



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques d'analyse spectrale

Michel Parrot

► **To cite this version:**

Michel Parrot. Méthodes numériques d'analyse spectrale. [Rapport de recherche] Note technique CRPE n° 35, Centre de recherches en physique de l'environnement terrestre et planétaire (CRPE). 1976, 44 p. hal-02191409

**HAL Id: hal-02191409**

**<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02191409v1>**

Submitted on 23 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

19 AVR. 1977

RIP 182 (14)  
1000  
70  
**CENTRE NATIONAL D'ETUDES  
DES TELECOMMUNICATIONS**

**CENTRE NATIONAL DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**CENTRE DE  
RECHERCHES  
EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT  
TERRESTRE  
ET PLANETAIRE**

**CRPE**

**NOTE TECHNIQUE  
CRPE /<sup>35</sup>**

*Méthodes numériques  
d'analyse spectrale*

*par M. PARROT*

**Novembre 1976**



CENTRE NATIONAL D'ETUDES  
DES TELECOMMUNICATIONS

-----

CENTRE NATIONAL DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

-----

CENTRE DE RECHERCHE EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT TERRESTRE ET PLANETAIRE

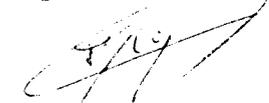
NOTE TECHNIQUE C.R.P.E./35

METHODES NUMERIQUES D'ANALYSE SPECTRALE

PAR  
M. PARROT

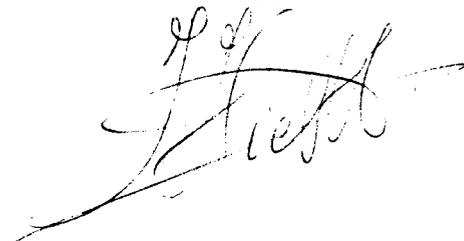
C.R.P.E./P.C.E.  
45045 - ORLEANS - FRANCE

Le Chef du  
Département P.C.E.



NOVEMBRE 1976

Le Directeur :



R E S U M E

Nous exposons dans cette note les principaux algorithmes d'analyse spectrale : Corrélation, Transformée de Fourier directe du signal, maximum d'entropie. Cette dernière méthode a été plus particulièrement développée du fait qu'elle est récente. Les sous-programmes correspondants à ces différents algorithmes se trouvent réunis en appendice.

-----

P L A N

	<u>PAGES</u>
I - INTRODUCTION.....	1
2 - ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION.....	2
2.1. Auto-spectre.....	2
2.2. Inter-spectre.....	3
2.3. Méthode de JENKINS et WATTS.....	4
2.4. Fenêtres.....	6
3 - TRANSFORMÉE DE FOURIER DIRECTE DU SIGNAL .....	8
3.1. Auto-spectre.....	8
3.2. Inter-spectre.....	10
4 - MÉTHODE DU MAXIMUM D'ENTROPIE.....	11
4.1. Approches et Définitions.....	11
4.2. Méthodes de BURG et de YULE-WALKER.....	15
4.3. Matrice de TOEPLITZ.....	17
4.4. Critère d'AKAIKE.....	18
4.5. Inter-spectre .....	20
5 - CONCLUSION.....	21
6 - BIBLIOGRAPHIE .....	22
APPENDICE : Programmes FORTRAN .....	24

## 1 - INTRODUCTION

Le contenu de cette note peut être considéré comme la traduction en FORTRAN d'un certain nombre d'algorithmes d'analyse spectrale construits à partir des méthodes suivantes :

- Analyse spectrale par corrélation [1]
- Analyse spectrale par transformation de Fourier des signaux [2]
- Méthode du maximum d'entropie [3]

Tous les programmes de calcul d'auto-spectre et d'inter-spectre correspondant à ces algorithmes se trouvent réunis en appendice. Auparavant nous présentons les différentes méthodes en décrivant leurs principales caractéristiques. L'accent est mis sur la méthode du maximum d'entropie du fait qu'elle est plus récente que les autres et donc moins bien connue.

Ce travail a été effectué en vue du traitement des données 6 composantes du satellite GEOS.

2 - ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

2.1. Auto-spectre

Soit un processus aléatoire  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , nous définissons :

- Sa moyenne

$$[2.1.1] \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- Sa variance

$$[2.1.2] \quad \sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

- Sa fonction d'autocovariance pour des retards allant de 0 à  $L-1$

$$[2.1.3] \quad \hat{R}_x = \hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} (x_n - \bar{x})(x_{n+\tau} - \bar{x})$$

$\tau = 0, 1, 2, \dots, L-1$

qui est en fait une estimation de la vraie fonction d'autocovariance

$$[2.1.4] \quad R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)x(t-\tau) dt$$

- Sa fonction d'autocorrélation

$$[2.1.5] \quad \hat{f}_x(\tau) = \frac{\hat{R}_x(\tau)}{\hat{R}_x(0)}$$

Les fonctions d'autocovariance (et donc les fonctions d'autocorrélation) présentent un certain nombre de propriétés intéressantes. Tout d'abord dans le cas où la moyenne  $\bar{x}$  est nulle, la valeur à l'origine de  $\hat{R}_x(\tau)$  est égale à la variance  $\sigma$ . Ce sont des fonctions paires

$$[2.1.6] \quad \hat{R}_x(\tau) = \hat{R}_x(-\tau)$$

nous avons aussi

$$[2.1.7] \quad |\hat{R}_x(\tau)| \leq \hat{R}_x(0) \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

et enfin la fonction d'autocovariance peut s'exprimer à partir de la fonction de l'espérance mathématique

$$[2.1.8] \quad R_x(\tau) = E[x_i x_{i+\tau}]$$

D'après le théorème de Wiener-Kinchine la densité spectrale de puissance d'un signal est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocovariance. La fonction d'autocovariance d'un signal réel est aussi réelle, et comme elle est paire, nous avons une transformée de Fourier réelle et paire. L'expression discrète utilisée pour le calcul de l'autocovariance est la suivante :

$$[2.1.9] \quad R_x(I) = \frac{1}{N-I+1} \sum_{J=1}^{N-I+1} [x(J) - \bar{x}] [x(J+I-1) - \bar{x}] \quad I = 1, 2, \dots, L$$

La valeur  $I = 1$  donnant ainsi l'autocovariance au retard 0, nous avons l'autocovariance pour des retards allant de  $-L \approx L$  du fait de la symétrie par rapport à  $I = 1$ . Le spectre, qui comprend les valeurs aux fréquences positives et négatives, est obtenu en faisant une F.F.T. de cette autocovariance.

## 2.2. Inter-spectre

Soient 2 processus aléatoires  $x_1, x_2, \dots, x_N$  et  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , leur fonction de crosscovariance s'écrit

$$[2.2.1] \quad \hat{R}_{xy}(z) = \frac{1}{N-z} \sum_{m=1}^{N-z} (x_m - \bar{x})(y_{m+z} - \bar{y}) \quad z = 0, 1, \dots, L-1$$

nous avons de même

$$[2.2.2] \quad \hat{R}_{yx}(z) = \frac{1}{N-z} \sum_{m=1}^{N-z} (x_{m+z} - \bar{x})(y_m - \bar{y}) \quad z = 0, 1, \dots, L-1$$

Les principales propriétés de cette fonction sont les suivantes :

$$[2.2.3] \quad \begin{aligned} |\hat{R}_{xy}(z)|^2 &\leq \hat{R}_x(0) \hat{R}_y(0) \\ |\hat{R}_{xy}(z)| &\leq \frac{1}{2} [\hat{R}_x(0) + \hat{R}_y(0)] \end{aligned} \quad z = 1, 2, \dots, L-1$$

$$[2.2.4] \quad R_{xy}(z) = E[x_i y_{i+z}]$$

$$[2.2.5] \quad \hat{R}_{xy}(z) = \hat{R}_{yx}(-z)$$

c'est cette dernière équation qui va nous permettre d'obtenir la fonction de crosscovariance pour des retards négatifs. Comme pour la fonction d'autocorrélation, une fonction de crosscorrélacion est une fonction de crosscovariance normalisée.

$$[2.2.6] \quad \rho_{xy}(z) = \frac{\hat{R}_{xy}(z)}{\sqrt{\hat{R}_x(z) \hat{R}_y(z)}}$$

L'expression discrète de la fonction de crosscovariance que nous avons utilisée est la suivante :

- pour des retards positifs

$$[2.2.7] \quad R_{xy}(I) = \frac{1}{N-I+1} \sum_{j=1}^{N-I+1} [x(j) - \bar{x}] [y(j+I) - \bar{y}]$$

$I = 1, 2, \dots, L$

- pour des retards négatifs

$$[2.2.8] \quad R_{xy}(I) = \frac{1}{N-I+1} \sum_{j=1}^{N-I+1} [x(j+I) - \bar{x}] [y(j) - \bar{y}]$$

$I = 1, 2, \dots, L$

La F.F.T. de cette crosscovariance pour des retards allant de  $-L$  à  $L$  donne pour le spectre une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire.

### 2.3. Méthode de JENKINS et WATTS

La transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance  $\hat{R}_x(z)$  s'écrit

$$[2.3.1] \quad S_x(f) = \int_{-T}^T \hat{R}_x(z) e^{-j2\pi f z} dz \quad -\infty \leq f \leq \infty$$

La transformée inverse

$$[2.3.2] \quad \hat{R}_x(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{j2\pi f z} df \quad -T \leq z \leq T$$

soit, quand  $z = 0$ , la relation

$$[2.3.3] \quad \hat{R}_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

On peut donc éviter le calcul du spectre si l'on veut connaître uniquement son intégrale.

Pour lisser un spectre nous utilisons une fenêtre  $w$ , l'expression de la densité spectrale devient alors

$$[2.3.4] \quad S_x(f) = \int_{-T}^T w(z) \hat{R}_x(z) e^{-j2\pi f z} dz$$

Sous une forme discrète cette formule devient

$$[2.3.5] \quad S_x(f) = \Delta \sum_{k=-(L-1)}^{L-1} w(k) \hat{R}_x(k) e^{-j2\pi f k \Delta}$$

avec  $-\frac{1}{2\Delta} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}$ ,  $\Delta$  étant l'intervalle d'échantillonnage du signal.  $\hat{R}_x$  étant une fonction paire on peut écrire [1]

$$[2.3.6] \quad S_x(f) = 2\Delta \left\{ \hat{R}_x(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \hat{R}_x(k) w(k) \cos 2\pi f k \Delta \right\}$$

avec  $0 \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}$ ; le spectre est alors obtenu pour les fréquences suivantes

$$0, \frac{1}{L\Delta}, \frac{2}{L\Delta}, \dots, \frac{1}{2\Delta}$$

Il y a  $L/2 + 1$  valeurs du spectre qui vont de la fréquence 0 à la fréquence de Nyquist  $1/2\Delta$ ,  $L$  est le nombre de retards que l'on a pris pour le calcul de la fonction d'autocovariance. Si l'on veut plus de points sur le spectre,  $F + 1$  par exemple ( $F > L$ ), on écrit ;

$$[2.3.7] \quad S_x(l) = 2\Delta \left\{ \hat{R}_x(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \hat{R}_x(k) w(k) \cos \frac{2\pi l k}{F} \right\}$$

$l = 0, 1, \dots, F$

le spectre est alors calculé pour les fréquences suivantes

$$0, \frac{1}{2FA}, \frac{2}{2FA}, \frac{3}{2FA}, \dots, \frac{1}{2\Delta}$$

Pour le calcul de l'inter-spectre nous formons [1] les parties paires et impaires de la fonction de crosscovariance

$$[2.3.8] \quad \begin{aligned} l_{xy}(k) &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{R}_{xy}(k) + \hat{R}_{zy}(-k) \right\} \\ q_{xy}(k) &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{R}_{xy}(k) - \hat{R}_{xy}(-k) \right\} \end{aligned} \quad 0 \leq k \leq L-1$$

Pour la partie réelle du spectre nous avons comme précédemment

$$[2.3.9] \quad L_{xy}(i) = 2\Delta \left\{ l_{xy}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} l_{xy}(k) w(k) \cos \frac{2\pi i k}{F} \right\}$$

$0 \leq i \leq F$

Pour la partie imaginaire

$$[2.3.10] \quad Q_{xy}(i) = 4\Delta \sum_{k=1}^{L-1} q_{xy}(k) w(k) \sin \frac{2\pi i k}{F}$$

$1 \leq i \leq F-1$

$$Q_{xy}(0) = Q_{xy}(F) = 0$$

A partir de ces valeurs nous pouvons calculer le spectre d'amplitude et le spectre de phase.

De même que pour l'autospectre, il existe une relation reliant l'inter-spectre à la crosscovariance pour un retard  $r = 0$ . La transformée de Fourier de la fonction de crosscovariance  $\hat{R}_{xy}(r)$  s'écrit

$$[2.3.11] \quad S_{xy}(f) = \int_{-\tau}^{\tau} \hat{R}_{xy}(r) e^{-j2\pi fr} dr$$

la transformée inverse

$$[2.3.12] \quad \hat{R}_{xy}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi fr} df$$

soit encore

$$[2.3.13] \quad \begin{aligned} \hat{R}_{xy}(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [L_{xy}(f) - j Q_{xy}(f)] e^{j2\pi fr} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} L_{xy}(f) \cos 2\pi fr df + \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{xy}(f) \sin 2\pi fr df \end{aligned}$$

donc quand  $r = 0$  nous avons la relation

$$[2.3.14] \quad \hat{R}_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{xy}(f) df$$

qui permet d'obtenir l'intégrale de la partie réelle d'un inter-spectre sans avoir à le calculer.

#### 2.4. Fenêtres

Pour lisser un spectre on peut considérer deux types de fenetre : les fenêtres s'appliquant sur les fonctions de covariance les autres s'appliquant sur le spectre lui-même.

Les fenêtres, s'appliquant sur la covariance, les plus utilisées sont :

[2.4.1] - rectangulaire 
$$w_R(u) = \begin{cases} 1 & |u| \leq M \\ 0 & |u| > M \end{cases}$$

[2.4.2] - Tukey (Hanning) 
$$w_T(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi u}{M} \right] & |u| \leq M \\ 0 & |u| > M \end{cases}$$

[2.4.3] - Bartlett 
$$w_B(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{M} & |u| \leq M \\ 0 & |u| > M \end{cases}$$

[2.4.4] - Parzen 
$$w_P(u) = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{u}{M} \right)^2 + 6 \left( \frac{|u|}{M} \right)^3 & |u| \leq \frac{M}{2} \\ 2 \left( 1 - \frac{|u|}{M} \right)^3 & \frac{M}{2} < |u| \leq M \\ 0 & |u| > M \end{cases}$$

Le choix de la fenêtre et le choix du paramètre sont essentiels dans l'obtention d'un spectre, en effet la valeur de la densité de puissance spectrale, à chaque fréquence, est une valeur estimée aléatoire, et si l'on suppose que l'on a un processus gaussien les propriétés statistiques de cette valeur sont données par le biais et la variance. Le biais d'un estimateur  $\hat{\Theta}$  de  $\theta$  est défini par :

[2.4.5] 
$$B = E[\hat{\Theta}] - \theta$$

La variance par

[2.4.6] 
$$\text{var}[\hat{\Theta}] = E\left[ (\hat{\Theta} - E(\hat{\Theta}))^2 \right]$$

On montre alors [1] que lorsque  $M$  est petit, la variance devient petite mais que le biais devient grand en effet si l'on prend comme exemple la fenêtre de Bartlett nous avons

[2.4.7] 
$$B(f) \approx -\frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \hat{R}_x(u) e^{-j2\pi fu} du$$

$$\text{Var}[S_x(f)] \approx \frac{S_x^2(f)}{T} \times \frac{2}{3} M$$

Il a donc un compromis à faire qui dépend du résultat que l'on veut obtenir. Un dernier paramètre important est la largeur de bande d'une fenêtre,  $b$ , le cas le plus simple étant la fenêtre rectangulaire où la largeur en fréquence est  $h$  nous avons :

$$[2.4.8] \quad b = h$$

Pour les autres fenêtres nous avons [1]

$$[2.4.9] \quad b = \frac{1}{\int_{-a}^{+a} w^2(u) du}$$

c'est à dire par exemple pour la fenêtre de Bartlett

$$\int_{-M}^M \left(1 - \frac{|u|}{M}\right)^2 du = \frac{2}{3} M$$

$$[2.4.10] \quad b = \frac{3}{2} M$$

On montre [1] que l'on a une bonne résolution en fréquence pour un spectre quand la largeur de bande de la fenêtre est du même ordre que la largeur en fréquence du plus petit pic du spectre.

Pour clore ce paragraphe nous pouvons donner un exemple de fenêtre s'appliquant directement sur le spectre lui-même. Soient  $S_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$  les valeurs du spectre que l'on veut lisser, nous obtenons après transformation

$$\begin{aligned} G_0 &= 0.5 S_0 + 0.5 S_1 & G_k &= 0.25 S_{k-1} + 0.5 S_k + 0.25 S_{k+1} \\ G_m &= 0.5 S_{m-1} + 0.5 S_m & & k = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned}$$

On montre, [14], qu'il est équivalent d'effectuer cette transformation ou d'appliquer la fenêtre du Tukey dans la formule de densité spectrale donnée précédemment.

### 3 - TRANSFORMÉE DE FOURIER DIRECTE DU SIGNAL

#### 3.1. Auto-spectre

Soit  $\tilde{z}_1(t)$  un signal, la transformée de Fourier directe de ce signal s'écrit :

$$[3.1.1] \quad Z_A(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z_A(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

ou encore

$$[3.1.2] \quad Z_A(f) = A_r(f) - j A_i(f)$$

ou  $A_r$  et  $A_i$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la transformée de Fourier. L'auto-spectre de  $z_A(t)$  est, alors, donné par

$$[3.1.3] \quad S_A(f) = \frac{|Z_A(f)|^2}{T} = \frac{A_r^2 + A_i^2}{T}$$

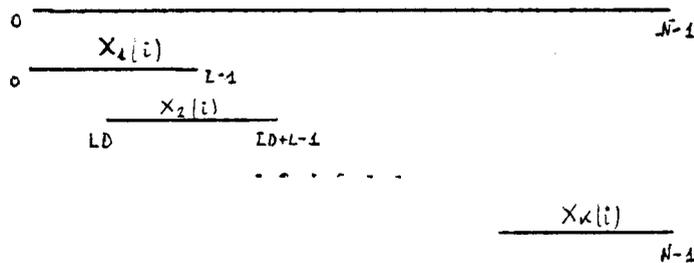
En utilisant ces définitions nous pouvons obtenir des spectres moyennés la méthode décrite par P.D. WELCH [2], se présente ainsi : soit  $X(i)$ ,  $i=0, 1, \dots, N-1$  un signal stationnaire à moyenne nulle. On découpe ce signal en segments de longueur  $L$  avec possibilité de recouvrement.

On a donc pour le 1er segment  $X_1(i) = X(i) \quad i=0, \dots, L-1$

$$2^{ème} \quad " \quad X_2(i) = X(i+LD) \quad i=0, \dots, L-1$$

.....

$$K^{ème} \quad " \quad X_K(i) = X(i+(K-1)LD) \quad i=0, \dots, L-1$$



Comme l'on a  $K$  segments on doit avoir la relation  $(K-1)L + L = N$ . On calcule ensuite pour chaque segment  $X_{k_2}(i)$ , sa transformée de Fourier discrète en utilisant une fenêtre  $w(i)$  de notre choix soit :

$$[3.1.4] \quad A_{k_2}(m) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} X_{k_2}(i) w(i) e^{-2\pi j i m / L}$$

avec  $j = (-1)^{1/2}$

On obtient donc les  $k$  spectres

$$[3.1.5] \quad I_{k_2}(f_m) = \frac{L}{U} |A_{k_2}(m)|^2 \quad k_2 = 1, 2, \dots, K$$

$$[3.1.6] \quad U = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} w^2(i)$$

et  $f_n = n/L$ ,  $n = 0, 1, \dots, L/2$  dans le cas où l'intervalle d'échantillonnage est 1 comme dans la méthode précédente. Le spectre final est obtenu en faisant la moyenne de ces spectres

$$[3.1.7] \quad S(f_n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_k(f_n) = \frac{L}{UK} \sum_{k=1}^K |A_k(n)|^2$$

Comme précédemment l'intervalle de fréquence qui est en  $1/L$  peut être diminué en ajoutant des zéros aux séquences  $X_k(i) w(i)$  avant de faire leurs transformées de Fourier. Si  $LP$  zéros sont ajoutés tel que  $L+LP = M$  on a

$$[3.1.8] \quad A'_k(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{L-1} X_k(i) w(i) e^{-2\pi i j n / M}$$

et

$$[3.1.9] \quad I_k(f_n) = \frac{M^2}{LU} |A'_k(n)|^2 \quad \text{avec } f_n = \frac{n}{M}, n = 0, 1, \dots, M/2$$

l'intervalle de fréquence est maintenant égal à  $1/M$

### 3.2. Inter-spectre

En utilisant les mêmes notations qu'au début du paragraphe précédent, l'inter-spectre de  $Z_1(t)$  et  $Z_2(t)$  est donné par :

$$[3.2.1] \quad S_{12}(f) = \frac{Z_1^*(f) Z_2(f)}{T} = S_{21}^*(f)$$

\* signifiant le complexe conjugué, et si l'auto-spectre de  $Z_2(t)$  s'écrit

$$[3.2.2] \quad Z_2(f) = B_r(f) - j B_i(f)$$

nous avons

$$[3.2.3] \quad S_{12}(f) = \frac{1}{T} \left[ (A_r B_r + A_i B_i) - j (A_r B_i - A_i B_r) \right]$$

Dans les cas où l'on découpe le signal en segment, considérons les signaux  $x(i)$  et  $y(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Comme avant nous calculons

$$[3.2.4] \quad A_k(n) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} X_k(i) w(i) e^{-2kij n/L}$$

et aussi

$$[3.2.5] \quad B_k(n) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} Y_k(i) w(i) e^{-2kij n/L}$$

On obtient pour la partie réelle du spectre

$$[3.2.6] \quad S_{xy}^R(f) = \frac{1}{UK} \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} [A_k^*(n) B_k(n)]$$

et pour la partie complexe

$$[3.2.7] \quad S_{xy}^i(f) = \frac{1}{UK} \sum_{k=1}^K \operatorname{Im} [A_k^*(n) B_k(n)]$$

#### 4 - METHODE DU MAXIMUM D'ENTROPIE

##### 4.1. Approches et définitions

L'entropie d'un processus aléatoire gaussien à bande limitée, [9], est proportionnelle à

$$[4.1.1] \quad \int_{-f_N}^{f_N} \log S(f) df$$

où  $S(f)$  est la densité spectrale de puissance et  $f_N$  la fréquence de Nyquist. Nous avons vu [2.3.1] que la densité spectrale peut s'exprimer à partir de la transformée de Fourier de la fonction d'auto-covariance soit sous forme discrète

$$[4.1.2] \quad S(f) = \frac{1}{2f_N} \sum_{n=-N}^N R(n) e^{-j2nf \Delta t n}$$

où  $\Delta t$  est l'intervalle d'échantillonnage, la transformée inverse sans discrétisation donne

$$[4.1.3] \quad R(n) = \int_{-f_N}^{f_N} S(f) e^{j2nf \Delta t n} df \quad -N \leq n \leq N$$

Si l'on considère que la meilleure estimation de la densité spectrale doit être obtenue quand l'entropie est maximum, on maximise, [9], l'entropie avec l'aide des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_n$ , en tenant compte des contraintes de l'équation [4.1.3] soit :

$$[4.1.4] \quad \oint_{-f_N}^{f_N} \left[ \log S(f) - \sum_{n=-N}^N \lambda_n \left( S(f) e^{j2nf\Delta t_n} - \frac{R(n)}{2f_N} \right) \right] df = 0$$

Nous obtenons donc

$$[4.1.5] \quad S(f) = 1 / \sum_{n=-N}^N \lambda_n e^{j2nf\Delta t_n}$$

On peut écrire cette dernière équation sous une forme plus connue en considérant que  $S(f)$  est réel et positif, et que le carré du module d'un nombre complexe peut être obtenu en multipliant ce nombre par son conjugué, soit :

$$[4.1.6] \quad S(f) = \frac{P_{N+1}}{\sum_{n=1}^N \gamma_n e^{-j2nf\Delta t_n} + 1}$$

En égalant les coefficients de même puissance de  $e^{-j2nf\Delta t}$  avec ceux de l'autre expansion de la densité spectrale [4.1.2], obtenue par transformée de Fourier discrète de la fonction d'autocovariance  $R(n)$ , nous obtenons :

$$[4.1.7] \quad \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(N) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(N) & R(N-1) & \dots & R(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système d'équation que nous allons retrouver tout au long de ce chapitre, permet donc d'obtenir les coefficients  $P_{N+1}$  et  $\gamma_i, i=1, \dots, N$

Il existe cependant, [4], une manière plus rigoureuse d'introduire ces coefficients, considérons un filtre linéaire d'ordre  $N$  dont l'équation générale est

$$[4.1.8] \quad y_m = \sum_{k=-N}^N g_k \cdot x_{m-k}$$

$g_k$  sont les coefficients du filtre,  $x$  le signal d'entrée,  $y$  le signal de sortie (ces signaux peuvent être complexes).  $n$  étant un indice de temps. Le problème consiste à chercher les paramètres de  $y_n$  qui minimisent le moment quadratique de la distance entre un signal de sortie désiré  $d_n$  et le signal de sortie du filtre linéaire  $y_n$ . Nous avons une série d'erreur

$$[4.1.9] \quad \epsilon_n = d_n - y_n$$

pour cela nous minimisons  $E\{\epsilon_n \epsilon_n^*\}$ .

Dans le cas de signaux complexes la formule [2.1.8]

devient

$$[4.1.10] \quad R_x(j) = E[x_k x_{k-j}^*]$$

et en notation matricielle

$$[4.1.11] \quad R_{i,j} = E[x_i x_j^*]$$

L'élément  $(i,j)$  de la matrice  $\{R\}$  est égal à  $R_x(i-j)$ .

Nous allons prendre comme signal de sortie  $d_n$  le signal d'entrée lui-même mais en avance d'une unité de temps, la série d'erreur  $\epsilon_n$  devient alors :

$$[4.1.12] \quad \epsilon_n = x_n - \sum_{k=1}^N g_k x_{n-k}$$

nous avons

$$[4.1.13] \quad \epsilon_n^* = x_n^* - \sum_{k=1}^N g_k^* x_{n-k}^*$$

Pour minimiser  $E[\epsilon_n \epsilon_n^*]$ , on montre alors, [15], que suivant le principe d'orthogonalité, il suffit que l'on ait

$$[4.1.14] \quad E\left[\left(x_n - \sum_{k=1}^N g_k x_{n-k}\right) x_{n-i}^*\right] = 0 \quad i=1,2,\dots,N$$

vu les propriétés de  $E\{\dots\}$  et sa linéarité, [4.1.14] s'écrit

$$[4.1.15] \quad \sum_{k=1}^N g_k R_x(i-k) = R_x(i) \quad i=1,2,\dots,N$$

soit sous forme matricielle

$$[4.1.16] \quad \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \dots & R_x(1-N) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(2-N) \\ \vdots & & & \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \vdots \\ R_x(N) \end{bmatrix}$$

Ces équations sont désormais indépendantes du temps. La puissance de la série d'erreur  $\varepsilon_n$ ,  $P_{N+1}$  obtenue pour le minimum de  $E[\varepsilon_n \varepsilon_n^*]$  devient compte tenu de l'équation [4.1.14]

$$[4.1.17] \quad \begin{aligned} P_{N+1} &= E[\varepsilon_n \varepsilon_n^*] = E\left[\left(x_n - \sum_{k=1}^N g_k x_{n-k}\right)\left(x_n^* - \sum_{k=1}^N g_k^* x_{n-k}^*\right)\right] \\ &= E\left[\left(x_n - \sum_{k=1}^N g_k x_{n-k}\right)x_n^*\right] \\ &= R_x(0) - \sum_{k=1}^N g_k R_x(k) \end{aligned}$$

En posant  $\gamma_j = -g_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  et en combinant cette dernière équation avec la matrice précédente nous obtenons

$$[4.1.18] \quad \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \dots & R_x(-N) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(1-N) \\ \vdots & & & \\ R_x(N) & R_x(N-1) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous retrouvons donc bien les coefficients  $P_{N+1}$  et  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  de l'expression de la densité spectrale obtenue par la méthode du maximum d'entropie.

Une autre approche de l'estimation de ces coefficients peut être obtenue en cherchant à approximer un signal quelconque à une série autorégressive d'ordre  $N$  ; considérons en effet un processus linéaire, obtenu en faisant passer un bruit blanc  $a_t$  dans un système linéaire : un filtre, écrit sous une forme discrète, nous avons

$$[4.1.19] \quad x_t - \mu = \sum_{k=0}^{\infty} h_k a_{t-k}$$

où  $\mu$  est un paramètre qui décrit le niveau du processus  $x_t$ ,  $a_t$  ayant une moyenne nulle et une variance  $\sigma_a^2$ . Si de plus on suppose que le filtre est stable le processus  $x_t$  est stationnaire et  $\mu$  représente la moyenne de  $x_t$ . Une représentation discrète d'un processus autorégressif d'ordre  $N$ , généré par  $a_t$  s'écrit alors

$$[4.1.20] \quad x_t - \mu = \alpha_1 (x_{t-1} - \mu) + \alpha_2 (x_{t-2} - \mu) + \dots + \alpha_N (x_{t-N} - \mu) + a_t$$

Le spectre d'une telle série est, [1], [3]

$$(4.1.21) \quad S(f) = \frac{\sigma_a^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{-j i 2\pi f \Delta t} \right|^2}$$

où  $\Delta t$  est l'intervalle d'échantillonnage,  $f_N$  la fréquence de Nyquist. On cherche les coefficients  $\alpha_i$  en fonction de  $x_t$  de la manière suivante ; nous multiplions chaque terme de la série  $x_t$  par  $x_{t-k}$  en considérant que  $\mu$ , valeur moyenne de  $x_t$ , a été retranchée de chaque terme de la série et nous appliquons l'opérateur  $E [\dots]$  sur les éléments obtenus ce qui donne,

$$(4.1.22) \quad x_t x_{t-k} = \alpha_1 x_{t-1} x_{t-k} + \alpha_2 x_{t-2} x_{t-k} + \dots + \alpha_N x_{t-N} x_{t-k} + a_t x_{t-k}$$

Pour  $k > 0$

$$(4.1.23) \quad R_x(k) = \alpha_1 R_x(k-1) + \alpha_2 R_x(k-2) + \dots + \alpha_N R_x(k-N) + E [a_t x_{t-k}]$$

en considérant que

$$x_{t-k} = \sum_{l=0}^{\infty} h_l a_{t-k-l}$$

d'après (4.1.19), nous avons

$$E [a_t x_{t-k}] = 0$$

Pour  $k = 0$

$$(4.1.24) \quad R_x(0) = \alpha_1 R_x(1) + \alpha_2 R_x(2) + \dots + \alpha_N R_x(N) + E [a_t x_t]$$

nous avons alors  $E [a_t x_t] = \sigma_a^2$ . En faisant varier  $k$  de 0 à  $N$  nous obtenons alors le système d'équations suivantes connues sous le nom d'équations de Yule-Walker

$$(4.1.25) \quad \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N) & R_x(N-1) & \dots & R_x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est une équation matricielle identique à celles que nous avons rencontrées précédemment [4.1.18], [4.1.7].

#### 4.2. Méthode de Burg et de Yule-Walker

La méthode récurrente de Burg pour le calcul des coefficients  $\gamma_j$  et  $P_{N+1}$  est définie ainsi, [4], : pour  $N = 0$  l'équation matricielle se réduit à

$$(4.2.1) \quad \hat{R}_x(0) = P_1$$

$\hat{R}_x(0)$  étant au retard zéro, une estimation de la fonction d'autocovariance comme celle donnée en (2.1.9). Pour  $N = 1$  nous avons

$$(4.2.2) \quad \begin{pmatrix} P_1 & R_x(-1) \\ R_x(1) & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_2$  est pris comme étant la moyenne des puissances du signal d'erreur calculées dans le sens croissant et dans le sens décroissant du temps

soit pour  $\varepsilon_j$

$$(4.2.3) \text{ a} \quad \varepsilon_{j,1}^c = x_j + \gamma_{1,1} x_{j-1}$$

et

$$(4.2.5) \text{ b} \quad \varepsilon_{j,1}^d = x_j + \gamma_{1,1}^* x_{j+1}$$

ce qui donne pour  $P_2$

$$(4.2.4) \quad P_2 = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ |x_{j+1} + \gamma_{1,1} x_j|^2 + |x_j + \gamma_{1,1}^* x_{j+1}|^2 \right\}$$

$\gamma_{1,1}$  est calculé pour que  $P_2$  soit minimum

$$(4.2.5) \quad \gamma_{1,1} = -2 \frac{\sum_{j=1}^{M-1} \{ x_j^* x_{j+1} \}}{\sum_{j=1}^{M-1} \{ x_j x_j^* + x_{j+1} x_{j+1}^* \}}$$

l'équation matricielle pour  $N = 1$  donne

$$\text{et} \quad R_x(1) = -\gamma_{1,1} \hat{R}_x(0)$$

$$P_2 = (1 - \gamma_{1,1} \gamma_{1,1}^*) P_1$$

puisque nous avons la relation  $R_x(1) = R_x^*(-1)$  dans le cas d'un signal complexe. En poursuivant la récurrence pour  $N = 2$  nous écrivons l'équation matricielle sous la forme

$$(4.2.6) \quad \begin{pmatrix} \hat{R}_x(0) & R_x(-1) & R_x(-2) \\ R_x(1) & \hat{R}_x(0) & R_x(-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & \hat{R}_x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{1,1} + \gamma_{2,2} \gamma_{1,1}^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} + \gamma_{2,2} \begin{pmatrix} \Delta_2^* \\ 0 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

On a donc par analogie avec (4.1.16) les relations suivantes

$$(4.2.7) \quad P_3 = P_2 + \gamma_{2,2} \Delta_2^*$$

$$\Delta_2 + \gamma_{2,2} P_2 = 0$$

le calcul de  $P_3$  est effectué comme précédemment

$$(4.2.8) \quad P_3 = \frac{1}{2(M-2)} \sum_{j=1}^{M-2} \left\{ |x_{j+2} + \gamma_{1,1} x_{j+1} + \gamma_{2,2} x_j|^2 + |x_j + \gamma_{1,1}^* x_{j+1} + \gamma_{2,2}^* x_{j+2}|^2 \right\}$$

De même  $\gamma_{2,2}$  est calculé pour minimiser  $P_3$

$$\gamma_{2,2} = \frac{-2 \sum_{j=2}^{M-2} \left\{ x_{j+2} + \gamma_{1,1} x_{j+1} \right\} \left\{ x_j + \gamma_{1,1}^* x_{j+1} \right\}^*}{\sum_{j=2}^{M-2} \left\{ |x_{j+2} + \gamma_{1,1} x_{j+1}|^2 + |x_j + \gamma_{1,1}^* x_{j+1}|^2 \right\}}$$

soit encore

$$(4.2.9) \quad \gamma_{2,2} = \frac{-2 \sum_{j=2}^{M-2} E_{j+2,1}^c E_{j,1}^{d*}}{\sum_{j=2}^{M-2} \left\{ |E_{j+2,1}^c|^2 + |E_{j,1}^d|^2 \right\}}$$

l'équation matricielle donne

$$R_x(2) = -\gamma_{1,2} R_x(1) - \gamma_{2,2} \hat{R}_x(0)$$

et

$$P_3 = (1 - \gamma_{2,2} \gamma_{1,2}^*) P_2$$

Le procédé se généralise et à la récurrence d'ordre N+1 nous avons

$$(4.2.10) \quad \gamma_{N+2, N+2} = \frac{-2 \sum_{j=2}^{M-N-1} E_{j+N+2, N}^c E_{j, N}^{d*}}{\sum_{j=2}^{M-N-1} \left\{ |E_{j+N+2, N}^c|^2 + |E_{j, N}^d|^2 \right\}}$$

$$E_{j, N}^c = x_j + \gamma_{1, N} x_{j-1} + \dots + \gamma_{N, N} x_{j-N} = E_{j, N-1}^c + \gamma_{N, N} E_{j-N, N-1}^d$$

$$E_{j, N}^d = x_j + \gamma_{1, N}^* x_{j+1} + \dots + \gamma_{N, N}^* x_{j+N} = E_{j, N-1}^d + \gamma_{N, N}^* E_{j+N, N-1}^c$$

$$\gamma_{2, N+2} = \gamma_{2, N} + \gamma_{N+2, N+2} \gamma_{N, N}^*$$

$$\gamma_{2, N+2} = \gamma_{2, N} + \gamma_{N+1, N+1} \gamma_{N-1, N}^*$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{N, N+2} = \gamma_{N, N} + \gamma_{N+1, N+1} \gamma_{1, N}^*$$

$$R_x(N+2) = - \sum_{j=2}^{N+1} \gamma_{j, N+2} R_x(N-j+1)$$

$$P_{N+2} = P_{N+1} (1 - \gamma_{N+2, N+2} \gamma_{N+1, N+1}^*)$$

Il faut remarquer que dans la méthode de Burg seule l'autocovariance au retard zéro est estimée suivant une méthode classique contrairement à la méthode de Yule-Walker où toute la matrice de la fonction d'autocovariance est estimée suivant la méthode décrite dans le paragraphe 2.1. et où nous inversons cette matrice pour connaître les coefficients  $P_{N+1}$  et  $\gamma_j, j = 1, 2, \dots, N$ . C'est cette matrice très particulière, dite matrice de Toeplitz, que nous allons brièvement étudier maintenant.

### 4.3. Matrice de Toeplitz

La définition d'une matrice de Toeplitz est la suivante : soit une séquence de  $2N+1$  nombres réels ou complexes

$$\bar{\Phi}(-N), \bar{\Phi}(-N+1), \dots, \bar{\Phi}(-1), \bar{\Phi}(0), \bar{\Phi}(1), \dots, \bar{\Phi}(N)$$

Avec cette séquence on peut former une matrice  $(N+1) \times (N+1)$  appelée A dont l'élément  $i, j$  est donné par

$$[4.3.1] \quad A_{ij} = \underline{\Phi}(i-j) \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

Les éléments le long de la diagonale principale de cette matrice sont égaux comme sont égaux, entre eux, les éléments des droites parallèles à celle ci.

La matrice de la fonction d'autocorrélation est donc une matrice de Toeplitz qui est de plus hermitienne. L'inversion de cette matrice donne la matrice suivante

$$[4.3.2] \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{N0} \\ a_{01} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{0N} & \dots & & a_{NN} \end{pmatrix}$$

et nous obtenons alors pour l'équation matricielle la solution suivante

$$[4.3.3] \quad \begin{aligned} \hat{p}_{N+1} &= 1/a_{00} \\ \gamma_1 &= a_{01}/a_{00} \\ &\vdots \\ \gamma_N &= a_{0N}/a_{00} \end{aligned}$$

De nombreuses méthodes sont disponibles pour inverser une matrice de Toeplitz nous en avons retenu deux : l'une [7] permettant d'inverser des matrices de Toeplitz quelconques, l'autre [8] permettant d'inverser des matrices de Toeplitz hermitiennes. D'après l'équation [4.3.3] on voit qu'il suffit de calculer uniquement la première colonne de la matrice inverse.

#### 4.4. Critère d'Akaike

La principale difficulté de la méthode du maximum d'entropie est de déterminer l'ordre  $N$ , idéal pour un signal quelconque, auquel on s'arrêtera dans le calcul des coefficients  $\hat{p}_{N+1}$  et  $\gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Akaike [10], [11], [12], [3] définit un critère au sens des moindres carrés, appelé FPE (pour Final Prediction Error), soit :

$$[4.4.1] \quad \text{FPE} = E \left[ (x_t - \hat{x}_t)^2 \right]$$

où  $\hat{x}_t$  est l'estimation de la série autorégressive  $x_t$  définie en [4.1.20]. On recherche alors la valeur de  $N$  qui va rendre FPE minimum. Pour exprimer FPE en fonction de  $N$  on considère une estimation  $\hat{y}_t$ , du processus  $y_t$  calculée avec les mêmes coefficients que pour l'estimation de  $x_t$  ;

On suppose les processus  $x_t$  et  $y_t$  indépendants mais statistiquement équivalents, et on calcule FPE pour  $y_t$

$$(4.4.2) \quad FPE = E [(y_t - \hat{y}_t)^2]$$

avec  $\hat{y}_t = \sum_{m=1}^N \hat{\alpha}_m^N y_{t-m}$  où  $\hat{\alpha}_j^N$  est l'estimation du coefficient de Yule-Walker pour un ordre N,  $\hat{\alpha}_j^N$  est une fonction de  $\{x_t\}$

nous avons alors

$$(4.4.3) \quad FPE = E \left[ \left( y_t - \sum_{m=1}^N \hat{\alpha}_m^N y_{t-m} \right)^2 \right]$$

en écrivant que  $\Delta \alpha_j^N = \hat{\alpha}_j^N - \alpha_j^N$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$

nous obtenons

$$FPE = E \left[ \left( y_t - \sum_{m=1}^N \alpha_m^N y_{t-m} \right)^2 \right] + E \left[ \sum_{m=1}^N \Delta \alpha_m^N y_{t-m} \sum_{l=1}^N \Delta \alpha_l^N y_{t-l} \right]$$

puisque  $y_t$  est indépendant de  $\Delta \alpha_j^N$ , on remarque que le premier terme de FPE n'est autre que la définition de  $\sigma_a^2$  on peut donc écrire

$$(4.4.5) \quad FPE = \sigma^2 + \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N E [\Delta \alpha_m^N \Delta \alpha_l^N] R_x(l-m)$$

Au les propriétés de E et le fait que  $x_t$  et  $y_t$  sont statistiquement équivalents, dans l'évaluation du second terme. Ce critère est donc la somme de deux termes, la variance qui décroît quand N croît, et un terme de biais, dû aux erreurs dans l'estimation de la matrice d'autocovariance, qui croît généralement avec N. On choisit donc la valeur de N qui minimise FPE ; Akaike, [12], montre que FPE peut se mettre sous la forme

$$(4.4.6) \quad FPE(N) = \left( 1 + \frac{N+1}{M} \right) \sigma^2$$

où M est le nombre total d'éléments du processus en cause. Une estimation de  $\sigma^2$  étant (4.1.24)

$$T(N) = R_x(0) - \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i^N R_x(i)$$

Il montre alors que

$$T(N) / \left[ 1 - \frac{N+1}{M} \right]$$

est une meilleure estimation de  $\sigma^2$  et que nous avons donc

$$(4.4.7) \quad FPE = \frac{M + (N+1)}{M - (N+1)} T(N)$$

c'est un terme qui sera évalué numériquement afin de déterminer son minimum en fonction de N.

### 4.5 Inter-spectre

Il n'est pas possible de calculer directement l'inter-spectre de deux signaux par la méthode du maximum d'entropie, mais on peut utiliser un artifice [5]. Soient deux fonctions du temps  $x(t)$  et  $y(t)$ , leur inter-spectre  $S_{xy}(f)$  est défini par (voir paragraphes 2.2. et 3.2.)

$$S_{xy}(f) = L_{xy}(f) - j Q_{xy}(f)$$

avec

$$L_{xy}(f) = \text{Re} [X^*(f) Y(f)]$$

et

$$Q_{xy}(f) = \text{Im} [X^*(f) Y(f)]$$

on définit deux nouvelles fonctions du temps  $a(t)$  et  $b(t)$  telles que

$$(4.5.1) \quad \begin{aligned} a(t) &= x(t) + j y(t) \\ b(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

en prenant leur F.F.T. nous avons

$$\begin{aligned} A(f) &= X(f) + j Y(f) \\ B(f) &= X(f) + Y(f) \end{aligned}$$

l'auto-spectre de  $a(t)$  s'écrit

$$(4.5.2) \quad \begin{aligned} S_a(f) &= A^*(f) A(f) = X^*(f) X(f) + Y^*(f) Y(f) - j [X^*(f) Y(f) - Y^*(f) X(f)] \\ &= S_x(f) + S_y(f) + 2 \text{Im} [X^*(f) Y(f)] \end{aligned}$$

de même on a pour l'auto-spectre de  $b(t)$

$$(4.5.3) \quad S_b(f) = S_x(f) + S_y(f) + 2 \text{Re} [X^*(f) Y(f)]$$

nous en déduisons donc

$$(4.5.4) \quad \begin{aligned} L_{xy}(f) &= [S_b(f) - S_x(f) - S_y(f)] / 2 \\ Q_{xy}(f) &= [S_a(f) - S_x(f) - S_y(f)] / 2 \end{aligned}$$

$S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_x$  et  $S_y$  étant calculés par la méthode du maximum d'entropie.

## 5 - CONCLUSION

La liste des méthodes d'analyse spectrale n'est pas épuisée. Il en existe d'autres telles que la méthode du maximum de vraisemblance [6], qui a des relations avec la méthode du maximum d'entropie [13]. D'autre part il n'existe pas de critère particulier pour l'application de telle ou telle méthode à un cas précis, mais, en fonction du résultat désiré, c'est à dire si l'on veut une bonne résolution en fréquence ou en amplitude, il faudra tenir compte du biais et de la variance. Seule la méthode du maximum d'entropie semble particulièrement bien adaptée pour des signaux courts, [4], et mis à part le fait que c'est une technique récente donc moins bien connue, elle est très prometteuse, on a, par exemple, l'estimation de la valeur du spectre, exactement à la fréquence voulue contrairement aux autres méthodes.

6 - BIBLIOGRAPHIE

- [1] Spectral Analysis and its applications  
G.M. JENKINS and D.G. WATTS  
Holden-Day, San Francisco, 1969.
- [2] The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms  
P.D. WELCH  
IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol Av-15, pp. 70-73,  
June 1967.
- [3] Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition  
T.J. ULRYCH and T.N. BISHOP  
Reviews of Geophysics dans space physics. Vol 13, n° 1, Febr. 75.
- [4] Analysis of irregularities in the earth's rotation, in, methods in computational Physics  
D.E. SMYLIE, G.K.C. CLARKE and T.J. ULRYCH  
Vol 13, pp. 391-430, Academic, New-York , 1973.
- [5] Cross-spectral analysis by using maximum entropy  
T.J. ULRYCH and O.G. JENSEN  
Geophysics, 39, 353-354, 1974.
- [6] Data adaptive spectral analysis methods  
R.T. LACOSS  
Geophysics, 36, 661-675, 1971.
- [7] Direct methods for solving systems of linear equations, involving Toeplitz or Hankel matrices  
J.J. CORNYN Jr.  
Naval research Lab Washington DC-Oct. 74 - Rept n° NRL-MR-2920.

- [8] The Toeplitz matrix : Its occurrence in antenna problems and a rapid inversion Algorithm  
Douglas H. PREIS  
IEEE Trans. Antennas. Propagat. pp. 204-206 March 72.
- [9] Expériences with maximum entropy power spectra of sinusoids  
W.Y. CHEN and G.R. STEGEN  
J.G.R., Vol 79, n° 20, pp. 3019-3022, July 10, 1974.
- [10] Power spectrum estimation through autoregressive model fitting  
H. AKAIKE  
Ann. Inst. Statist. Math., 21, 407-419, 1969.
- [11] Fitting autoregressive models for prediction  
H. AKAIKE  
Ann. Inst. Statist. Math., 21, 243-247, 1969.
- [12] Statistical predictor identification  
H. AKAIKE  
Ann. Inst. Statist. Math., 22, 203-217, 1970.
- [13] The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra  
J.P. BURG  
Geophysics, 37, 375-376, 1972.
- [14] Random Data : Analysis and Measurement procedures  
J.S. BENDAT and A.G. PIERSOL  
Wiley-Interscience, 1971.
- [15] Probability, Random Variables, and Stochastic Processes  
A. PAPOULIS  
Mc Graw-Hill Book company, 1965.

APPENDICE : Programme FORTRAN

Les programmes dont nous donnons le listing sont les suivants :

- Correlation + F.F.T.

JENK calcule l'auto-spectre d'un signal.

CJENK calcule l'inter-spectre de deux signaux.

- Transformée de Fourier directe du signal

ATFODI calcule l'auto-spectre d'un signal.

CTFODI calcule l'inter-spectre de deux signaux.

- Méthode du maximum d'entropie

SBURG calcule l'auto-spectre d'un signal pour la méthode du Burg.

CSBURG calcule l'inter-spectre de deux signaux par la même méthode.

ATOEPL et PREIS calcule l'auto-spectre d'un signal par inversion de la matrice de la fonction d'auto-covariance suivant deux méthodes différentes.

MEMPR et YWPR permettent d'obtenir les coefficients  $\gamma_i$ ,  $i = 1, N$  et  $\rho_{N+1}$  nécessaires au calcul du spectre d'un signal, suivant les méthodes respectivement de Burg et de Yule-Walker ; elles permettent en outre de fixer le nombre N par application du critère d'Akaike.

```
          SUBROUTINE JENK(V,N,L,M,R,W,SP,NF,DT)
C      JENK CALCULE L'AUTOSPECTRE DU SIGNAL V DE DIMENSION N PAR LA METHODE DE
C      JENKINS AND WATTS - ON CALCULE L'AUTOCOVARIANCE DU SIGNAL POUR L LAGS ET ON
C      EN RETIEND M - R ET W SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL - LE SPECTRE SE TROUVE
5      C      DANS LE TABLEAU SP - DT EST L'INTERVALLE D'ECHANTILLONAGE DU SIGNAL -
C      ON DOIT AVOIR DIMENSION V(N),R(L),W(M-1),SP(NF+1)
C      JENK UTILISE LE SOUS PROGRAMME AUCDP
C      LA FONCTION WINDOW
          DIMENSION V(1),R(1),W(1),SP(1)
          COMMON /WIN/A,B
          DATA P1/3.141592653589/
          NFP1=NF+1
          MM1=M-1
          A=MM1/2.
          B=(M+1)/2.
          CALL AUCDP(V,N,L,R)
          DO 1 K=1,MM1
1      W(K)=WINDOW(K,M)
          PI=PI/NF
          A=2*DT
          B=R(1)*A
          A=2*A
          DO 3 KK=1,NFP1
          C=COS(PI*(KK-1))
          DC=2*C
          VO=0.
          V1=0.
          DO 2 IK=1,MM1
          K=M-1K
          V2=DC*V1-VO+W(K)*R(K+1)
          VO=V1
2      V1=V2
3      SP(KK)=B+A*(V1*C-VO)
          RETURN
          END
35
```

```
          SUBROUTINE CJENK(T,V,N,L,R,S,M,W,NF,SPR,SPI,DT)
C   CJENK CALCULE LE CROSS SPECTRE DES 2 SIGNAUX T ET V DE DIMENSION N - ON
C   CALCULE LA CROSS COVARIANCE DES 2 SIGNAUX POUR L LAGS ET ON EN RETIEND M-
C   - R,S ET W SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL - LA PARTIE REELLE DU SPECTRE SE
5   C   TROUVE DANS LE TABLEAU SPR ET LA PARTIE IMAGINAIRE DANS SPI - DT EST L'INTER
C   VALLE D'ECHANTILLONAGE DES 2 SIGNAUX.
C   DIMENSION T(N),V(N),R(L),S(L),W(M-1),SPR(NF+1),SPI(NF+1)
C   CJENK UTILISE LE SOUS PROGRAMME CREIMS
C           LA FONCTION WINDOW
10          DIMENSION T(1),V(1),R(1),S(1),W(1),SPR(1),SPI(1)
          COMMON /WIN/A,B
          DATA PI/3.141592653589/
          NFP1=NF+1
          MM1=M-1
15          A=MM1/2.
          B=(M+1)/2.
          PI=PI/NF
          CALL CREIMS(T,V,N,L,R,S)
          DO 1 K=1,MM1
20          1 W(K)=WINDOW(K,M)
          A=2*DT
          B=R(1)*A
          A=2*A
          DO 3 KK=1,NFP1
25          PIN=PI*(KK-1)
          C=CDS(PIN)
          DC=2*C
          VO=0.
          V1=0.
30          SN=SIN(PIN)
          ZO=0.
          Z1=0.
          DO 2 IK=1,MM1
          K=M-1K
35          V2= DC*V1-VO+W(K)*R(K+1)
          Z2= DC*Z1-ZO+W(K)*S(K+1)
          VO=V1
          V1=V2
          ZO=Z1
40          2 Z1=Z2
          SPR(KK)=B+A*(V1)*C-VO)
          3 SPI(KK)=A*Z1*SN
          RETURN
          END
```

```

SUBROUTINE ATFDDI(A,K,LD,L,LP,T,TMOD,W,TI)
C   ATFDDI CALCULE L'AUTOSPECTRE DU SIGNAL A DE DIMENSION N PAR FFT DIRECTE DU
C   SIGNAL A DECOUPE EN SEGMENT T DE DIMENSION L - K EST LE NOMBRE DE FFT
C   EFFECTIVEMENT FAITE - LD EST LE DECALAGE ENTRE 2 SEGMENTS CONSECUTIFS,S1
5   C   LD=L IL N'Y A PAS DE RECDUVREMENT - ON DOIT AVOIR LA RELATION (K-1)*LD+L=N -
C   - LP EST LE NOMBRE DE ZERO QUE L'ON AJOUTE
C   AU SEGMENT DE LONGUEUR L - POUR SATISFAIRE AU SOUS PROGRAMME DE FFT ON DOIT
C   AVOIR L+LP DE LA FORME 2**I - TMOD EST LE TABLEAU CONTENANT LE SPECTRE - W
C   ET TI SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL
10  C   DIMENSION A(N),T(L+LP),TMOD(1+(L+LP)/2),W(L),TI(L+LP)
C   LES SOUS PROGRAMMES UTILISES SONT ZERO
C   FTOIA DE LA BIBLIOTHEQUE HARWELL
C   LA FONCTION WINDOW(I,L)
15  DIMENSION A(1),T(1),TMOD(1),W(1),TI(1)
COMMON /FFT/ KJUMP
COMMON /WIN/ AA,BB
FLO=0.
KJUMP=1
LM=L+LP
20  LP1=L+1
LMS2=LM/2+1
BB=LP1/2.
AA=(L-1)/2.
DO 1 I=1,L
25  W(I)=WINDOW(I,L)
1 FLD=FLO+W(I)*W(I)
FLD=(LM*LM)/(FLD*K)
CALL ZERO(TMOD,1,LMS2)
J=0
30  DO 5 I=1,K
DO 2 M=1,L
2 T(M)=A(M+J)*W(M)
CALL ZERO(T,LP1,LM)
CALL ZERO(TI,1,LM)
35  CALL FTOIA(LM,1,T,TI)
DO 4 M=1,LMS2
4 TMOD(M)=TMOD(M)+(T(M)+T(M)+TI(M)+TI(M))*FLD
5 J=J+LD
RETURN
40  END
```

```

SUBROUTINE CTFODI(A,B,K,LD,L,LP,T,V,TMOD,TIM,W,TI,SI)
C CTFODI CALCULE LE CROSS SPECTRE DES 2 SIGNAUX A ET B DECOUPES EN SEGMENT T
C ET V DE LONGUEUR L- TMOD CONTIENT LA PARTIE REELLE ET TIM LA PARTIE IMAGINAIRE
C RE DU SPECTRE - W,TI,SI SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL -LES AUTRES PARAMETRES
C ONT LA MEME SIGNIFICATION QUE DANS LA SUBROUTINE ATFODI -
5 C LES SOUS PROGRAMMES UTILISES SONT ZERO
C
C FTOIA DE LA BIBLIOTHEQUE HARWELL
C LA FONCTION WINDOW(I,L)
C ON DOIT AVOIR DIMENSION A(N),B(N),T(L+LP),V(L+LP),TMOD(1+(L+LP)/2),
10 C TIM(1+(L+LP)/2),W(L),TI(L+LP),SI(L+LP)
C DIMENSION A(1),B(1),T(1),V(1),TMOD(1),TIM(1),W(1),TI(1),SI(1)
COMMON /FFT/ KJUMP
COMMON /WIN/ AA,BB
15 KJUMP=1
LM=L+LP
LMS2=LM/2+1
FLO=0.
LP1=L+1
BB=LP1/2.
20 AA=(L-1)/2.
DO 1 I=1,L
W(I)=WINDOW(I,L)
1 FLO=FLO+W(I)*W(I)
FLO=(LM*LM)/(FLO*K)
25 CALL ZERD(TMOD,1,LMS2)
CALL ZERD(TIM,1,LMS2)
J=0
DO 5 I=1,K
30 DO 2 M=1,L
T(M)=A(M+J)*W(M)
2 V(M)=B(M+J)*W(M)
CALL ZERD(T,LP1,LM)
CALL ZERD(V,LP1,LM)
35 CALL ZERD(TI,1,LM)
CALL ZERD(SI,1,LM)
CALL FTOIA(LM,1,T,TI)
CALL FTOIA(LM,1,V,SI)
DO 4 M=1,LMS2
40 TMOD(M)=TMOD(M)+(T(M)*V(M)+TI(M)*SI(M))*FLO
4 TIM(M)=TIM(M)+(TI(M)*V(M)-T(M)*SI(M))*FLO
5 J=J+LD
RETURN
END
```

```
          SUBROUTINE SBURG(F,NE,NL,GA,GG,FN,DT,NF,SP)
          DIMENSION F(1),GA(1),SP(1),GG(NL,1)
5      C SBURG CALCULE L'AUTOSPECTRE DU SIGNAL F DE DIMENSION NE PAR LA METHODE
      C RECURRENTE DE BURG - NL EST L'ORDRE AUQUEL ON S'ARRETTE - GA ET GG SONT DES
      C TABLEAUX DE TRAVAIL - FN LA FREQUENCE DE NYQUIST - DT L'INTERVALLE D'ECHAN
      C TILLONAGE DE F - SP CONTIENT EN ENTREE LES NF FREQUENCES AUXQUELLES ON VEUT
      C LE SPECTRE, ET EN SORTIE LE SPECTRE POUR LES FREQUENCES CORRESPONDANTES -
      C DIMENSION F(NE),GA(NL),GG(NL,NL),SP(NF)
      C SOUS PROGRAMME UTILISE : LES FONCTIONS SPEC ET PBJN
10      PNP1=0
          DO 1 I=1,NE
      1  PNP1=PNP1+F(I)*F(I)
          PNP1=PNP1/FLDAT(NE)
          DO 2 I=1,NL
15      MI=NE-I
          IN=I-1
          S1=0.
          S2=0.
          DO 3 J=1,MI
20      JP1=J+1
          A=PBJN(F,JP1,IN,GG,-1,NL)
          B=PBJN(F,J,IN,GG,1,NL)
          S1=S1+A*B
      3  S2=S2+A*A+B*B
25      GA(I)=-2.*S1/S2
          PNP1=PNP1*(1.-GA(I)*GA(I))
          GG(I,1)=GA(I)
          IF(IN.EQ.0) GO TO 2
30      DO 4 J=1,IN
      4  GG(J,I)=GG(J,IN)+GG(I,1)*GG(I-J,IN)
      2  CONTINUE
          DO 5 K=1,NF
35      FR=SP(K)
      5  SP(K)=SPEC(FR,GA,PNP1,NL,DT,FN)
          RETURN
          END
```

```

SUBROUTINE CSBURG(T,V,N,M,GA,A,GG,CGG,CGA,FN,DT,NF,SPR,SPI,SPT,
1SPV)
C CSBURG CALCULE LE CROSS-SPECTRE DES SIGNAUX T ET V DE DIMENSION N PAR LA
C METHODE DE BURG - M EST L'ORDRE AUQUEL ON S'ARRETTE - A,GA,GG,CGA,CGG,SPT ET
5 C SPV SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL - FN LA FREQUENCE DE NYQUIST - DT L'INTER
C VALLE D'ECHANTILLONAGE - SPR ET SPI CONTIENNENT EN SORTIE RESPECTIVEMENT LES
C PARTIES REELLES ET IMAGINAIRES DU SPECTRE - EN ENTREE SPR CONTIENT LES NF
C FREQUENCES AUXQUELLES ON VEUT CE SPECTRE -
C SOUSPROGRAMME UTILISE SBURG
10 C EPBJN
C CSPEC
C DIMENSION T(N),V(N),GG(M,M),GA(M),SPR(NF),SPI(NF),SPT(NF),SPV(NF)
C COMPLEX A(N),CGA(M),CGG(M,M)
15 DIMENSION T(1),V(1),GG(M,1),GA(1),SPR(1),SPI(1),SPT(1),SPV(1)
C COMPLEX A(1),CGA(1),CGG(M,1)
C COMPLEX S1,EPF,EPB,B
DO 9 I=1,NF
20 SPT(I)=SPR(I)
SPV(I)=SPR(I)
9 SPI(I)=SPR(I)
CALL SBURG(T,N,M,GA,GG,FN,DT,NF,SPT)
CALL SBURG(V,N,M,GA,GG,FN,DT,NF,SPV)
DO 10 I=1,N
25 A(I)=CMPLX(T(I),V(I))
10 V(I)=T(I)+V(I)
CALL SBURG(V,N,M,GA,GG,FN,DT,NF,SPI)
PNP1=0
DO 1 I=1,N
30 AA=CABS(A(I))
1 PNP1=PNP1+AA*AA
PNP1=PNP1/FLOAT(N)
DO 2 I=1,M
MI=M-I
IN=I-1
35 S1=(0.,0.)
S2=0.
DO 3 J=1,MI
JPI=J+I
40 EPF=EPBJN(A,JPI,IN,CGG,-1,M)
EPB=EPBJN(A,J,IN,CGG,1,M)
AA=CABS(EPF)
B=CONJG(EPB)
S1=S1+EPF*B
45 3 S2=S2+AA*AA+EPB*B
CGA(I)=-2.*S1/S2
AA=CABS(CGAI)
PNP1=PNP1*(1.-AA*AA)
CGG(I,1)=CGA(I)
IF(IN.EQ.0) GO TO 2
50 DO 4 J=1,IN
4 CGG(J,1)=CGG(J,IN)+CGG(I,1)*CONJG(CG(I-J,IN))
2 CONTINUE
DO 20 I=1,NF
FR=SPR(I)
55 AA=SPT(I)+SPV(I)
SPR(I)=0.5*(SPI(I)-AA)
20 SPI(I)=0.5*(CSPEC(FR,CGA,PNP1,M,DT,FN)-AA)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ATOEPL(V,N,L,M,B,R,PT,X,Y,LK,Q,IERR,FN,DT,NF,SP)
C   ATOEPL CALCULE LE SPECTRE DU SIGNAL V DE DIMENSION N PAR INVERSION DE LA
C   MATRICE DE LA FONCTION D'AUTOCOVARIANCE, DITE MATRICE DE TOEPLITZ - ON CAL
5   CULE LA FONCTION D'AUTOCOVARIANCE SUR L LAGS ET ON EN RETIENT M - B,R,PT,X,
C   Y,LK ET Q SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL - FN LA FREQUENCE DE NYQUIST - DT
C   L'INTERVALLE D'ECHANTILLONAGE - SP EST UN TABLEAU DE NF VALEURS QUI EN EN
C   TREE CONTIENT LES FREQUENCES AUXQUELLES ON VEUT CONNAITRE LE SPECTRE ET EN
C   SORTIE CONTIENT LES VALEURS DU SPECTRE CORRESPONDANTES -
C   SOUS PROGRAMME DEMANDE AUCOP
10  C           TOEPLZ
C           MAT
C   DIMENSION V(N),B(L),R(M-1),PT(M-1),X(M-1),Y(M-1),LK(M),Q(M(M+1)/2),SP(NF)
C   IERR=0 SI LA MATRICE A BIEN ETE INVERSEE,SINON =-1
15  DIMENSION V(1),B(1),R(1),PT(1),X(1),Y(1),LK(1),Q(1),SP(1)
C           MM1=M-1
C           CALL AUCOP(V,N,L,B)
C           D=B(1)
C           DO 1 J=2,M
20  1 R(J-1)=B(J)
C           CALL TOEPLZ(M,D,R,R,PT,X,Y,Z,LK,Q,IERR)
C           CALL MAT(C,B,LK,M)
C           P=1./B(1)
C           DO 2 J=2,M
25  2 R(J-1)=B(J)*P
C           DO 3 J=1,NF
C           FR=SP(J)
3   3 SP(J)=SPEC(FR,R,P,MM1,DT,FN)
C           RETURN
C           END
```

```

SUBROUTINE PREIS(V,M,L,NP,T,A,B,FN,DT,NF,SP)
C PREIS CALCULE L'AUTOSPECTRE DU SIGNAL V DE DIMENSION M PAR INVERSION DE LA
C MATRICE DE LA FONCTION D'AUTOCOVARIANCE - ON CALCULE LA FONCTION D'AUTOCOVA
C RIANCE SUR L LAGS ET ON EN RETIENT NP - LA VALEUR MINIMUM DE NP EST 3 - T,A
5 C ET B SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL - FN LA FREQUENCE DE NYQUIST - DT L'INTER
C VALLE D'ECHANTILLONAGE - SP EST UN TABLEAU DE NF VALEURS QUI EN ENTREE
C CONTIENT LES FREQUENCES AUXQUELLES ON VEUT CONNAITRE LE SPECTRE ET EN SORTIE
C CONTIENT LES VALEURS DU SPECTRE CORRESPONDANTES -
C SOUS PROGRAMME DEMANDE AUCDP
10 C SPEC
C DIMENSION V(M),T(NP-1),A(L),B(NP-2)
C DIMENSION V(1),T(1),A(1),B(1),SP(1)
C CALL AUCDP(V,M,L,A)
C NP=NP-1
15 DO 6 I=1,NP
6 T(1)=A(I+1)/A(1)
DL=1.-T(1)*T(1)
A(1)=-T(1)
DO 2 J=2,NP
20 AL=-T(J)
IM1=J-1
DO 3 J=1,IM1
3 AL=AL-A(J)*T(I-J)
A(1)=AL/DL
25 DO 4 J=1,IM1
4 B(J)=A(J)
DO 5 J=1,IM1
5 A(J)=B(J)+A(1)*B(I-J)
DL=DL-A(1)*AL
30 2 CONTINUE
DO 7 J=1,NF
FR=SP(J)
7 SP(J)=SPEC(FR,A,DL,NP,DT,FN)
35 RETURN
END
```

```
      SUBROUTINE MEMPR(M,F,LG,G,PHI,LEXT,FPE,PM,PER,PEF,H)
C  MEMPR COMPUTES THE BURG ESTIMATES OF THE PREDICTION
C  ERROR FILTER COEFFS. AND THE AKAIKE FPE.
C  F(M) ARE THE INPUT DATA
5  C  G(LG) ARE THE PREDICTION ERROR COEFFS.
C  PHI ARE THE A.C. COEFFS. UP TO LAG LEXT.
C  THE LAGS LG+1 TO LEXT ARE EXTRAPOLATED USING MEM
C  FPE ARE THE LOG OF THE NORMALISED FPE'S
C  PM IS THE UPDATED POWER
10  C  MEMPR WAS WRITTEN ORIGINALLY BY D.E.SMYLIE AND MODIFIED
C  BY J.LINTON AND T.J.ULRYCH
C  DIMENSION F(M),G(LG),PHI(LEXT),FPE(LG),PER(M),PEF(M),H(LG-1)
C  DIMENSION F(1),G(1),PHI(1),FPE(1),PER(1),PEF(1),H(1)
      SUM=0.
15  DO 13 I=1,M
13  SUM=SUM+F(I)*F(I)
      PHI(1)=SUM/FLOAT(M)
      PM=PHI(1)
      DM=PHI(1)
20  FPE(1)=FLOAT(M+1)/FLOAT(M-1)*PM
      FTEMP=FPE(1)
      FPE(1)=0.0
      DO 1 NN=2,LG
      N=MN-2
25  IF(N.NE.0) GO TO 11
      DO 12 J=1,M
12  PEF(J)=0.
11  PER(J)=0.
      SN=0.
30  SD=0.
      JJ=M-N-1
      DO 2 J=1,JJ
      A=F(J+N+1)+PEF(J)
      B=F(J)+PER(J)
35  SN=SN-2.*A*B
2  SD=SD+A*A+B*B
      G(NN)=SN/SD
      IF(N.EQ.0)GO TO 3
      DO 4 J=1,N
40  K=M-N-J+2
4  H(J+1)=G(J+1)+G(NN)*G(K)
      DO 6 J=1,N
4  G(J+1)=H(J+1)
      JJ=JJ-1
45  DO 10 J=1,JJ
3  PER(J)=PER(J)+G(NN)*PEF(J)+G(NN)*F(J+NN-1)
10  PEF(J)=PEF(J+1)+G(NN)*PER(J+1)+G(NN)*F(J+1)
      SUM=0.
50  DO 14 J=2,NN
14  SUM=SUM-PHI(NN+1-J)*G(J)
      PHI(NN)=SUM
      DM=(1.0-G(NN)**2)*DM
      PM=DM
      IF(NN.EQ.M) GO TO 88
55  FPE(NN)=FLOAT(M+NN)/FLOAT(M-NN)*PM
      FPE(NN)=FPE(NN)/FTEMP
      FPE(NN)=ALOG10(FPE(NN))
88  CONTINUE
1  CONTINUE
60  G(1)=1.
      LG1=LG+1
      DO 16 J=LG1,LEXT
      SUM=0.
65  DO 17 I=2,LG
17  SUM=SUM-PHI(J+1-I)*G(I)
16  PHI(J)=SUM
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE YWPR(N,X,LG,G,PHI,LEXT,FPE,PM,H,DPHI)
C     YWPR COMPUTES YULE-WALKER ESTIMATES OF THE PREDICTION
C     ERRDR FILTER COEFFS. AND THE AKAIKE FPE.
C     YWPR REQUIRES CROSS WHICH REQUIRES DOT
5     C     X(N) ARE THE INPUT DATA
C     G(LG) ARE THE PREDICTION ERRDR COEFFS.
C     PHI ARE THE A.C COEFFS. UP TO LAG LEXT
C     THE LAGS LG+1 TO LAG LEXT ARE EXTRAPOLATED USING MEM
10    C     FPE ARE THE LOG OF THE NORMALISED FPE'S
C     PM IS THE UPDATED VARIANCE
C     YWPR WAS WRITTEN BY T.J.ULRYCH
C     DIMENSION X(N),G(LG),PHI(LEXT),FPE(LG),H(LG-1),DPHI(LEXT)
C     DIMENSION X(1),G(1),PHI(1),FPE(1),H(1),DPHI(1)
C     CALL CRSS(N,X,N,X,LG,PHI)
15    DD 1 I=1,LG
      PHI(I)=PHI(I)/FLOAT(N)
      DPHI(I)=P-I(I)
      G(1)=1.
      G(2)=-DPHI(2)/DPHI(1)
      FPE(1)=FLCAT(N+1)/FLOAT(N-1)*PHI(1)
      FTEMP=FPE(1)
      FPE(1)=0.0
      DD 2 NN=2,LG
      VP=0.
      DP=0.
25    DD 3 K=1,NN
      VP=VP+G(K)*DPHI(K)
      DP=DP+G(NN+1-K)*DPHI(K+1)
      PM=VP
30    IF(NN.EQ.N) GO TO 88
      FPE(NN)=FLOAT(N+NN)/FLOAT(N-NN)*VP
      FPE(NN)=FPE(NN)/FTEMP
      FPE(NN)=ALOG10(FPE(NN))
88    IF(NN.EQ.LG) GO TO 99
35    G(NN+1)=-DP/VP
      DD 4 I=2,NN
      H(I)=G(I)+G(NN+1)*G(NN+2-I)
      DD 5 I=2,NN
      G(I)=H(I)
40    2 CONTINUE
      99 CONTINUE
      LG1=LG+1
      DD 6 J=LG1,LEXT
      SUM=0.
45    DD 7 I=2,LG
      SUM=SUM-DPHI(J+1-I)*G(I)
      DPHI(J)=SUM
      PHI(J)=SUM
50    RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SOMZER(T,N,S,I)
C QUAND I=1 SOMZER INITIALISE A ZERO LES ELEMENTS DU TABLEAU T DE DIMENSION N
C QUAND I=2 SOMZER FAIT LA MOYENNE DES ELEMENTS DU TABLEAU T
5      DIMENSION T(I)
      GO TO (1,2),I
      1 DD 3 K=1,N
      3 T(K)=0.
      RETURN
      2 S=0.
10     DD 4 K=1,N
      4 S=S+T(K)
      S=S/FLOAT(N)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE ZERD(A,I,J)
C ZERD INITIALISE A 0. LE TABLEAU A DU I-IEME AU J-IEME ELEMENT
      DIMENSION A(I)
      DD 1 K=I,J
5      1 A(K)=0.
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION WINDOW(I,L)
      COMMON /WIN/ A,B
      DATA PI/3.141592653589/
      C=(I-A)/B
5      WINDOW=0.5*(1+COS(PI*C))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE AUCOP(A,N,L,R)
C AUCOP CALCULE L'AUTOCOVARIANCE D'UNE SERIE A DE DIMENSION N POUR L LAGS- LE
C TABLEAU RESULTANT ETANT R - DIMENSION A(N),R(L) - SOUS PROGRAMME DEMANDE
C SOMZER -
5      DIMENSION A(1),R(1)
      CALL SOMZER(R,L,S,1)
      CALL SOMZER(A,N,S,2)
      DD 3 LI=1,L
      IE=N-LI+1
10     DD 2 IN=1,IE
      2 R(LI)=R(LI)+(A(IN)-S)*(A(IN+LI-1)-S)
      3 R(LI)=R(LI)/FLOAT(IE)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CREIMS(A,B,N,L,R,S)
C CREIMS CALCULE LA CROSS COVARIANCE DES SERIES A ET B - LE RESULTAT SE TROUVE
C DANS LES TABLEAUX R ET S RESPECTIVEMENT POUR LES PARTIES PAIRES ET IMPAIRES
C A L'USAGE DE LA SUBROUTINE CJENK -
5      DIMENSION A(1),B(1),R(1),S(1)
      CALL SOMZER(R,L,W,1)
      CALL SOMZER(S,L,W,1)
      CALL SOMZER(A,N,SA,2)
      CALL SOMZER(B,N,SB,2)
10     DD 3 LI=1,L
      IE=N-LI+1
      DD 2 IN=1,IE
      S(LI)=S(LI)+(B(IN)-SB)*(A(IN+LI-1)-SA)
      2 R(LI)=R(LI)+(A(IN)-SA)*(B(IN+LI-1)-SB)
      S(LI)=S(LI)/FLOAT(IE)
15     3 R(LI)=R(LI)/FLOAT(IE)
      DD 4 I=1,L
      T=R(I)
      R(I)=0.5*(R(I)+S(I))
20     4 S(I)=0.5*(T-S(I))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CROSS(LX,X,LY,Y,LC,C)
C   CROSS COMPUTES THE CROSS PRODUCT C(LC)
C   X(LX) AND Y(LY) ARE THE INPUTS
5     DIMENSION X(2),Y(2),C(2)
      DO 10 I=1,LC
10    CALL DOT( MINO(LY+I-1,LX)-I+1,X(I),Y,C(I))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DOT(L,X,Y,ANS)
C   DOT COMPUTES THE DOT PRODUCT
      DIMENSION X(2),Y(2)
5     ANS=0.0
      IF(L) 30,30,10
10    DO 20 I=1,L
20    ANS=ANS+X(I)*Y(I)
30    RETURN
      END
```

```
      FUNCTION YWSPEC(FREQ,G,PM,LG,DT,FN)
C   YWSPEC EST LE COMPLEMENT DE LA SUBROUTINE YWPR - ELLE CALCULE LA VALEUR DU
C   SPECTRE A LA FREQUENCE FREQ - G,PM ET LG ONT LA MEME SIGNIFICATION QUE DANS
C   YWPR - DT EST L'INTERVALLE D'ECHANTILLONAGE - FN LA FREQUENCE DE NYQUIST -
5     DIMENSION G(1)
      COMPLEX S1
      DATA PI/3.141592653589/
      S1=(0.,0.)
      DO 1 I=1,LG
10     AR=2.*PI*DT*FREQ*FLOAT(I)
      S=-SIN(AR)
1   S1=S1+G(I)*CMPLX(COS(AR),S)
      S=CABS(1.-S1)
15     YWSPEC=PM/(FN*S*S)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION SPEC(FREQ,GA,PNP1,M,DT,FN)
C   SPEC CALCULE LA VALEUR DU SPECTRE A LA FREQUENCE FREQ - C'EST LE COMPLEMENT
C   DE LA SUBROUTINE SBURG
5     DIMENSION GA(1)
      COMPLEX S1,S2
      DATA PI/3.141592653589/
      S1=(0.,0.)
      DO 1 I=1,M
10     AR=2.*PI*DT*FREQ*FLOAT(I)
      S2=CMPLX(0.,-AR)
1   S1=S1+GA(I)*CEXP(S2)
      S=CABS(1.+S1)
15     SPEC=PNP1/(FN*S*S)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION CSPEC(FREQ,GA,PNP1,M,DT,FN)
C   CSPEC CALCULE LA VALEUR DU SPECTRE A LA FREQUENCE FREQ - C'EST LE COMPLEMENT
C   DE LA SUBROUTINE CSBURG
5     COMPLEX GA(1),S1,S2
      DATA PI/3.141592653589/
      S1=(0.,0.)
      DO 1 I=1,M
10     AR=2.*PI*DT*FREQ*FLOAT(I)
      S2=CMPLX(0.,-AR)
1   S1=S1+GA(I)*CEXP(S2)
      S=CABS(1.+S1)
      CSPEC=PNP1/(FN*S*S)
      RETURN
      END
```

```
          SUBROUTINE MAT(Q,B,LK,N)
C   MAT SERT A RECUPERER LES ELEMENTS B DE LA MATRICE DE TOEPLITZ INVERSE - Q,LK
C   ET N ONT LES MEMES SIGNIFICATIONS QUE DANS TOEPLZ - NOUS N'AVONS RECHERCHE
C   QUE LES ELEMENTS DE LA PREMIERE COLONNE DE B - LES CARTES COMMENTAIRES NO
5   C   TEEES C+ SERVENT POUR AVOIR LA MATRICE B ENTIERE -
      DIMENSION Q(1),B(1),LK(1)
      NP1=N+1
      K=1
10   C+   DO 501 J=1,N
      DO 601 K=1,N
      IF(J+K-NP1)602,602,603
      602 IND=LK(J)+K
      GO TO 600
15   603 IND=LK(NP1-K)+NP1-J
      600 B(J)=Q(IND)
C+600 B(J,K)=Q(IND)
C+601 CONTINUE
      501 CONTINUE
      RETURN
20   END
```

```
          FUNCTION PBJN(F,J,N,GA,K,L)
C   FONCTION UTILISEE DANS LA METHODE DE BURG
      DIMENSION F(1),GA(L,1)
      PBJN=F(J)
5   IF(N.EQ.0) GO TO 2
      DO 1 I=1,N
1   PBJN=PBJN+GA(I,N)*F(J+K*I)
2   RETURN
      END
```

```
          COMPLEX FUNCTION EPBJN(F,J,N,GA,K,L)
C   EPBJN EST UNE FONCTION QUI SERT DANS LA METHODE DE BURG DANS LE CAS D'UN
C   SIGNAL COMPLEXE -
5   COMPLEX F(1),GA(L,1)
      EPBJN=F(J)
      IF(N.EQ.0) GO TO 2
      IF(K.LT.0) GO TO 3
      DO 4 I=1,N
10  4 EPBJN=EPBJN+CONJG(GA(I,N))*F(J+K*I)
      GO TO 2
      3 DO 1 I=1,N
1   EPBJN=EPBJN+GA(I,N)*F(J+K*I)
2   RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TDEPLZ(N,D,R,C,P,X,Y,Z,LK,Q,IERR)
C     TDEPLZ CALCULE L'INVERSE D'UNE MATRICE DE TDEPLITZ - N EST L'ORDRE DE LA
C     MATRICE - D L'ELEMENT DE LA DIAGONALE PRINCIPALE - R UN TABLEAU CONTENANT
5     LES ELEMENTS DE LA PREMIERE LIGNE DE LA MATRICE SANS COMPTER LE PREMIER - C
C     UN TABLEAU CONTENANT LES ELEMENTS DE LA PREMIERE COLONNE DE LA MATRICE SANS
C     COMPTER LE PREMIER - P,X,Y,LK ET Q SONT DES TABLEAUX DE TRAVAIL - IERR=0 SI
C     LA MATRICE EST BIEN INVERSEE,-1 SINDON -
C     DIMENSION R(N-1),C(N-1),P(N-1),X(N-1),Y(N-1),LK(N),Q(N(N+1)/2)
10    C     LES ELEMENTS DE LA MATRICE INVERSE SONT ACCESSIBLES PAR LA SUBROUTINE MAT
C     TDEPLZ A ETE ECRITE PAR J.J. CORNYN JR. -
      DIMENSION R(1),C(1),X(1),Y(1),P(1),LK(1),Q(1)
      IERR=0
      NM1=N-1
      NM2=NM1-1
15     IF(D-1.)11,12,11
      11 IF(D)15,99,15
      15 DINV=1./D
      DO 10 I=1,NM1
      R(I)=R(I)*DINV
      C(I)=C(I)*DINV
20    CONTINUE
      GO TO 13
      12 DINV=1.
      13 Z=1.-R(1)*C(1)
      X(1)=-R(1)
      Y(1)=-C(1)
25     DO 20 I=1,NM2
      SUM1=0.
      SUM2=0.
      IP1=I+1
      DO 22 J=1,I
      SUM1=SUM1+X(J)*R(IP1-J)
      SUM2=SUM2+C(J)*Y(IP1-J)
30    CONTINUE
      E=-(R(IP1)+SUM1)/Z
      G=-(C(IP1)+SUM2)/Z
      DO 24 K=1,I
      P(K)=X(K)
      X(K)=X(K)+E*Y(IP1-K)
40    CONTINUE
      DO 26 K=1,I
      Y(K)=Y(K)+G*P(IP1-K)
45    CONTINUE
      Y(IP1)=G
      Z=Z*(1.-G*E)
      IF(Z)17,99,17
      17 X(IP1)=E
      Y(IP1)=G
50    CONTINUE
      Z=DINV/Z
      LK(1)=N*NM1/2
      DO 30 I=1,NM1
      LK(I+1)=LK(I)+I-N
55    CONTINUE
      LKIP1=LK(1)+1
      Q(LKIP1)=Z
      DO 35 J=1,NM1
      Q(LKIP1+J)=X(J)*Z
      LKJP1=LK(J+1)+1
      Q(LKJP1)=Y(J)*Z
60    CONTINUE
      35 CONTINUE
      DO 40 I=1,NM2
      NM1=N-1
      LKIP2=LK(I+1)+1
      LK1=LK(I)
      Y1=Y(I)
      XNM1=X(NM1)
      NMIM1=NM1-1
70     DO 50 J=1,NMIM1
      Q(LKIP2+J)=Q(LK1+J)+Z*(Y1*X(J)-XNM1*Y(N-J))
50    CONTINUE
40    CONTINUE
      IF(D-1.)62,70,62
75     62 DO 60 I=1,NM1
      R(I)=R(I)*D
      C(I)=C(I)*D
60    CONTINUE
70    RETURN
80     99 IERR=-1
      RETURN
      END
```

```

SUBROUTINE FTO1A (IT,INV,TR,TI)
C ***** 15/05/70 LAST LIBRARY UPDATE
C THIS ROUTINE CALCULATES THE FOURIER TRANSFORM OF EQUALLY SPACE
C F(N) N=0,1,...,IT-1
5 C THE DATA IS TAKEN TO BE PERIODIC IE. F(N+IT) = F(N)
C ***** ARGUMENTS SET BY THE CALLING PROGRAM *****
C IT IS THE PROBLEM SIZE AND MUST BE A POWER OF 2
C INV = 2 FOR DIRECT TRANSFORM IE.
C G(N) = SUM OVER M=0,1,...,IT-1 OF F(M)*EXP(2PI*SQRT(-1)*M*N/IT)
10 C FOR N=0,1,...,IT-1
C INV = 1 FOR INVERSE TRANSFORM IE.
C F(N) = (1./IT)*(SUM OVER M=0,1,...,IT-1 OF G(M)*EXP(-2PI*SQRT(-1)*
C FOR N = 0,1,...,IT-1
15 C TR(I) I=1,2,...,IT MUST CONTAIN REAL PART OF DATA
C TI(I) I=1,2,...,IT MUST CONTAIN THE IMAGINARY PART OF DATA
C ***** ARGUMENTS SET BY ROUTINE *****
C IF IT IS NOT A POWER OF 2 INV IS SET TO -1 FOR ERROR RETURN
C TR(I) I=1,2,...,IT IS SET TO REAL PART OF TRANSFORM
20 C TI(I) I=1,2,...,IT IS SET TO THE IMAGINARY PART OF TRANSFORM
C THE METHOD USED IN THIS ROUTINE IS DESCRIBED IN
C (GENTLEMAN AND SAMOE, PROC. FALL JOINT COMPUTER CONFER. 1966)
DIMENSION TR(4),TI(4),UR(15),UI(15)
COMMON /FFT/ KJUMP
GO TO(100,200),KJUMP
25 100 UM=.5
KJUMP=2
DO 50 I=1,15
UM=.5*UM
TM=6.283185307178*UM
30 UR(I)=COS(TM)
UI(I)=SIN(TM)
200 UM=1.
GO TO(1,2),INV
1 UM=-1.
2 IO=2
35 DO 3 I=2,16
IO=IO*IO
IF(IO-IT)3,4,5
3 CONTINUE
40 C ERROR IN IT - SET INV=-1 AND RETURN
5 INV=-1
RETURN
C IT= 2**I - INITIALISE OUTER LOOP
45 4 IO=1
I1=IO
I2=IT/2
I3=1
C START MIDDLE LOOP
50 10 K=0
I2=I1+I1
C CALCULATE TWIDDLE FACTOR E(K/I2)
11 UR=1.
UI=0.
KK=K
JO=IO
55 24 IF(KK)21,22,23
21 JO=JO-1
KK=KK
KK=KK/2
60 IF(KK1-2*KK)25,21,23
23 US=UR*UR(JO)-UI*UI(JO)
UI=UR*UI(JO)+UI*UR(JO)
UR=US
GO TO 24
65 22 UI=UI*UM
C START INNER LOOP
C DO 2*2 TRANSFORM
70 31 L=J*IO+K
L1=L+1
ZR=UR(L+1)+TR(L1+1)
ZI=TI(L+1)+TI(L1+1)
Z=UR*(TR(L-1)-TR(L1+1))-UI*(TI(L+1)-TI(L1+1))
75 TI(L1+1)=UR*(TI(L+1)-TI(L1+1))+UI*(TR(L+1)-TR(L1+1))
TR(L+1)=Z
TR(L1+1)=ZI
TI(L+1)=ZI
C INDEX J LOOP
80 J=J+1
IF(J-1)31,12,12
C INDEX K LOOP
12 K=K+1
IF(K-1)11,6,6
C INDEX OUTER LOOP
85 6 I3=I3+1
IO=IO-1
I1=I1/2
IF(I1)51,51,10
C UNSCRAMBLE
90 51 J=1
UM=1.
GO TO(61,52),INV
61 UM=1./FLOAT(IT)
52 K=0
J1=J
95 DO 53 I=1,I1
J2=J1/2
K=2*(K-J2)+J1
53 J1=J2
54 IF(K-J)66,56,55
56 TR(J+1)=TR(J+1)*UM
TI(J+1)=TI(J+1)*UM
GO TO 66
55 ZR=TR(J+1)
105 ZI=TI(J+1)
TR(J+1)=TR(K+1)*UM
TI(J+1)=TI(K+1)*UM
TR(K+1)=ZR*UM
TI(K+1)=ZI*UM
110 66 J=J+1
IF(J-IT+1)52,57,57
57 TR(I)=TR(I)*UM
TI(I)=TI(I)*UM
TR(IT)=TR(IT)*UM
115 TI(IT)=TI(IT)*UM
RETURN
END

```

**CRPE**  
*Centre de Recherches  
en Physique de l'Environnement  
terrestre et planétaire*

*Avenue de la Recherche scientifique  
45045 ORLEANS CEDEX*

**Département PCE**  
*Physique et Chimie  
de l'Environnement*

*Avenue de la Recherche scientifique  
45045 ORLEANS CEDEX*

**Département ETE**  
*Etudes par Télédétection  
de l'Environnement*

*CNET - 38-40 rue du général Leclerc  
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX*