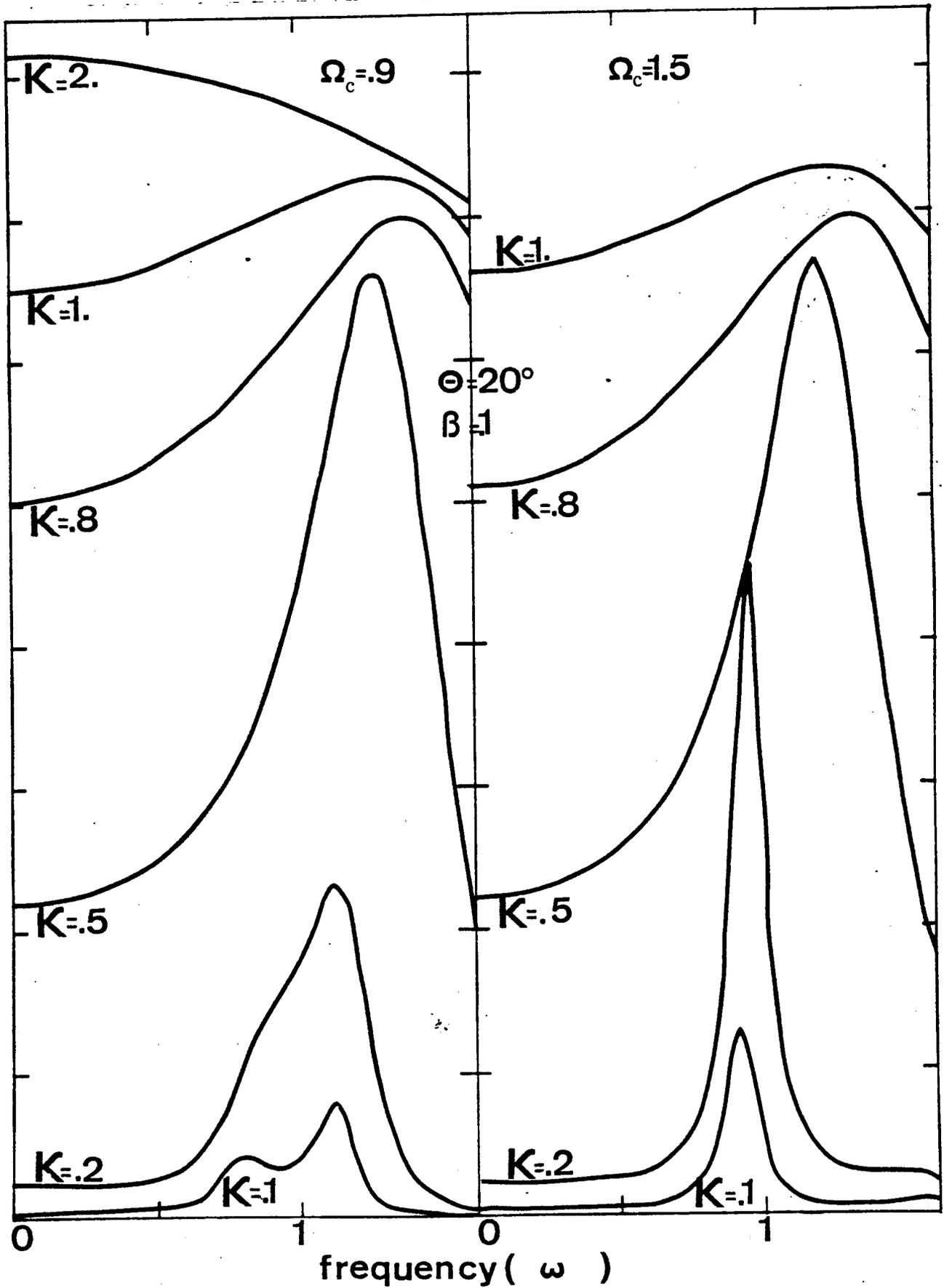
Un fait intéressant est à signaler pour les grandes longueurs d'ondes ($k \ll 0.2$) il y a apparition d'une résonance secondaire à la fréquence $0.8 \omega_p$ pour un ω_c de l'ordre de $0.6 \omega_p$. Ce maximum croît relativement avec ω_c et finit par dominer la résonance principale pour $\omega_c = 1.5$. On assiste alors au fait curieux suivant : les fréquences de résonances sont décalées vers la droite pour les grands k et les grands ω_c tandis qu'en raison d'un artefact elles sont décalées vers la gauche pour les petits k .

Enfin les figures 11 et 12 représentent les excitations pour des fréquences gyromagnétiques et de collisions fixées (respectivement $\omega_c = 9$; $\beta = 0.1$) différents k et différentes valeurs de l'angle azimutal ($\theta = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). La deuxième résonance déjà observée dans le cas précédent se développe en fonction de l'angle pour tous les $k \ll D^{-1}$ (donc un effet collectif).

Cette deuxième résonance due au champ magnétique devient maximum pour $\theta = 90^\circ$.

La figure 13 résume le phénomène pour un k donné (0.2)


 FIG. 9 – EXCITATION EN FONCTION DE B_0 (I)

FIG. 10 – EXCITATION EN FONCTION DE B_0 (II)

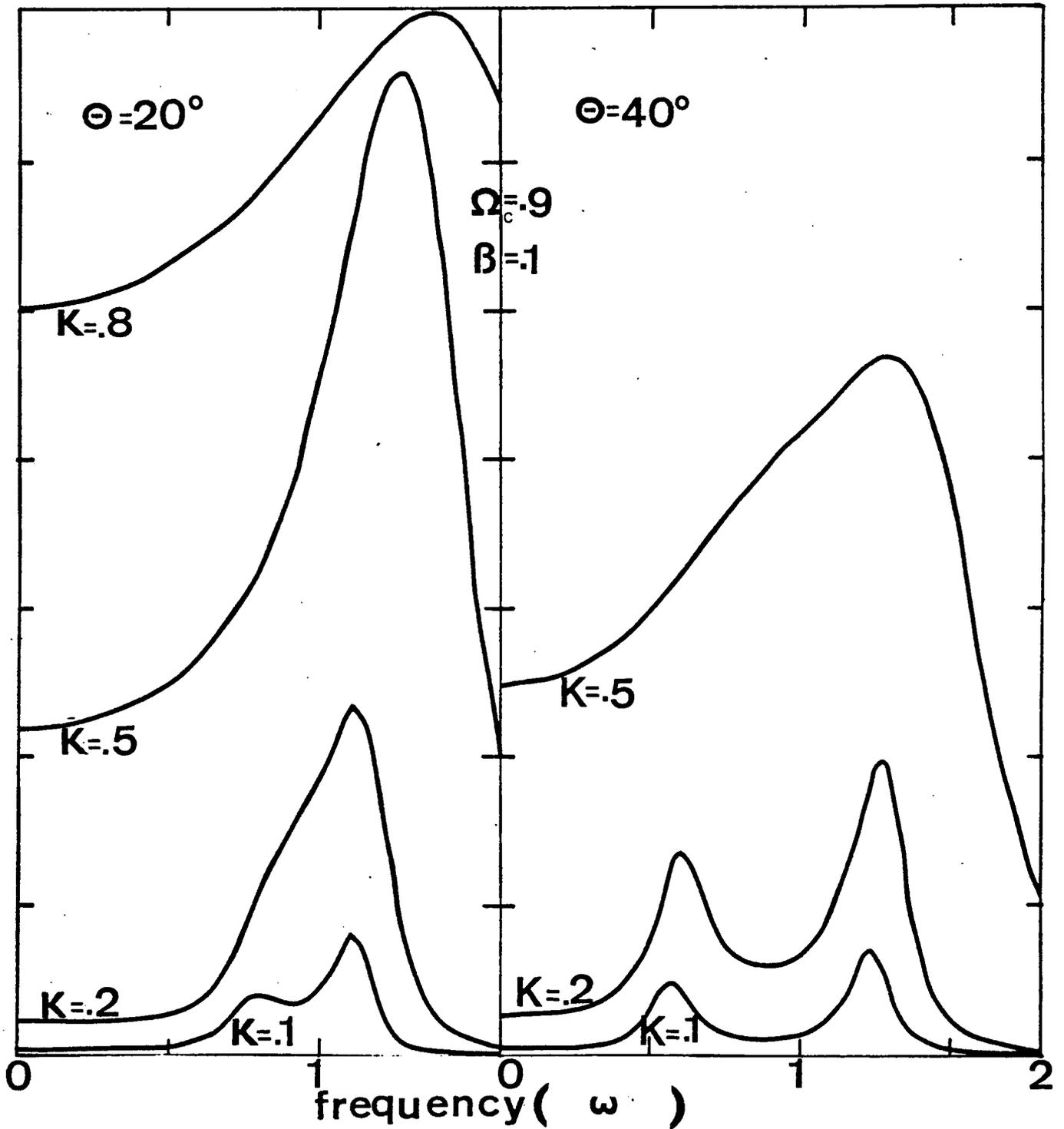


FIG. 11 – EXCITATION EN FONCTION DE L'AZIMUT (I)

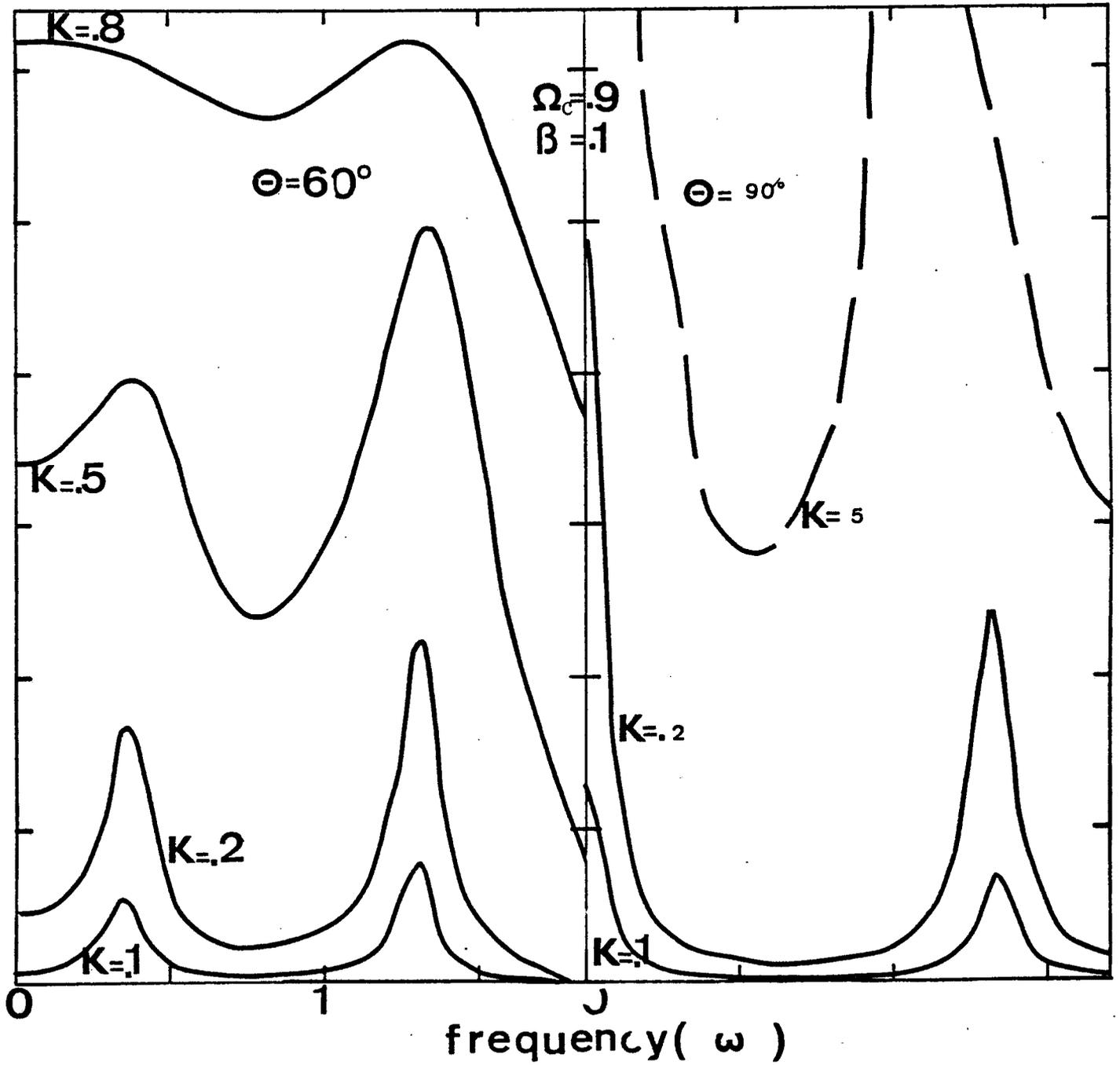


FIG. 12 – EXCITATION EN FONCTION DE L'AZIMUT (II)

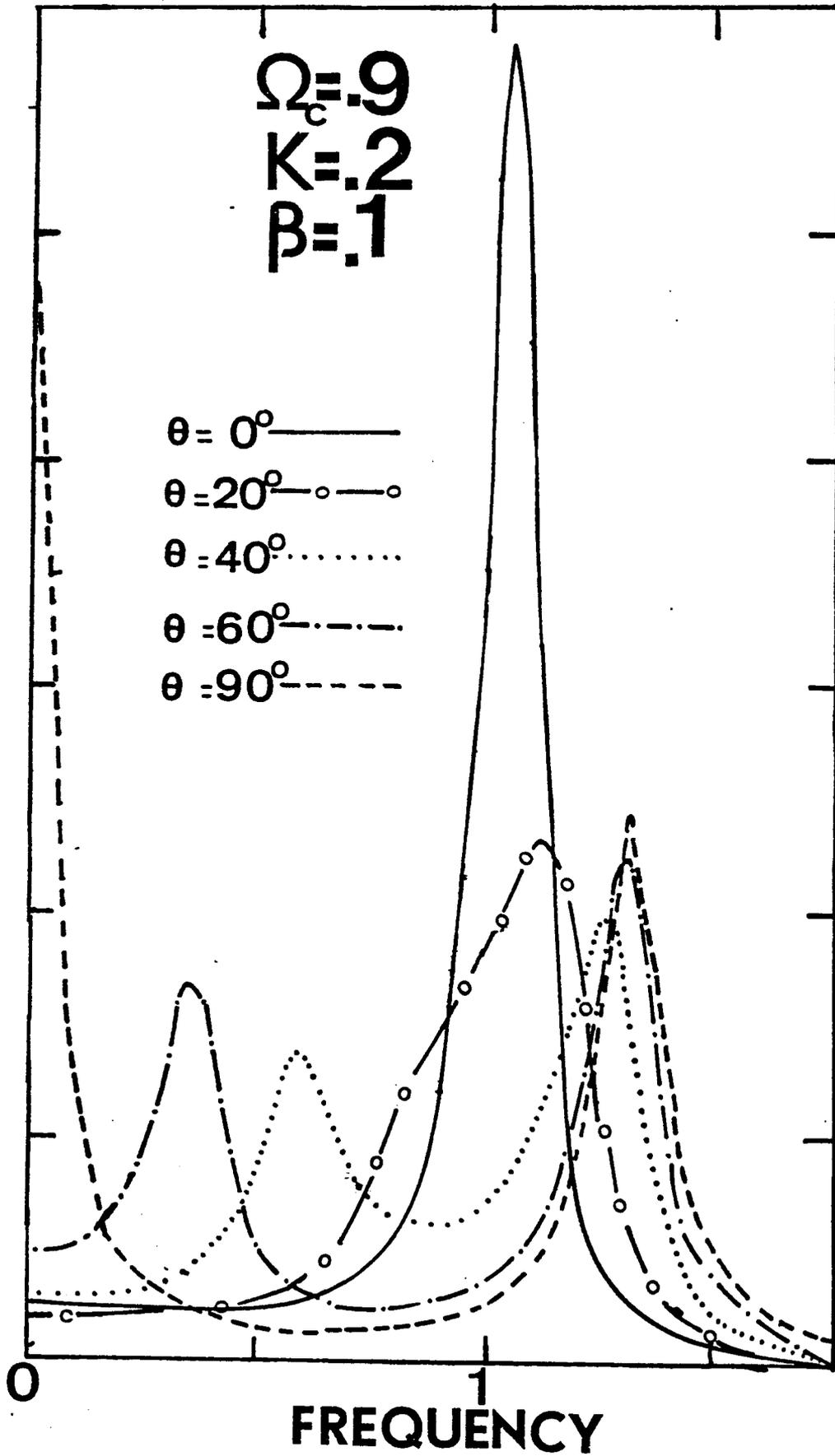


FIG. 13 — RESEAU D'EXCITATION EN FONCTION DE L'AZIMUT

inférieur à D^{-1} , on voit se développer la deuxième résonance (qui apparaît vers 20°) avec la croissance de θ , tandis que la première oscille en amplitude et croît en fréquence et voit sa largeur diminuer. Il y a ainsi "reconstruction" du pic de résonance pour $\theta = 90^\circ$.

C - Propagation perpendiculaire

Lorsque le champ $\vec{\epsilon}$, colinéaire au vecteur d'onde est perpendiculaire au champ magnétique \vec{B}_0 , on obtient dans la théorie sans collision, un mode de propagation remarquable, non amorti ou mode de Bernstein [3]. On a du reste montré (chapitre II paragraphe B) que la formule de dispersion de Bernstein était la limite "naturelle" pour $\beta \rightarrow 0$ de $\hat{D}(S, \theta = 90^\circ)$. On a également montré qu'il ne saurait exister d'ondes dans le plasma pour lesquelles $R(S) > 0$ (paragraphe C chapitre II). Cette circonstance implique ici que les modes de Bernstein seront nécessairement amortis dès que $\beta \neq 0$.

1 - Les modes de Bernstein en plasma collisionnel

La figure 14 montre les courbes de dispersion $\omega(k)$ pour $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_p$ et pour $\beta = 0.001 \omega_p$. Les courbes obtenues sont identiques à celles de Buckley [5]. Pour $\beta = 0.01 \omega_p$ (graphe 15), l'allure des courbes est conservée, on note seulement une décroissance plus rapide pour les petites longueurs d'onde (grands k).

Sur la figure 16, on a représenté les courbes obtenues pour les grands $\beta = (0.05 \text{ et } 0.1)$. La décroissance en fonction de k devient importante et l'on note que le maximum (qui correspond au "Gap" de la fréquence hybride haute ω_H) est croissant avec β . On en déduit la croissance des courbures quelque soit leur sens d'inflexion avec β . La figure 17 montre l'évolution dans le plan complexe de S , pour différents $\beta (0.001, 0.010, 0.0125, 0.0150)$ en fonction de kp , pour le "Gap" correspondant à l'hybride haute. On constate l'allure hyperbolique marquée de ces courbes.

La figure 18 décrit la variation de l'amortissement Γ (nor-

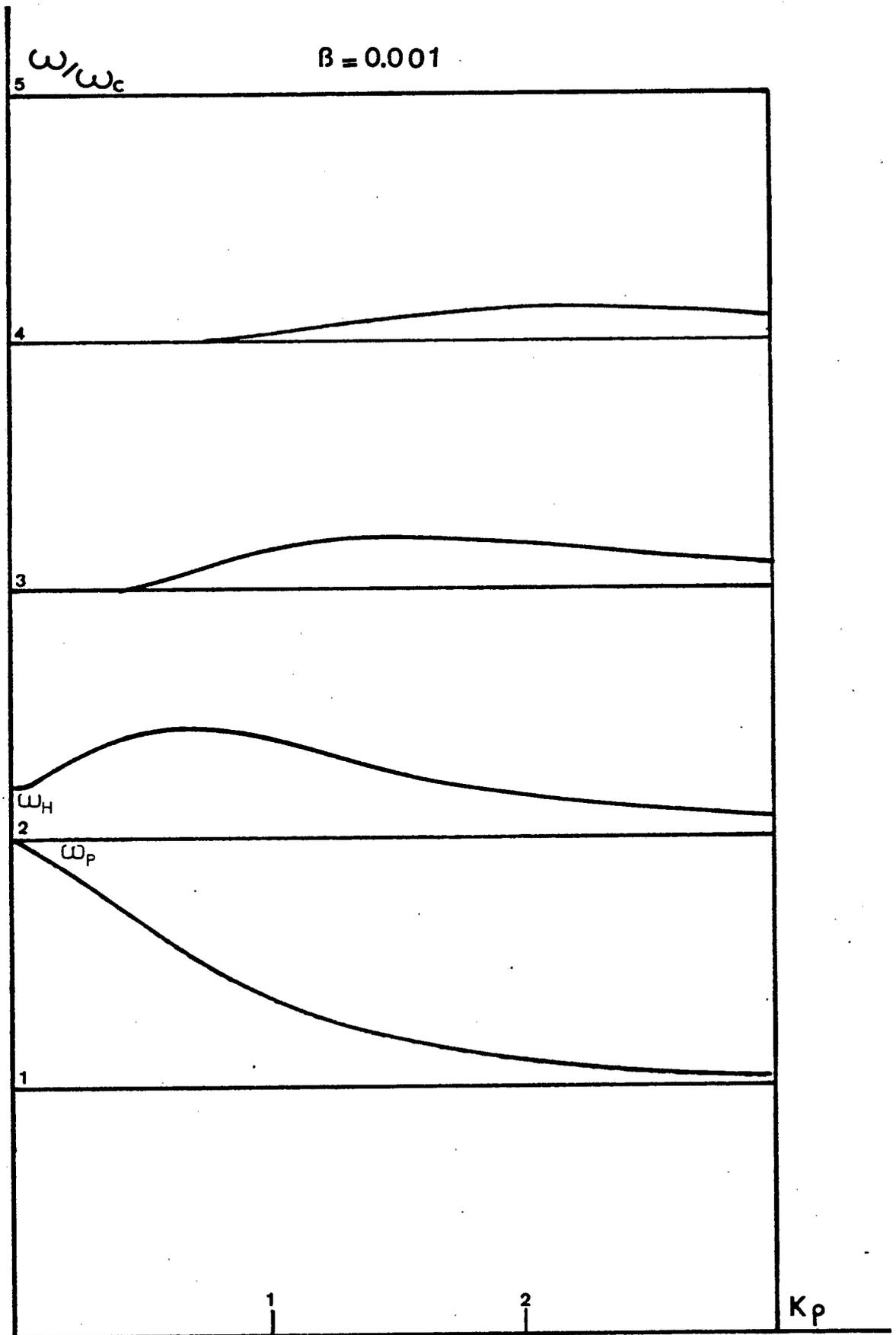


FIG. 14 – MODE DE BERNSTEIN (I)

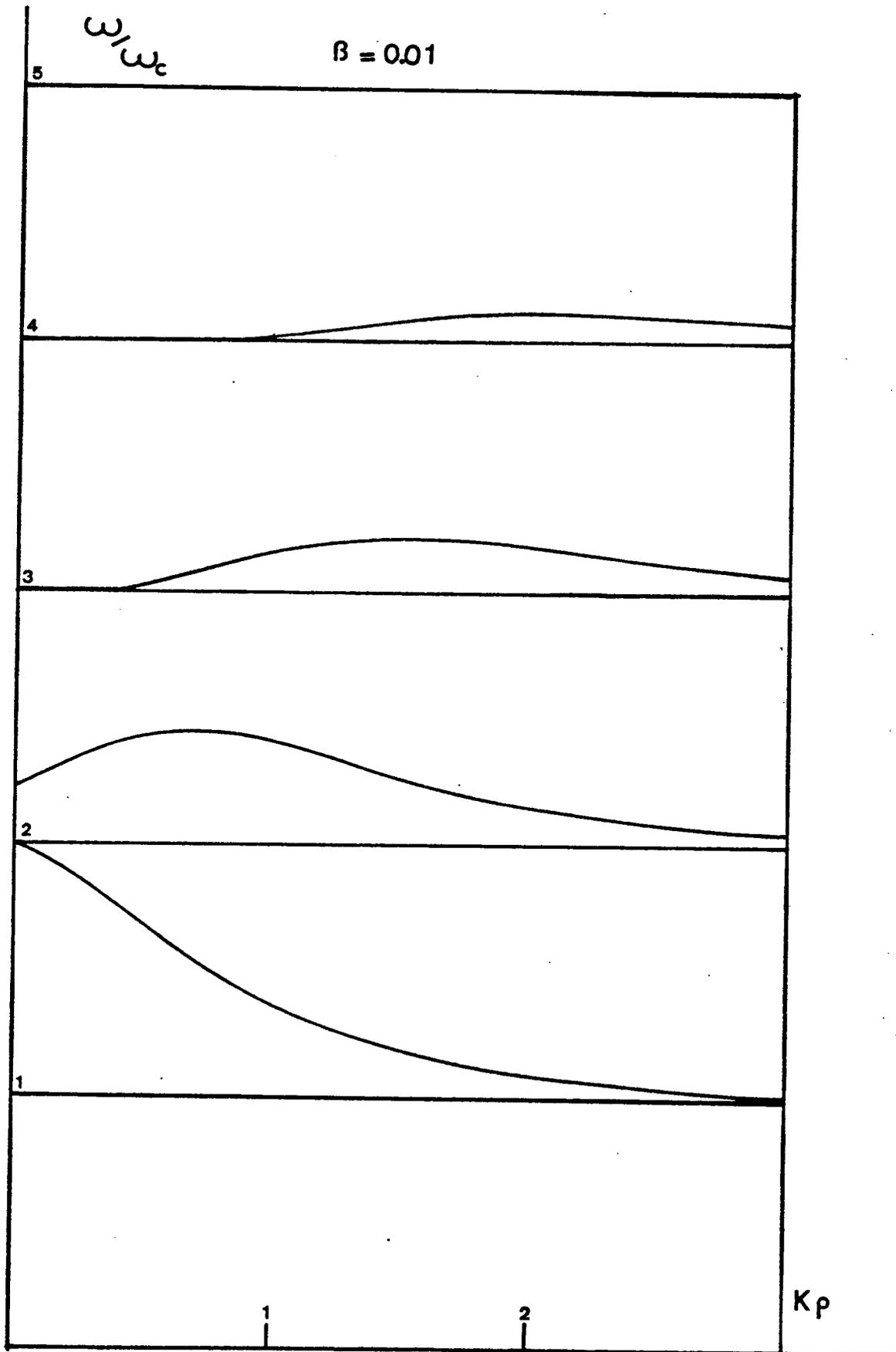


FIG. 15 - MODE DE BERNSTEIN (II)

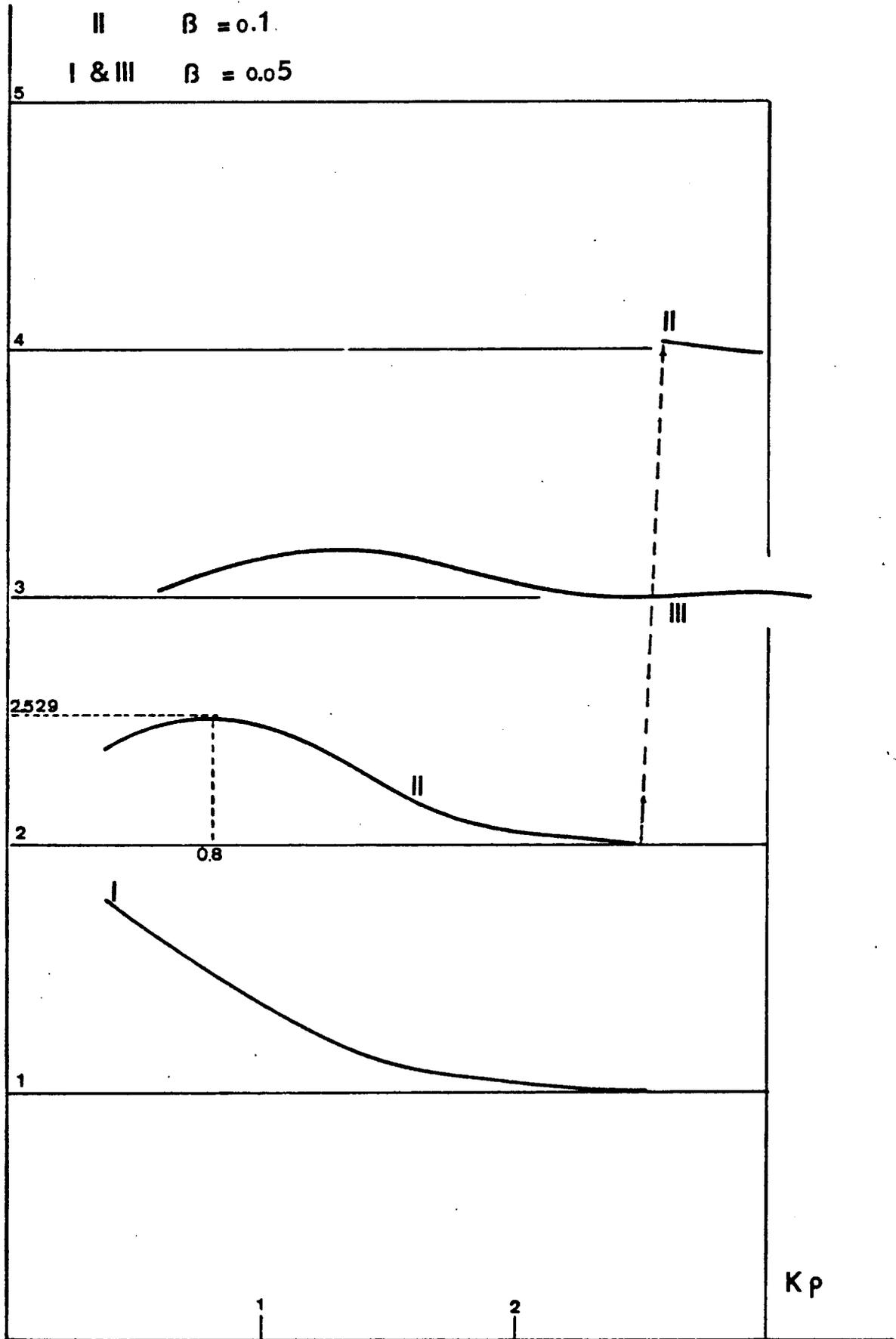


FIG. 16 — MODE DE BERNSTEIN (III)

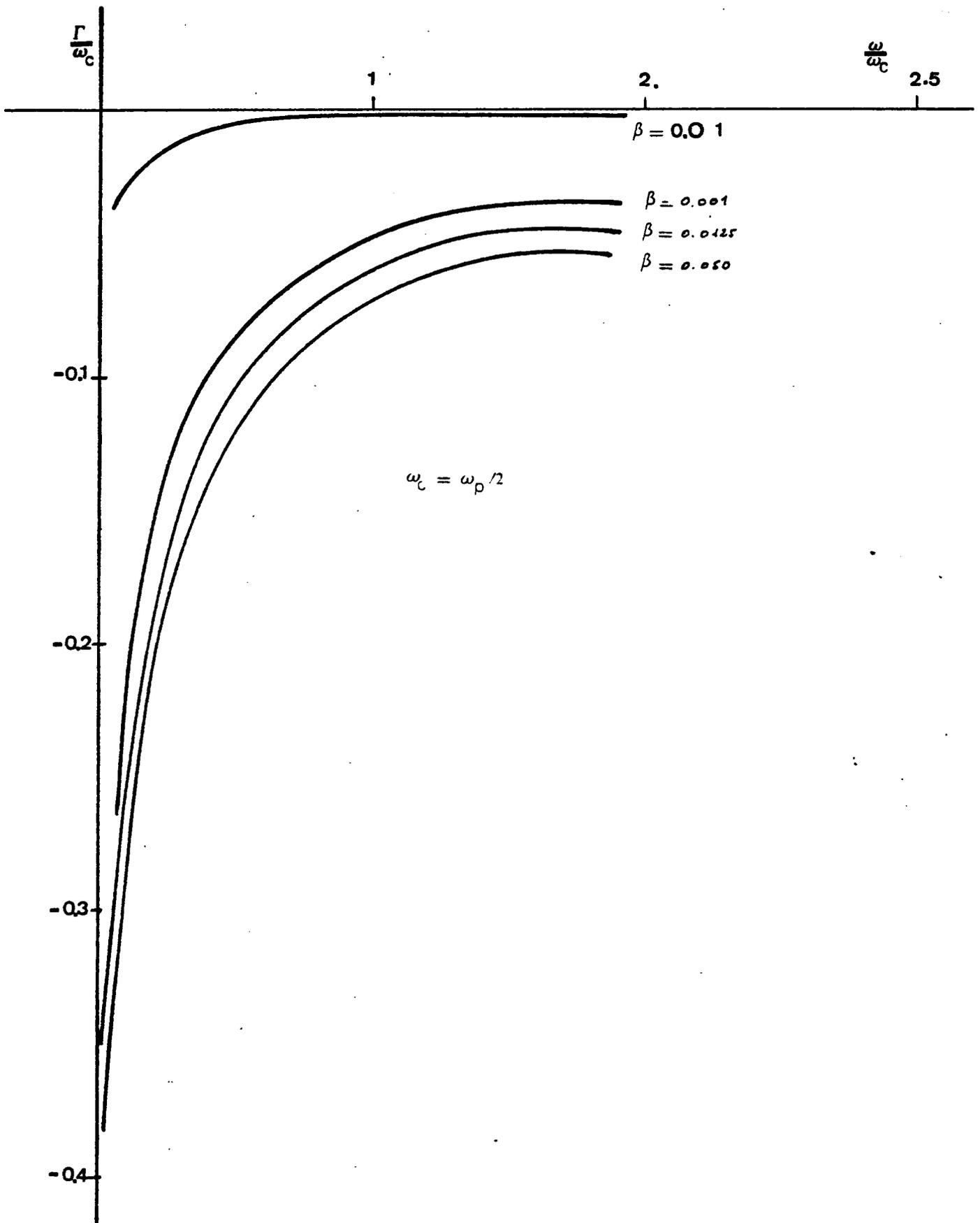


FIG. 17 – EVOLUTION DE S DANS LE PLAN COMPLEXE

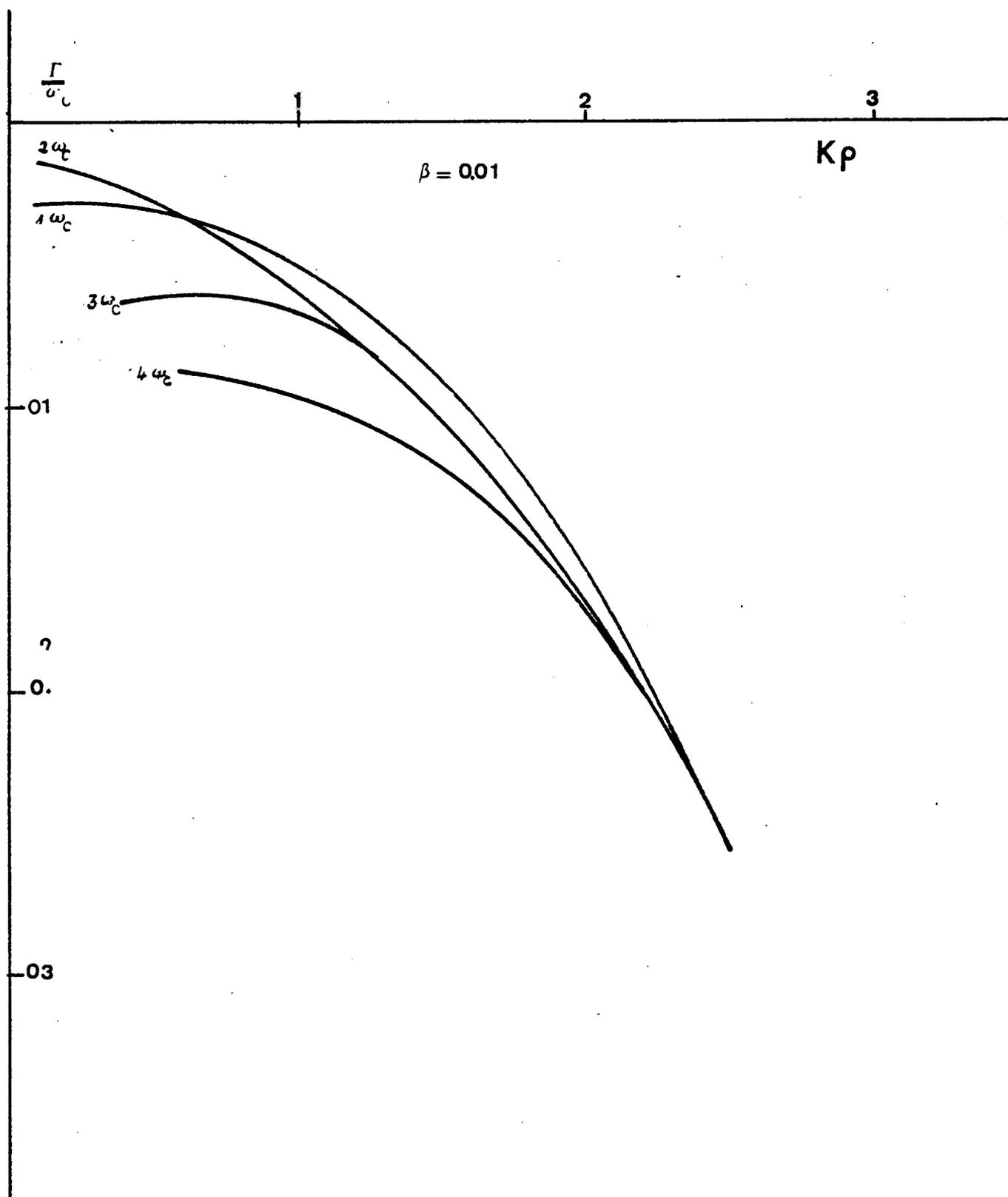


FIG. 18 – EVOLUTION DE $\frac{\Gamma}{\sigma_c}$ EN FONCTION DE $k\rho$ POUR 4 HARMONIQUES

malisé à ω_c) pour $\beta=0.01$ en fonction de k_p , pour différents harmoniques $1\omega_c$, $2\omega_c$, $3\omega_c$ et $4\omega_c$. On constate que la courbe de l'hybride haute ($2\omega_c$) coupe le faisceau des autres harmoniques (autrement dit la solution de l'équation de dispersion pour ces k et ν donnés, a 2 racines dont une dans le "Gap" de l'hybride haute).

Enfin le graphe 19 montre l'évolution en plan complexe de S pour k_p fixé à 0.8, en fonction de β variant de 0.002 à 0.06 par intervalle de 2.10^{-3} ap.

La valeur $k_p = 0.8$ correspond au maximum de l'intervalle de l'hybride haute et on constate le décalage vers les hautes fréquences de ce maximum en fonction de β .

Faisons une remarque, la courbe de dispersion correspondant à cet intervalle, il est clair qu'à une fréquence $\omega \in \{2\omega_c, 3\omega_c\}$ correspondent 2 modes possible k_1 et k_2 situés de part et d'autre du maximum. Toutefois ces modes ne peuvent coexister temporairement, leur amortissement étant sensiblement distinct (de l'ordre du double environ). Il est alors clair que pour $k_p = 0.8$, où ces modes vont coïncider, il y aura renforcement. Ce renforcement, ainsi que l'élévation de la fréquence du maximum semblent en accord avec les observations expérimentales (DEBRIE).

2 - Influence sur les échos linéaires

Lorsqu'on calcule la variation temporelle du champ électrique pour une longueur d'onde donnée $E = E(t, k)$ on constate en théorie non collisionnelle un phénomène d'échos si le champ magnétique est suffisamment faible : le signal $E(t, k)$, amorti par effet Landau se reconstitue lorsque les particules reviennent en phase après leur parcours sur la trajectoire gyromagnétique. Cet écho, amorti lui aussi par effet Landau apparaît alors successivement avec une période de $\frac{\omega_c}{2\pi}$ (cf à ce sujet Navet, Feix : Physics Letters - Vol. 45 A n° 1 (73) et 15).

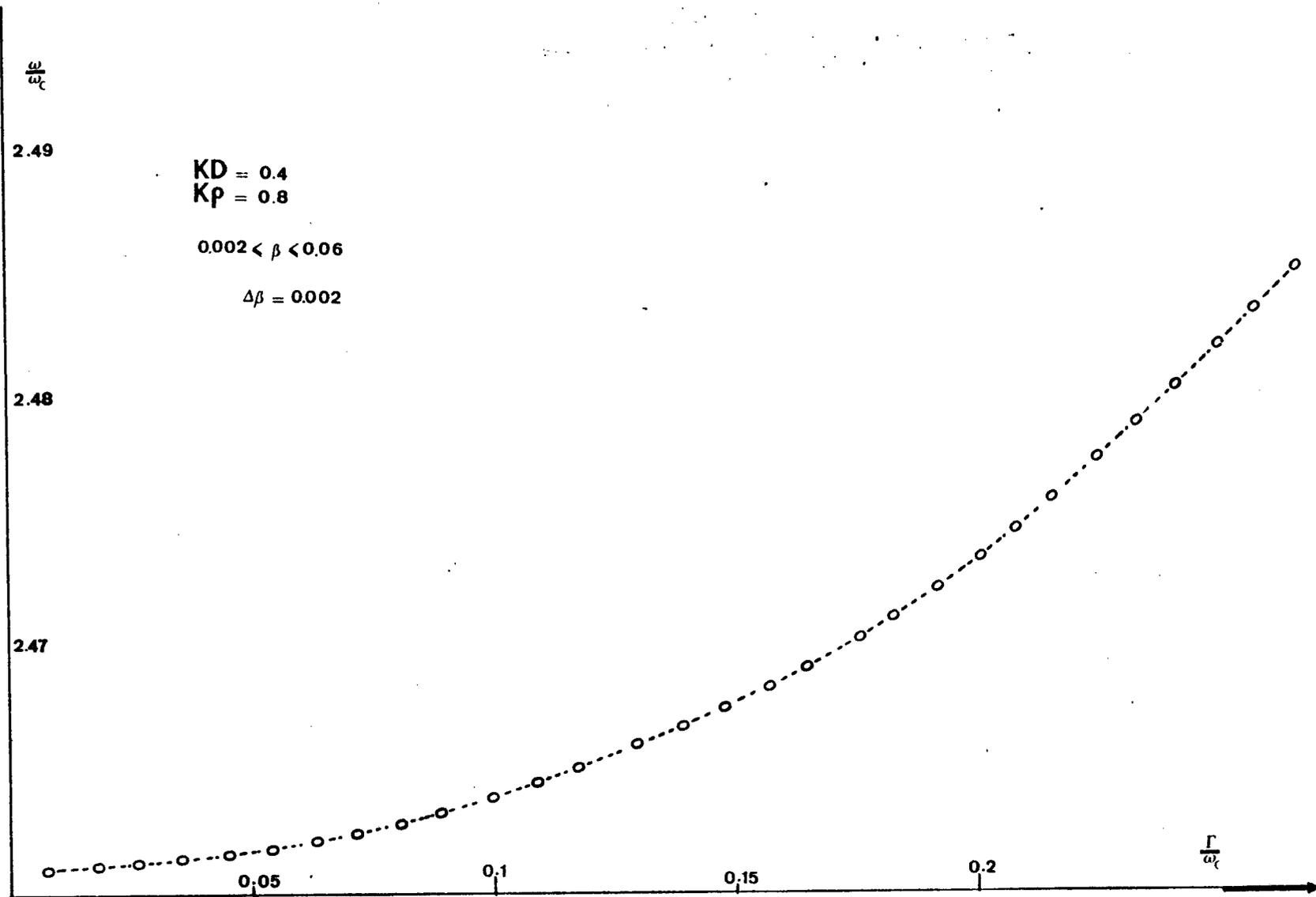


FIG. 19 – EVOLUTION DE S DANS LE PLAN COMPLEXE EN FONCTION DE β

Calculons tout d'abord le champ $E(t,k)$. Inversant la transformée de Laplace à l'aide de la formule de Bromwich-Wagner et appliquant la théorie des résidus, il vient classiquement :

IV-B-2-1

$$\frac{E(t,k)}{E_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{S_m t} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial S} \right)_{S=S_m}^{-1}$$

où S_m est une racine de l'équation de dispersion et E_0 une normalisation arbitraire.

L'allure du signal obtenu est celle de la figure 20 dans le cas $\beta=0$, $k_p = 0.7$ et $k_p = 3.5$

La figure 21 donne la représentation dans le plan complexe des s des différents niveaux de racines S_m correspondant à $\beta=0$, $\beta=10^{-3}$, $\beta=2.10^{-3}$ et $\beta=3.10^{-3}$, nécessaires au calcul de E/E_0 .

On notera le "ralentissement" du pôle de fréquence Landau avec β . La figure 22 illustre du reste un effet semblable : on a porté l'amortissement en fonction de β , pour $\omega_c = 0.1 \omega_p$ et $\omega_c = 0.2 \omega_p$. On remarque alors une cassure (d'autant plus nette que ω_c est petit), de la ligne des pôles. Cette cassure se produit au voisinage de l'amortissement de Landau (noté LD sur la figure) et devient une véritable discontinuité pour $\omega_c = 0$.

Enfin sur la figure 23 on a porté le signal et ses échos pour différentes valeurs de fréquences de collisions, en fonction du temps. Le résultat est tout à fait remarquable : pour $\beta=0$ (ce cas a été calculé à l'aide de la théorie non collisionnelle par la formule de Bernstein) les échos qui apparaissent à $n \frac{\omega_c}{2}$ ne sont pas amortis. Pour $\beta=1.10^{-3}$ et $\beta=2.10^{-3}$ ils sont fortement amortis et pour $\beta=3.10^{-3}$ il y a pratiquement destruction du 2e écho. Mais dans tous les cas le signal lui-même n'est pas amorti.

Ce phénomène est caractéristique du modèle collisionnel choisi. Il s'effectue une complexe compensation entre l'amortissement via l'exponentielle : $e^{-\frac{\nu}{k} t}$ et le mélange de phase

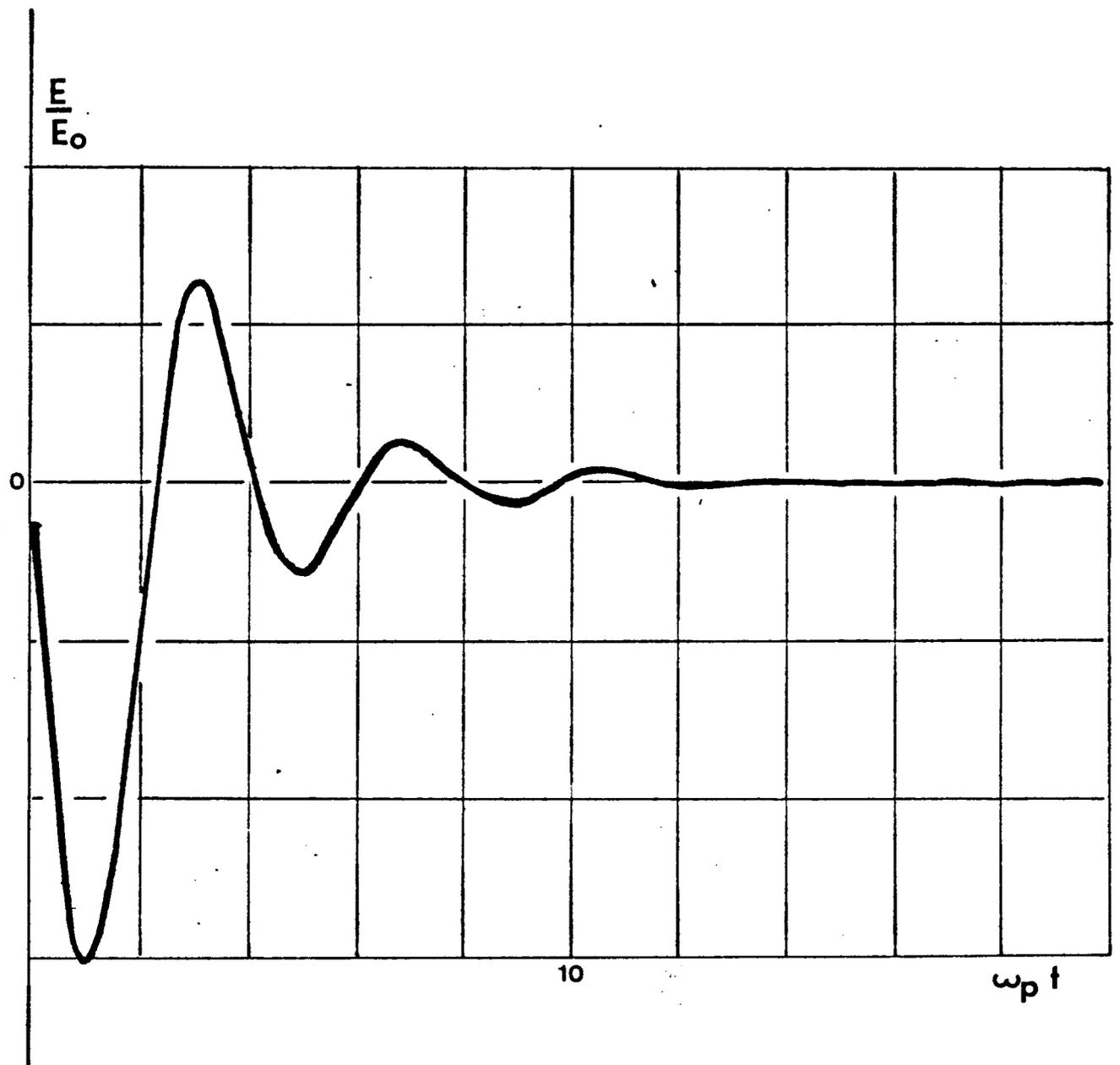
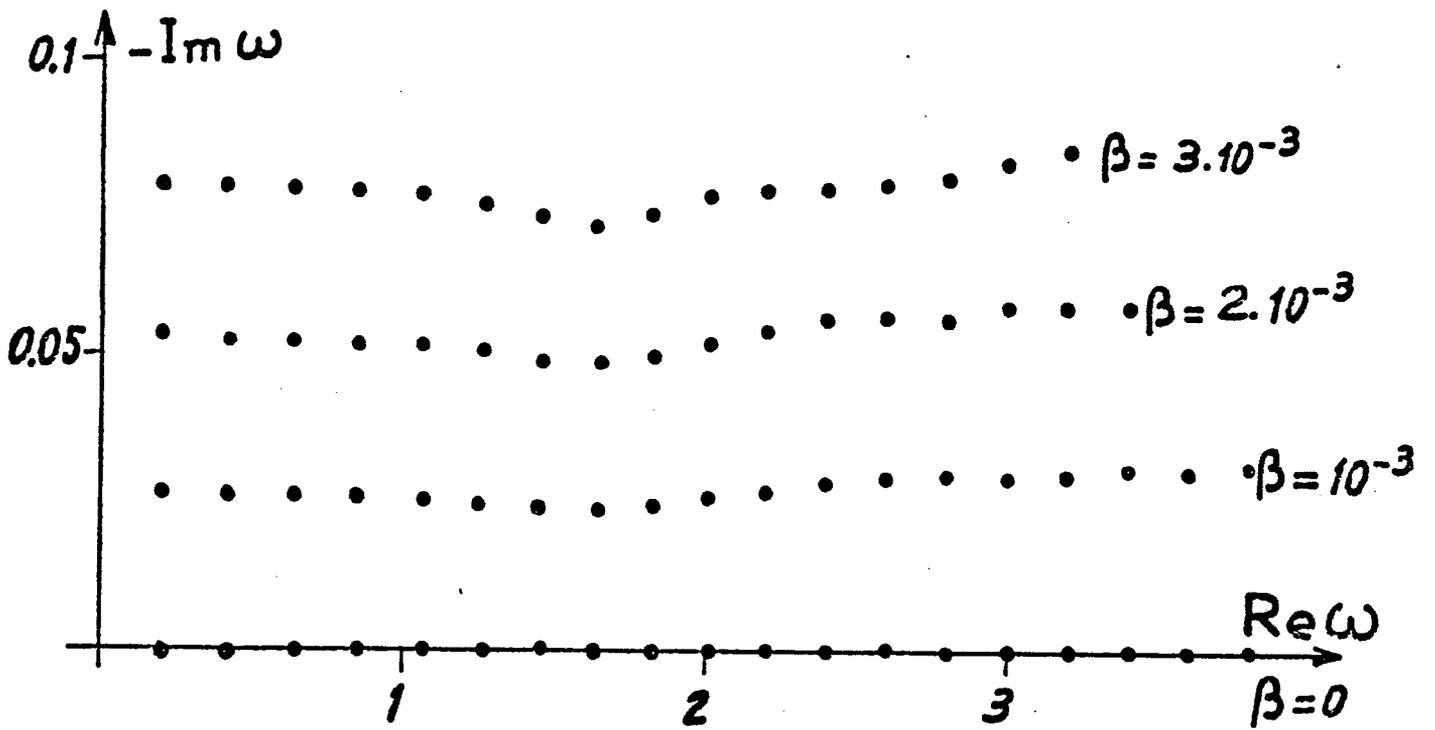
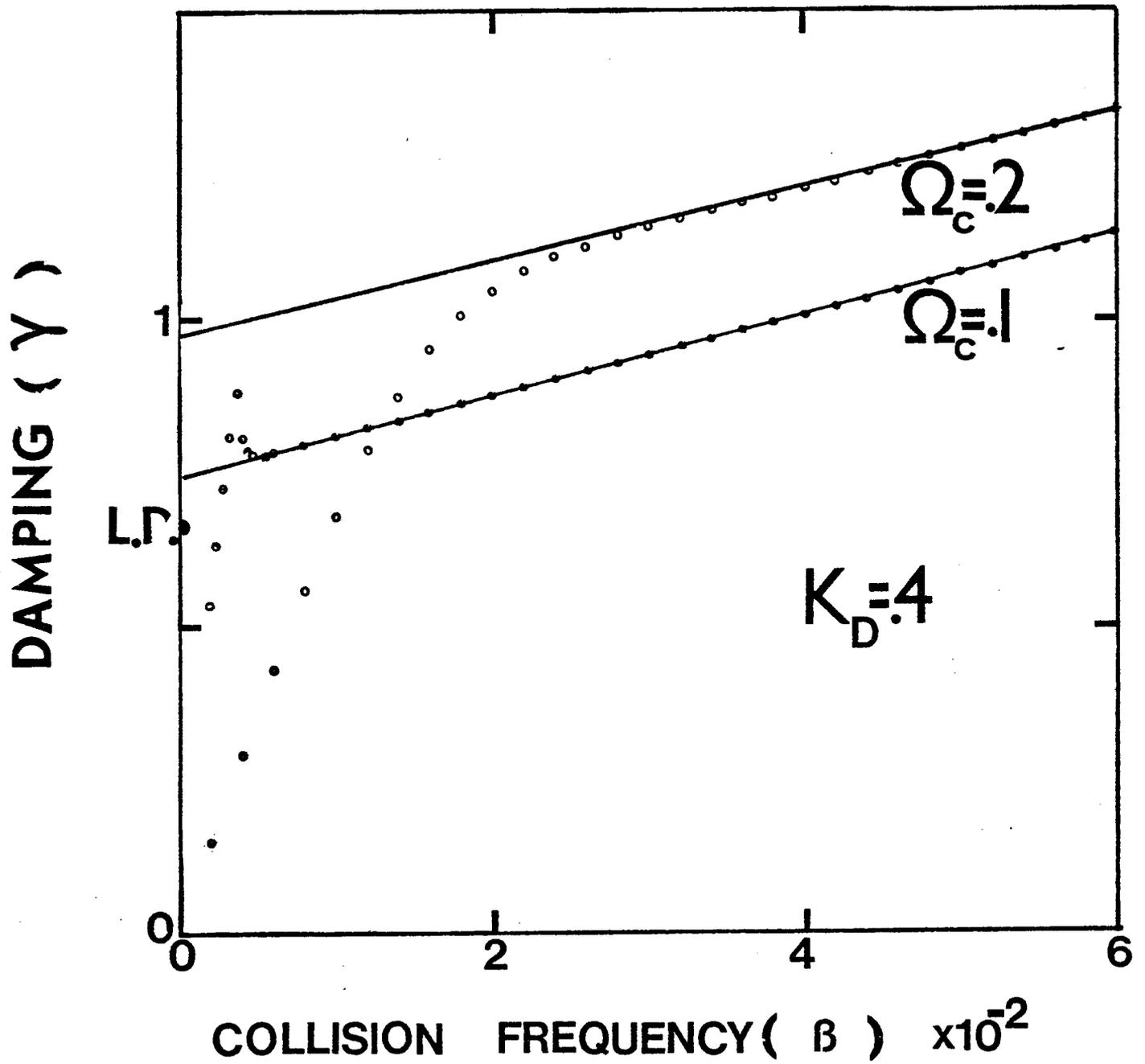


FIG. 20 — ALLURE DU SIGNAL

FIG. 21 — RACINES S_m POUR DIFFERENTS β

FIG. 22 — AMORTISSEMENT EN FONCTION DE β ET DU CHAMP MAGNETIQUE

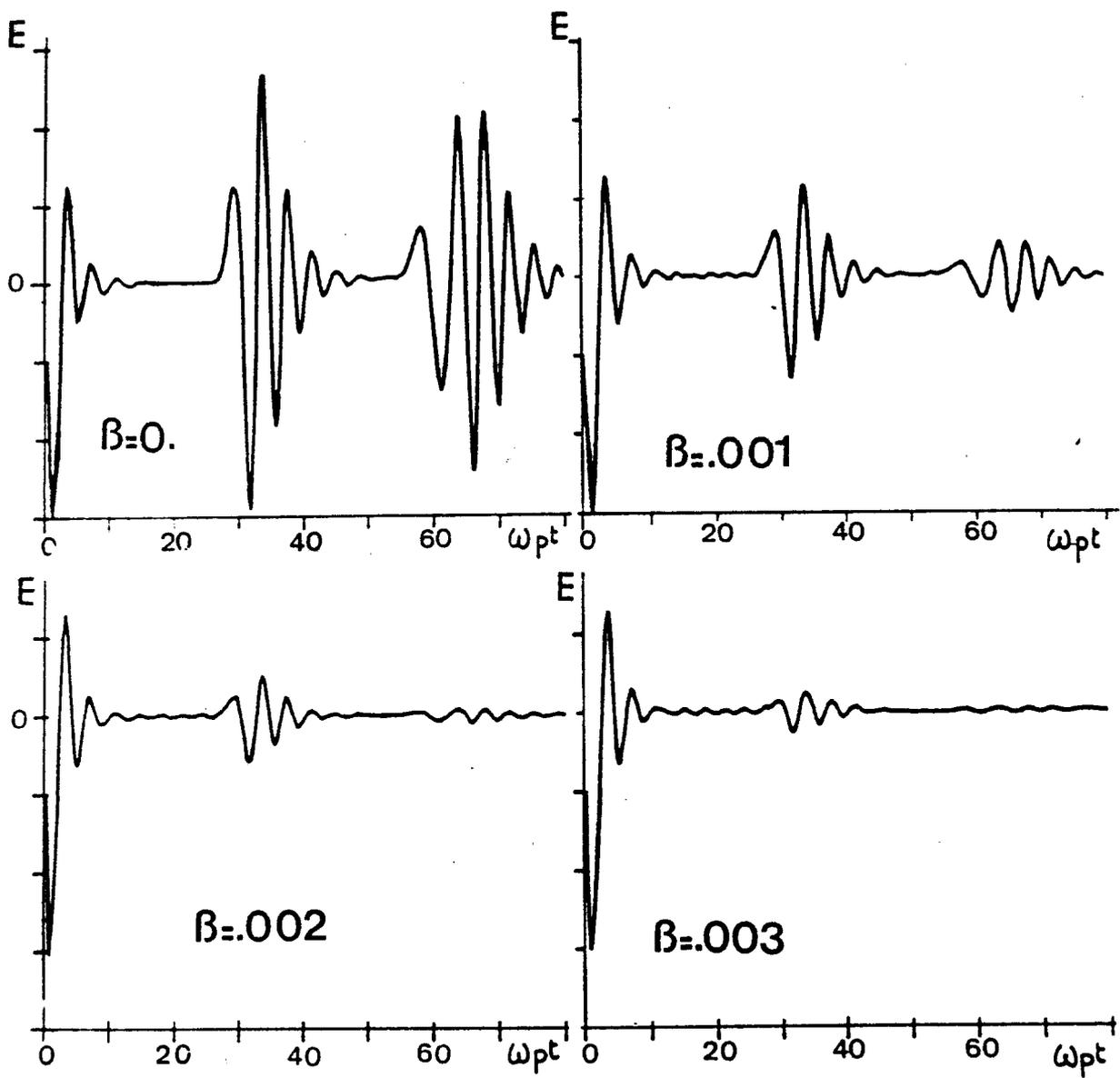


FIG. 23 – DESTRUCTION DES ECHOS LINEAIRES

du à l'écartement des racines ce qui empêche l'altération du signal. Cette compensation ne joue plus pour les échos : les particules voient leur trajectoire perturbée par la friction et la diffusion du spectre des vitesses et ne reviennent pas en phase. L'amortissement par l'exponentielle n'est plus compensé et il y a destruction irréversible des échos.

Ce phénomène inédit démontre l'importance de la forme des termes de collisions dans les équations. Les modèles BGK conduiraient ici à des processus de Poisson qui altéreraient le signal lui-même.

Un mode analogue de destruction d'échos a par ailleurs été mis en relief par Rathmann et Denavit [19] dans le cas d'échos du 2ème ordre en plasma non-linéaire, à l'aide d'un même modèle de Fokker-Planck.

Notons que la mesure expérimentale de l'amortissement en amplitude des échos linéaires, pourrait également conduire à une estimation des fréquences de collisions. Malheureusement, les techniques nécessaires ne sont pas encore parfaitement maîtrisées et leur mise en oeuvre par trop délicate.

Conclusions

Nous avons dans ce travail suivi la méthodologie inhérente aux modèles mathématiques appliqués à la physique.

Dans une première phase, à l'aide d'hypothèses physiques dont certaines sont d'ordre phénoménologique, nous avons établi un modèle simplifié, susceptible de rendre compte des phénomènes de collisions dans les plasmas et magnétoplasmas linéaires homogènes. Ce modèle, qui s'inspire de la théorie de Fokker et Planck, est du reste à la base de nombreux travaux actuels tant théoriques que numériques. Il semble en voie de se généraliser en particulier dans l'étude du phénomène d'échos.

Nous nous sommes alors attachés à en déduire la fonction diélectrique longitudinale de plasma en espace de Fourier-Laplace.

Dans ce but nous avons développé un formalisme original, basé sur les décompositions en fonctions propres orthonormales et qui conduit à une solution analytique exacte. Ce résultat est essentiel : on ne saurait tester raisonnablement un modèle à la validité de ses conséquences que si les calculs intermédiaires qui le relie à ces dernières ne sont pas entachés d'erreurs numériques ou suspectés d'approximations.

Nous avons ensuite soigneusement étudié les raccordements avec les modèles dûment éprouvés de la théorie sans collision ou sans champ magnétique. La continuité de ces raccordements est un très important critère de cohérence pour le modèle physique et un test mathématique décisif.

Nous avons ensuite créé un programme de calcul automatique de la fonction diélectrique.

La mise au point de ce programme numérique ayant été grandement facilitée par le traitement mathématique en fonctions propres qui conduit à des algorithmes simples et précis.

Au terme de cette première phase nous pouvions utiliser la fonction diélectrique et son prolongement analytique en fonction des 6 paramètres fondamentaux : s , kD , ω_p , ω_c , θ , β .

Dans la seconde phase, nous avons utilisé ce résultat pour étudier l'influence des collisions sur trois principaux groupes de problèmes de propagation d'ondes.

Cette étude conduit aux constatations suivantes :

En l'absence de champ magnétique il semblerait que l'influence des collisions ne se manifeste que par l'atténuation des résonances et la réduction des courbures et gradients et soit à considérer essentiellement comme un processus de lissage.

Une réserve est à faire en ce qui concerne les facteurs d'excitation où l'on assiste en outre à un décalage des fréquences de résonances (que l'on constate aussi en présence de champ magnétique). Ce dernier phénomène nous fournit de plus une possibilité expérimentale de mesure de la fréquence de collision par la méthode de diffusion incohérente, ce qui achève de rendre le modèle autonome et "fermé".

En présence de champ magnétique, les collisions même d'amplitude très faible, semblent jouer un rôle important dans la stabilité du mode perpendiculaire de propagation et un rôle absolument majeur dans la disparition des échos temporels linéaires, dont le processus de destruction est caractéristique du modèle collisionnel adopté.

La théorie collisionnelle ne semble donc pas fondamentale dans les plasmas linéaires, dans la mesure où les collisions sont faibles et en l'absence de champ magnétique mais nous conclurons à sa nécessité en ce qui concerne l'étude des modes de Bernstein en magnétoplasma.

Appendice 1

On veut calculer la valeur de l'intégrale :

$$I1 \quad J = \int_0^{\infty} e^{-x} I_m(R\sqrt{x}) x^{m/2} L_1^m(x) dx$$

où m et l sont des entiers positifs ou nuls.

Utilisant les relations de définition des fonctions de Bessel modifiées de première espèce et des polynômes de Laguerre généralisés à l'ordre m :

$$I2 \quad I_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{m+2n}}{n! m+n!}$$

$$I3 \quad L_1^m(x) = x^{-m} e^x \frac{d^1}{dx} (e^{-x} x^{m+1})$$

il vient

$$I4 \quad J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(R/2)^{m+2n}}{n! m+n!} \times \int_0^{\infty} x^n \frac{d^1}{dx} (e^{-x} x^{m+1}) dx$$

posons

$$I5 \quad J_{n,1}^m = \int_0^{\infty} x^n \frac{d^1}{dx} (e^{-x} x^{m+1}) dx$$

puis intégrant par parties cette relation :

I6

$$J_{n,1}^m = \left[x^n \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (e^{-x} x^{m+1}) \right]_0^\infty - n \int_0^\infty x^{n-1} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (e^{-x} x^{(m+1)+l-1}) dx$$

$$= -n J_{n-1,1-1}^{m+1}$$

en poursuivant par récurrence :

Si $n \geq 1$

$$J_{n,1}^m = (-1)^{+1} \frac{n!}{n-1!} J_{n-1,0}^{m+1}$$

et si $l > n$

$$J_{n,1}^m = (-1)^n n! J_{0,l-n}^{m+n}$$

avec

I8

$$J_{n-1,0}^{m+1} = \int_0^\infty e^{-x} x^{n+m} dx = n+m!$$

d'après la formule d'Euler, et

I9

$$J_{0,l-n}^{m+n} = \int_0^\infty \frac{d^{l-n}}{dx^{l-n}} e^{-x} x^{m+1} dx = 0$$

comme il est manifeste.

par suite

I10

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(R/2)^{m+2n} (-1)^l}{n-1!}$$

posant $q = n-1$ et substituant dans I10

$$\text{I11} \quad J = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(R/2)^{m+2q+2l} (-1)^q}{q!} = (R/2)^{m+2l} (-1)^l \times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(R^2/4)^q}{q!}$$

d'où en définitive la formule II-A-4-19

$$J = (R/2)^{m+2l} e^{R^2/4} (-1)^l$$

On peut noter par ailleurs que cette intégrale J se rattache à la classe des transformées de Hankel dont elle n'est qu'un cas particulier.

—

Bibliographie

Revues et publications

- [1] - W.Allan and J.J.Sanderson - Collisional destruction of the Bernstein modes in the high frequency regime - Private communication.
- [2] - W.Allan and J.J. Sanderson - Temperature gradient driven ion acoustic instability - Plasma Physics Vol.16 pp753 to 767 - 1974
- [3] - I.R.Bernstein - Waves in a plasma in a magnetic field - Physical Review Vol.109 N°1 - Janvier 1958
- [4] - P.L.Bhatnagar, E.P.Gross and M.Krook - A model for collision processes in gases.I.Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems - Physical Review Vol.94 N°3 - Mai 1954
- [5] - R.Buckley - Plasma waves in space and in the laboratory - University Press Edinburgh
- [6] - J.R.Burgan, E.Filjalkow, M.R. Feix - Collisional damping of Bernstein linear echoes
- [7] - J.Canosa - Numerical solution of Landau's dispersion equation - Journal of computational Physics Vol. 13 N°1 - septembre 1973
- [8] - J.P.Dougherty - Model Fokker-Planck equation for a plasma and its solution - the Physics of Fluids Vol.7 N°11 - novembre 1964
- [9] - A.Gonfalone and C.Beghin - Excitation of quasicylindrical waves connected with electron Bernstein modes - Physical Review Letters Vol.31 N°14 - octobre 1973
- [10] - Innsbruck - Second International Congress on waves and instabilities in plasmas - Book of Abstracts - Mars 1975

- [11] - A.Lenard and I.B.Bernstein - Plasma oscillations with diffusion in velocity space - Physical Review Vol.112 N°5 - Décembre 1958
- [12] - W.W.Lee, R.H.Hirsch and J.Denavit - Longitudinal oscillations of a lorentzian electron gas - The Physics of Fluids Vol.14 N°5 - Mai 1971
- [13] - J.H.Malmberg, C.B.Wharton, R.W.Gould and T.M.O'Neil - Observation of plasma wave echoes - The Physics of Fluids Vol.11 N°6 - juin 1968
- [14] - D.B.Muldrew, A.Gonfalone - Resonance cone and Bernstein wave interference patterns in a magnetoplasma - Radio Science Vol.9 N°10 pp 873-880 - octobre 1974
- [15] - M.Navet - Oscillations de plasma de spectre discret modèle waterbag et ondes de Bernstein - thèse 1973
- [16] - T.M.O'Neil and R.W.Gould - Temporal and spatial plasma wave echoes - The Physics of Fluids Vol.11 N°1 - Janvier 1968
- [17] - T.M.O'Neil - Effect of Coulomb collisions and microturbulence on the plasma wave echo - The Physics Of Fluids Vol.11 N°11 - novembre 1968
- [18] - R.J.Papa - Extension of Dougherty's model Fokker-Planck equation for a plasma - Plasma Physics (1974) Vol.11 part.1 pp 11-35
- [19] - C.E.Rathmann and J. Denavit - Simulation of collisional effects in plasmas - Journal of computational physics 18 - 165 - 187 - 1975
- [20] - K.Suchy and K.Rower - The definitive of collision frequencies and their relation to the electron conductivity of the ionosphere - Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics - Vol.33 pp 1853 1868 - 1971
- [21] - M.Valton - Etablissement des équations cinétiques de mélanges binaires en théorie J.Frey et J.Salmon - 1974- Thèse

Publications sur la théorie Frey-Salmon

- [22] - H.Dormont, J.Frey, J.Salmon et M.Valton - C.R. Acad.Sci.Paris -
21 mai 1967, 264
- [23] - J.Frey - Etablissement d'une nouvelle équation cinétique - thèse
de doctorat d'Etat - Paris - Février 1970
- [24] - J.Frey, J.Lasalle et J.Salmon - Rev.Gén. de Therm. N° 127 -
juillet 1972 - pp 639 - 645
- [25] - J.Frey, J.Salmon et M.Valton - Journal of statistical physics -
Vol.11 n°6(74) - p. 457

Ouvrages généraux

- [26] - J.L.Delcroix - Introduction à la théorie des gaz ionisés -
monographies Dunod - 1959
- [27] - J.L.Delcroix - Physique des plasmas - Dunod Tomes 1 et 2 - 1963 et
1966
- [28] - J.F.Denis, J.L.Delcroix - Théorie des ondes dans les plasmas
monographies Dunod 1961
- [29] - Fried and Conte - The plasma dispersion function - Acad.Press NY 61
- [30] - A.R.Hochstim - Kinetic processes in gases and plasmas - Acad.Press
NY 69
- [31] - R.Jancel, Th.Kahan - Electrodynamique des plasmas - Dunod Tome 1
Paris 1963
- [32] - Landau et Lifchitz - Electrodynamique des milieux continus -
Ed. MIR Tome 8 - 1969
- [33] - D.C.Montgomery, D.A.Tidman - Plasma kinetic theory - M.C.Graw-Hill
NY 1964

[34] - D.Quemada - Ondes dans les plasmas - Ed. Hermann

[35] - L.Spitzer - Physique des gaz complètement ionisés - monographies
Dunod 1959

Ouvrages généraux de mathématique

[36] - M.Abrahamowitch and Stegun - I.A. 1964 Handbook of mathematical -
MBC

[37] - H.Cartan - Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou
plusieurs variables complexes - Ed. Hermann

[38] - A.Kolmogorov and S.Fomine - Eléments de la théorie des fonctions et
de l'analyse fonctionnelle - Ed. MIR

[39] - M.Lavrentiev and B.Chabat - Méthodes de la théorie des fonctions
d'une variable complexe - Ed. MIR

[40] - M.Parodi - Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur -
Vol.I-5 - SEDES

CRPE
*Centre de Recherches
en Physique de l'Environnement
terrestre et planétaire*

*Avenue de la Recherche scientifique
45045 ORLEANS CEDEX*

Département PCE
*Physique et Chimie
de l'Environnement*

*Avenue de la Recherche scientifique
45045 ORLEANS CEDEX*

Département ETE
*Etudes par Télédétection
de l'Environnement*

*CNET - 38-40 rue du général Leclerc
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX*