HAL
open science

Ondes électrostatiques pour des plasmas hors de l'équilibre Maxwellien homogène

Jean-Gabriel Trotignon

To cite this version:

Jean-Gabriel Trotignon. Ondes électrostatiques pour des plasmas hors de l'équilibre Maxwellien homogène. [Rapport de recherche] Note technique CRPE n° 27, Centre de recherches en physique de l'environnement terrestre et planétaire (CRPE). 1976, 103 p., figures, graphiques. hal-02191408

HAL Id: hal-02191408

https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02191408

Submitted on 23 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RP 182 (2)

CENTRE NATIONAL D'ETUDES DES TELECOMMUNICATIONS

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE DE RECHERCHES EN PHYSIQUE DE L'ENVIRONNEMENT TERRESTRE ET PLANETAIRE

CRPE

NOTE TECHNIQUE
CRPE / 27

Ondes électrostatiques pour des plasmas hors de l'équilibre maxwellien homogène

par

J. G. TROTIGNON

BIBLIOTHEQUE DU CENTRE DE RECHERCHE C.N.R.S.

CENTRE NATIONAL D'ETUDES
DES TELECOMMUNICATIONS

CENTRE NATIONAL DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE DE RECHERCHE EN PHYSIQUE DE
L'ENVIRONNEMENT TERRESTRE ET PLANETAIRE

NOTE TECHNIQUE CRPE/27

ONDES ELECTROSTATIQUES POUR DES PLASMAS HORS DE L'EQUILIBRE MAXWELLIEN HOMOGENE

par

Jean-Gabriel TROTIGNON

C.R.P.E./P.C.E.
45045 ORLEANS CEDEX FRANCE

Juin 1976

Le Directeur

J. HIEBLOT

SOMMAIRE

Pages

Introduction générale : 3

Chapitre premier : Plasma non maxwellien homogène.

1. Introduction 5
2. Formulation du problème 6
3. Résultats 15
4. Conclusion 25

Annexe 27
Bibliographie 33

Chapitre deuxième : Ondes en plasma inhomogène.

1. Introduction 35
2. Le modèle M.W.B. 39
3. Traitement linéarisé d'équilibres spatialement inhomogènes 40
4. Méthodes numériques. 42

4.1. Méthode des "rampes" dans le cas d'un bag. 43
4.2. Méthode des "marches" dans le cas d'un bag. 46
4.3. Application comparée de ces deux méthodes à l'étude de la réflexion. 49
4.4. Généralisation à N bags de la méthode des "marches". 55

5. Application au cas du plasma. 59

5.1. Etude des structures stationnaires non-linéaires (cas un et deux bags). 60
5.2. Etude des perturbations linéarisées. 75

6. Conclusion. 99

Bibliographie. 103

INTRODUCTION GENERALE

Il faut avant toutes choses, bien situer ce travail dans son contexte.

On peut dire, que cette thèse fait suite à de nombreux travaux tant théoriques qu'expérimentaux sur l'interprétation du sondage radiofréquence ; travaux qui sont menés au C.R.P.E. ainsi qu'à l'Ecole Polytechnique par diverses équipes (STOREY, BEGHIN, FEIX ou BUZZI) et qui ont pour but la compréhension des phénomènes physiques dans les plasmas. Le milieu ionosphérique étant bien entendu le milieu de prédilection des géophysiciens.

Une bonne connaissance de ces milieux nécessite dans un premier temps la détermination de nombreux paramètres physiques caractéristiques du plasma : (densité et température électronique, fréquences de collision, composition ionique etc...).

Interviennent alors tous les moyens de sondage qui ont permis d'obtenir de bonnes mesures de la densité des électrons et plus récemment grâce à l'introduction par STOREY, MEYER et AUBRY (1969) de la "sonde quadripolaire" de résoudre le problème épineux de la mesure de la température électronique.

Nous évoquons là un problème complexe qui est celui de choisir tel ou tel type d'antennes en fonction des paramètres que l'on veut mesurer.

La tendance actuelle est de considérer non pas une antenne mais deux antennes séparées par une distance supérieure à la longueur de Debye.

On est alors amené à calculer l'impédance mutuelle des deux antennes, et non l'impédance propre d'une antenne.

Ce qui nous entraîne en fait à l'étude des champs électrostatiques créés par un système de grilles mécaniquement transparentes aux particules du plasma et servant de support à des charges excitatrices périodiques.

Rappelons que d'une façon générale l'étude des ondes électroniques longitudinales constitue un moyen de diagnostic puissant et bien au point dans le cas Maxwellien homogène. Citons par exemple l'utilisation comme méthode de diagnostic de la propagation des échos obliques par Graff en 1971.

La théorie, en plasma homogène, concernant les modèles de sondes à grilles est maintenant bien connue

- qu'il s'agisse de problèmes de conditions aux limites simples, dans le cas de condensateurs plans, cylindriques ou de sphères concentriques, avec une répartition des charges uniforme sur les armatures.

- ou bien qu'il s'agisse de conditions aux limites plus complexes, dans le cas de sphères ou de cylindres extérieurs, lorsque la répartition des charges est non uniforme, voir même inconnue.

La théorie qui concerne ces conditions aux limites complexes est due à Marie-Luce NOYER (1974).

Par contre, sont moins bien connus les problèmes de la détermination de la forme exacte de la fonction de distribution à partir d'une expérience de propagation d'ondes.

Ce problème dit "inverse" est dicté par le fait que le plasma n'est pas forcèment décrit par une maxwellienne. Il suffit d'évoquer par exemple les expériences d'Henry et Tréguier.

Bien entendu avant d'aborder ce problème compliqué il faut s'assurer de sa faisabilité et il est donc nécessaire d'étudier différents types de fonctions de distribution.

L'introduction d'une fonction de distribution non maxwellienne, entraîne dans la plupart des cas, l'apparition de nouveaux modes.

Le premier point délicat est d'ordre théorique et consiste à calculer la constante dielectrique, le second point est celui de la représentation et de l'interprétation de ces nouveaux modes.

- Du point de vue théorique, il faut s'attacher à la mise au point de modèles capables de tenir compte de la réalité expérimentale et surtout capables de donner des résultats utiles pour la métrologie des plasmas. C'est sûrement un problème difficile.

Un cas intéressant, où l'accord entre l'expérience et le modèle Multiple-Water-Bag, a été très net, est celui des ondes acoustiques-ioniques étudiées par Buzzi en 1973.

- En ce qui concerne l'interprétation, se pose le problème de la différentiation entre des modes qui sont des curiosités mathématiques et qui apparaissent inévitablement dans la majorité des traitements, et les modes qui sont réellement observables. Ceci nous engage à être extrêmement prudents et à ne pas dissocier théorie et expérience quand cela est possible.

Dans la première partie "plasma non maxwellien homogène" nous étudions le cas précis de la maxwellienne avec un manque d'électrons dans la queue de la fonction de distribution, à partir d'une certaine vitesse V_c. On définit et calcule les coefficients d'excitations dans le plan ω, k réel, et on représente "cette densité d'onde" par une méthode de grisé. Cette représentation permet une interprétation aisée du phénomène physique. On voit apparaître, pour des vitesses de coupure comprises entre 2 et 4 V_T, un nouveau pôle peu amorti avec une vitesse de phase légèrement inférieure à la vitesse de coupure. De plus, nous remarquons une modification du mode de Landau qui se propage pour des fréquences de plus en plus hautes quand V_c diminue.

Une autre difficulté rencontrée dans le problème des sondes est celle posée par la formation d'une gaine d'ions, autour des antennes, qui perturbe le plasma et isole partiellement ces antennes du plasma.

Cette perturbation du milieu, due aux structures émettrices entraîne une inhomogénéité dont il serait intéressant de mesurer les effets.

C'est pourquoi nous consacrons la deuxième partie "ondes en plasma inhomogène" à l'étude de la modélisation d'ondes électrostatiques en plasma spatialement inhomogène. La fonction de distribution des vitesses est définie par un modèle "Multiple Water Bag" qui permet de simplifier le traitement tout en restant proche de la réalité.

Le but de cette étude étant plus de donner des méthodes de traitement que de faire une étude exhaustive des effets de l'inhomogénéité, nous nous sommes volontairement limités à l'emploi de modèles à un ou deux bags, avec dans certains cas, des particules piégées.

La définition de la fonction de distribution en tout point de l'espace revient à étudier les structures stationnaires non linéaires c'est-à-dire l'évolution des contours de l'espace des phases. Pour ce faire, nous nous sommes imposés les conditions aux limites suivantes : présence d'un dipôle, à l'origine, porteur d'une densité de charge constante σ et comportement homogène du plasma à l'infini. Si on superpose, à cette densité de charge, une perturbation oscillante suffisamment petite pour permettre un traitement linéaire, on peut déterminer le champ électrique qui se propage dans le milieu.

Ce traitement nécessite la modélisation des contours de l'espace des phases. Nous envisageons deux modèles, la méthode des "marches" et celle des "rampes", qui sont étudiées et comparées dans le paragraphe 4.

J.M. BUZZI, Phys. Fluids 17 (4), 716 (1974)

P. GRAFF, Thèse de doctorat d'état, Paris VII (1971)

M.L. NOYER, Thèse de 3ème Cycle, ORLEANS (1973)

L.R.O. STOREY, M.P. AUBRY et P. MEYER, Plasma Waves in Space and in the Laboratory (Ed. J.O. Thomas et B.J. Landmark), 1, 303, Edinburg University Press (1969)

CHAPITRE PREMIER : PLASMA NON MAXWELLIEN HOMOGENE

1. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle approche du calcul des coefficients d'excitation dans le cas d'un plasma non collisionnel présentant une fonction de distribution de type maxwellienne tronquée. Le choix d'une telle distribution n'est pas arbitraire et bon nombre d'études ont montré son intérêt. Du point de vue théorique, l'apparition de pôles non amortis (Engelmann et al. 1961 ; Weitzner 1963 ; Canosa et al. 1972) montre que, pour un temps long (dans le cas des oscillations libres) ou pour une longue distance (dans le cas des oscillations forcées), le champ n'est plus dominé par l'amortissement Landau.

Certaines études (Aubert et Van Dael 1971, Ivanov et al. 1971) ont montré que l'on pouvait s'attendre à une telle distribution et plus récemment encore Henry et Tréguier l'ont expérimentalement rencontrée (Tréguier 1974, Henry et Tréguier 1972) et ont remarqué l'apparition d'une nouvelle onde peu amortie à une fréquence inférieure à la fréquence plasma avec une vitesse de phase proche de la vitesse de coupure.

Il est bien connu que les subtilités mathématiques du problème des oscillations forcées (Derfler et Simonen 1969) peuvent introduire certains pôles qui, s'ils présentent un intérêt mathématique, n'ont guère de réalité physique détectable expérimentalement. Tel est le cas pour les pôles de Landau d'ordre supérieur et doit être le cas pour ce nouveau pôle associé à la coupure, si cette coupure se produit à une vitesse nettement supérieure à la vitesse thermique ce qui correspond à une zone où il n'y a pratiquement plus d'électrons.

La propagation d'ondes dans un plasma peut, c'est bien connu, être traitée de deux façons. Dans le traitement de Landau, nous devons considérer tous les pôles et calculer les parties réelle et imaginaire de k (dans le cas d'un problème d'oscillations forcées) ainsi que le niveau d'excitation de chaque pôle. Dans le traitement à la Van Kampen, nous nous plaçons dans le plan ω , k réels au moins tant que $\omega > \omega_p$ et que nous n'avons pas des fonctions instables et nous introduisons une distribution de "densité d'onde" Ψ (k, ω). Par conséquent, le même

traitement est valable que les oscillations soient libres ou forcées. Pour une fréquence donnée Ψ (k, ω) présente des maxima. La valeur k où se produit un maximum donne la partie réelle du nombre d'onde (la partie imaginaire étant donnée par la largeur du pic, et le niveau d'excitation par la valeur du maximum). La distribution Ψ peut être représentée dans le plan par un grisé. Le point ω, k étant d'autant plus sombre que la valeur Ψ (k,ω) est élevée. Une telle représentation peut être une aide pour l'expérimentateur. Elle indique en effet là où il faut s'attendre à rencontrer une onde et elle porte, en principe, toute l'information.

2. FORMULATION DU PROBLEME.

En utilisant la théorie linéarisée de Vlasov, nous calculons le champ électrique dû à la classique grille plane infinie portant une densité de charge oscillant sinusoïdalement avec le temps. Si nous faisons tendre x vers zéro, nous obtenons une relation entre les coefficients d'excitation.

Nous considérons un plasma illimité, chaud, non relativiste, homogène, isotrope et sans collisions avec des ions immobiles formant un fond continu uniforme. De plus, ces ions assurent la neutralité électrique du plasma. Comme nous cherchons à résoudre un problème d'oscillations longitudinales unidimensionnelles, la fonction de distribution des vitesses est donnée par l'expression :

$$f_o(v) = \frac{\left[H(v+V_C) - H(v-V_C)\right]}{\sqrt{2\pi}\, V_T \ \mathrm{erf}\,(V_C/\sqrt{2}\, V_T)} \ \exp - \frac{v^2}{2\, V_T^2} \qquad (1)$$

où H est la fonction de Heaviside, V_C la vitesse de coupure et V_T la vitesse thermique associée à la maxwellienne complète. f_o (v) est normalisée, c'est-à-dire $\int f_o\,(v)\, dv = 1$.

La vitesse thermique V_{Tc} associée à la maxwellienne tronquée est alors donnée par la relation.

$$V_{Tc}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f_o(v)\, dv = V_T^2 \left[1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{V_C \exp - (V_C^2/2V_T^2)}{V_T\ \mathrm{erf}\,(V_C/\sqrt{2}V_T)} \right] \qquad (2)$$

où la fonction erreur erf (x) est donnée par l'expression :

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp - t^2 \, dt$$

Nous étudions maintenant la structure du champ pour des ondes électrostatiques excitées par la classique grille plane infinie. Les électrons peuvent passer librement à travers cette grille de sorte qu'il n'y ait aucune perturbation mécanique avec le milieu (Engelmann et al. 1961). Cette grille est immergée dans un plasma perpendiculairement à l'axe de propagation et elle porte une densité de charge sinusoïdale $\sigma \exp i\,\omega t$, où ω est la fréquence des oscillations. Le champ électrique est alors $E(x) \exp i\,\omega t$.

En utilisant l'équation de Poisson, on peut alors écrire :

$$E(x) = \frac{i\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp - ikx}{k\,\varepsilon(k,\omega)} \, dk \qquad (3)$$

$\varepsilon(k, \omega)$ est la fonction diélectrique

$$\varepsilon(k,\omega) = \varepsilon_R + i\,\varepsilon_I \qquad (4)$$

avec

$$\varepsilon_R = 1 + \frac{\omega_p^2}{k} \, P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_0(v)/dv}{\omega - kv} \, dv \qquad (5)$$

où $P\int$ est la partie principale, ω_p la fréquence plasma,

et

$$\varepsilon_I = -\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \operatorname{sgn}\left[\operatorname{Im}\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] \left(\frac{dF_o}{dv}\right)_{\omega/k} \qquad (6)$$

où sgn (Im $(\frac{\omega}{k})$) désigne le signe de la partie imaginaire de $\frac{\omega}{k}$.

Ce sont les formules bien connues du cas continu. L'intégrale (3) peut être calculée par la méthode des résidus. Pour cela, nous utilisons le contour de la figure 1 qui est fermé à l'infini dans le demi-plan complexe inférieur puisque nous supposons $x > 0$.

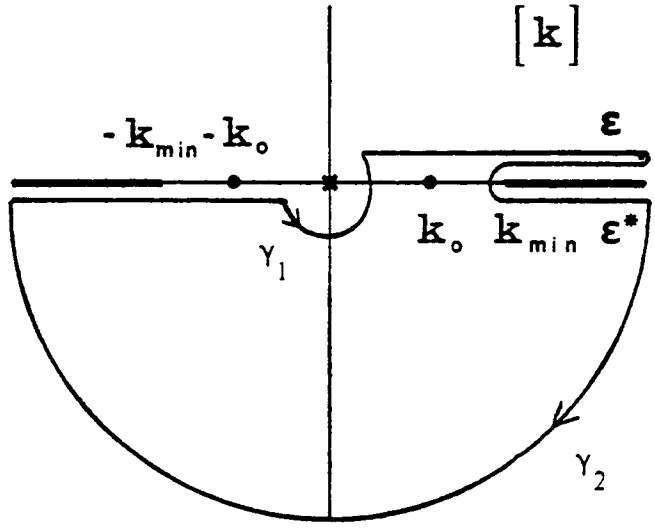


Figure 1 : Contour d'intégration dans le plan complexe des k pour $x > 0$. (ε^* est le complexe conjugué de ε et k_o sera appelé le nouveau pôle de Debye-Landau ; il est réel pour $\omega > \omega_p$).

Dans ce traitement, nous n'avons besoin d'aucune prolongation analytique et par conséquent, nous n'avons que deux pôles k_o et $-k_o$ qui sont réels pour $\omega > \omega_p$ et imaginaires purs pour $\omega < \omega_p$. Pour le contour d'intégration que nous avons choisi , seul le pôle positif sera pris en compte. Quand ω varie de ω_p à l'infini, ce pôle varie de la valeur $k_o = 0$ à la valeur $k_o = \omega / V_c = k_{min}$. Ce pôle sera appelé le pôle de Debye-Landau. Nous pouvons maintenant exprimer le champ électrique comme une somme de trois termes.

- Une contribution plasma froid provenant de l'intégration autour du pôle k = 0.
- La contribution du pôle de Debye-Landau.
- La contribution venant du contour replié allant de k_{min} à l'infini.

Nous pouvons donc maintenant écrire le champ électrique :

$$\frac{\varepsilon_0 E(x)}{\sigma} = \frac{1}{2\varepsilon_f} + \frac{\exp -ik_0 x}{k_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_R}{\partial k}\right)_{k_0}} + \frac{1}{\pi}\int_{k_{min}}^{\infty} \frac{\varepsilon_I}{k|\varepsilon|^2} \exp -ikx \, dk \qquad (7)$$

où $\varepsilon_f = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ est le terme plasma froid et k_0 la solution de l'équation $\varepsilon(k_0, \omega) = 0$. Canosa a donné quelques valeurs numériques de ce pôle dans le cas des oscillations libres (Canosa et al. 1972). (Remarque : ce sont les mêmes dans le cas des oscillations forcées).

Maintenant, nous faisons tendre x vers zéro, nous obtenons la relation entre les coefficients d'excitation.

$$\frac{1}{\varepsilon_f} + \frac{2}{k_0\left(\frac{\partial \varepsilon_R}{\partial k}\right)_{k_0}} + \frac{2}{\pi}\int_{k_{min}}^{\infty} \frac{\varepsilon_I}{k|\varepsilon|^2} \, dk = 1 \qquad (8)$$

et (8) nous permet de définir la densité d'onde $\Psi(k, \omega)$

$$\Psi(k, \omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon_I}{k|\varepsilon|^2} \qquad (9)$$

Il nous reste alors à calculer $\Psi(k, \omega)$ et la contribution du pôle de Debye-Landau $\frac{2}{k_0\left(\frac{\partial \varepsilon_R}{\partial k}\right)_{k_0}}$ en utilisant les relations (1), (5) et (6). (Annexe du chapitre premier).

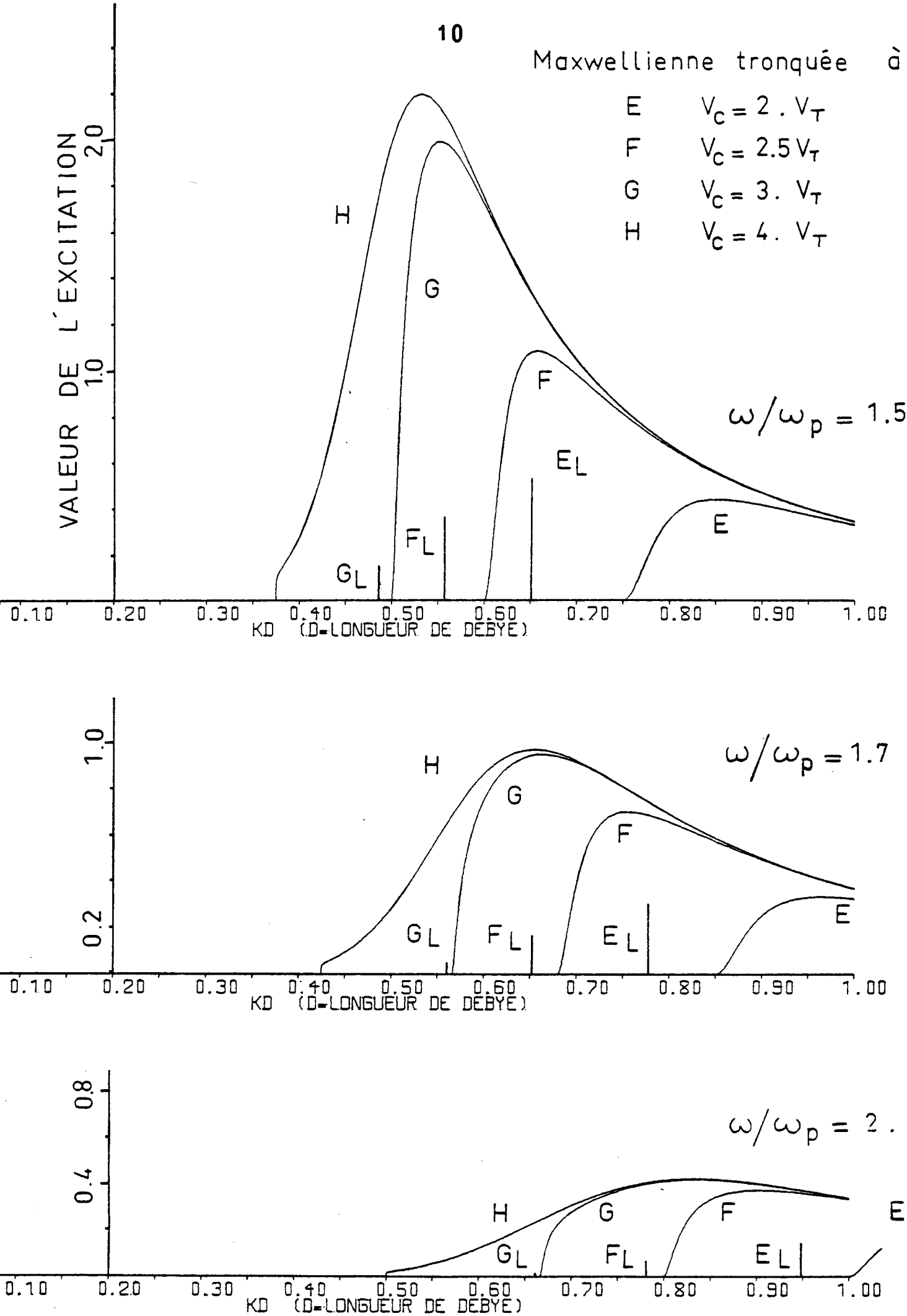

Maxwellienne tronquée à
E $V_c = 2 . V_T$
F $V_c = 2.5 V_T$
G $V_c = 3 . V_T$
H $V_c = 4 . V_T$
VALEUR DE L'EXCITATION
2.0
1.0
H
G
F
E_L
E
F_L
G_L
$\omega/\omega_p = 1.5$
0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)
1.0
0.2
$\omega/\omega_p = 1.7$
H
G
F
E
G_L
F_L
E_L
0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)
0.8
0.4
$\omega/\omega_p = 2.$
H
G
F
E
G_L
F_L
E_L
0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)

Fig. 2.1

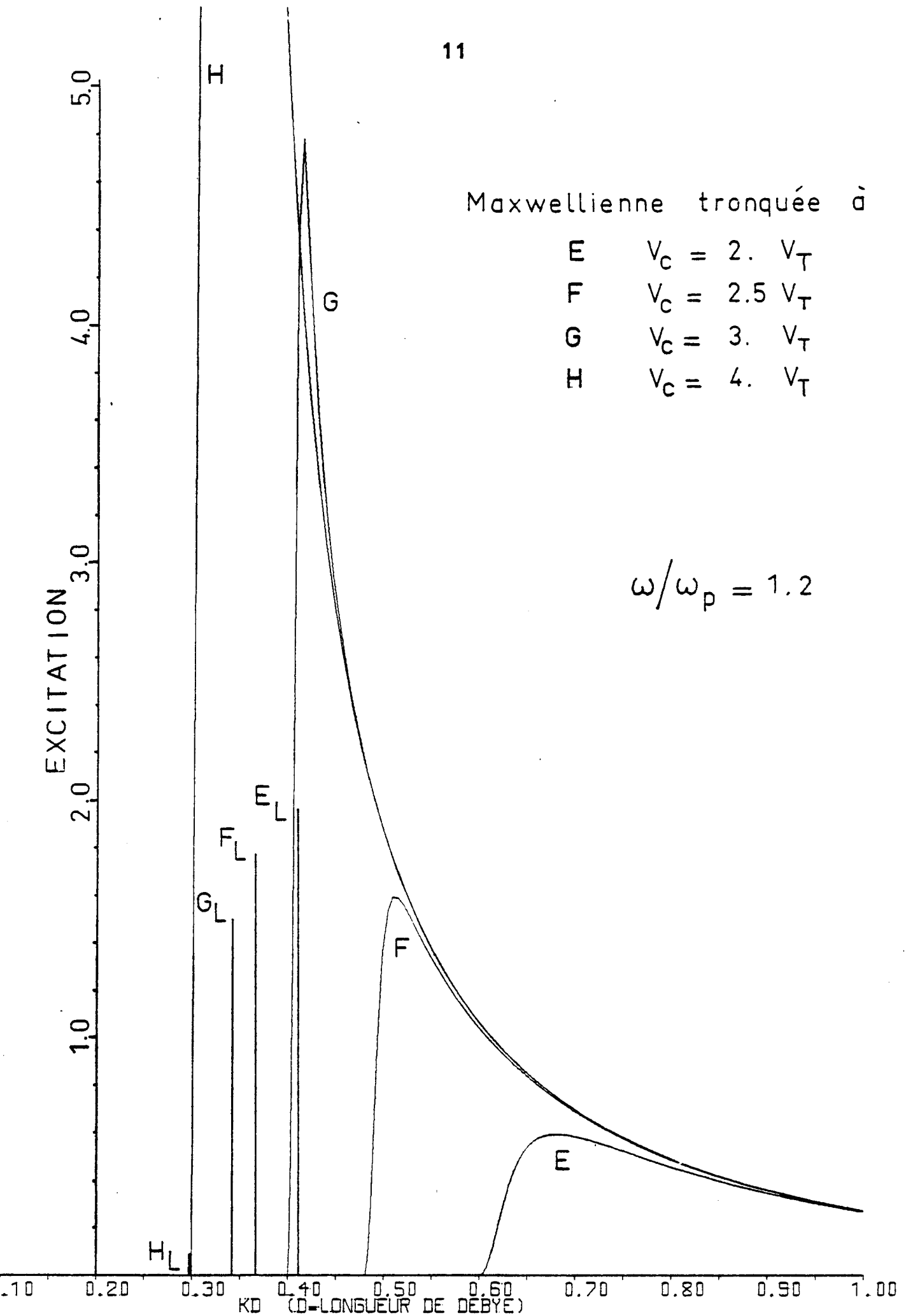

Maxwellienne tronquée à
E $V_c = 2.\ V_T$
F $V_c = 2.5\ V_T$
G $V_c = 3.\ V_T$
H $V_c = 4.\ V_T$
$\omega/\omega_p = 1.2$
EXCITATION
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
H
G
E_L
F_L
G_L
H_L
F
E
.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.90
1.00
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)

Fig.2.2

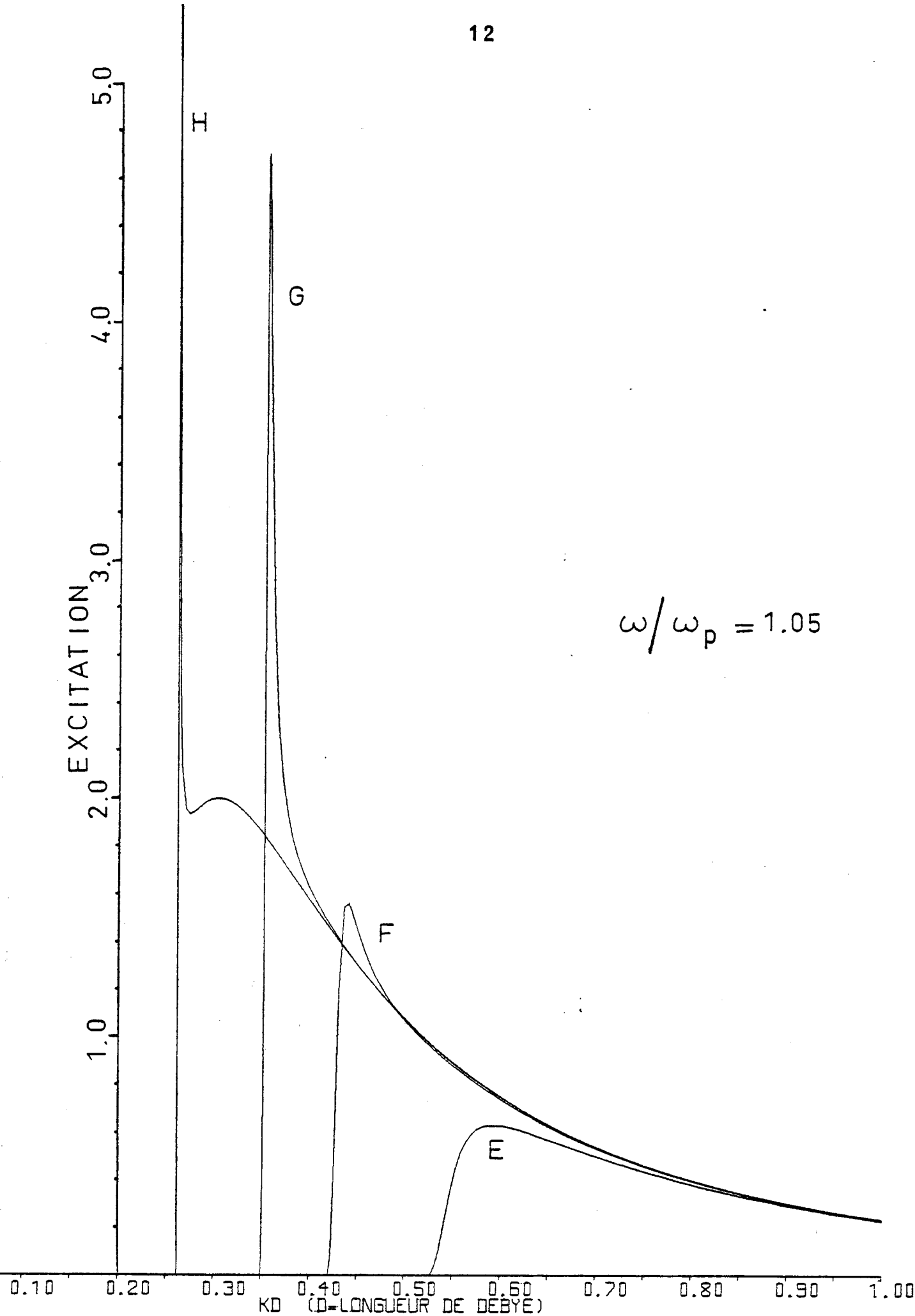

5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
EXCITATION
H
G
F
E
$\omega/\omega_p = 1.05$
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.90
1.00
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)

Fig. 2.3

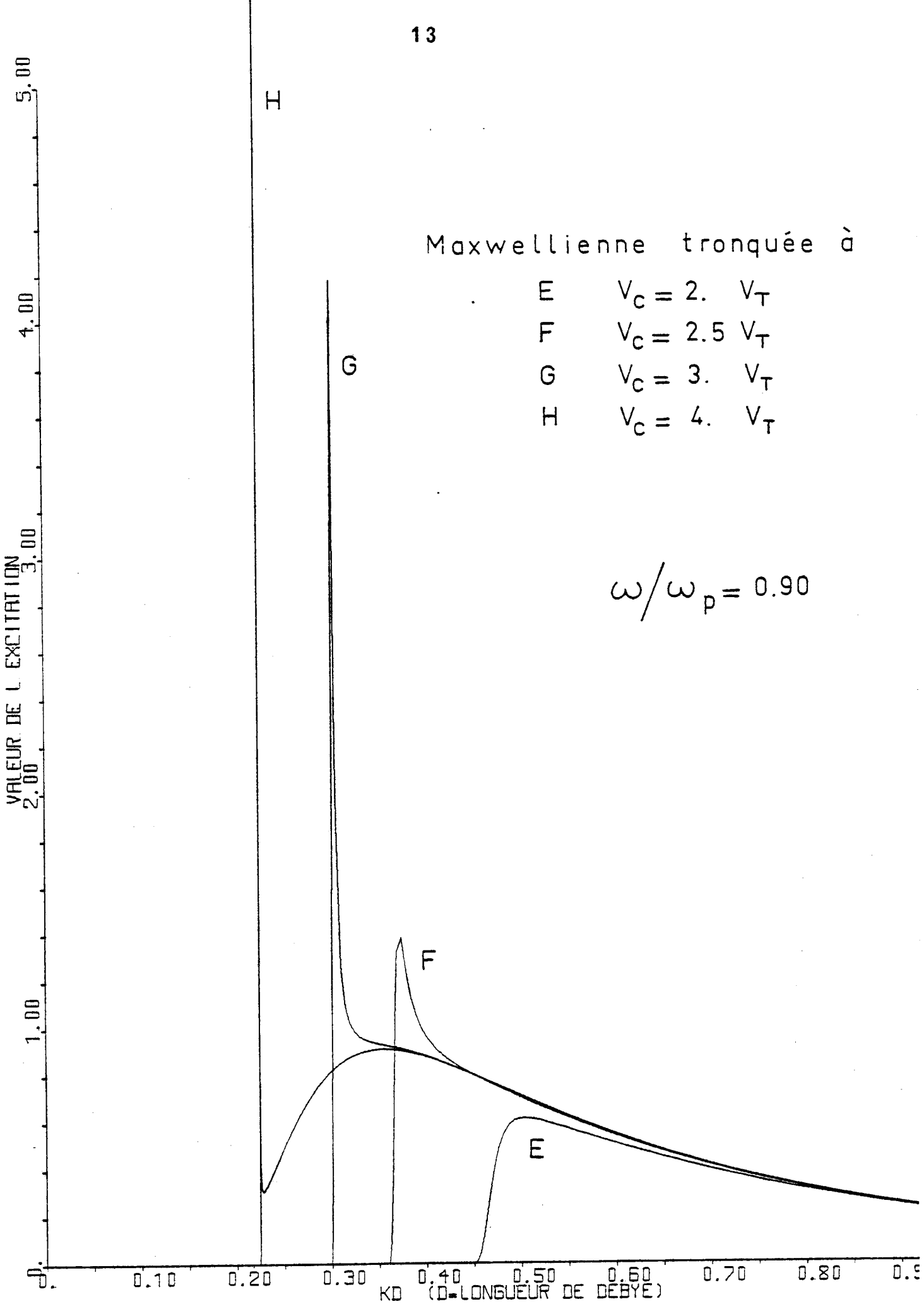

Maxwellienne tronquée à
E $V_c = 2.\ V_T$
F $V_c = 2.5\ V_T$
G $V_c = 3.\ V_T$
H $V_c = 4.\ V_T$
$\omega/\omega_p = 0.90$
H
G
F
E
VALEUR DE L EXCITATION
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)

Fig. 2.4

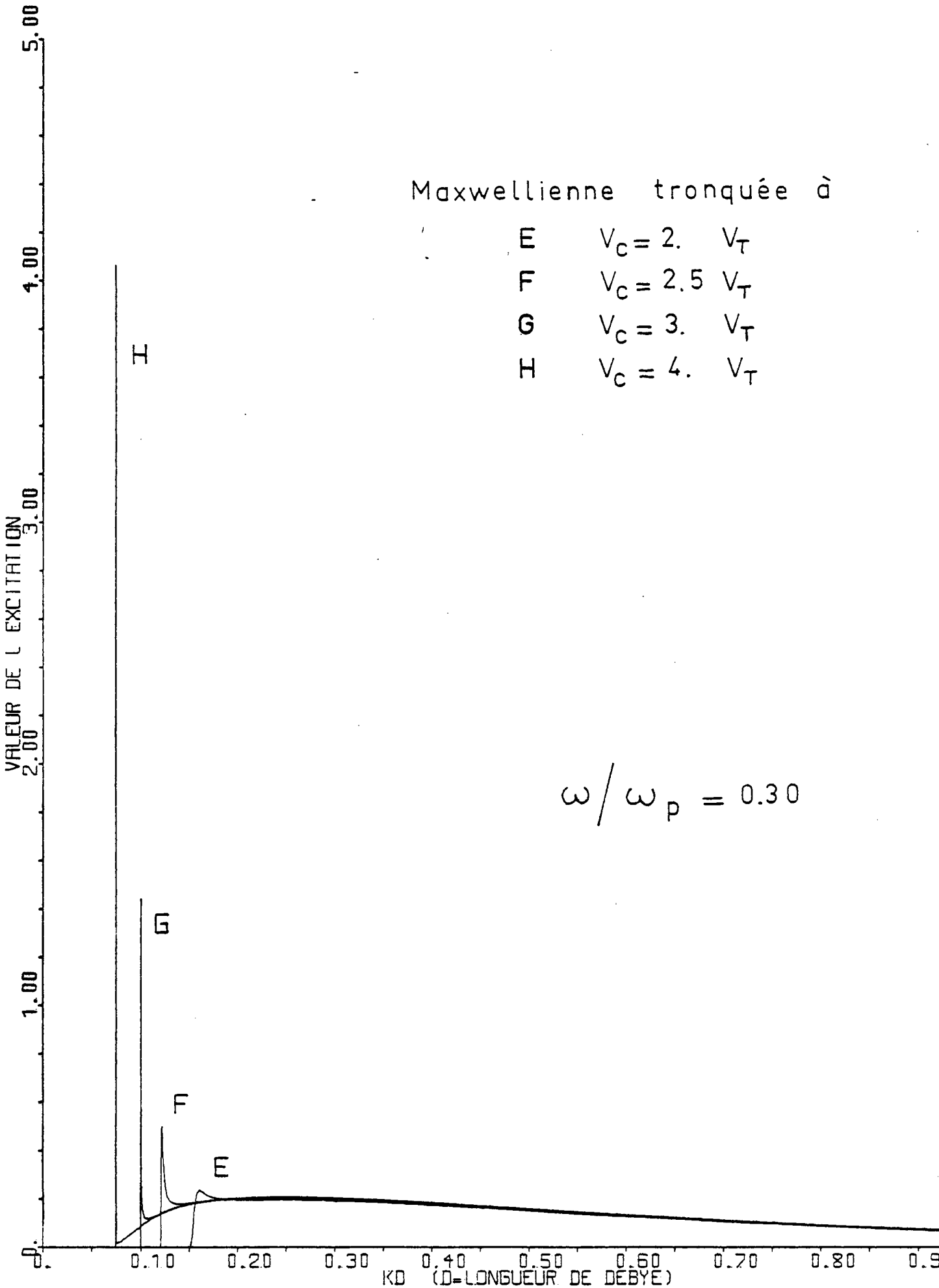

Maxwellienne tronquée à
E $V_c = 2.\ V_T$
F $V_c = 2.5\ V_T$
G $V_c = 3.\ V_T$
H $V_c = 4.\ V_T$
$\omega / \omega_p = 0.30$
VALEUR DE L EXCITATION
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.
H
G
F
E
0.
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)

Fig. 2.5

3. RESULTATS.

Dans un premier type de visualisation des résultats, nous avons représenté, pour une fréquence donnée, l'excitation en fonction de $k\,\lambda_D$ (où k est le nombre d'onde et λ_D la longueur de Debye définie comme $V_T\,\omega_p^{-1}$ et qui par conséquent ne dépend pas de V_c) pour plusieurs vitesses de coupure (figures 2). Le pôle de Landau qui apparaît pour $\omega > \omega_p$ est un delta-Dirac. Il est donc représenté par un trait vertical et désigné sur les figures, par un indice L.

Pour comparer l'importance des contributions de la densité d'onde $\Psi\,(k,\omega)$ et du pôle de Debye-Landau, il faut avoir à l'esprit que 1 cm d'une courbe d'indice L représente en fait 100 cm^2. Pour clarifier les idées, on donne pour quelques fréquences, les valeurs de l'intégrale de $\Psi\,(k,\omega)$, entre k_{min} et l' ∞ , et, de la contribution du pôle de Landau.

ω/ω_p	V_c	$\int_{k_{min}}^{\infty} \Psi\,(k,\omega)\,dk$	Contribution du pôle de Debye-Landau.
1.5	2	- 0.255	- 0.545
	2.5	- 0.430	- 0.370
	3	- 0.648	- 0.152
	4	- 0.797	- 0.003
1.7	2	- 0.218	- 0.311
	2.5	- 0.350	- 0.179
	3	- 0.472	- 0.057
	4	- 0.528	- 0.001
2	2	- 0.170	- 0.163
	2.5	- 0.254	- 0.079
	3	- 0.310	- 0.023
	4	- 0.332	- 0.001

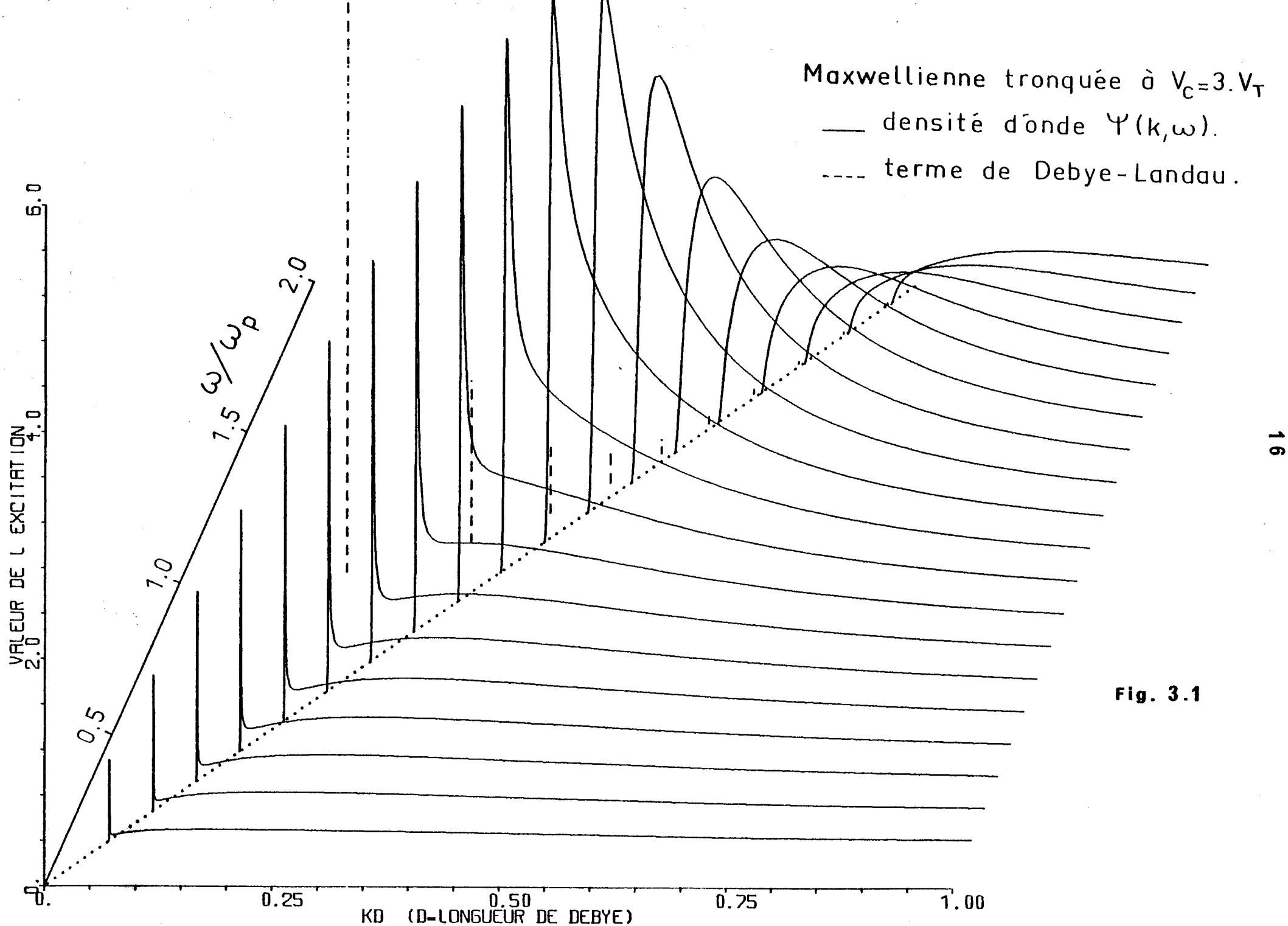

Maxwellienne tronquée à $V_C = 3.V_T$
densité d'onde $\Psi(k,\omega)$.
terme de Debye-Landau.
ω/ω_p
0.5
1.0
1.5
2.0
VALEUR DE L EXCITATION
0.
2.0
4.0
6.0
0.
0.25
0.50
0.75
1.00
KD (D-LONGUEUR DE DEBYE)

Fig. 3.1

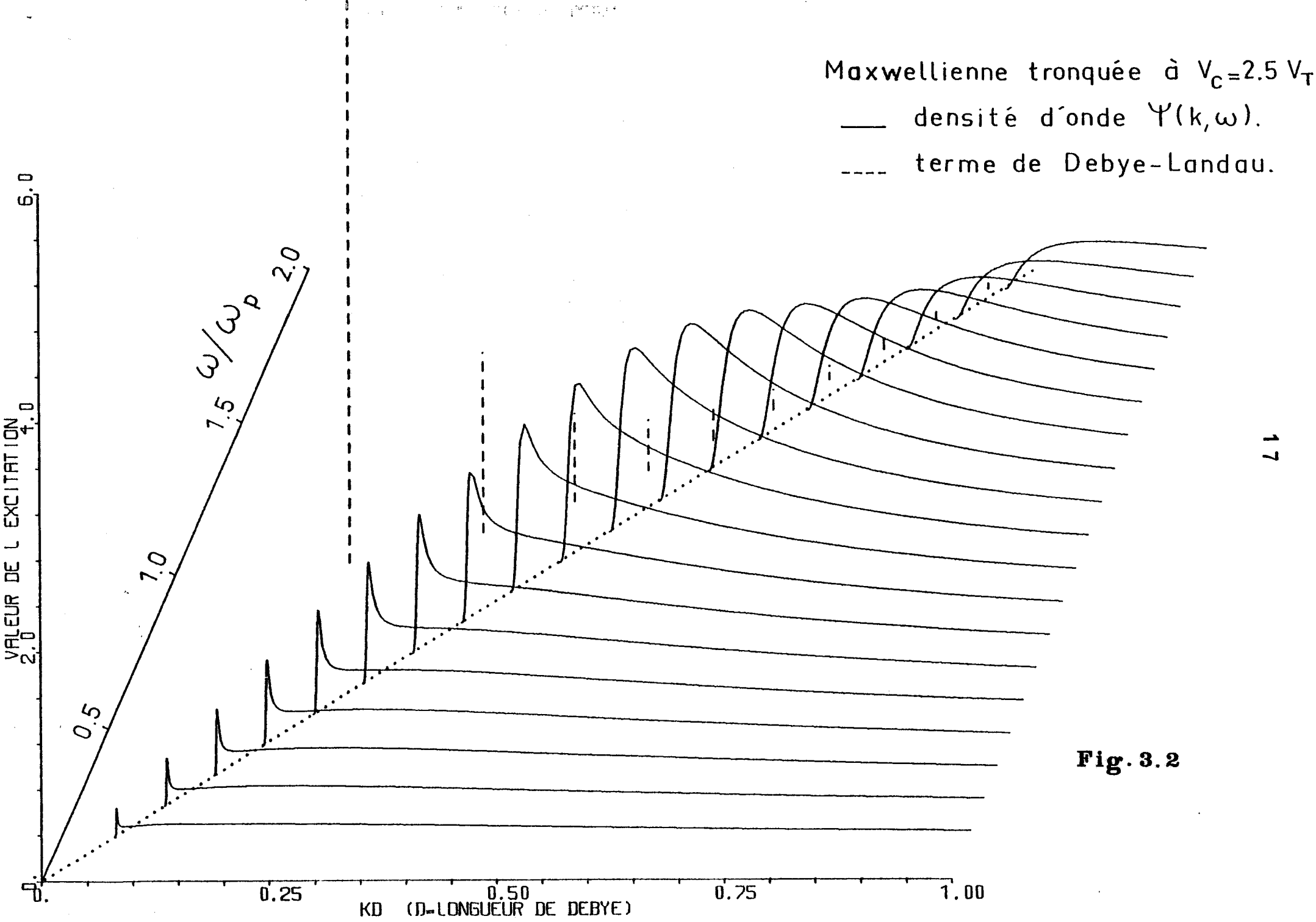

Maxwellienne tronquée à $V_c = 2.5\ V_T$
___ densité d'onde $\Psi(k,\omega)$.
---- terme de Debye-Landau.
VALEUR DE L EXCITATION
6.0
4.0
2.0
0
ω/ω_p
0.5
1.0
1.5
2.0
0.
0.25
0.50
0.75
1.00
KD (D-LONGUEUR DE DEBYE)

Fig. 3.2

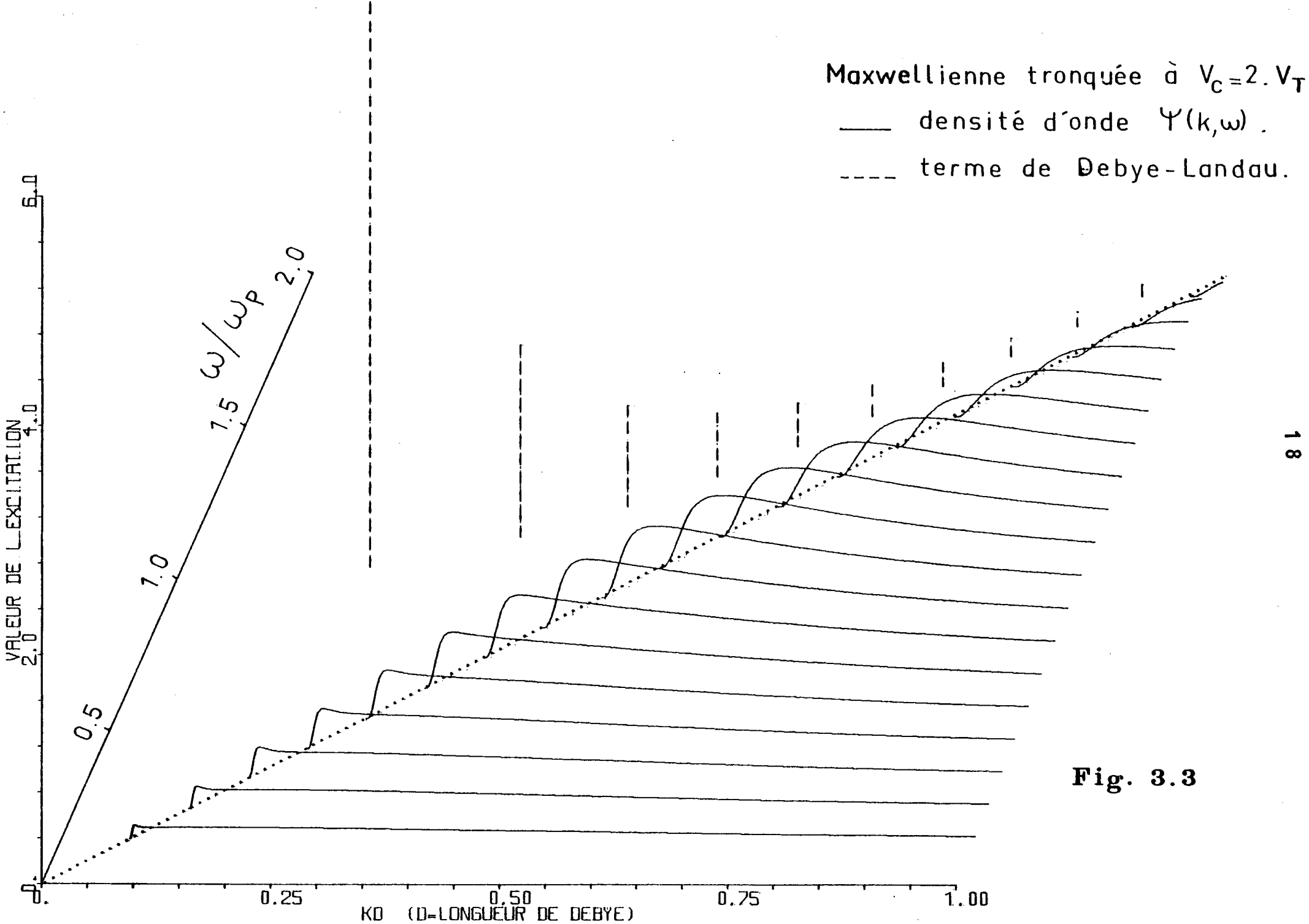

Maxwellienne tronquée à $V_C = 2.V_T$
densité d'onde $\Psi(k,\omega)$.
terme de Debye-Landau.
ω/ω_P
0.5
1.0
1.5
2.0
VALEUR DE L'EXCITATION
0.
2.0
4.0
6.0
0.25
0.50
0.75
1.00
KD (D=LONGUEUR DE DEBYE)

Fig. 3.3

Sur le tracé correspondant à $\omega / \omega_p = 1.05$, le pôle de Landau n'est pas représenté, son excitation étant très grande. Cette représentation a une valeur quantitative et permet notamment d'observer que pour V_c grand (voir courbes H) et pour des fréquences inférieures à 1.05, il apparait un maximum secondaire correspondant à une sorte de mode balistique. Mais cette représentation ne permet pas aisément une évaluation globale du phénomène.

Le second type de visualisation est un essai de représentation dans l'espace (figures 3). Pour ceci, nous avons tracé en perspective les courbes correspondant à différentes fréquences pour une vitesse de coupure donnée. Ces courbes ayant déjà été vues séparément dans la représentation précédente. Cette représentation n'est encore pas satisfaisante parce que trop artificielle et difficilement interprétable (difficulté de visualiser en perspective une surface tridimensionelle un peu complexe).

La troisième représentation graphique est celle dont nous avons déjà parlé dans l'introduction. Dans le plan, nous portons en abscisse $k \lambda_D$ et en ordonnée la fréquence normalisée à la fréquence plasma. La droite $\omega = kV_c$ partage le plan en deux demi-plans. Dans le demi-plan supérieur qui correspond à une vitesse de phase supérieure à la vitesse de coupure, nous représentons le terme de Debye-Landau. Dans le demi-plan inférieur, qui correspond à une vitesse de phase inférieure à la vitesse de coupure, nous représentons la "densité d'onde" $\Psi (k, \omega)$.

La méthode de représentation est basée sur l'utilisation de diverses intensités (ici 10) de gris, les valeurs les plus basses restant blanches et les valeurs les plus hautes étant presque noires. Ainsi dans notre cas, nous aurons du blanc pour les valeurs inférieures à 0.5, du gris pâle pour les valeurs comprises entre 0.5 et 1, etc... . Et nous représentons en noir les valeurs supérieures à 4.5. Des essais avec différentes valeurs ont montré que ces niveaux donnaient des figures aisément interprétables.

Il est difficile de représenter de la même façon, par différents tons de gris, à la fois une densité $\Psi (k, \omega)$ et une fonction $A_\omega \ \delta(k - k_o)$. Aussi, nous avons décidé de donner une largeur arbitraire Δk à la courbe de Debye-Landau et nous avons réparti les nuances suivant la valeur de $A_\omega / \Delta k$.

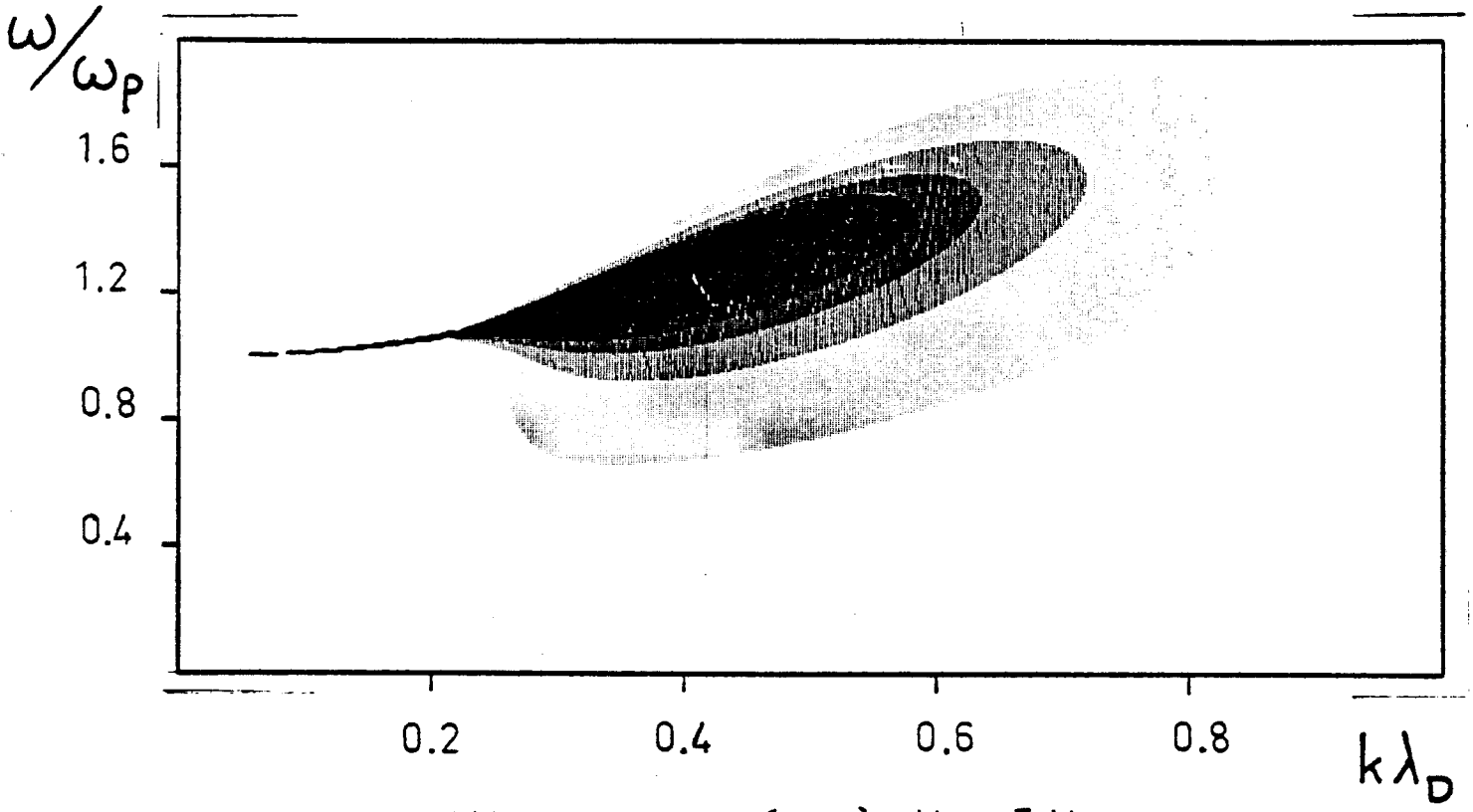


Fig. 4.1 Maxwellienne tronquée à $V_c = 5\ V_T$

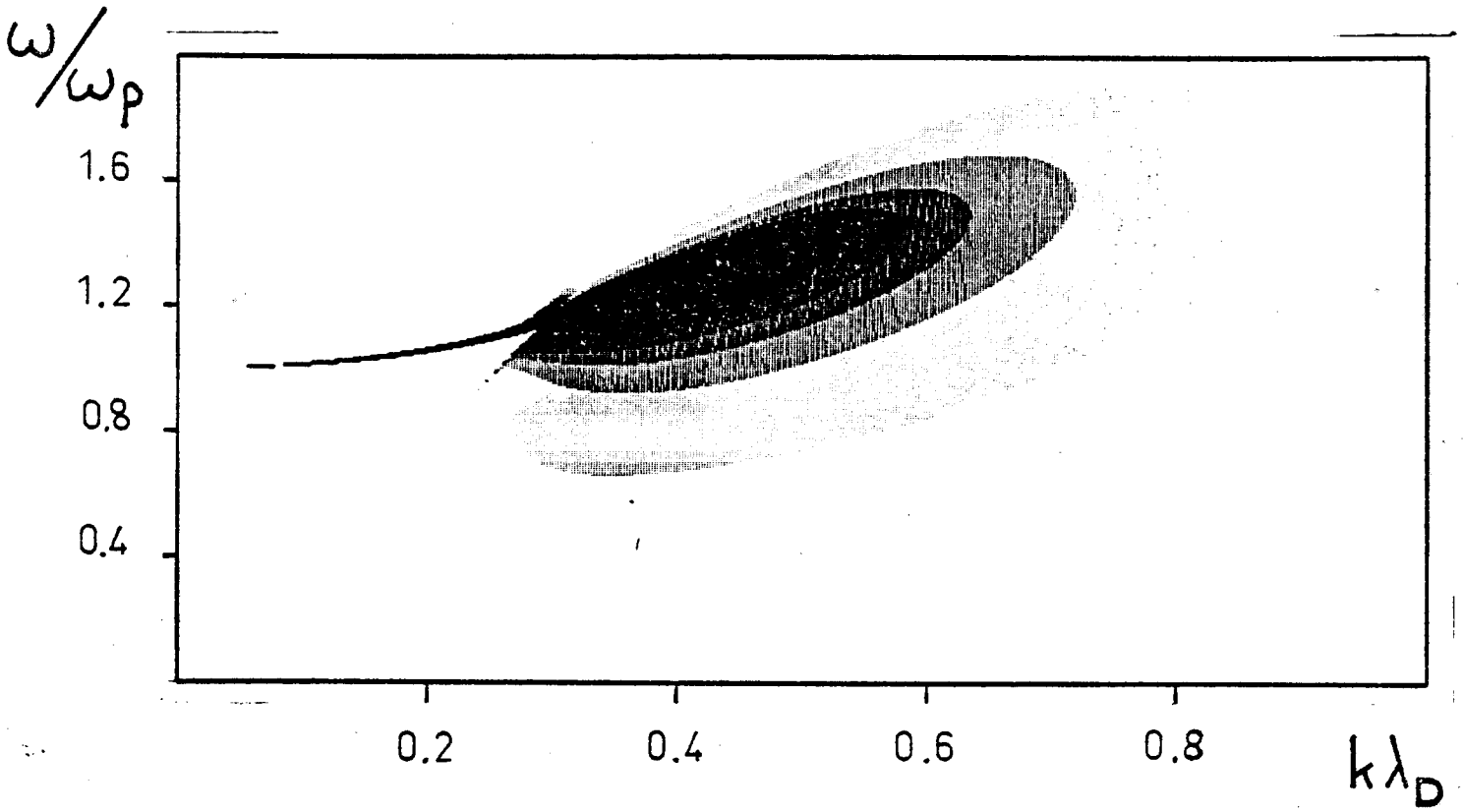


Fig. 4.2 Maxwellienne tronquée à $V_c = 4\ V_T$

Terme de Debye-Landau et densité d'onde $\Psi(k,\omega)$ pour V_c variant.

Maintenant, si nous regardons les figures 4, nous remarquons que nous avons en gros deux contributions principales : celle du pôle discrétisé et celle indiquée par le maximum de la fonction Ψ (k, ω) . Pour V_c inférieur à 4, ce maximum se trouve près de la droite $\omega = kV_c$. Pour une raison de commodité, nous appellerons cette contribution : contribution de la coupure.

Si nous commençons par la figure 4.1. $V_c = 5$, nous constatons que la contribution de la coupure est la continuation de celle du pôle discrétisé, les deux représentant le mode de Landau. De plus, autour du point $\omega/\omega_p = 1$, $k\lambda_D = 0.2$, nous voyons les très légers effets, dus à la coupure, caractérisés par une très petite excitation du pôle discrétisé (le détail est quasiment invisible sur 4.1, mais apparait bien sur 4.2.).

Dans les figures 4.2. à 4.4. $V_c = 4$, 3.5 et 3, nous commençons à voir les effets de la coupure. Ils se remarquent par la séparation du mode de Landau en un pôle non amorti (le mode discrétisé) qui devient de plus en plus excité quand V_c décroit et en un mode de coupure amorti. De plus, maintenant, ce dernier mode est aussi trouvé pour $\omega < \omega_p$ où, bien que très légèrement excité, il est aussi très légèrement amorti.

Les figures 4.5 et 4.6 $V_c = 2.5$ et 2, montrent que, maintenant, pour $\omega > \omega_p$ seul le mode discrétisé est excité pendant que, pour $\omega < \omega_p$, le mode de coupure est encore visible pour $\omega \simeq 0.4\ \omega_p$ et $V_c = 2.5$, mais tend à disparaître pour les valeurs de V_c inférieures.

La figure 4.7 $V_c = 1.5$ montre que, maintenant, seul le pôle discrétisé est important. Nous approchons en effet du cas water-bag avec possibilité d'une propagation non amortie aux fréquences 2 et 3 ω_p.

Ces résultats correspondent à ceux obtenus expérimentalement par Henry et Tréguier (1972) où l'on note l'apparition d'ondes se propageant entre ω_p et $0.5\ \omega_p$ (mais seulement pour des vitesses de coupure ni trop grandes, ni trop petites) pendant qu'au-dessus de la fréquence plasma, on voit apparaître un mode non amorti pour des fréquences de plus en plus élevées avec V_c décroissant.

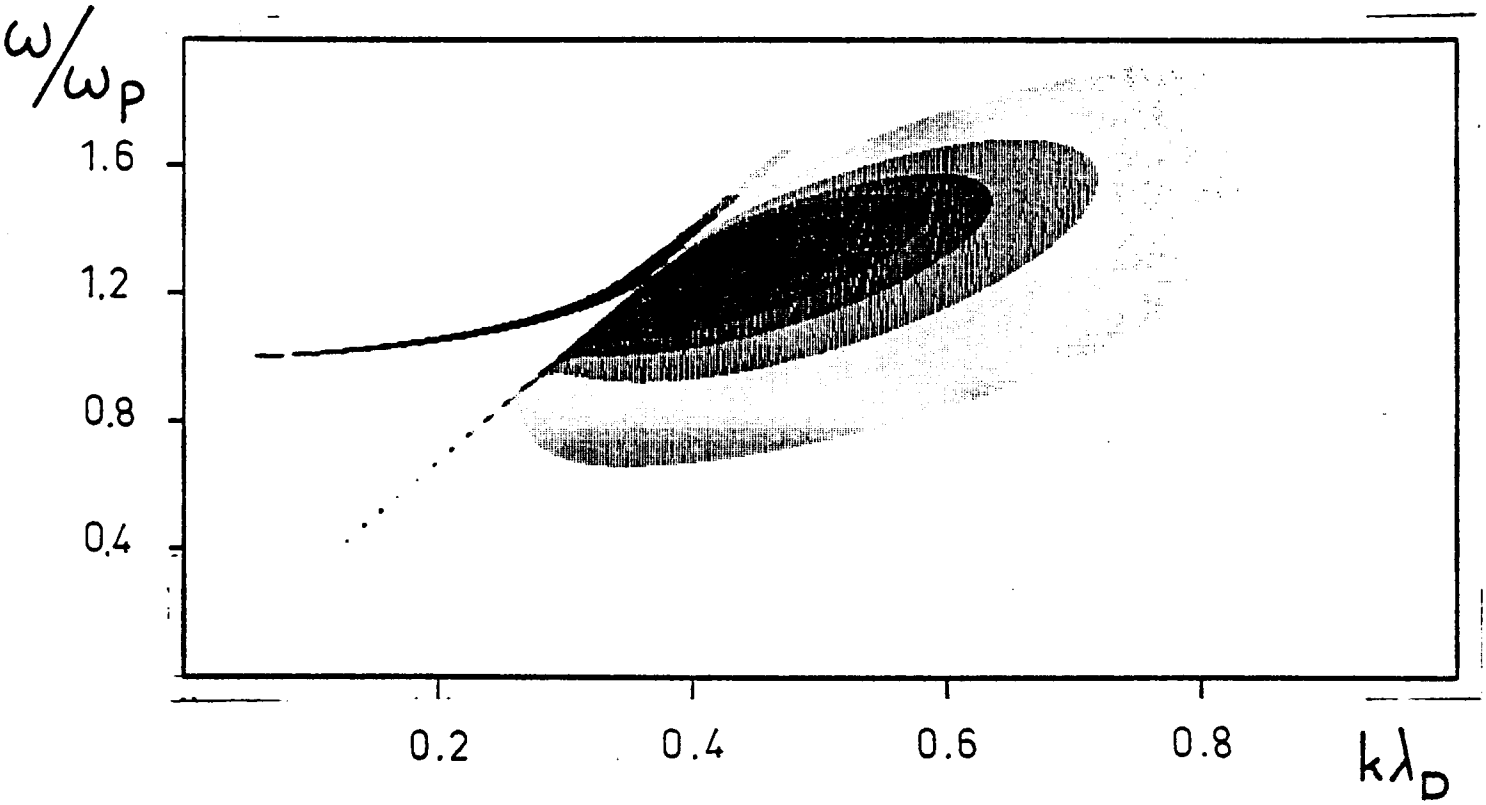


Fig.4.3 Maxwellienne tronquée à $V_c = 3.5\ V_T$

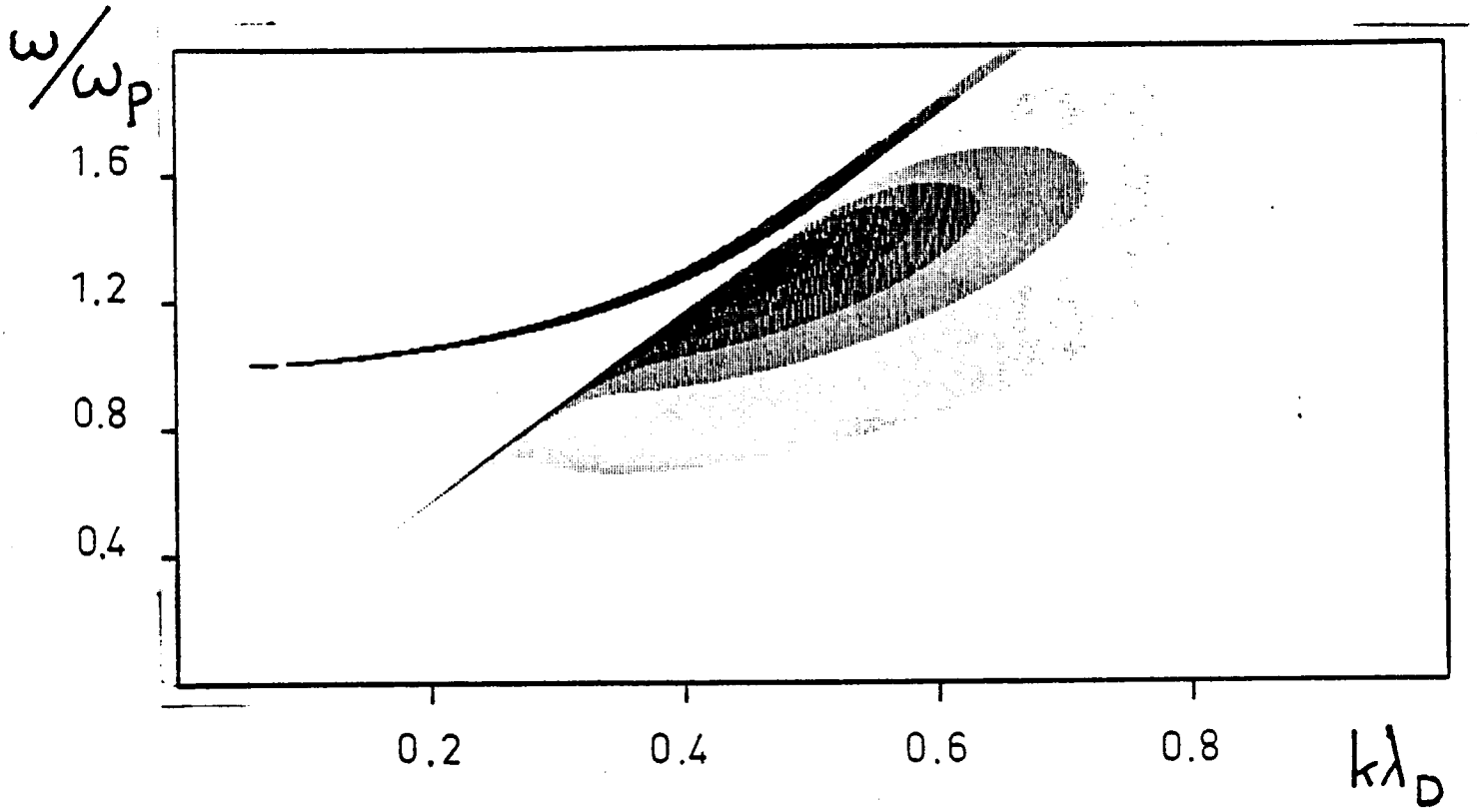


Fig.4.4 Maxwellienne tronquée à $V_c = 3\ V_T$

Terme de Debye-Landau et densité $\Psi(k,\omega)$ pour V_c variant.

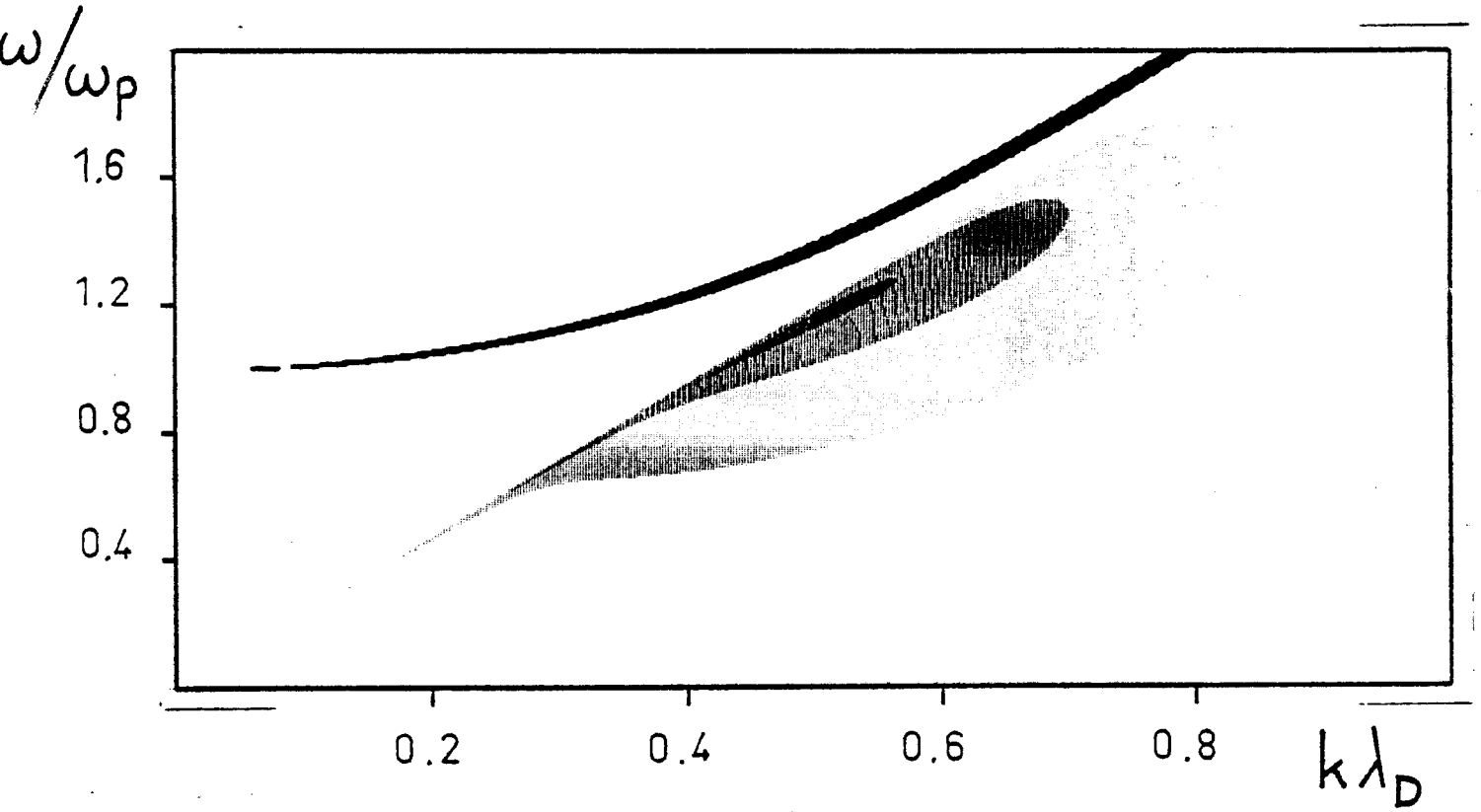


Fig.4.5 Maxwellienne tronquée à $V_c = 2.5\ V_T$

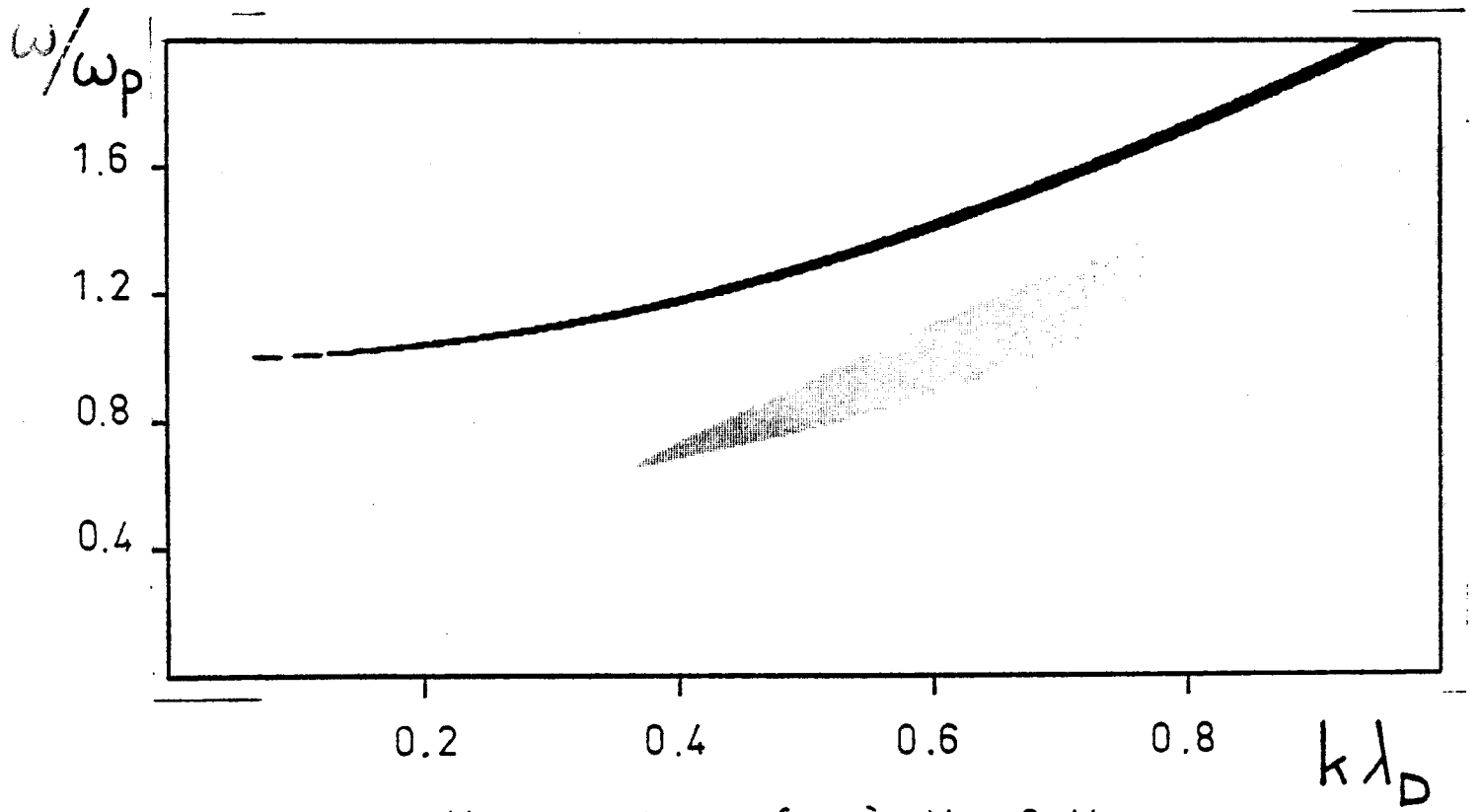


Fig. 4.6 Maxwellienne tronquée à $V_c = 2.\ V_T$

Terme de Debye-Landau et densité d'onde $\Psi(k,\omega)$ pour V_c variant.

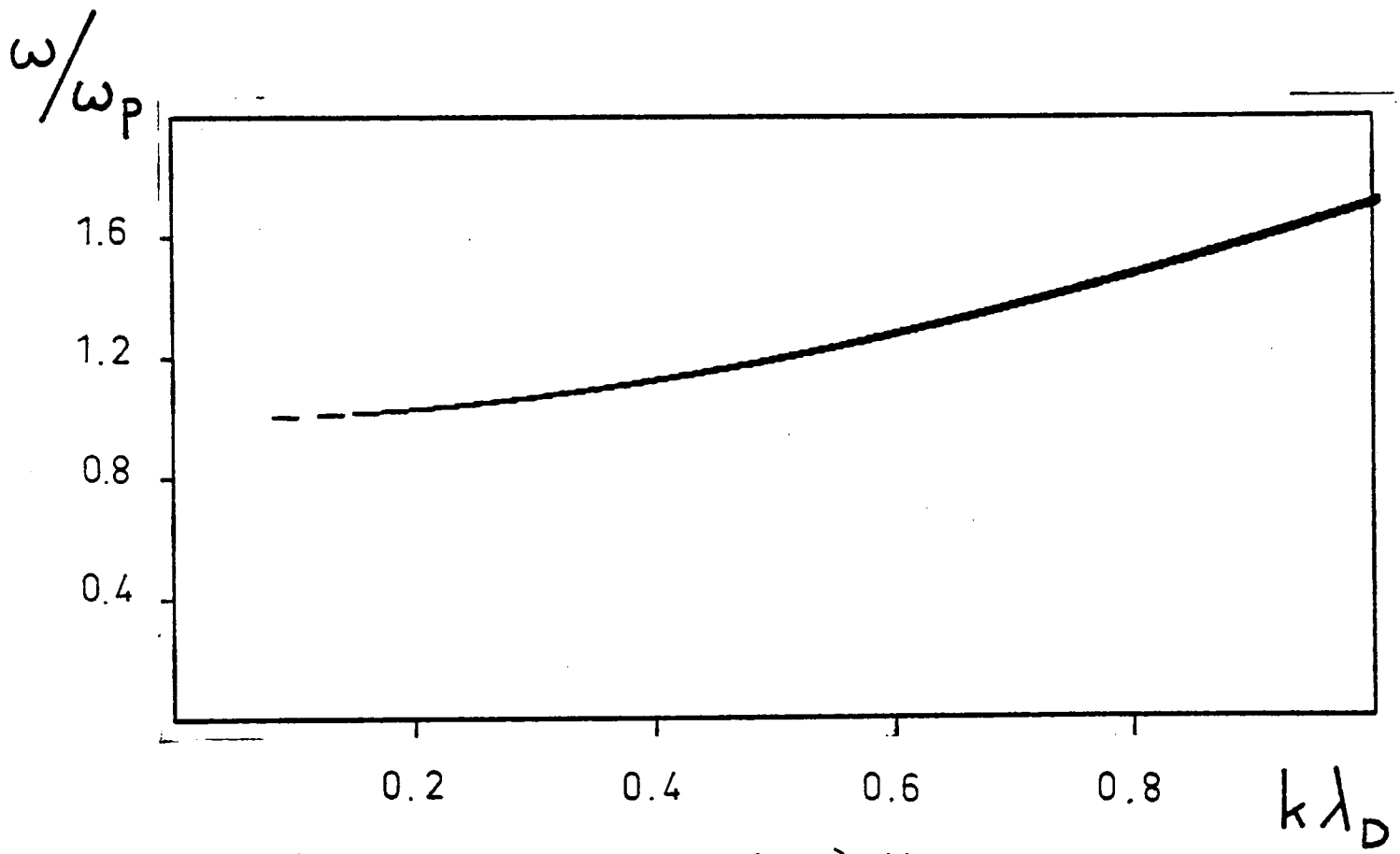


Fig. 4.7 Maxwellienne tronquée à $V_c = 1.5\ V_T$

Terme de Debye-Landau et densité d'onde $\Psi(k,\omega)$ pour V_c variant.

4. CONCLUSION.

Pour l'étude des ondes électrostatiques, dans un plasma non maxwellien, nous avons utilisé un traitement à la Van Kampen, qui a l'avantage d'être valable dans le cas des oscillations libres aussi bien que forcées.

La méthode d'intégration par les résidus dans le plan des k nous a permis un calcul aisé des coefficients d'excitations. Le passage à la limite $x = 0$ nous a conduit à écrire une relation entre ces différents coefficients : le terme plasma froid, celui de Debye-Landau et la densité d'onde $\Psi(k,\omega)$. Ces deux derniers ont fait l'objet d'une représentation graphique par une méthode de grisés. Cette représentation a pour but de donner , non une information quantitative, mais bien une idée qualitative du phénomène physique.

Nous avons vu apparaître un nouveau pôle correspondant approximativement à la relation $\omega = kV_c$. Ce pôle est caractérisé par un amortissement très faible et il représente pour des distances importantes, la contribution principale du champ électrique.

Si $V_c \geq 4\ V_T$ (vitesse thermique de la maxwellienne complète) l'excitation de ce pôle est très faible. Elle l'est aussi dans le cas $V_c < 2\ V_T$, mais , par contre, dans ce cas, l'amortissement du pôle de Landau disparait et l'on a une possibilité de propagation à des fréquences nettement supérieures à ω_p.

En conclusion, cette étude nous suggère, pour les expériences où nous avons à notre disposition des mesures de champ électrique sur des longues distances, de chercher, pour ce champ, en plus des mesures plus conventionnelles d'amortissement, une représentation du spectre de Fourier en k .

ANNEXE : CALCUL DES COEFFICIENTS D'EXCITATION

1. NORMALISATION.

En normalisant les vitesses par rapport à la vitesse thermique associée à la maxwellienne complète, la fonction de distribution f_o (v) (1) s'écrira :

$$f_o(v) = \frac{H(v+V_c) - H(v-V_c)}{\sqrt{2\pi}\ \ erf\ (V_c/\sqrt{2})} \exp - \frac{v^2}{2} \qquad (A1)$$

Si maintenant on normalise la fréquence ω à la fréquence plasma ω_p, et le vecteur d'onde k à l'inverse de la longueur de Debye λ_D, en utilisant la relation $V_T = \lambda_D\ \omega_p$, la partie réelle de la constante diélectrique (5) s'écrit :

$$\varepsilon_R = 1 - \frac{1}{k^2}\ P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d f_o(v)\ \ dv}{v - V_F}\ dv \qquad (A2)$$

où V_F est la vitesse de phase ($V_F = \frac{\omega}{k}$)

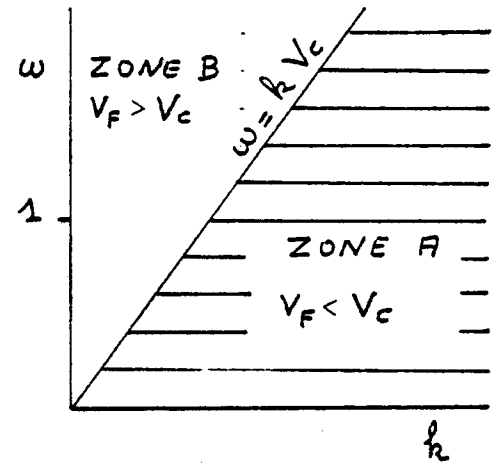
et

$$\varepsilon_I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{V_F}{k^2\ \ erf\ (V_c/\sqrt{2})} \exp - \frac{V_F^2}{2} \qquad (A3)$$

2. TOPOGRAPHIE DU PLAN ω , k.

Le plan ω , k est, comme nous l'avons déjà signalé, partagé en deux régions par la droite $\omega = kV_c$

- Dans la zone B, la vitesse de phase V_F est plus grande que la vitesse de coupure V_c. Seul le terme de Debye Landau apparaît car $f_o\ (\omega/k) = 0$ pour $\frac{\omega}{k} > V_c$ et donc $\varepsilon_I = 0$.



- Dans la zone A, la vitesse de phase est inférieure à la vitesse de coupure et seule la densité d'onde $\Psi\ (k,\omega)$ joue un rôle, en effet, on a k plus grand que k_{min} qui est égal à ω/V_c (le pôle de Landau est tel que $k_o < k_{min}$).

3. CALCUL DE LA CONTRIBUTION DU TERME DE DEBYE-LANDAU.

Dans la suite du calcul, on notera :

$$\text{ALPHAR}\ (V_c, V_F) = P \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{df_o(v)/dv}{v - V_F}\, dv \qquad (A4)$$

Le premier problème est de trouver le pôle de Debye-Landau pour $\omega > 1$. On cherche à résoudre $\varepsilon_R\ (k_o, \omega) = 0$. Soit en différenciant ε_R on obtient :

$$\Delta k = \frac{-\dfrac{\partial \varepsilon_R}{\partial \omega}}{\dfrac{\partial \varepsilon_R}{\partial k}}\ \Delta \omega$$

On peut donc obtenir le pôle k_o en fonction de ω par continuité en utilisant la relation de Bohm et Gross normalisée $\omega^2 = 1 + 3\,k^2$ pour démarrer le processus. Cette relation est valable dans la théorie de Landau pour $k \ll 1$ (Nous rappelons que ω et k sont normalisés respectivement à ω_p , et à λ_D^{-1}).

Il faut donc déterminer les dérivées partielles de ε_R par rapport à k et ω . On trouve tous calculs faits :

$$\frac{\partial \varepsilon_R}{\partial \omega} = -\frac{1}{k^3} \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{df_o(v)/dv}{(v - V_F)^2} \, dv \qquad (A\,6)$$

On peut ici laisser tomber la définition de l'intégrale en partie principale puisque $V_F = \omega / k_o > V_c$.

$$\frac{\partial \varepsilon_R}{\partial k} = \frac{2}{k^3} \, \mathrm{ALPHAR}(V_c, V_F) + \frac{V_F}{k^3} \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{df_o(v)/dv}{(v - V_F)^2} \, dv \qquad (A\,7)$$

et enfin

$$\int_{-V_c}^{+V_c} \frac{df_o(v)/dv}{(v - V_F)^2} \, dv = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\, \mathrm{erf}(V_c/\sqrt{2})} \left[\frac{4 V_c V_F}{(V_c^2 - V_F^2)^2} \exp - \frac{V_c^2}{2} + \int_{-V_c}^{V_c} \frac{v \exp - \frac{v^2}{2}}{(v - V_F)^2} \, dv \right] \qquad (A\,8)$$

La dernière intégrale étant évaluée numériquement, le coefficient d'excitation dû au terme de Debye-Landau s'écrit alors :

$$\frac{2}{k_o \left(\frac{\partial \varepsilon_R}{\partial k} \right)_{k_o}} = \frac{k_o^2}{\mathrm{ALPHAR}(V_c, V_F) + \frac{V_F}{2} \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{df_o(v)/dv}{(v - V_F)^2} \, dv} \qquad (A\,9)$$

$$\left(\text{où ici } V_F = \frac{\omega}{k_o} \right)$$

4. CALCUL DE LA DENSITE D'ONDE Ψ (k, ω).

$$\Psi(k, \omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon_I}{k\,|\varepsilon|^2}$$

On a ε_I donné par (A 3).
En utilisant (A 2) et (A 4) , on obtient :

$$\varepsilon_R = 1 - \frac{ALPHAR(V_c, V_F)}{k^2} \qquad (A\ 10)$$

5. EVALUATION DE LA FONCTION ALPHAR (V_C , V_F).

On obtient tous calculs faits :

$$ALPHAR(V_c, V_F) = \frac{1}{erf(V_c/\sqrt{2})} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V_c \exp -\frac{V_c^2}{2}}{V_F^2 - V_c^2} - erf(V_c/\sqrt{2}) - \frac{V_F}{\sqrt{2\pi}} P \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{\exp -\frac{v^2}{2}}{v - V_F} dv \right] \qquad A(11)$$

Pour calculer l'intégrale en partie principale, il faut distinguer deux cas :

a) Zone B, $V_F > V_C$

La partie principale tombe et l'intégrale peut être traitée numériquement sans autre modification.

b) Zone A, $V_F < V_C$

On a alors la singularité $v = V_F$ qu'il faut traiter analytiquement.

$$P \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{\exp -\frac{v^2}{2}}{v - V_F} dv = \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}} - e^{-\frac{V_F^2}{2}}}{v - V_F} + e^{-\frac{V_F^2}{2}} P \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{dv}{v - V_F}$$

(A 12)

La première intégrale n'a plus de singularité en $v = V_F$ en effet, si $v \longrightarrow V_F$, la fonction à intégrer tend vers $- V_F \exp -(V_F^2/2)$.

Et $$P \int_{-V_c}^{+V_c} \frac{dv}{v - V_F} = \mathrm{Log}\left(\frac{V_c - V_F}{V_c + V_F}\right) \qquad (A\ 13)$$

B I B L I O G R A P H I E

A.E. AUBERT and W. VAN DAEL, 10th CIPIG Oxford (1971).

J. CANOSA et al., Phys. Fluids 15, 2299 (1972).

H. DERFLER and T.C. SIMONEN, Phys. Fluids 12, 269 (1969).

F. ENGELMANN, M.R. FEIX, E. MINARDI and J. OXENIUS, J. IL Nuovo Cimento, 22, 1012 (1961).

D. HENRY and J.P. TREGUIER, J. Plasma Phys. 8 , 311 (1972).

Y.A. IVANOV, L.S. POLAK and D.I. SLOVETSKII, Teplofiz. Vys. Temp., 6 (1971).

J.P. TREGUIER, Thèse de doctorat d'Etat, Paris VII (1974).

J.G. TROTIGNON and M.R. FEIX, "Study of longitudinal electron oscillations in a plasma with a cut off maxwellian velocity distribution", à paraître dans "Journal of plasma physics".

H. WEITZNER, Phys. Fluids 6, 1123 (1963).

CHAPITRE DEUXIEME : ONDES EN PLASMA INHOMOGENE.

1. INTRODUCTION.

Dans cette seconde partie, les états d'équilibres du plasma seront spatialement inhomogènes, ce qui revient à considérer les densités électroniques et ioniques comme fonctions de la position. Nous nous limiterons, toutefois, aux cas où la densité des ions sera constante et où ceux-ci formeront un fond continu immobile. Cette seconde hypothèse impose que les oscillations du plasma se fassent à des fréquences suffisamment élevées pour que les ions ne soient pas perturbés.

De plus, nous envisagerons des plasmas non collisionnels, c'est-à-dire où les particules interviennent d'une manière collective sur le mouvement de l'une d'entre elles et qui obéïssent, par conséquent, à l'équation de Vlasov. Il faudra, pour satisfaire à cette description, considérer des températures suffisamment grandes et des densités de particules suffisamment faibles.

La dernière restriction sera de ne considérer que des milieux unidimensionnels.

Dans l'étude des oscillations électrostatiques en plasma non uniforme, nous supposerons des perturbations suffisamment faibles par rapport à l'état d'équilibre afin de pouvoir utiliser un traitement linéarisé.

Quant aux équilibres inhomogènes, ils seront décrits avec à propos (Bertrand, Dorémus, Baumann et Feix (1972), Bloomberg et Berk (1973), Bloomberg (1974)) par un modèle "Multiple water bag" où les contours seront fonctions de la position.

L'utilisation de ce modèle permet, en outre, de simplifier considérablement l'étude de l'évolution d'une perturbation en remplaçant la méthode usuelle de l'équation intégrale (Drummond, Gerwin et Springer (1961), STATON (1968)).

$$E(x,\omega) = \frac{e^2}{i\omega\, m\, \varepsilon_o} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x',\omega)\; K(x, x',\omega)\, dk'$$

à noyau $K(x, x',\omega)$ compliqué par un système d'équations différentielles couplées. Le couplage étant assuré par la condition : E égal à la somme des champs partiels E_j créés par chaque "bag" j.

Si on suppose connue l'évolution des contours de l'espace des phases, il faut, pour résoudre ce système d'équations différentielles couplées du second ordre, se donner des conditions aux limites mais aussi utiliser certains artifices de calculs.

L'idée est de discrétiser les trajectoires de l'espace des phases afin de pouvoir obtenir des méthodes numériques de calculs valables quelles que soient les équations qui définissent ces trajectoires. On utilisera deux méthodes : la méthode des "rampes", utilisée dans le cas d'un "bag" simple, consiste à approximer le contour par une fonction affine par intervalles et à résoudre l'équation différentielle par une méthode de perturbations ; la seconde, intitulée méthode des "marches", plus facilement généralisable à N bags approxime les contours par une fonction en escalier et permet, après un traitement analytique des discontinuités du premier ordre, de résoudre, à l'aide de produits de matrices de dimensions 2 N x 2 N, le système d'équations différentielles couplées.

Le problème des conditions aux limites, qui sera en fait un problème de conditions aux limites mixtes, sera résolu en considérant, d'une part, le milieu homogène à l'infini et, d'autre part, en déterminant des conditions sur les dérivées des champs partiels à l'origine. Ces dernières conditions sont imposées par la présence à l'origine d'un dipôle, supposé non couplé mécaniquement avec le plasma, créant un champ extérieur $K\,\delta(x)$.

Le troisième problème (voir paragraphe 5.1.) consiste à déterminer les contours de l'espace des phases. Pour ce faire, nous avons choisi

d'introduire dans le plasma un dipôle à l'origine porté à un potentiel ϕ (O) et porteur d'une densité de charges continues σ (à laquelle se superposera la petite densité oscillant à la fréquence ω qui crée le signal) telle que le plasma soit homogène à l'infini. Cette étude nous a conduits à envisager différentes situations, à savoir un bag ouvert, un bag fermé (où l'hypothèse plasma homogène à l'infini est à remplacer, par la condition $a(x_{max}) = 0$) et deux bags dont un fermé. Ce troisième cas étant de loin le plus intéressant puisqu'il a permis d'observer des phénomènes de changement de comportement du potentiel, à savoir répulsif au voisinage de l'origine et attractif ensuite, pour certaines profondeurs du bag fermé (ce bag correspondant à un trou dans la fonction de distribution).

En outre, la possibilité d'injecter localement ces particules piégées laisse envisager l'apparition de phénomènes périodiques par l'intermédiaire de nouveaux "bags" fermés.

Notons enfin que nous avons adopté la convention suivante : la charge des électrons sera prise positive et celle des ions négative .

2. LE MODELE M.W.B.

Le modèle water bag peut être considéré comme un sous-ensemble du modèle de Vlasov. Son nom donné par De Packh (1962) vient de l'analogie entre un fluide évoluant dans l'espace des phases et un fluide incompressible évoluant dans l'espace réel. Considérons dans l'espace des phases à l'instant t = 0 une surface fermée telle que la densité de phase soit constante à l'intérieur de cette surface et nulle à l'extérieur , alors la surface pourra se déformer en conservant sa topologie et son volume et la densité de phase restera constante à l'intérieur et nulle à l'extérieur. De plus, un point situé sur cette surface restera sur la surface.

L'intérêt de ce modèle est que, pour suivre l'évolution temporelle de tout le système , il suffit de suivre l'évolution des points de sa frontière.

Ce modèle a été généralisé (NAVET et BERTRAND, 1971) en un modèle appelé M.W.B. (Multiple water bag). Il permet d'approximer n'importe quelle fonction de distribution en utilisant une superposition de N bags de hauteur relative A_j (figure 5); en particulier, si la fonction de distribution est à symétrie sphérique, c'est-à-dire isotrope dans l'espace des vitesses, on a :

$$f(v) = \sum_{j=1}^{N} A_j \left[H(v+a_j) - H(v-a_j) \right]$$

où H est la fonction de Heaviside.

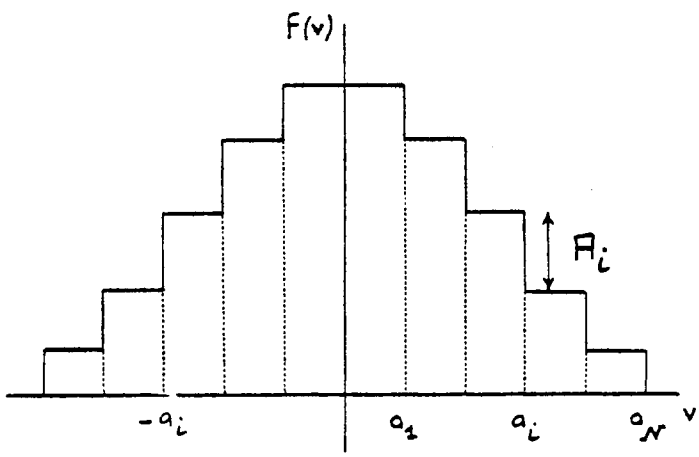


Figure 5 : M.W.B.

Un des avantages de ce modèle est de pouvoir, par un choix convenable du nombre de contours, cerner d'assez près le phénomène physique tout en limitant les difficultés analytiques aussi bien que numériques. L'expérience a montré que même avec un nombre limité de contours dans l'espace des phases , on peut obtenir des résultats très intéressants. On peut citer pour mémoire l'analogie formelle entre le "water bag simple" et le modèle hydrodynamique (Bertrand et Feix, 1970).

Pour une étude exhaustive des propriétés de ce modèle , on pourra consulter entre autres les articles suivants : Berk et Roberts (1970), Bertrand (1972) et Noyer, Navet et Feix, (1974).

3. TRAITEMENT LINEARISE D'EQUILIBRES SPATIALEMENT INHOMOGENES.

Le traitement qui fait l'objet de ce paragraphe apparait dans l'article Bertrand, Dorémus, Baumann et Feix (1972). Etant à l'origine de la suite de ce travail, il nous a paru bon d'en rappeler les grandes lignes.

Le milieu unidimensionnel est défini par N "bags"; chaque "bag" étant décrit par 2 contours v_j^+ et v_j^-, le mouvement des contours est régi par l'équation de la dynamique

$$\frac{d}{dt} v_j^{\pm} = \frac{e}{m} E \qquad (10)$$

et par l'équation de Poisson qui détermine le champ :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} A_j \left(v_j^+ - v_j^- \right) - \frac{e\, n_i(x)}{\varepsilon_0} \qquad (11)$$

où n_i , la densité des ions et $v_j^{\pm}$, définissant les contours de l'espace des phases, sont, du fait de l'inhomogénéité du plasma, fonction de la position.

A l'équilibre, le champ sera noté $E^{(0)}$ (x) et, en supposant les contours symétriques (fig. 5), l'équation (10) devient :

$$a_j \frac{da_j}{dx} = \frac{e}{m} E^{(0)} \qquad (12)$$

Cette relation montre que les trajectoires sont à énergie constante. En effet, le champ $E^{(0)}$ dérivant du potentiel $\Phi^{(0)}$, on a la relation :

$$\frac{1}{2} m a_j^2 + e \Phi^{(0)} = Cte \qquad (13)$$

Moyennant quoi, l'équation de Poisson (11) s'écrit :

$$\frac{d^2 E^{(0)}}{dx^2} - k^2(x) E^{(0)} = - \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{dn_i}{dx} \qquad (14)$$

avec

$$k^2(x) = \frac{e^2}{m \varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{2 A_j}{a_j(x)} \qquad (15)$$

Si l'on suppose n_i constant, le second membre de (14) est nul et pour peu que $k^2(x)$ soit négatif, l'équation décrit le phénomène bien connu des ondes B.G.K. (Bernstein, Greene et Kruskal, 1957).

Le traitement linéarisé d'une petite perturbation en $\exp i \omega t$ conduit à écrire :

$$v_j^{\pm}(x,t) = \pm a_j(x) + w_j^{\pm}(x) \exp i \omega t \qquad (16)$$

$$E(x,t) = E^{(0)}(x) + E^{(1)}(x) \exp i \omega t \qquad (17)$$

En utilisant les équations (10) et (11) et le concept de champs partiels $E_j^{(1)}$ créés par chaque bag j, et obéissant à l'équation de Poisson :

$$\frac{dE_j^{(1)}}{dx} = \frac{e}{\varepsilon_0} A_j \left(w_j^+ - w_j^- \right) \qquad (18)$$

On obtient les N équations différentielles :

$$\omega^2 E_j^{(1)} = \omega_j^2(x) E^{(1)} - a_j \frac{d}{dx} \left(a_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right) \qquad (19)$$

couplées entre elles par la relation

$$E^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} E_j^{(1)} \qquad (20)$$

où ω_j^2 (x) représente la fréquence plasma locale du bag j donnée par

$$\omega_j^2(x) = \left(\frac{e^2}{m\varepsilon_0}\right) 2 A_j \, a_j(x) \qquad (21)$$

Remarque :

Dans le cas d'un plasma homogène, a_j est indépendant de x et l'équation (21) devient :

$$\omega^2 E_j^{(1)} = \omega_j^2 E^{(1)} - a_j^2 \frac{d^2 E_j^{(1)}}{dx^2}$$

Soit en utilisant la transformation de Fourier :

$$\omega^2 E_j^{(1)} = \omega_j^2 E^{(1)} + k^2 a_j^2 E_j^{(1)}$$

Ce qui donne en utilisant (20) la relation de dispersion du M.W.B.

$$1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_j^2}{\omega^2 - k^2 a_j^2} = 0$$

Enfin, on notera que ω_j^2 peut être négatif si $A_j < 0$ ce qui traduit l'existence d'un trou dans l'espace des vitesses.

4. METHODES NUMERIQUES.

Nous avons vu, dans l'étude générale du M.W.B., qu'il suffisait de connaître l'évolution des contours dans l'espace des phases pour connaître l'évolution temporelle du système.

Devant les difficultés analytiques et numériques posées par la résolution du système d'équations différentielles couplées (19) une approche consiste à simplifier le problème en discrétisant les trajectoires a_j (x) de l'espace des phases. Pour cela, nous utilisons deux méthodes différentes.

- L'une, intitulée méthode des "marches", est, du point de vue numérique, équivalente à la discrétisation de la fonction de distribution par une fonction en escalier. Elle consiste à considérer le milieu comme étant homogène par morceaux.

- L'autre, dite méthode des "rampes", approxime chaque trajectoire de l'espace des phases par une fonction affine par intervalles.

4.1. Méthode des "rampes" dans le cas d'un bag.

Avec un bag le système d'équations différentielles couplées (19) se réduit à une seule équation différentielle :

$$\left[\frac{\omega^2 - \omega_p^2(x)}{a^2(x)}\right] E + \frac{1}{a(x)} \frac{da}{dx} \frac{dE}{dx} + \frac{d^2E}{dx^2} = 0 \qquad (22)$$

où ω_p^2 est la fréquence plasma locale

$$\omega_p^2(x) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0} 2 A\, a(x) \qquad (23)$$

A désignant la hauteur du "water bag".

Supposons que pour x variant de 0 à Δx, l'équation du contour de l'espace des phases soit celle d'une droite :

$$a(x) = a_0 (1 + \alpha x) \qquad (24)$$

dès lors en choisissant α suffisamment petit, on peut résoudre l'équation différentielle (22) par une méthode de perturbation du type Poisson.

Un développement au deuxième ordre en α de (22), en utilisant l'hypothèse (24) conduit à la nouvelle équation :

$$\frac{d^2E}{dx^2} + k_0^2 E = -\alpha \frac{dE}{dx} + \alpha\beta x E + \alpha^2 x \frac{dE}{dx} + \alpha^2 x^2 \gamma E \qquad (25)$$

où
$$k_o^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{p_o}^2}{a_o^2}$$
$$\beta = \frac{2\omega^2 - \omega_{p_o}^2}{a_o^2} \qquad (26)$$
$$\gamma = \frac{\omega_{p_o}^2 - 3\omega^2}{a_o^2}$$

avec
$$\omega_{p_o}^2 = \frac{e^2}{m\varepsilon_o} 2 A a_o$$

Considérons un développement au deuxième ordre du champ électrique

$$E = E_o + \alpha E_1 + \alpha^2 E_2 \qquad (27)$$

que l'on porte dans (25) et identifions successivement à zéro les termes en α^o, α^1 et α^2. On obtient :

- ordre zéro ——— $\frac{d^2 E_o}{dx^2} + k_o^2 E_o = 0$
- ordre un ——— $\frac{d^2 E_1}{dx^2} + k_o^2 E_1 = \beta x E_o - \frac{dE_o}{dx}$ (28)
- ordre deux ——— $\frac{d^2 E_2}{dx^2} + k_o^2 E_2 = \beta x E_1 - \frac{dE_1}{dx} + x\frac{dE_o}{dx} + x^2 \gamma E_o$

La première équation de (28) est facilement résolue. Si l'on décide de faire porter les conditions initiales seulement sur la solution du premier ordre (Nadeau, Guyard et Feix, 1974), à savoir $E_o(0) = E(0) = c$ et $\dot{E}_o(0) = \dot{E}(0) = k_o b$ ($k_o \neq 0$ et le point désignant la dérivée par rapport à x) on obtient pour l'ordre zéro

$$E_o(x) = c \cos k_o x + b \sin k_o x \qquad (i)$$

On remarquera qu'en faisant absorber à E_o la totalité des conditions initiales les termes E_1 , E_2, ainsi que leurs dérivées $\dot{E}_1$ et $\dot{E}_2$ sont totalement déterminées.

On reporte E_o dans la deuxième équation de (28) et on résoud par la méthode de Lagrange. Pour cela, on pose :

$$E_1 = C(x) \cos k_o x + D(x) \sin k_o x$$

avec pour contrainte :

$$\dot{C} \cos k_o x + \dot{D} \sin k_o x = 0$$

Ce qui nous permet de calculer $C(x)$, $D(x)$ et par conséquent E_1. On obtient tous calculs faits :

$$E_1(x) = \frac{c}{2k_o} \sin k_o x \left(1 - \frac{\beta}{2k_o^2}\right) - \frac{x}{2}\left(c \cos k_o x + b \sin k_o x\right) \cdot \left(-\frac{\beta}{2k_o^2} + 1\right) + \frac{\beta x^2}{4k_o}\left(c \sin k_o x - b \cos k_o x\right) \qquad (ii)$$

En utilisant le même traitement, on obtient la solution à l'ordre deux.

$$E_2(x) = \frac{-b \sin k_o x}{4k_o^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{k_o^2} + \frac{5\beta^2}{8k_o^4}\right)$$

$$+ x\left[\frac{c \sin k_o x}{4k_o}\left(-\frac{3}{2} - \frac{\gamma}{k_o^2} + \frac{\beta}{k_o^2} - \frac{7\beta^2}{8k_o^4}\right) + \frac{b \cos k_o x}{4k_o}\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{k_o^2} + \frac{5\beta^2}{8k_o^4}\right)\right]$$

$$+ x^2\left[\left(\frac{c \cos k_o x + b \sin k_o x}{4}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{k_o^2}\right) - \frac{\beta}{8k_o^2}\left(2c \cos k_o x + b \sin k_o x\right) + \frac{\beta^2}{32k_o^4}\left(7c \cos k_o x + 5b \sin k_o x\right)\right]$$

$$+ x^3 \left[\left(c \sin k_o x - b \cos k_o x \right) \left(\frac{\gamma}{6 k_o} - \frac{\beta}{8 k_o} + \frac{5\beta^2}{48 k_o^3} \right) \right]$$

$$+ x^4 \left(- \frac{\beta^2}{32 k_o^2} \right) \left(c \cos k_o x + b \sin k_o x \right) \qquad \text{(iii)}$$

La présence de termes séculaires tels que $x^n \cos k_o x$ et $x^n \sin k_o x$ invalide la solution du champ électrique (i), (ii) et (iii) pour les grandes distances x. En effet, ces termes deviennent de plus en plus grands quand x augmente et la série (27) n'est donc plus convergente . Un tel développement est par conséquent valable seulement si x et α sont suffisamment petits.

De plus le cas $k_o = 0$ qui correspond à $\omega^2 = \omega_{po}^2$ doit être traité séparément. Dans ce cas, l'équation (25) devient :

$$\frac{d^2 E}{d x^2} = - \alpha \frac{dE}{dx} + \alpha \beta x E + \alpha^2 x \frac{dE}{dx} - 2 \alpha^2 x^2 \beta E$$

avec

$$\beta = \frac{\omega_{p_o}^2}{a_o^2}$$

on obtient en utilisant les conditions initiales :

$$E_o(0) = E(0) = c \quad \text{et} \quad \dot{E}_o(0) = \dot{E}(0) = b$$

- ordre zéro : $E_o = c + bx$

- ordre un : $E_1 = \frac{x^2}{2} \left(- b + \beta \frac{c x}{3} + \beta \frac{b x^2}{6} \right)$

- ordre deux : $E_2 = x^3 \left(\frac{b}{3} - \frac{5 c \beta x}{24} - \frac{17 \beta b x^2}{120} + \beta^2 \frac{c x^3}{180} + \beta^2 \frac{b x^4}{504} \right)$

Avec une notation matricielle, on peut récrire les solutions de l'équation (25) de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} E(x) \\ \frac{dE}{dx}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mat \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(0) \\ \frac{dE}{dx}(0) \end{bmatrix}$$

où $E(0) = c$, $\frac{dE}{dx}(0) = k_0 b$ si $k_0 \neq 0$

En remarquant que pour α donnée suffisamment petit on peut toujours déterminer un $x = \Delta x$ tel que cette solution converge, on montre que l'on peut propager le champ E sur une distance Δx. Par conséquent, pour propager le champ E sur un intervalle $[0,d]$, il suffit de découper cet intervalle en M intervalles Δx suffisamment petits, de calculer la fonction affine par morceaux qui approxime la trajectoire a(x) sur $[0, d]$, de calculer les matrices de passage correspondantes aux M intervalles de longueur Δx et, enfin, de calculer le produit de ces matrices (en tenant compte de l'ordre) soit

$$\begin{bmatrix} E(d) \\ \frac{dE}{dx}(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{M} Mat_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(0) \\ \frac{dE}{dx}(0) \end{bmatrix} \qquad (29)$$

4.2. Méthode des "marches" dans le cas d'un bag :

Considérons maintenant la trajectoire a(x) de l'espace des phases égale à une constante a_0 sur un intervalle Δx. Les équations (22), (23) deviennent :

$$\frac{d^2E}{dx^2} + k_0^2 E = 0 \qquad (30)$$

avec

$$k_0^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{a_0^2}$$

et

$$\omega_p^2 = \frac{e^2}{m\varepsilon_0} 2 a_0 A$$

l'équation (30) est facilement intégrable et donne la solution bien connue

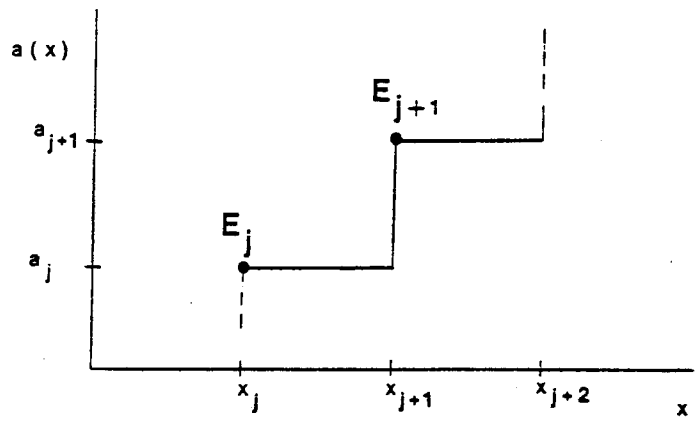
$$E(x) = C_1 \cos k_o x + C_2 \sin k_o x \qquad (31)$$

Supposons que le contour $a(x)$ subisse une discontinuité du premier ordre au point x_o. Le saut de $a(x)$ restant fini en ce point, la fonction E doit être continue. D'autre part, la dérivée de E par rapport à x doit vérifier la condition de continuité :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(a \frac{dE}{dx} \right)_{x_o + \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(a \frac{dE}{dx} \right)_{x_o - \varepsilon}$$

Cette dernière relation a été obtenue (Bertrand, Dorémus, Baumann et Feix, 1972, Bloomberg, 1973) en intégrant, l'équation (22), divisée par a_j, de $x_o - \varepsilon$ à $x_o + \varepsilon$, et en faisant tendre ε vers zéro.

Considérons le contour indiqué sur la figure 6.



<u>Figure 6</u> : Discontinuité du contour de l'espace des phases ($x_{j+1} = x_j + \Delta x$)

On a les conditions de continuité :

$$E_j(x_j + \Delta x) = E_{j+1}(x_{j+1})$$

$$a_j \frac{dE_j}{dx}(x_j + \Delta x) = a_{j+1} \frac{dE_{j+1}}{dx}(x_{j+1}) \qquad (32)$$

que l'on reporte dans (31) , pour obtenir la matrice de passage du champ électrique et de sa dérivée, du point x_j au point $x_j + \Delta x = x_{j+1}$

$$\begin{bmatrix} E_{j+1}(x_{j+1}) \\ \dfrac{dE_{j+1}}{dx}(x_{j+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_j \Delta x & \dfrac{\sin k_j \Delta x}{k_j} \\ -\dfrac{a_j}{a_{j+1}} k_j \sin k_j \Delta x & \dfrac{a_j}{a_{j+1}} \cos k_j \Delta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j(x_j) \\ \dfrac{dE_j}{dx}(x_j) \end{bmatrix} \qquad (33)$$

où

$$k_j^2 = \frac{\omega^2 - \omega_j^2}{a_j^2}$$

et

$$\omega_j^2 = \frac{e^2}{m\varepsilon_0} 2 a_j A$$

4.3. Application comparée de ces deux méthodes à l'étude de la réflexion :

Il faut ici remarquer la différence fondamentale de philosophie du modèle des "rampes" et de celui des "marches". Dans le cas des rampes, il faut tout d'abord choisir astucieusement le découpage des intervalles de sorte que la largeur Δx de chacun d'eux soit d'autant plus petite que la valeur de α est grande. (Rappel : $a(x) = a_0(1 + \alpha x)$), ceci afin d'obtenir une bonne convergence de la série qui définit le champ électrique. On a donc affaire à une méthode purement numérique.

Au contraire, dans le modèle des marches , on traite analytiquement chaque discontinuité et l'on obtient ainsi une solution rigoureusement exacte pour une approximation donnée de la trajectoire par une fonction en escalier. Cette deuxième philosophie est analogue à celle utilisée dans le M.W.B. et peut être gratifiée de l'appellation analytico-numérique.

Afin de donner une idée du comportement de ces deux méthodes , on va, en s'inspirant de la résolution de l'équation de Schrödinger pour des potentiels décrits par une fonction en escalier, étudier la réflexion d'une "onde" e^{ikx} par un profil donné.

Dans la suite, on considère les variables normalisées :

$$\begin{aligned} A_n &= AV_T & k_n &= k\ \lambda_D \\ a_n &= a/V_T & x_n &= x/\lambda_D \\ \omega_n &= \omega/\omega_p & \text{où}\ \lambda_D &= V_T\,\omega_p^{-1} \end{aligned} \qquad (34)$$

Considérons le profil triangulaire symétrique (figure 7), et posons $\omega_p = \dfrac{e^2}{m\,\varepsilon_o}\,2\,A\,a(0) = 1$ ainsi que $V_T = 1$.

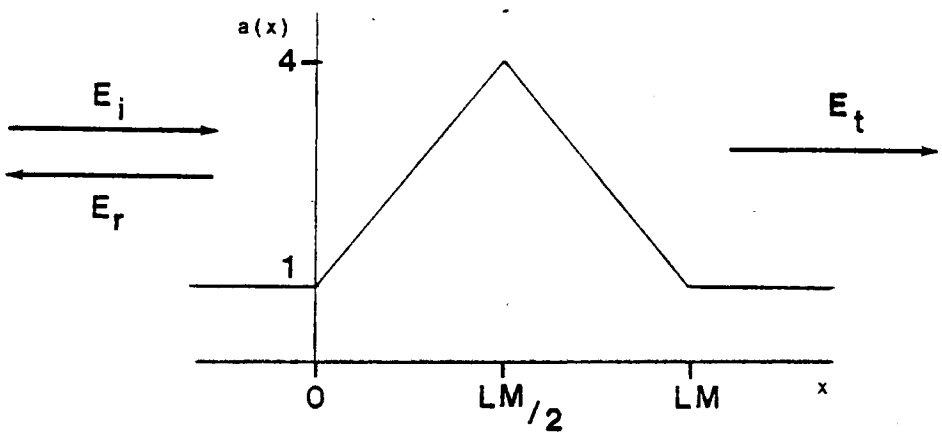


Figure 7 : Profil triangulaire

Soit N le nombre d'intervalles choisi, on a $\Delta x = LM/N$.

Que ce soit par la méthode des "marches" ou celle des "rampes", nous avons vu (29) que l'on pouvait calculer la matrice de passage $[C_i]$ de $x = 0$ à $x = LM$.

$$\begin{bmatrix} E\,(LM) \\ \dfrac{dE}{dx}\,(LM) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(0) \\ \dfrac{dE}{dx}\,(0) \end{bmatrix} \qquad (35)$$

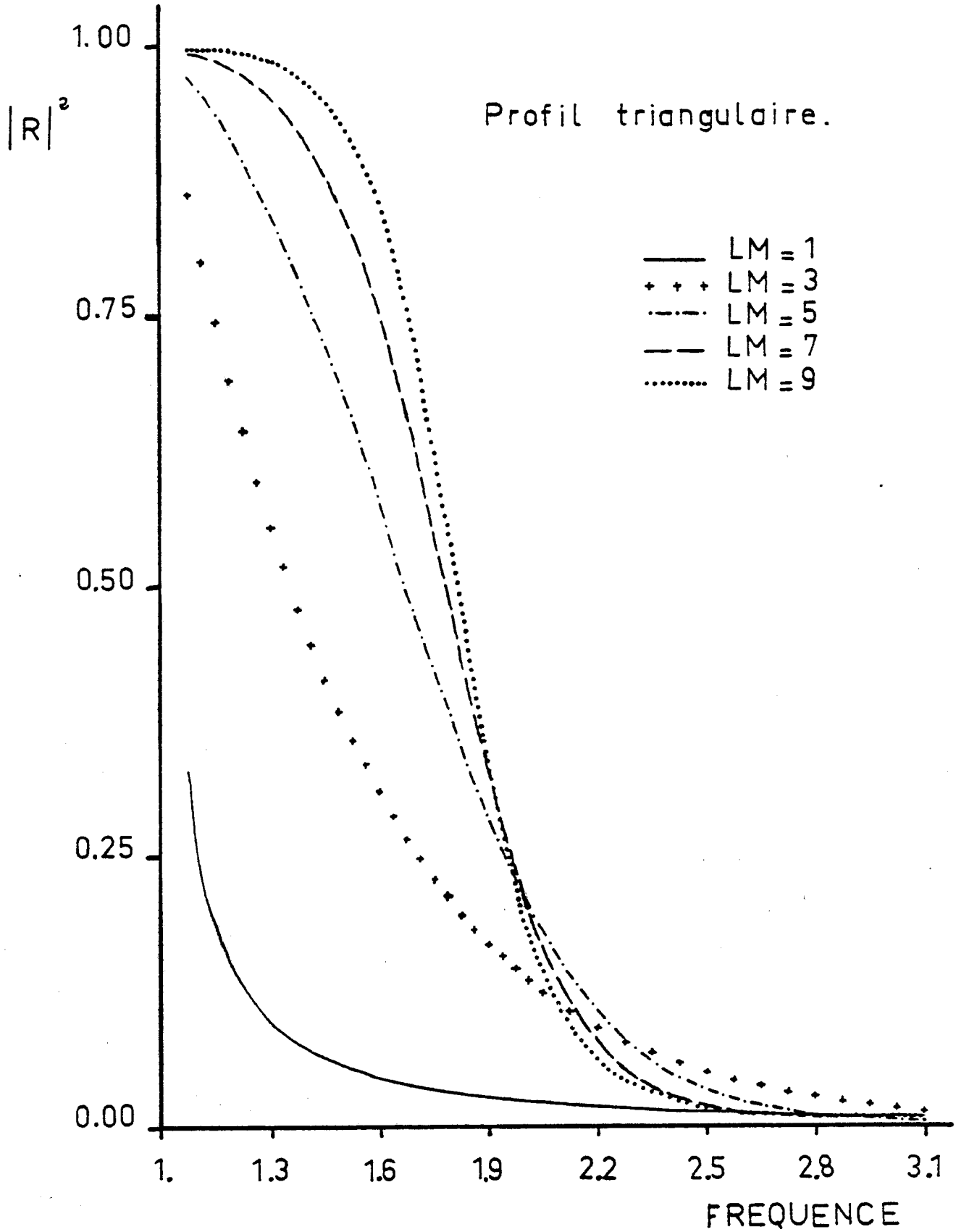

1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$|R|^2$
Profil triangulaire.
LM = 1
LM = 3
LM = 5
LM = 7
LM = 9
1.
1.3
1.6
1.9
2.2
2.5
2.8
3.1
FREQUENCE

Fig. 8

Soit une "onde" incidente $E_i = e^{ik_o x}$ $(k_o = \omega^2 - 1)$ se propageant vers les x positifs, une partie de l'onde sera réfléchie $E_r = Re^{-ik_o x}$ et l'autre $E_t = Te^{ik_o x}$ sera transmise. On se propose de calculer les coefficients de réflexion $|R|^2$ et de transmission $|T|^2$. On obtient tous calculs faits :

$$|R|^2 = \frac{(c_3 + k_o^2 c_2)^2 + k_o^2 (c_4 - c_1)^2}{(c_3 - k_o^2 c_2)^2 + k_o^2 (c_4 + c_1)^2}$$

$$|T|^2 = \frac{4 k_o^2 (c_2 c_3 - c_4 c_1)^2}{(c_3 - k_o^2 c_2)^2 + k_o^2 (c_4 + c_1)^2} \qquad (36)$$

Notons que $|R|^2 + |T|^2 = 1$ et que par conséquent, $C_1 C_4 - C_2 C_3 = 1$ soit $\det [c_i] = 1$.

La figure 8 représente le coefficient de réflexion en fonction de la fréquence ω pour différentes valeurs de la largeur du profil LM.

On porte sur les figures 9, les écarts entre, le coefficient $|R|^2$ calculé par les deux méthodes numériques (pour ω et LM donnés) et la valeur exacte de $|R|^2$, en fonction du nombre d'intervalles N. Cette valeur exacte du coefficient de réflexion est obtenue par convergence.

Quelle que soit la fréquence , on constate que pour un profil pointu (LM = 1) la méthode des marches est la plus performante alors que pour des profils plus étalés (LM = 30, et LM = 50) l'inverse se produit. Cependant, il est nécessaire de signaler ici un point important concernant le temps de calcul sur ordinateur.

En effet, à nombre égal d'intervalles, il faut, avec la méthode des rampes, environ 2,2 fois plus de temps qu'avec la méthode des marches.

Les figures 9 nous indiquent aussi qu'un nombre raisonnable de marches donne une convergence acceptable des résultats.

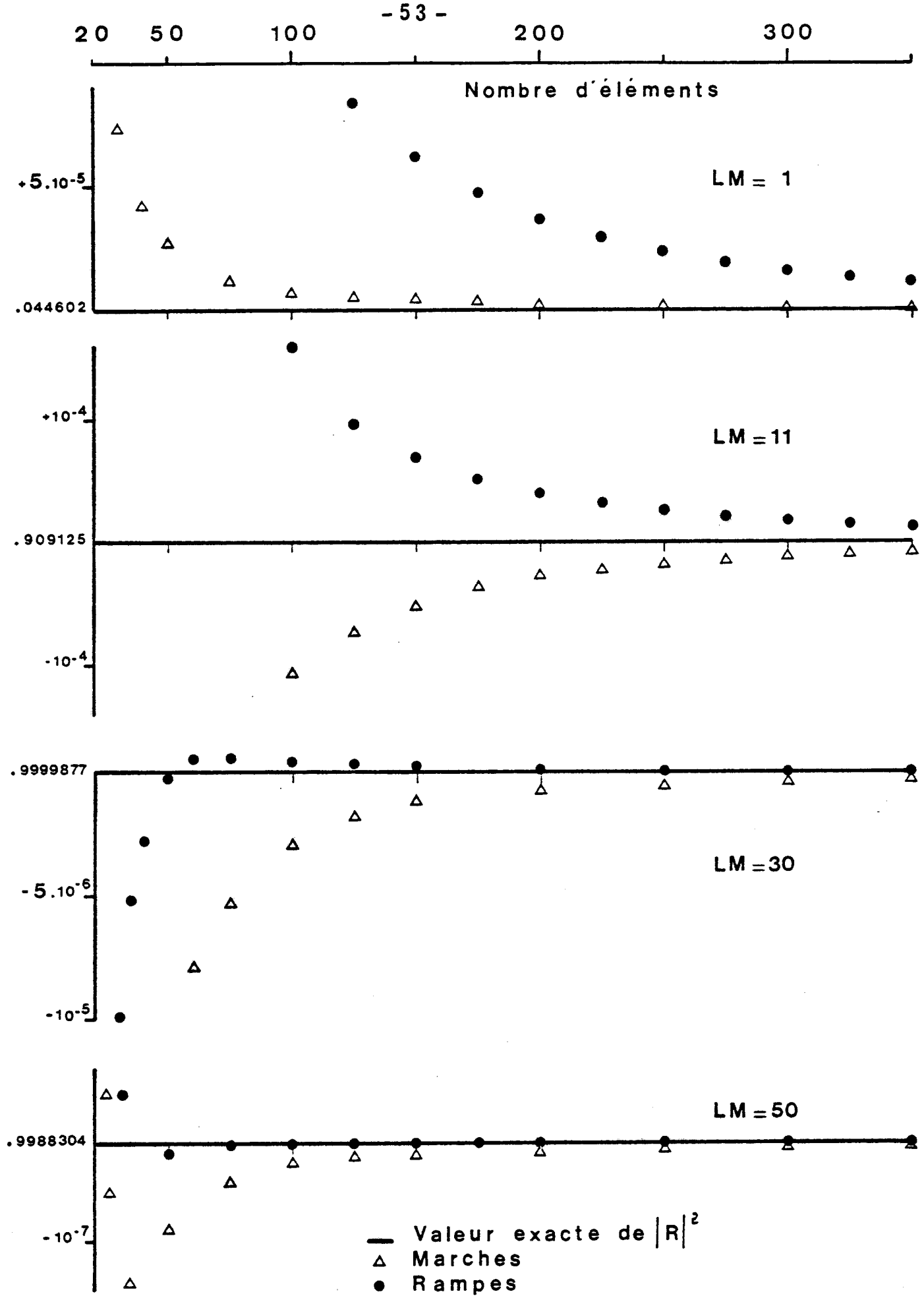
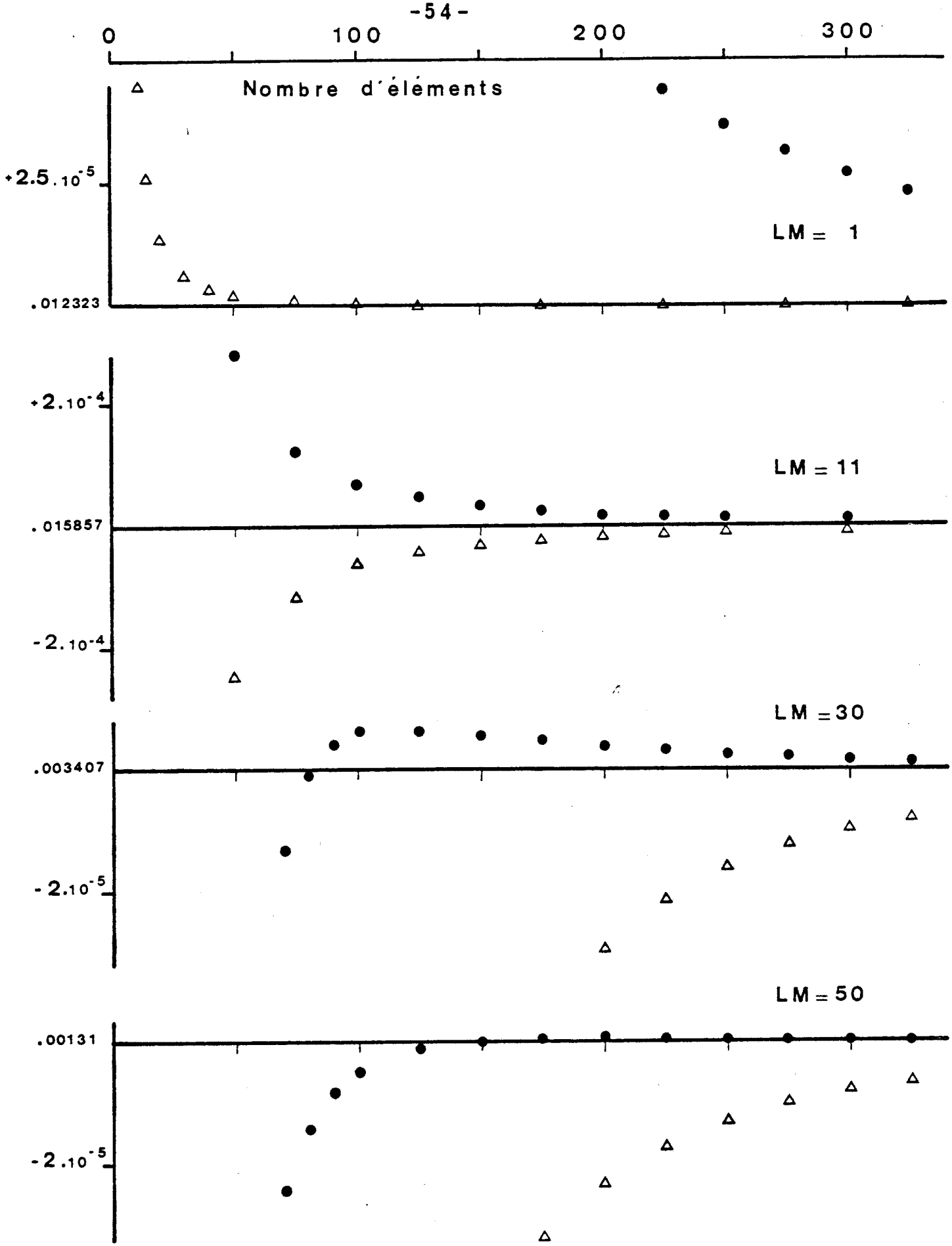


Fig. 9.1 $\omega/\omega_p = 1.6$



— Valeur exacte de $|R|^2$
△ Marches
● Rampes

Fig. 9.2 $\omega/\omega_p = 2.5$

Notons enfin qu'il y a deux niveaux d'approximation, le premier provient de la définition du profil et le second de la méthode de calcul. Dans le cas des rampes, le profil triangulaire considéré est exactement décrit alors que chaque matrice de propagation est obtenue par un calcul approché. C'est la phénomène inverse qui se produit dans la méthode des marches où la propagation le long d'une marche et le traitement des discontinuités sont traités analytiquement.

4.4. Généralisation à N bags de la méthode des "marches".

En utilisant la relation de couplage (20), le système d'équations différentielles (19) s'écrit :

$$\left(\omega^2 - \omega_j^2(x)\right) E_j + a_j(x) \frac{d}{dx}\left(a_j(x) \frac{dE_j}{dx}\right) = \omega_j^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} E_i \qquad (37)$$

Comme on approxime chaque contour $a_j(x)$ de l'espace des phases par une fonction en escalier, les a_j sont constants sur un intervalle Δx et l'équation (37) devient :

$$\frac{d^2 E_j}{dx^2} = - k_j^2 E_j + \frac{\omega_j^2}{a_j^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} E_i \qquad (38)$$

avec $$k_j^2 = \frac{\omega^2 - \omega_j^2}{a_j^2}$$

Ecrivons E et $F = \frac{dE}{dx}$ sous forme de vecteurs colonnes

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dE_1/dx \\ dE_2/dx \\ \vdots \\ dE_N/dx \end{bmatrix} \qquad (39)$$

où E_j sont les champs partiels créés par chaque bag j.

On peut alors écrire (38) sous forme matricielle en utilisant (39) :

$$\frac{dF}{dx} = \begin{bmatrix} -k_1^2 & \omega_1^2/a_1^2 & \omega_1^2/a_1^2 & \cdots & \omega_1^2/a_1^2 \\ \omega_2^2/a_2^2 & -k_2^2 & \omega_2^2/a_2^2 & \cdots & \omega_2^2/a_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N^2/a_N^2 & \omega_N^2/a_N^2 & \omega_N^2/a_N^2 & \cdots & -k_N^2 \end{bmatrix} . E \qquad (40)$$

Appelons C cette matrice : Soit $\frac{dF}{dx} = CE$ (41)

Posons maintenant :

$$U = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \qquad (42)$$

On a $\frac{dU}{dx} = S\,U$ (43)

où $S = \begin{bmatrix} O & I \\ C & O \end{bmatrix}$ est une matrice 2 N X 2 N et I la matrice unité de dimension N X N.

La matrice S étant constante sur Δx, l'équation (43) admet sur cet intervalle la solution.

$$U = G \quad \mathrm{Exp}\ (S.x) \qquad (44)$$

où G est une matrice constante et Exp désigne une exponentielle de matrice.

$$\mathrm{Exp}\ (S.x) = I + \frac{S.x}{1!} + \frac{S^2.x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{S^n.x^n}{n!} + \ldots \qquad (45)$$

Considérons maintenant les discontinuités des $a_j(x)$ en un point x_{e+1} (figure 10).

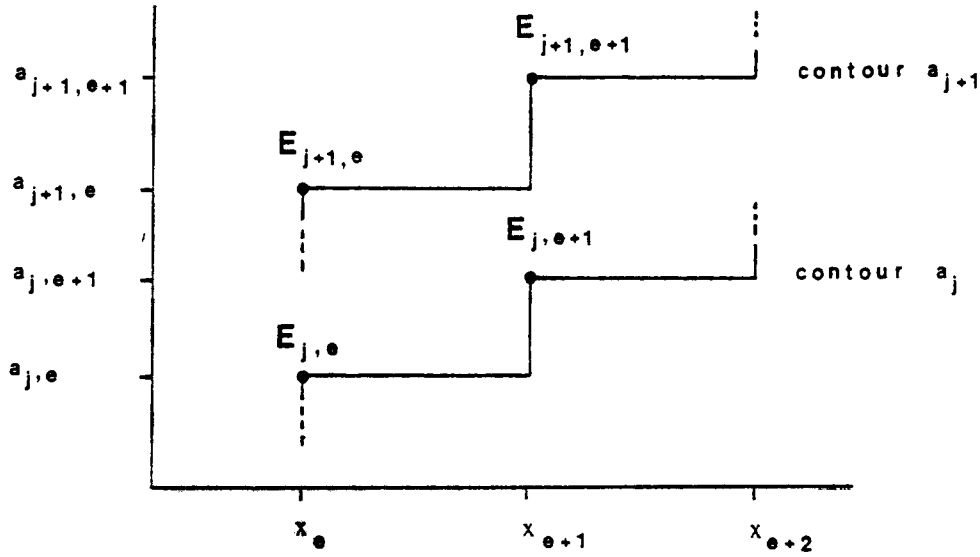


Figure 10 : Discontinuités des contours de l'espace des phases
$(x_{e+1} = x_e + \Delta x)$

Les conditions de continuité pour le champ partiel et sa dérivée relatifs au bag j sont :

$$E_{j,e}(x_e + \Delta x) = E_{j,e+1}(x_{e+1})$$
$$a_{j,e} F_{j,e}(x_e + \Delta x) = a_{j,e+1} F_{j,e+1}(x_{e+1}) \qquad (46)$$

En portant ces équations dans la solution (44) de l'équation différentielle (43) on obtient :

$$\begin{bmatrix} E_{e+1}(x_{e+1}) \\ F_{e+1}(x_{e+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \left[\mathrm{Exp}\ (S.\ \Delta x)\right] \begin{bmatrix} E_e(x_e) \\ F_e(x_e) \end{bmatrix} \qquad (47)$$

où γ est la matrice $N \times N$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{a_{1,e}}{a_{1,e+1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{2,e}}{a_{2,e+1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{N,e}}{a_{N,e+1}} \end{bmatrix} \qquad (48)$$

Pour déterminer la matrice de dimension 2N x 2N, Exp (S.Δ x) , il faut calculer les différentes puissances de S et utiliser le développement limité (45).

Ce calcul de S^n est aisé en utilisant la méthode du produit de matrices par blocs. On trouve :

pour n = 2p + 1 $\qquad S^n = \begin{bmatrix} 0 & C^p \\ C^{p+1} & 0 \end{bmatrix}$

pour n = 2p $\qquad S^n = \begin{bmatrix} C^p & 0 \\ 0 & C^p \end{bmatrix}$

Soit pour Exp (S. Δx) = $\begin{bmatrix} S1 & S2 \\ C.S2 & S1 \end{bmatrix}$ (50)

où

$$S1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n . \Delta x^{2n}}{(2n)!}$$

(51)

et

$$S2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n . \Delta x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les séries (51) peuvent être calculées avec précision en utilisant quelques termes seulement, à condition toutefois que Δx soit suffisamment petit.

<u>Note</u> : Montrons que pour $N = 1$, on retrouve bien l'équation (33). Dans ce cas

$$C = -k_e^2$$

et

$$\begin{bmatrix} E_{e+1}(x_{e+1}) \\ F_{e+1}(x_{e+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_e}{a_{e+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S1 & S2 \\ C.S2 & S1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_e(x_e) \\ F_e(x_e) \end{bmatrix}$$

où

$$S1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_e^{2n} \Delta x^{2n}}{(2n)!} = \cos k_e.\Delta x$$

et

$$S2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_e^{2n} \Delta x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{k_e} \sin k_e.\Delta x$$

Soit

$$\begin{bmatrix} E_{e+1}(x_{e+1}) \\ F_{e+1}(x_{e+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_e.\Delta x & \dfrac{\sin k_e.\Delta x}{k_e} \\ -\dfrac{a_e}{a_{e+1}} k_e \sin k_e.\Delta x & \dfrac{a_e}{a_{e+1}} \cos k_e.\Delta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_e(x_e) \\ F_e(x_e) \end{bmatrix}$$

qui est bien le résultat obtenu en (33).

5. APPLICATION AU CAS DU PLASMA.

En premier lieu nous allons déterminer l'évolution des contours de l'espace des phases en supposant le plasma homogène à l'infini (à l'exception bien entendu du cas d'un bag fermé). L'inhomogénéité sera créée par un dipole, porté à un potentiel Φ_0, placé à l'origine, et, porteur,

d'une densité de charges σ .

Ensuite, le milieu sera perturbé par l'introduction d'un dipole $K\ \delta(x)$ présentant une variation temporelle en $\exp i\ \omega t$. On calculera alors le champ électrique résultant en utilisant des conditions aux limites adéquates et les matrices de passage étudiées précédemment (47).

5.1. Etude des structures stationnaires non linéaires :

Les états stationnaires non uniformes du modèle water-bag sont décrits par deux équations : l'équation de Poisson qui donnera le potentiel électrostatique autocohérent et l'équation (13) qui indique que les trajectoires de l'espace des phases sont à énergie constante.

On peut résoudre ce système d'équations de deux façons différentes : ou bien supposer connu le potentiel $\Phi(x)$ et chercher la fonction de distribution, c'est le problème des ondes B.G.K. (Bernstein, Greene, Kruskal, 1957), ou bien déterminer le potentiel $\Phi(x)$ en considérant l'équation de Poisson comme une équation différentielle du second ordre.

De nombreuses études ont été faites sur ce problème des structures stationnaires dans les cas un bag et deux bags. On peut citer les travaux de HOHL (1969) et FINZI (Thèse d'Etat, 1973) dans le cas d'un plasma et ceux de HOHL, FEIX (1967) et DOREMUS, FEIX (1972) dans le cas d'un amas d'étoiles.

En utilisant les variables normalisées (34) où la fréquence plasma ω_p est donnée par la formule bien connue $\omega_p^2 = N_0 e^2 / m \varepsilon_0$ et en normalisant les énergies à mV_T^2, l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + N(x) - N_i(x) = 0 \qquad (52)$$

où la densité des ions N_i sera prise par la suite égale à 1.

De même, l'équation (13) devient :

$$\phi(x) + \frac{a_j^2(x)}{2} = C_j \qquad (53)$$

où C_j est une constante.

Dans le cas de M bags, la densité des électrons N(x) sera donnée par la relation :

$$N(x) = \sum_{j=1}^{M} 2\, a_j(x)\, A_j$$

En remplaçant, dans N(x), $a_j(x)$ par son expression en fonction de $\Phi(x)$, obtenue à l'aide de (53), et, en portant la densité électronique, ainsi calculée, dans (52) on obtient l'équation différentielle qui décrit le potentiel stationnaire $\Phi(x)$. Soit :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2^{3/2} \sum_{j=1}^{M} \left(C_j - \phi(x)\right)^{1/2} A_j - 1 = 0 \qquad (54)$$

<u>Cas un bag ouvert</u> :

A l'infini, le plasma étant homogène, ϕ est constant (et sera pris égal à 0) ainsi que la vitesse qui définit le contour de l'espace des phases et on a :

$$N(\infty) = 2a(\infty) . A = 1 \qquad (55)$$

la valeur de a (∞) est déterminée en écrivant :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 F_0(v)\, dv = \frac{a^2(\infty)}{3} \qquad (56)$$

(v étant normalisée à la vitesse thermique moyenne des électrons).

On déduit , de la formule (55), la valeur de A.

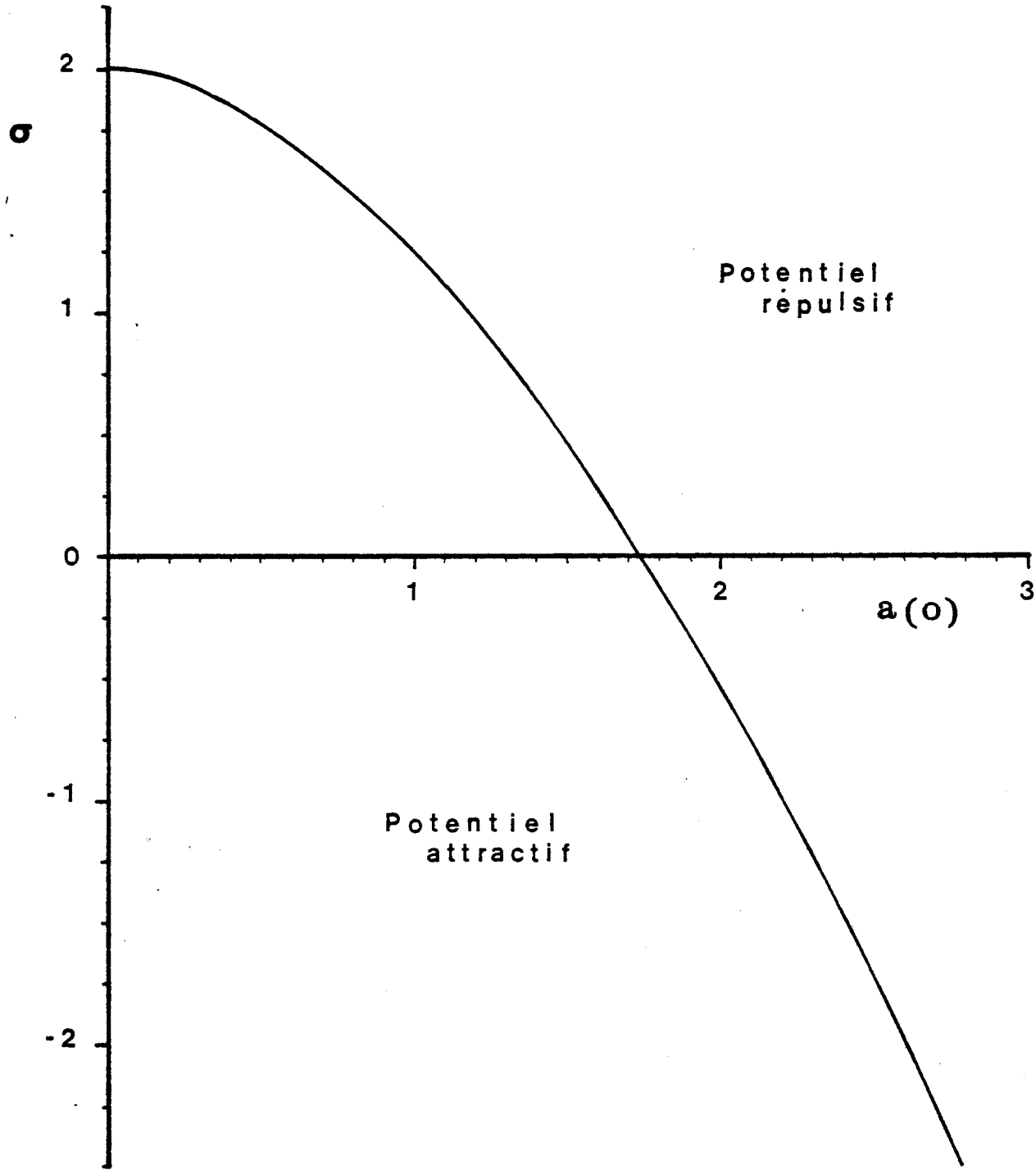


fig. 11 Un bag.

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle du second ordre (54) par des méthodes analogues à celles de RUNGE-KUTTA, on doit connaître la valeur de ϕ et de sa dérivée à l'origine. On se donne ϕ (o) qui est le potentiel du dipole placé à l'origine. La valeur de $\frac{d\phi}{dx}$ qui est égale à $-\frac{\sigma}{2}$ (où σ est normalisé par rapport à $N_o e \lambda_D$) est obtenue en intégrant l'équation différentielle (54) de O à l' ∞ après l'avoir multipliée par $\frac{d\phi}{dx}$ dx.

On obtient tous calculs faits :

$$\frac{\sigma^2}{8} = \phi(o) - \frac{2A}{3}\left(a^3(\infty) - a^3(o)\right) \qquad (57)$$

où seul a(o) reste à déterminer.

En utilisant la relation (53) pour x infini on obtient

$$C = \frac{a^2(\infty)}{2} \qquad (58)$$

puisque le potentiel y est pris nul.

Connaissant ϕ(o) et C, on obtient :

$$a(o) = \sqrt{2}\left[C - \phi(o)\right]^{1/2} \qquad (59)$$

On résoud alors l'équation différentielle (54) en utilisant les conditions initiales $\phi = \phi(o)$ et $\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\sigma}{2}$ où σ est donné par (57). σ (ainsi que ϕ(o)) sera positif si le potentiel à l'origine est répulsif, et négatif si ce potentiel est attractif.

En remarquant que $\phi(o) = C - \frac{a^2(o)}{2} = \frac{a^2(\infty) - a^2(o)}{2}$ (60)

on constate que l'on peut se donner a(o) à la place de ϕ(o), c'est ce que nous ferons par la suite pour des raisons de commodité.

Considérons un dipole placé à l'origine et dont le potentiel est ϕ (o) (calculé à l'aide de (60) où a(o) est donné) il doit porter une densité de charges σ calculée par (57) afin d'obtenir un plasma homogène à l'infini.

On représente sur la figure 11, σ en fonction de a(o).

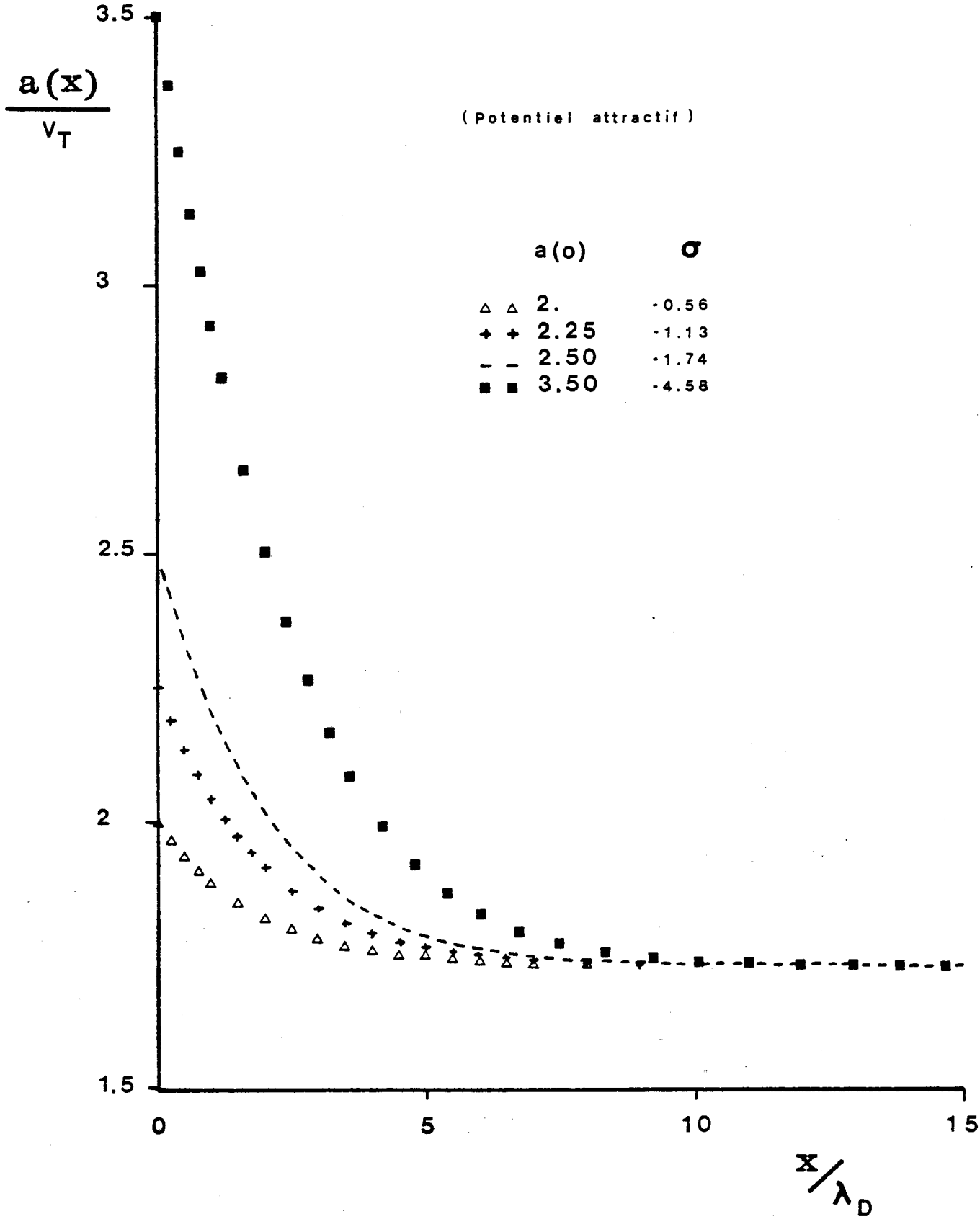

3.5
3
2.5
2
1.5
a(x)
V_T
(Potentiel attractif)
a(o)
σ
2.
-0.56
2.25
-1.13
2.50
-1.74
3.50
-4.58
0
5
10
15
x/λ_D

fig.12 Un bag.

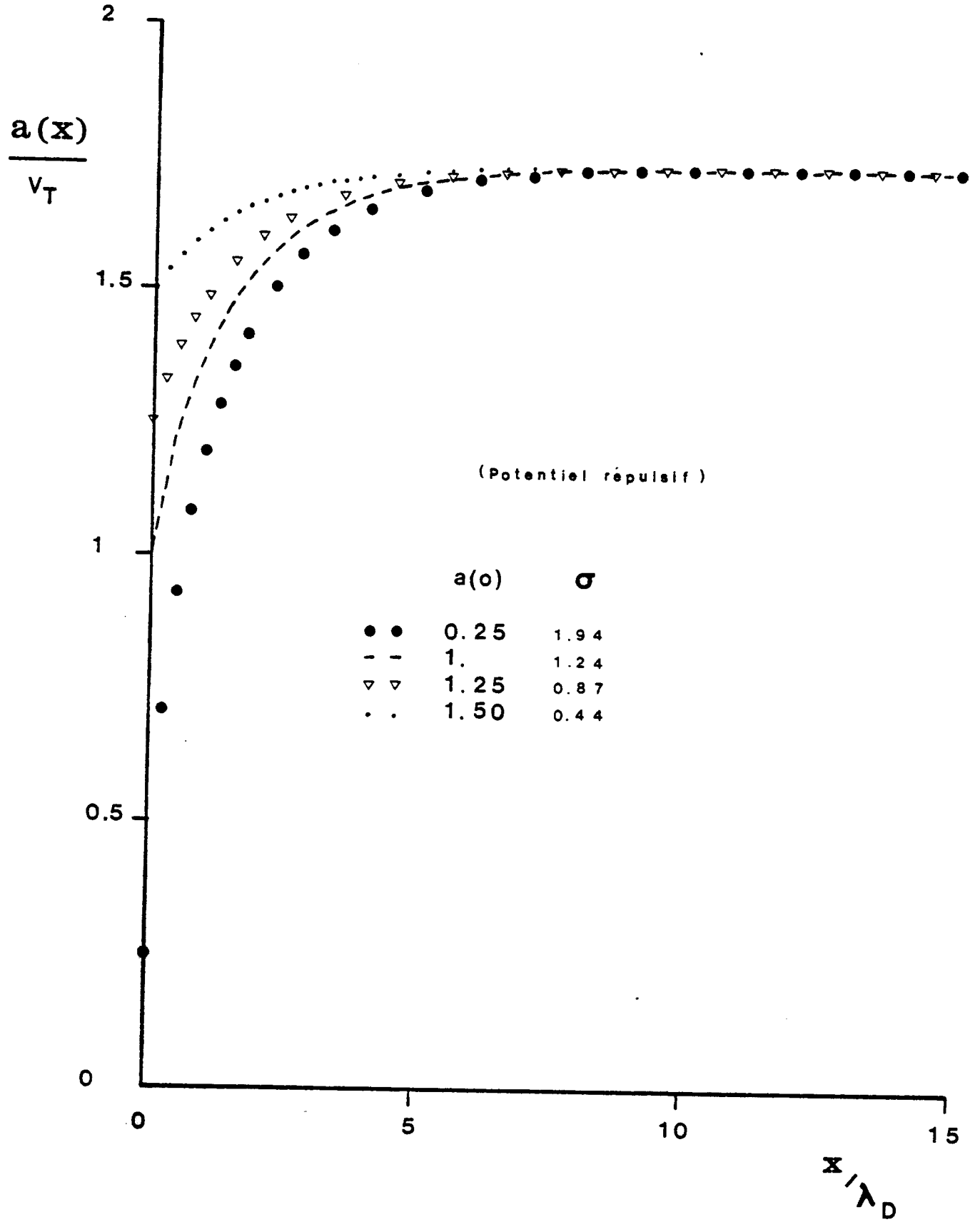

2
1.5
1
0.5
0
a(x)
V_T
(Potentiel répulsif)
a(o)
σ
0.25
1.94
1.
1.24
1.25
0.87
1.50
0.44
0
5
10
15
x/λ_D

fig.13 Un bag.

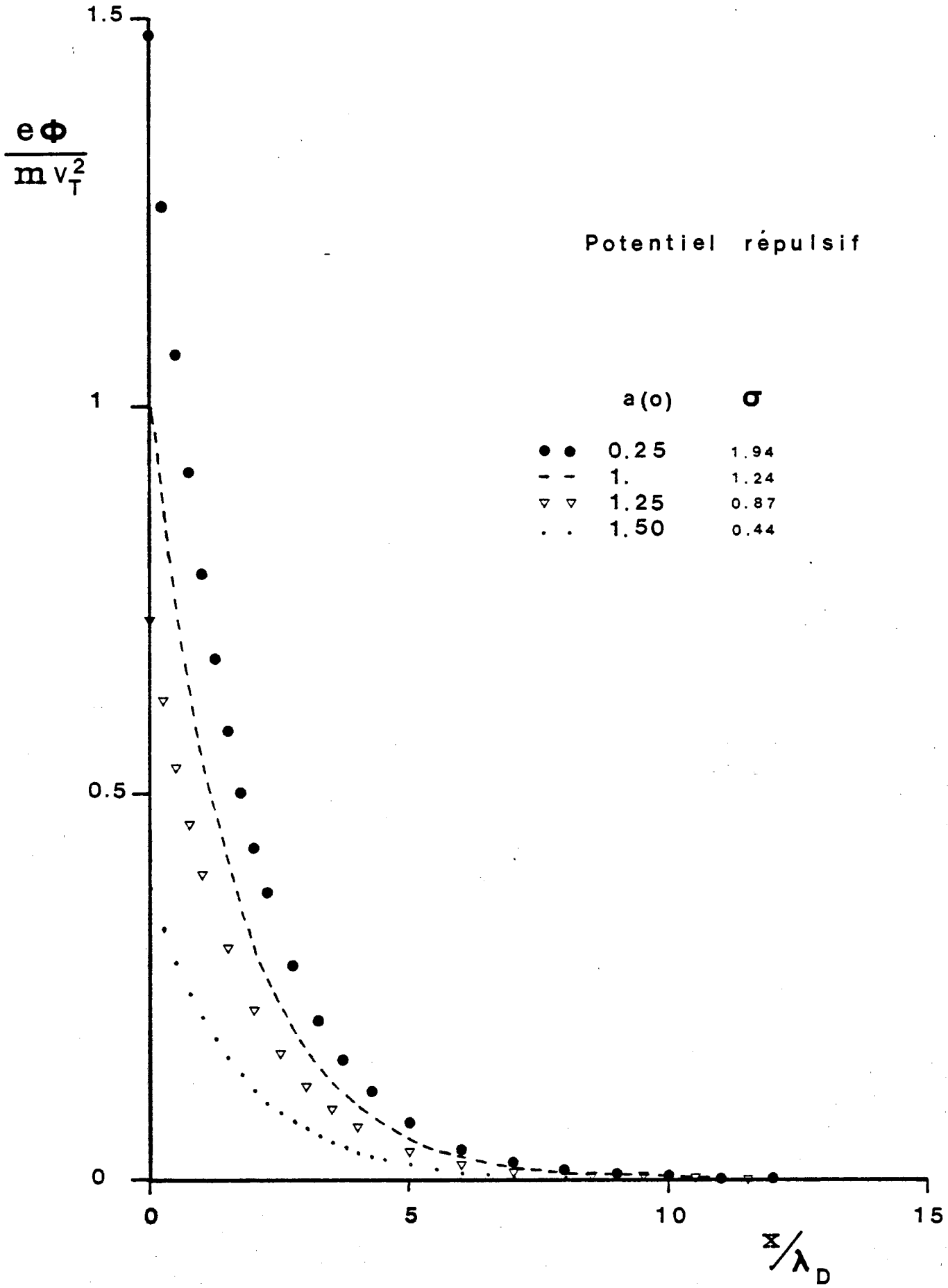

1.5
1
0.5
0
$\frac{e\Phi}{m v_T^2}$
Potentiel répulsif
a(o)
σ
0.25
1.94
1.
1.24
1.25
0.87
1.50
0.44
0
5
10
15
x/λ_D

fig.14 Un bag.

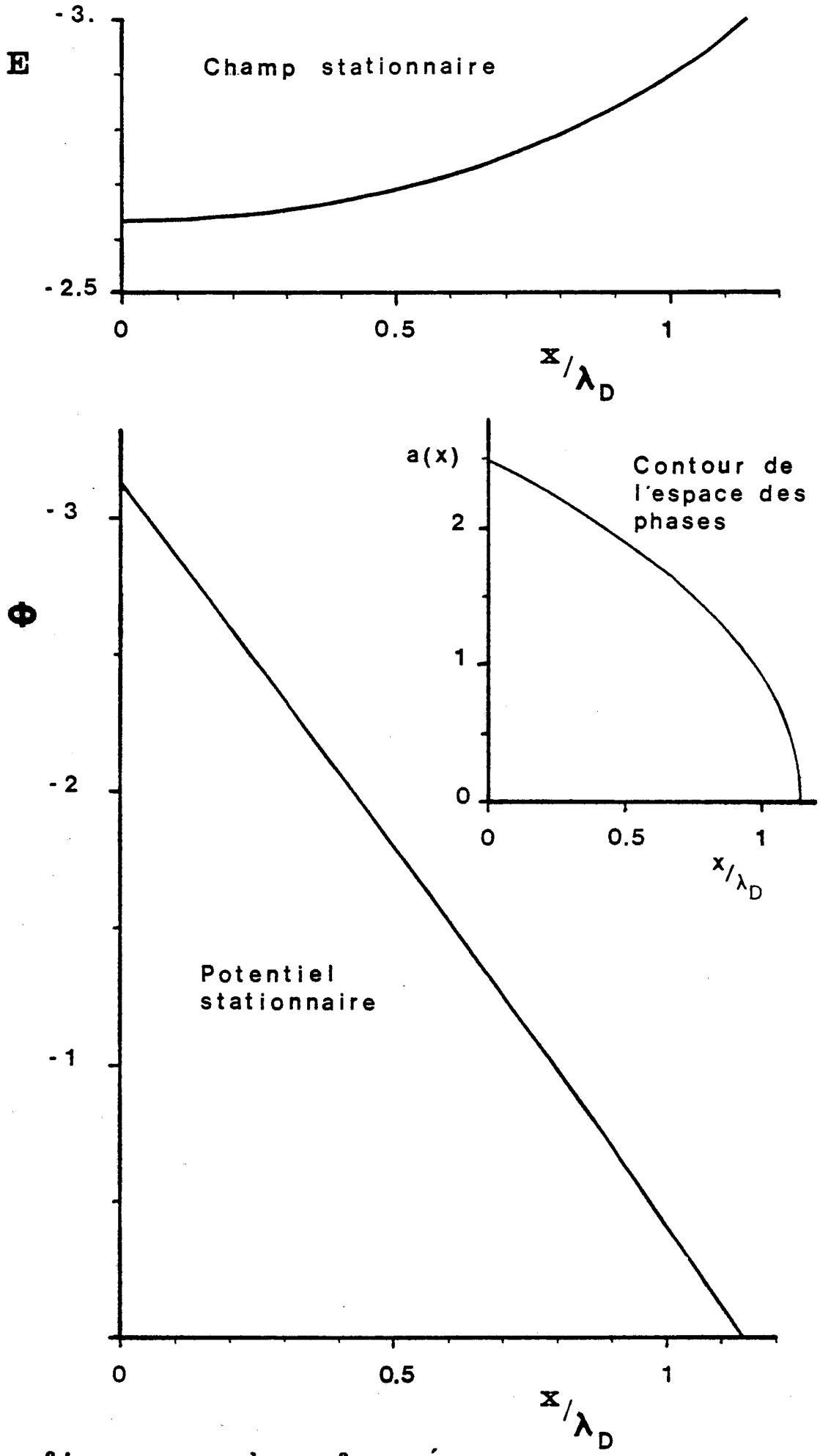


fig.15 un bag fermé (Potentiel attractif)

Les figures 12 et 13 représentent les contours de l'espace des phases pour différentes valeurs de a(o) respectivement dans le cas d'un potentiel attractif, et dans celui d'un potentiel répulsif.

Sur la figure 14, on a tracé le potentiel stationnaire correspondant à la situation de la figure 13.

Un bag fermé :

Dans le cas d'un bag fermé, on doit bien entendu remplacer l'hypothèse "milieu homogène à l'infini" par les relations :

$$\phi(x_{max}) = 0 \ , \qquad a(x_{max}) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_{max}} \text{ donné}$$

si le bag est fermé en $x = x_{max}$ (fig. 15, pour un potentiel attractif).

De plus, on posera par convention $2a(o)\,A = 1$ et σ sera donné par l'expression :

$$\frac{\sigma^2}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2_{x_{max}} + \frac{2A}{3}\cdot a^3(o) - \frac{a^2(o)}{2} \qquad (61)$$

Deux bags dont un fermé :

On cherche, pour un potentiel attractif à l'origine, la structure stationnaire indiquée sur la figure 16a, où le premier bag est fermé en $x = x_1$ et le second bag homogène à l'infini :

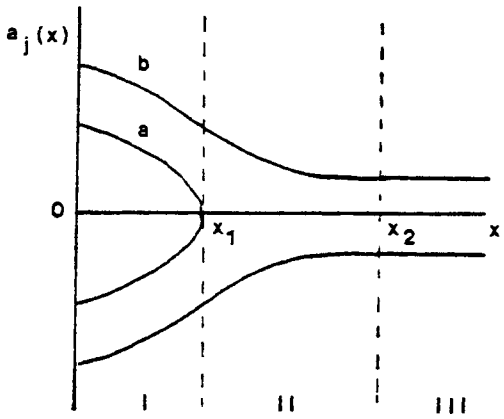


Figure 16 a

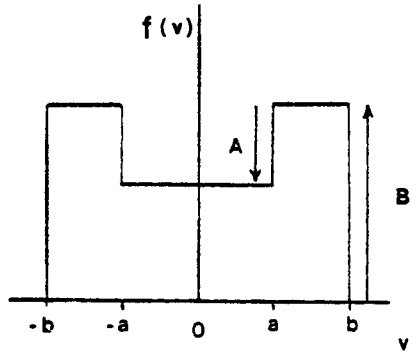


Figure 16 b

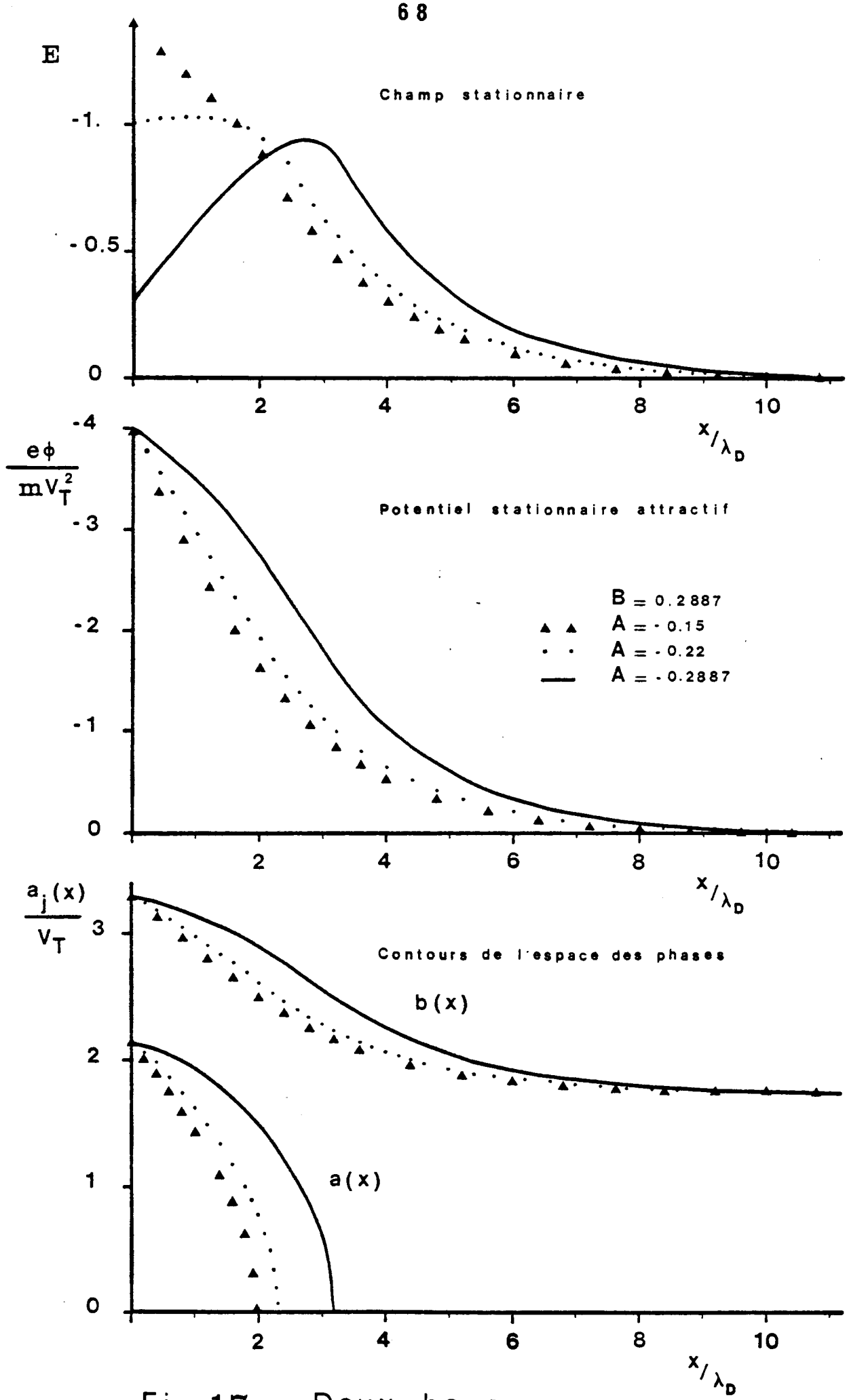


Fig.17 Deux bags.

On peut partager l'axe des x en trois zones : la zone III ($x > x_2$) est homogène et la zone II ($x_1 < x < x_2$) peut être traitée comme dans le cas d'un bag ouvert en potentiel attractif où les conditions initiales $\phi(o)$ (calculé à partir de $b(o)$) et $\frac{d\phi}{dx}(o)$ sont remplacées respectivement par $\phi(x_1)$ (calculé à partir de $b(x_1)$ donné) et $\frac{d\phi}{dx}(x_1)$.

Quant à la zone I, où la fonction de distribution est définie par la figure 16 b, elle sera traitée comme suit :

L'équation différentielle (54) qui donne le potentiel stationnaire s'écrira :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2^{3/2} A \left(C_a - \phi(x)\right)^{1/2} + 2^{3/2} B \left(C_b - \phi(x)\right)^{1/2} - 1 = 0 \qquad (62)$$

les équations qui définissent les deux contours de l'espace des phases étant :

$$\begin{aligned} \phi(x) + \frac{a^2(x)}{2} &= C_a \\ \phi(x) + \frac{b^2(x)}{2} &= C_b \end{aligned} \qquad (63)$$

C_b est obtenu dans le traitement de la zone II et est égal à $\frac{b^2(\infty)}{2}$

Quant à C_a, il est calculé en appliquant (63) en $x = x_1$ où $a(x_1) = 0$ et $\phi(x_1) = \frac{b^2(\infty) - b^2(x_1)}{2}$

Les conditions initiales qui permettent de résoudre l'équation différentielle (62) sont $\phi(o)$ qui est obtenu en se donnant $b(o)$ et $\frac{d\phi}{dx}(o) = -\frac{\sigma}{2}$ où σ est donné par la formule

$$\frac{\sigma^2}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2_{x_1} - \frac{2}{3}\left[B\left(b^3(x_1) - b^3(o)\right) - A\,a^3(o)\right]$$

$$- \phi(x_1) + \phi(o) \qquad (64)$$

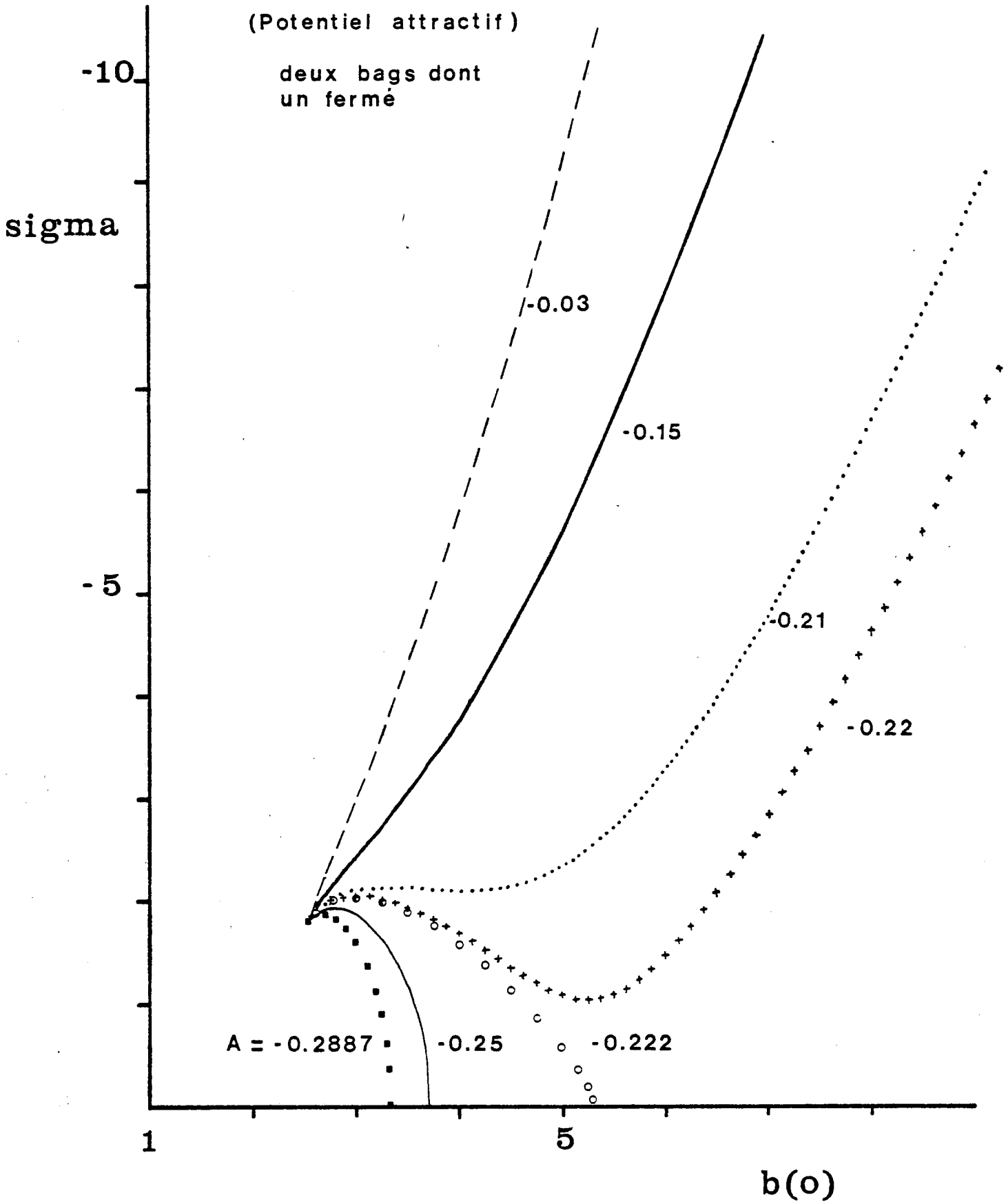

(Potentiel attractif)
deux bags dont
un fermé
-10
sigma
-5
-0.03
-0.15
-0.21
-0.22
A = -0.2887
-0.25
-0.222
1
5
b(o)

Figure 18.

obtenue en intégrant l'équation différentielle du second ordre (62) entre O et x_1. Ce potentiel étant attractif, σ sera négatif.

Remarquons enfin que a(o) se déduit de (63).

On représente sur la figure 17 cette situation (correspondant au potentiel attractif) pour différentes valeurs de la hauteur A du premier bag. Il est intéressant de remarquer que le champ E présente un extrêmum pour les valeurs de A égales à - 0.22 et - B, et suggère la possibilité d'obtenir un changement de signe du champ électrique, ce qui indique un changement de comportement du potentiel, à savoir répulsif près de l'origine et attractif ensuite.

La figure 18 montre les variations de σ en fonction de b(o) pour A donné. Cette figure indique un changement de comportement du potentiel possible pour des valeurs de A inférieures à A_{min} ($- 0.222 \leqq A_{min} < - 0.22$).

Nous avons traité le cas A = - 0.22 (figure 19) où l'on peut remarquer que le champ électrique ne change pas de signe alors que dans le cas A = - 0.25 (figure 20) on observe bien le changement de comportement du potentiel.

De plus, cette dernière figure suggère la possibilité d'obtenir des structures stationnaires périodiques, comme indiqué figure 21, obtenue en créant de nouveaux bags fermés.

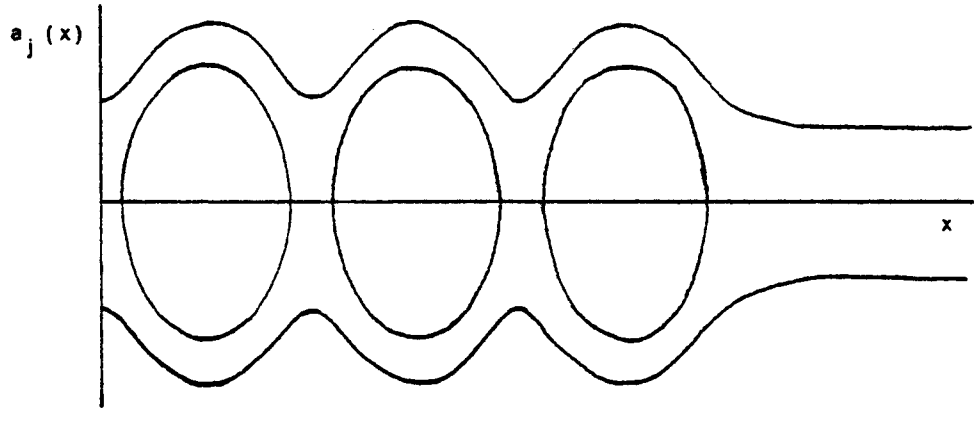


Figure 21

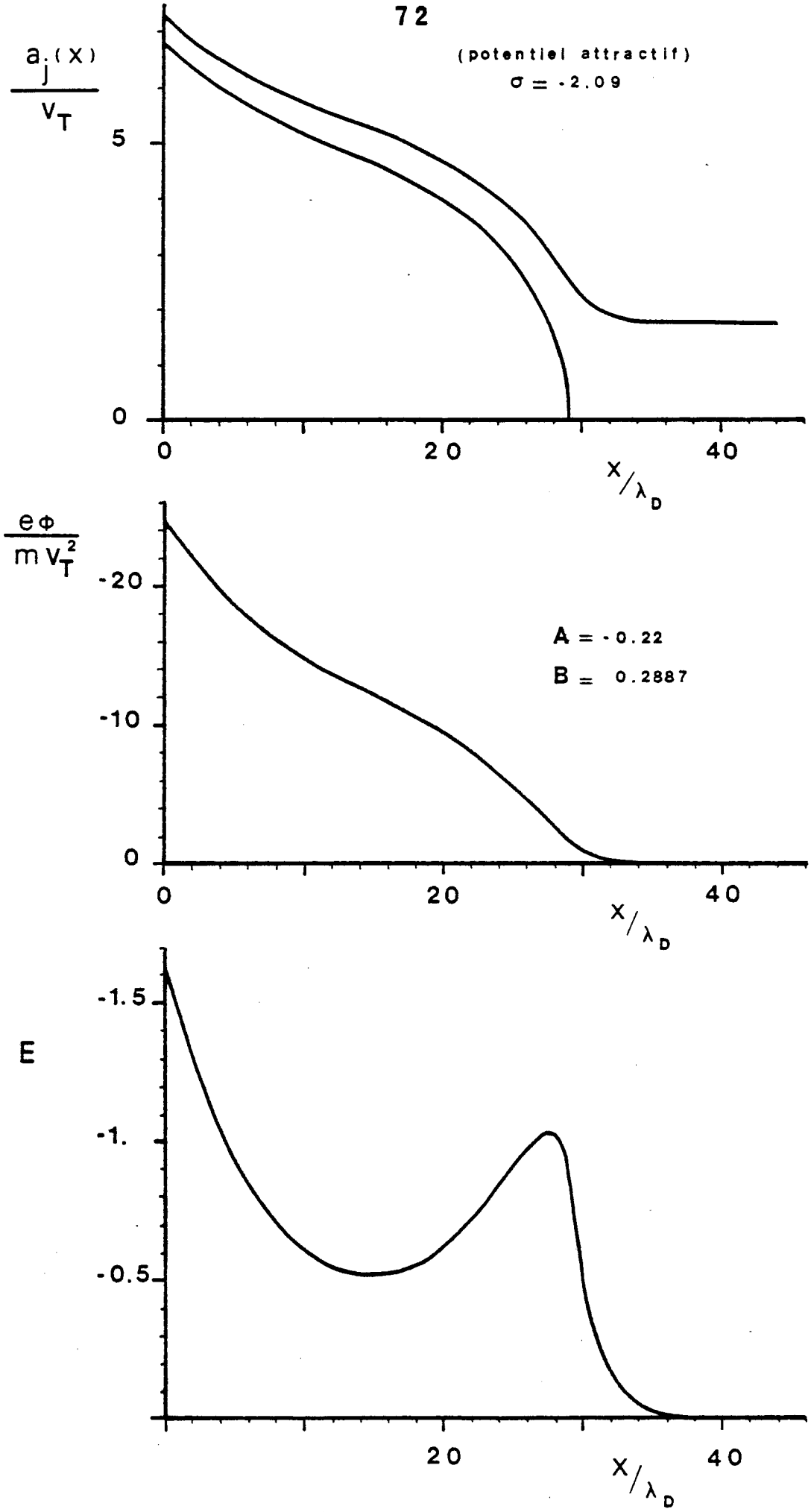


Fig. 19 Deux bags.

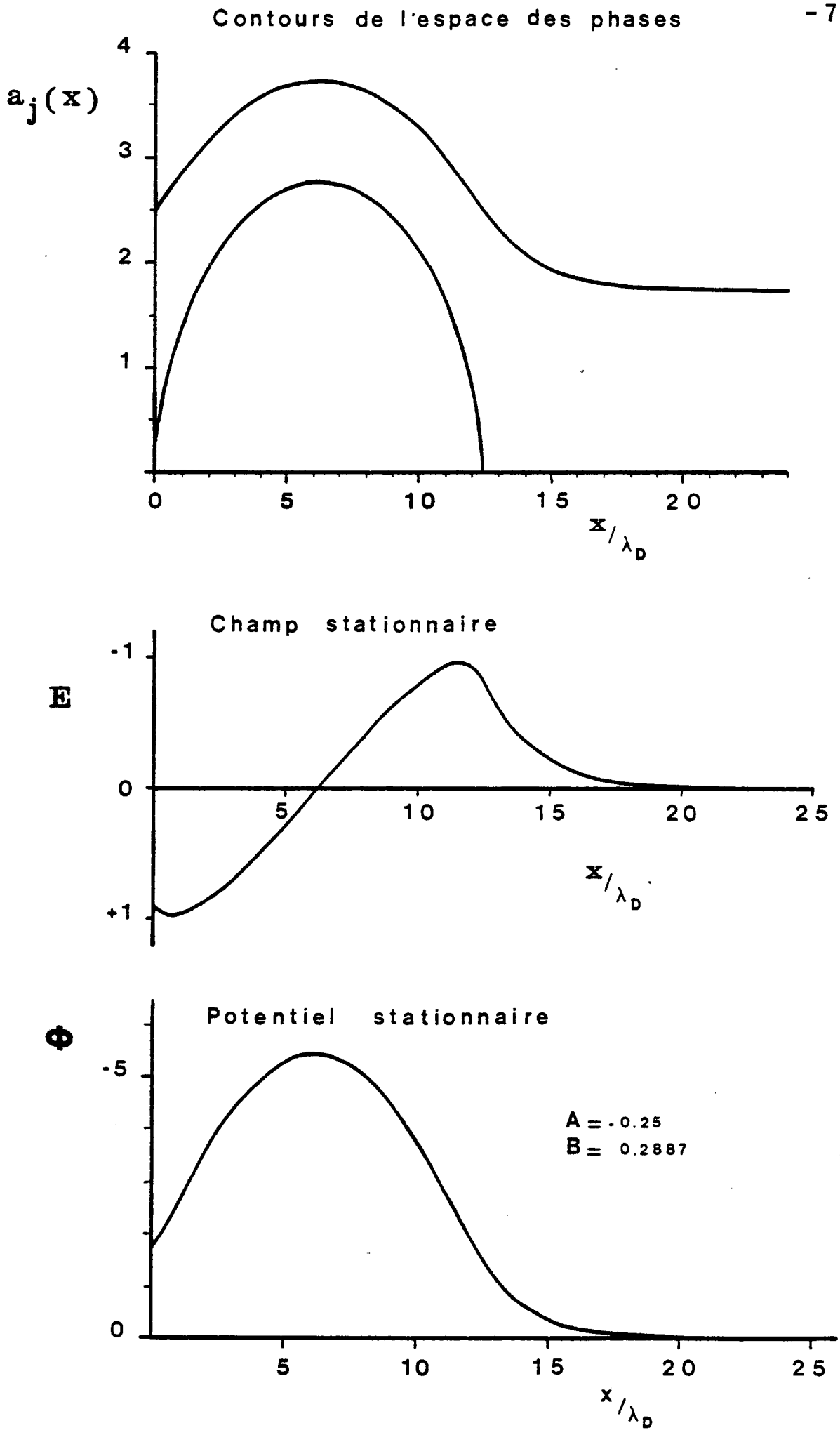


fig.20 Deux bags (Potentiel répulsif à l'origine)

Voyons maintenant la structure stationnaire (figure 22 a) où le potentiel est répulsif à l'origine et où on ouvre un second bag de façon à obtenir une fonction de distribution donnée homogène à l'infini, montrée par la figure 22 b.

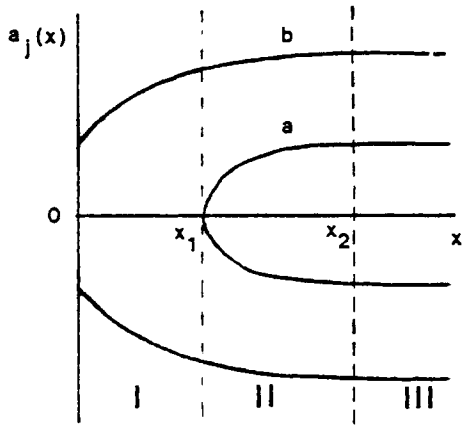


Figure 22 a

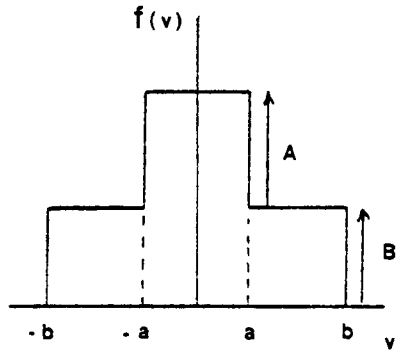


Figure 22 b

Dans la zone II, on a les équations (63) qui définissent les contours et l'équation différentielle du potentiel :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2\,a(x)\,A + 2\,b(x)\,B - 1 = 0 \qquad (65)$$

On se donne la fonction de distribution à l'infini de telle façon que $2(a(\infty)\ A + b(\infty)\ B) = 1$.

$\phi(\infty)$ étant pris égal à zéro, on obtient à l'aide de (63) :

$$C_a = \frac{a^2(\infty)}{2} \quad \text{et} \quad C_b = \frac{b^2(\infty)}{2}$$

De plus $a(x_1)$ étant égal à zéro on trouve , toujours en appliquant (63) :

$$\phi(x_1) = \frac{a^2(\infty)}{2}$$

soit $b(x_1) = (b^2(\infty) - a^2(\infty))^{1/2}$ (66)

On intègre ensuite (65) entre x, et l'infini pour obtenir $\frac{d\phi}{dx}(x_1)$, soit :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2_{x_1} = \phi(x_1) - \frac{2}{3}\left[A\,a^3(\infty) + B\left(b^3(\infty) - b^3(x_1)\right)\right] \qquad (67)$$

(le potentiel étant répulsif $\frac{d\phi}{dx}(x_1)$ est négatif).

Connaissant $\phi(x_1)$ et $\frac{d\phi}{dx}(x_1)$ on résoud alors numériquement l'équation différentielle (65).

Dans la zone I, où seul le bag b est présent, les équations sont :

$$\phi(x) + \frac{b^2(x)}{2} = C_b$$

et

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2^{3/2} B \left(C_b - \phi(x)\right)^{1/2} - 1 = 0 \qquad (68)$$

On intègre entre 0 et x_1, l'équation différentielle (68) et on obtient tous calculs faits :

$$\frac{\sigma^2}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2_{x_1} - \frac{2}{3} B \left(b^3(x_1) - b^3(0)\right) + \phi(0) - \phi(x_1) \qquad (69)$$

où σ est positif.

On se donne b(o) et en utilisant $\phi(o) = C_b - \frac{b(o)^2}{2}$ ainsi que $\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\sigma}{2}$ on résoud l'équation (68).

La figure 23 illustre cette situation.

5.2. Etude des perturbations linéarisées.

Nous nous proposons d'étudier la structure du champ électrique pour des ondes électrostatiques excitées par un dipôle supposé non couplé mécaniquement avec le milieu (Engelmann et al. 1961).

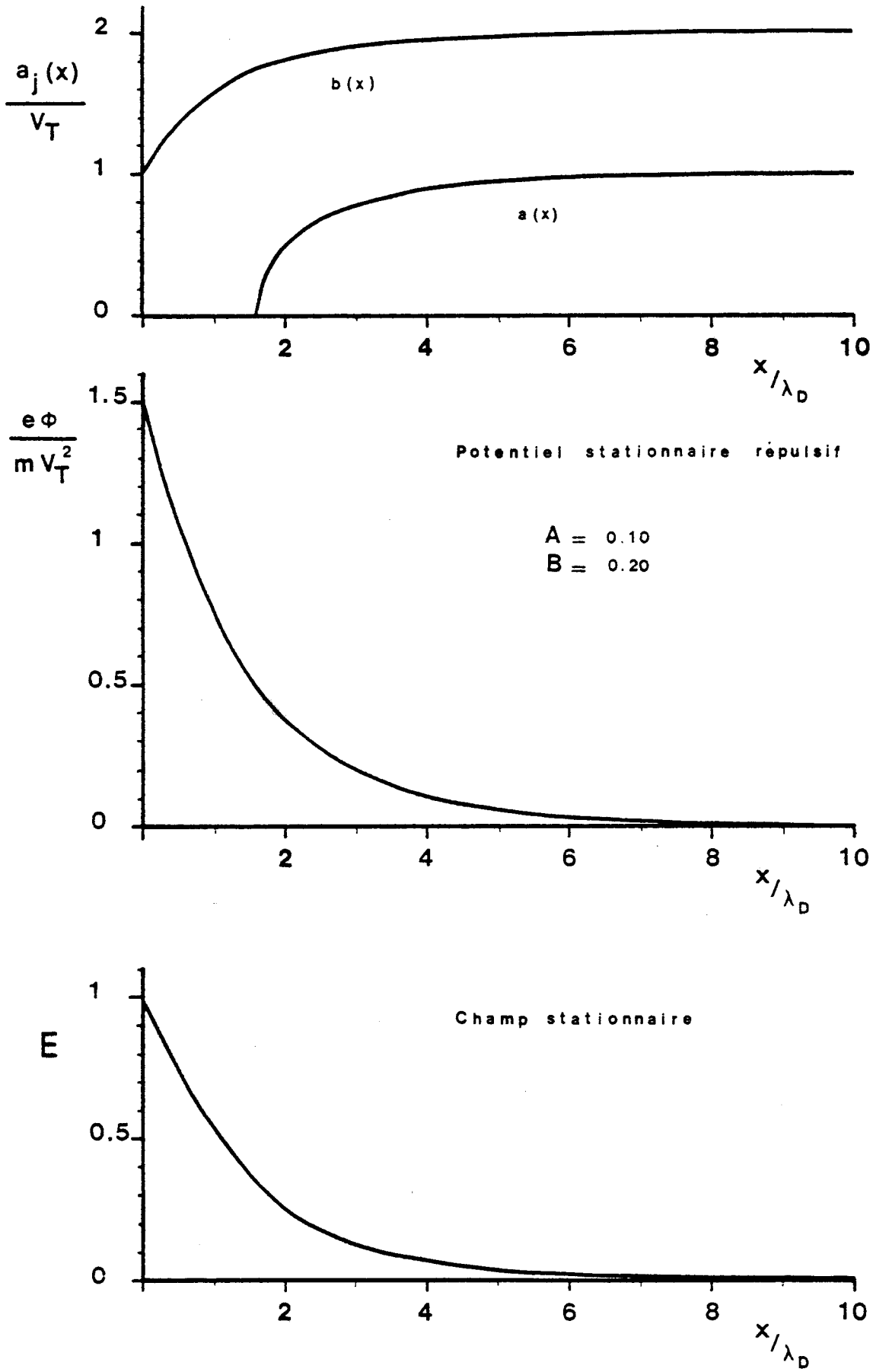


Fig.23 Deux bags.

Soit $E_{ex} = K\delta(x)$ le champ extérieur crée par ce dipôle, les équations du M.W.B. en plasma non uniforme s'écrivent :

$$\omega^2 E_j = \omega_j^2(x)\left[E_{sc} + E_{ex}\right] - a_j(x)\frac{d}{dx}\left\{a_j(x)\frac{dE_j}{dx}\right\} \qquad (70)$$

où

$$\omega_j^2(x) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0}\, 2A_j\, a_j(x)$$

Le champ self consistant E_{sc} est égal à la somme des champs partiels E_j et le champ total E_T est la somme du champ extérieur et du champ E_{sc} dû au plasma.

<u>Remarque</u> : Dans le cas homogène, a_j et ω_j sont constants, et (70) devient :

$$E_T = E_{sc} + E_{ex} = \frac{\omega^2 E_j + a_j^2 \frac{d^2 E_j}{dx^2}}{\omega_j^2} \qquad (71)$$

soit en utilisant la transformée de Fourier en k.

$$E_T = \left(\frac{\omega^2 - k^2 a_j^2}{\omega_j^2}\right) E_j \qquad (72)$$

ce qui permet d'écrire :

$$E_{sc} = \sum_{j=1}^{N} E_j = E_T \sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_j^2}{\omega^2 - k^2 a_j^2} \qquad (73)$$
$$= E_T - E_{ex}(k)$$

et finalement :

$$E_T = \frac{E_{ex}(k)}{\varepsilon(k,\omega)} \qquad (74)$$

où $\varepsilon(k,\omega)$ est la constante diélectrique du M.W.B.

$$\varepsilon(k,\omega) = 1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_j^2}{\omega^2 - k^2 a_j^2} \qquad (75)$$

Le retour à l'espace des x par transformée de Fourier inverse de (74) est aisé. Les pôles sont déterminés par les zéros de la constante diélectrique (75), à savoir N paires de zéros réels $\pm k_\alpha$ pour $\omega > \omega_p$ et $2N - 1$ paires de zéros réels plus une paire de zéros imaginaires purs $\pm ik_1$ pour $\omega < \omega_p$ (ω_p^2 étant la somme des ω_j^2). En appliquant une condition de causalité ($\omega \longrightarrow \omega - i\nu$) les pôles réels se séparent le l'axe réel comme indiqué sur la figure 24 a.

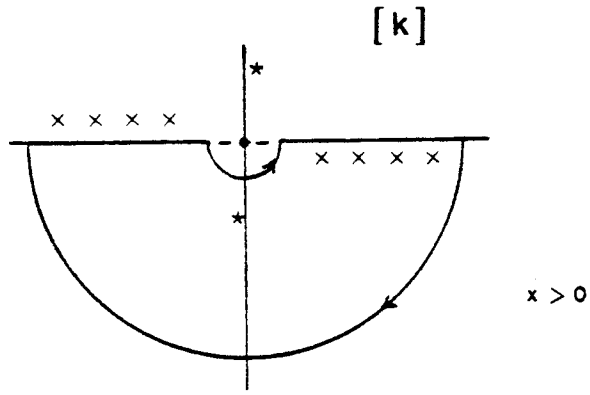


Figure 24 a.

L'intégration se fait alors dans le plan des $[k]$ par la méthode des résidus, en prenant le contour indiqué sur la figure 24 a pour x positif et son symétrique pour x négatif (NAVET, 1973).

Notons que dans le cas $\omega > \omega_p$, l'intégration ne prend en compte que les pôles $k_\alpha > 0$ pour $x > 0$, et $k_\alpha < 0$ pour $x < 0$, ce qui signifie que seules les ondes en $\exp - i\, k_\alpha\, x$ (respectivement $\exp + i\, k_\alpha\, x$) existent pour $x > 0$ (respectivement $x < 0$). En théorie des ondes c'est la relation bien connue du rayonnement.

En milieu non uniforme , on ne peut utiliser la transformation de Fourier qui nécessite l'indépendance des k, le problème doit donc être abordé différemment. Nous avons vu dans le paragraphe 4 qu'il était possible de propager le champ et sa dérivée en utilisant des produits de matrices. Par conséquent, il suffit de déterminer les conditions aux limites pour résoudre totalement le problème.

La première de ces conditions est donnée par l'hypothèse plasma homogène à l'infini et revient à utiliser la condition de rayonnement précitée.

La seconde condition nécessitera la symétrie par rapport à $x = 0$. Elle est obtenue en intégrant les équations différentielles (70) divisées respectivement par $a_j(x)$, entre $-\varepsilon$ et ε et en faisant tendre ε vers 0. Soit :

$$\omega^2 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{E_j}{a_j}\, dx = \frac{\omega_j^2}{a_j} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} E\, dx - \left[a_j \frac{dE_j}{dx} \right]_{x=\varepsilon} + \left[a_j \frac{dE_j}{dx} \right]_{x=-\varepsilon} + \frac{\omega_j^2}{a_j} K \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\, dx \qquad (76)$$

On peut , en effet, sortir $\frac{\omega_j^2}{a_j}$ de l'intégrale, car $\omega_j^2/a_j = e^2 2 A_j / m \varepsilon_0$ et ne dépend donc pas de x.

Comme le champ dérive d'un potentiel ϕ , on a :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} E\, dx = \phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[a_j \frac{dE_j}{dx} \right]_{x=\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \to 0} \left[a_j \frac{dE_j}{dx} \right]_{x=-\varepsilon} = \frac{\omega_j^2}{a_j} K \qquad (77)$$

Puisqu'on suppose la symétrie par rapport à $x = 0$, les champs seront symétriques à l'origine et leurs dérivées antisymétriques. On aura alors pour chaque bag j la relation :

$$\left(\frac{dE_j}{dx} \right)_{x=0^+} = \frac{\omega_j^2(0)}{2\, a_j^2(0)} K \qquad (78)$$

Nous allons maintenant montrer comment il faut procéder pour résoudre ce problème complexe de conditions aux limites mixtes. Pour des raisons de clarté, et de simplicité d'écriture , nous allons traiter le cas de deux bags seulement bien que cette étude soit directement généra-

lisable à N bags.

Supposons le plasma homogène pour $x \geqq L$. En appliquant la méthode des marches, on obtient :

$$\begin{bmatrix} E(o) \\ F(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(L) \\ F(L) \end{bmatrix} \qquad (79)$$

où F est la dérivée par rapport à x du champ électrique, et $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$,

E_1 et E_2 étant les champs partiels dûs aux bags 1 et 2. Les C_j sont de ce fait des matrices de dimension 2 x 2.

La matrice F(o) est donnée par les relations (78). Soit :

$$F_1(o) = \frac{K}{2} \frac{\omega_1^2(o)}{a_1^2(o)}$$

et

$$F_2(o) = \frac{K}{2} \frac{\omega_2^2(o)}{a_2^2(o)}$$

Pour $x \geqq L$, le plasma est homogène et caractérisé par la propagation de deux ondes de nombres d'ondes k_α et k_β, solutions de l'équation de dispersion :

$$1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2 - k^2 a_1^2} - \frac{\omega_2^2}{\omega^2 - k^2 a_2^2} = 0 \qquad (81)$$

Le champ électrique et sa dérivée s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} E &= G_\alpha e^{-ik_\alpha x} + G_\beta e^{-ik_\beta x} \\ F &= -ik_\alpha G_\alpha e^{-ik_\alpha x} - ik_\beta G_\beta e^{-ik_\beta x} \end{aligned} \qquad (82)$$

Dans la zone uniforme on désignera par a_j et ω_j les quantités constantes associées au bag j. On a le système d'équations différentielles :

$$\left[\omega^2 + a_1^2 \frac{d^2}{dx^2} \cdot \right] E_1 = \omega_1^2 E$$

$$\left[\omega^2 + a_2^2 \frac{d^2}{dx^2} \cdot \right] E_2 = \omega_2^2 E \qquad (83)$$

Cherchons E_1 et E_2 sous la forme :

$$E_1 = b_\alpha e^{-ik_\alpha x} + b_\beta e^{-ik_\beta x}$$

$$E_2 = b_\alpha g_\alpha e^{-ik_\alpha x} + b_\beta g_\beta e^{-ik_\beta x} \qquad (84)$$

On calcule $E = E_1 + E_2$ et on identifie avec (82). Soit :

$$b_\alpha = \frac{G_\alpha}{1+g_\alpha} \quad \text{et} \quad b_\beta = \frac{G_\beta}{1+g_\beta} \qquad (85)$$

De plus, en portant (84) dans (83) , on obtient :

$$1 + g_\alpha = \frac{\omega^2 - a_1^2 k_\alpha^2}{\omega_1^2}$$

$$(86)$$

et

$$1 + g_\beta = \frac{\omega^2 - a_1^2 k_\beta^2}{\omega_1^2}$$

Soit tous calculs faits, en posant :

$$P_{jn} = \frac{\omega_j^2}{\omega^2 - a_j^2 k_n^2}$$

$$\begin{bmatrix} E_1(L) \\ E_2(L) \\ F_1(L) \\ F_2(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1\alpha} & P_{1\beta} & 0 & 0 \\ P_{2\alpha} & P_{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ik_\alpha P_{1\alpha} & -ik_\beta P_{1\beta} \\ 0 & 0 & -ik_\alpha P_{2\alpha} & -ik_\beta P_{2\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_\alpha e^{-ik_\alpha L} \\ G_\beta e^{-ik_\beta L} \\ G_\alpha e^{-ik_\alpha L} \\ G_\beta e^{-ik_\beta L} \end{bmatrix} \quad (87)$$

l'équation (87) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} E(L) \\ F(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ H \end{bmatrix} \quad (88)$$

où

$$H = \begin{bmatrix} G_\alpha e^{-ik_\alpha L} \\ G_\beta e^{-ik_\beta L} \end{bmatrix}$$

En rapprochant (88) de (79), on obtient les deux équations

$$\begin{aligned} E(0) &= (C_1 . D_1 + C_2 . D_4) H \\ F(0) &= (C_3 . D_1 + C_4 . D_4) H \end{aligned} \quad (89)$$

F(O) étant connu (80), la deuxième équation de (89) nous donne H au prix de l'inversion d'une matrice 2 x 2 (N x N dans le cas N bags). Connaissant H, on calcule E(O) à l'aide de la première équation de (89). Il est alors aisé de propager le champ connaissant E(O) et F(O).

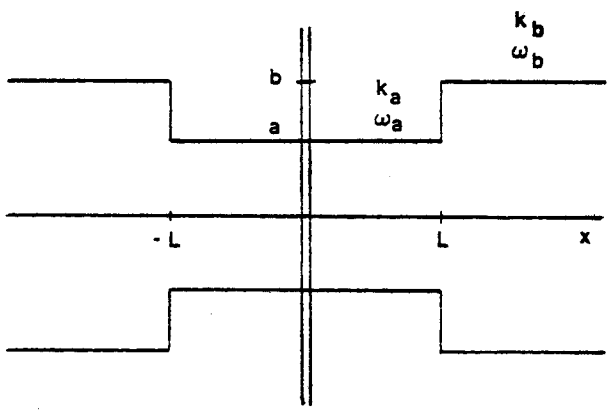
Un calcul long mais simple montre que l'on peut retrouver le résultat classique du plasma uniforme.

$$E_4(x) = P_\alpha \exp -ik_\alpha x + P_\beta \exp -ik_\beta x$$

où $P_n = (-i)\, K \left(\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial k}\right)^{-1}_{k=k_n}$ $\qquad n = \alpha, \beta .$

<u>Applications immédiates</u> :

Soit le cas d'un bag où les deux contours symétriques de l'espace des phases présentent une seule discontinuité dans le demi-plan x positif (fig. 24 b).



<u>Figure 24 b</u>

Les équations (79) et (87) s'écrivent (pour $\omega > \omega_b$) :

$$\begin{bmatrix} E(0) \\ F(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_a L & -\dfrac{b}{a}\dfrac{\sin k_a L}{k_a} \\ k_a \sin k_a L & \dfrac{b}{a}\cos k_a L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(L) \\ F(L) \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} E(L) \\ F(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -ik_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G e^{-ik_b L} \\ G e^{-ik_b L} \end{bmatrix}$$

En rapprochant ces deux équations matricielles, on obtient tous calculs faits :

$$G = \frac{iK}{2} \frac{\omega_a^2}{a^2 k_a} \frac{\exp i k_b L}{\frac{b}{a}\frac{k_b}{k_a} \cos k_a L + i \sin k_a L} \qquad (90)$$

et pour $x \geqq L$, le champ électrique est égal à $G \exp - i k_b x$.

En faisant a = b (ce qui entraine bien entendu $k_a = k_b$ et $\omega_a = \omega_b$) on retrouve bien le cas uniforme :

$$E_4 = i \frac{K}{2} \frac{\omega_a^2}{k_a a^2} \exp - i k_a x$$

<u>Note</u> : Dans le cas $\omega_a < \omega < \omega_b$, k_b est imaginaire pur et on prendra par conséquent des expressions en $\exp - |k_b x|$.

Le cas $\omega < \omega_a$ revient à considérer en plus k_a comme imaginaire pur.

On peut aussi traiter le même cas que précédemment avec cette fois-ci une excitation due à un condensateur plan de demi-largueur $\Delta < L$ (figure 24 c).

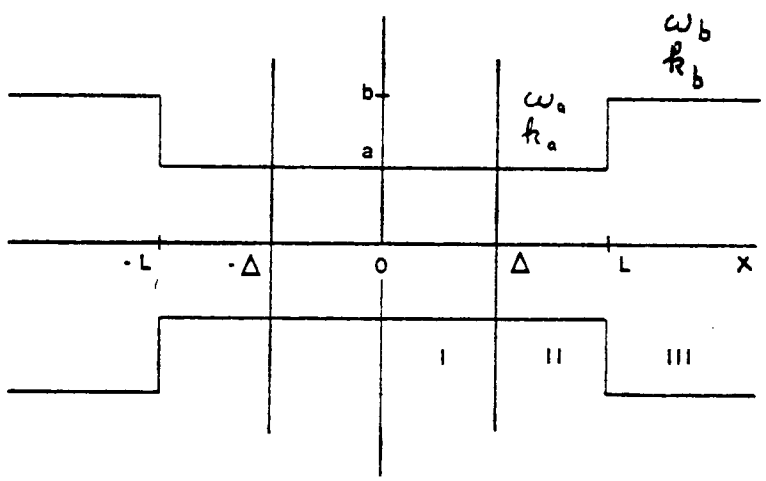


FIGURE 24 c.

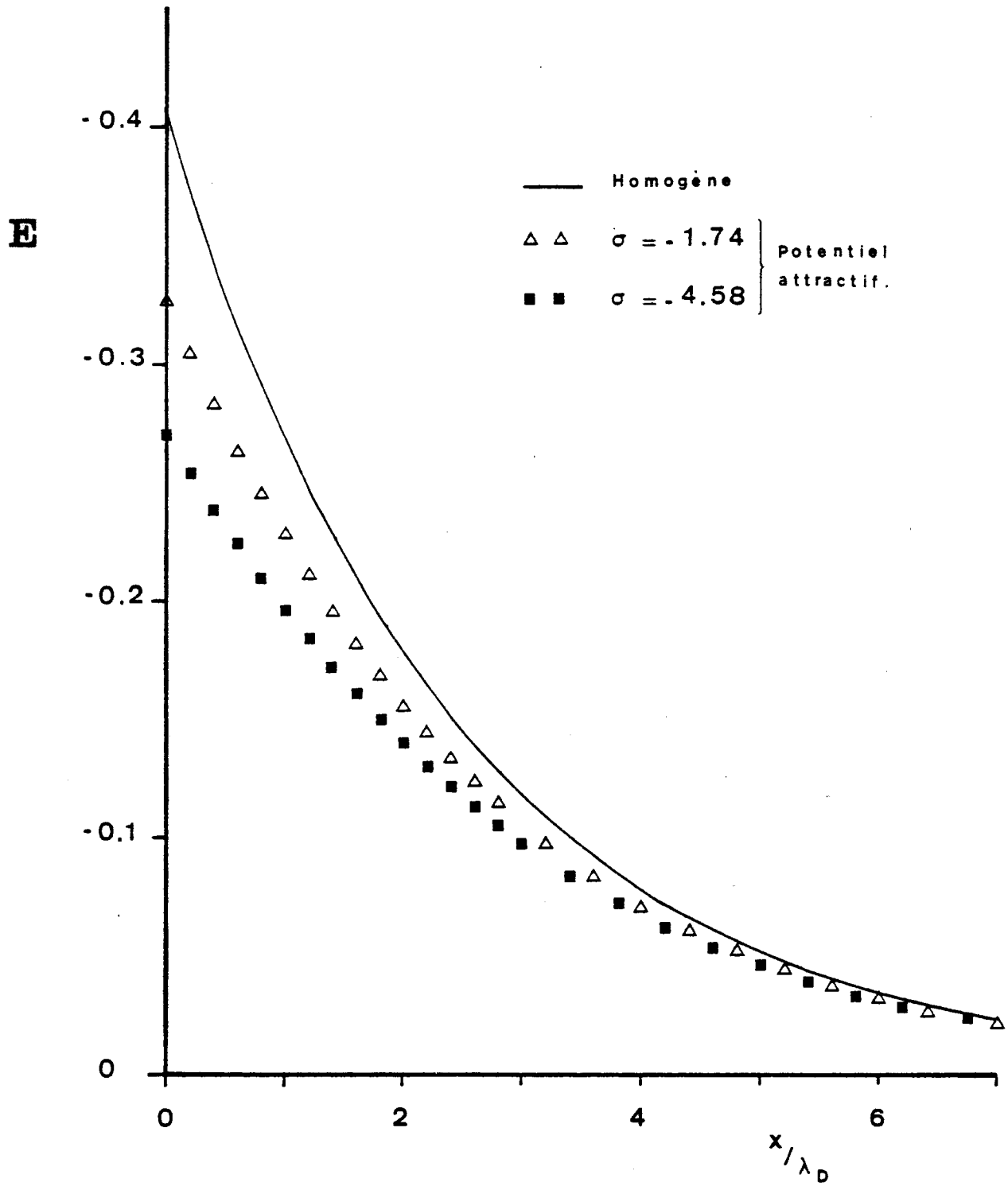


Fig.25a. Un bag. $\omega/\omega_p = 0.7$

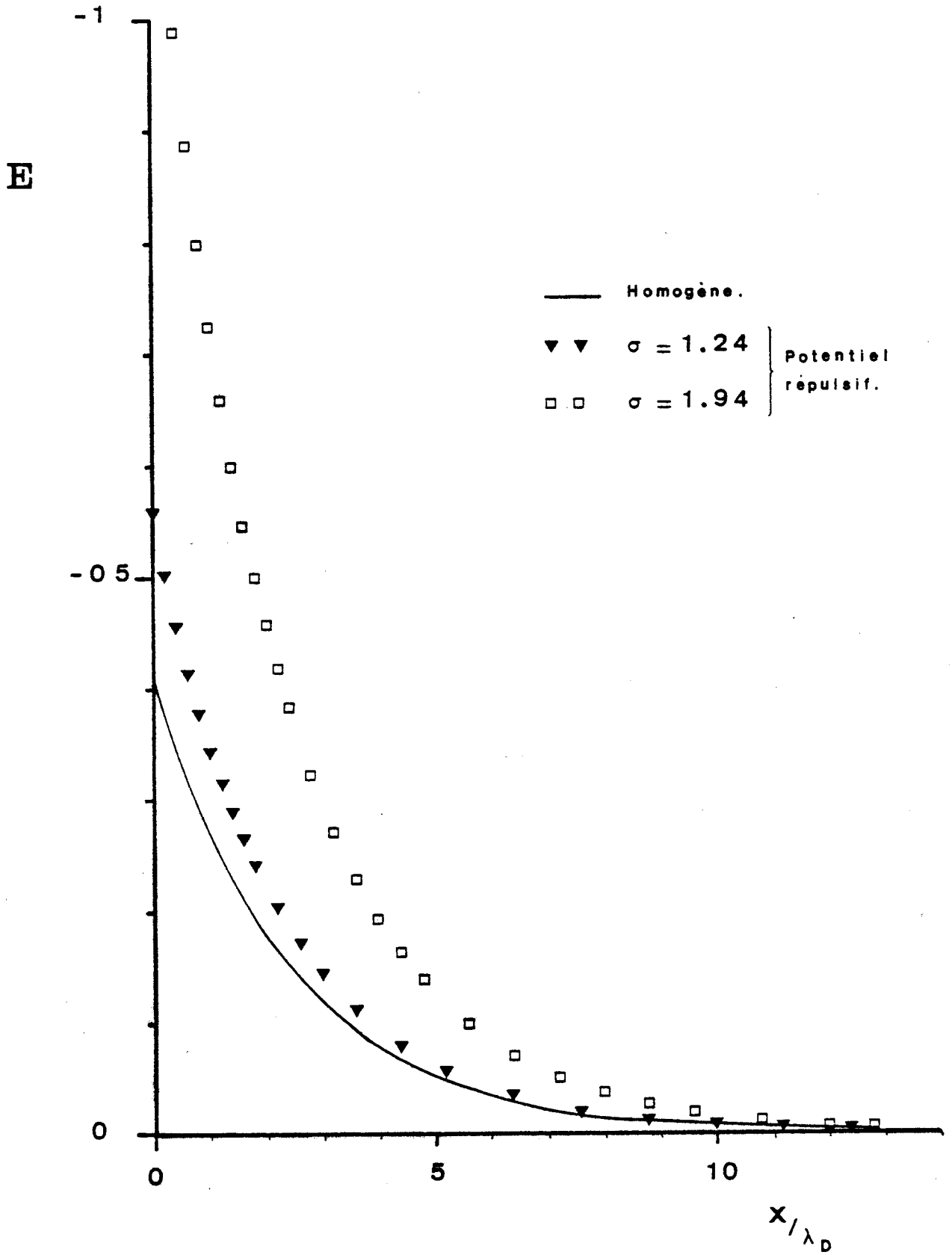


Fig.25b. Un bag. $\omega/\omega_p = 0.7$

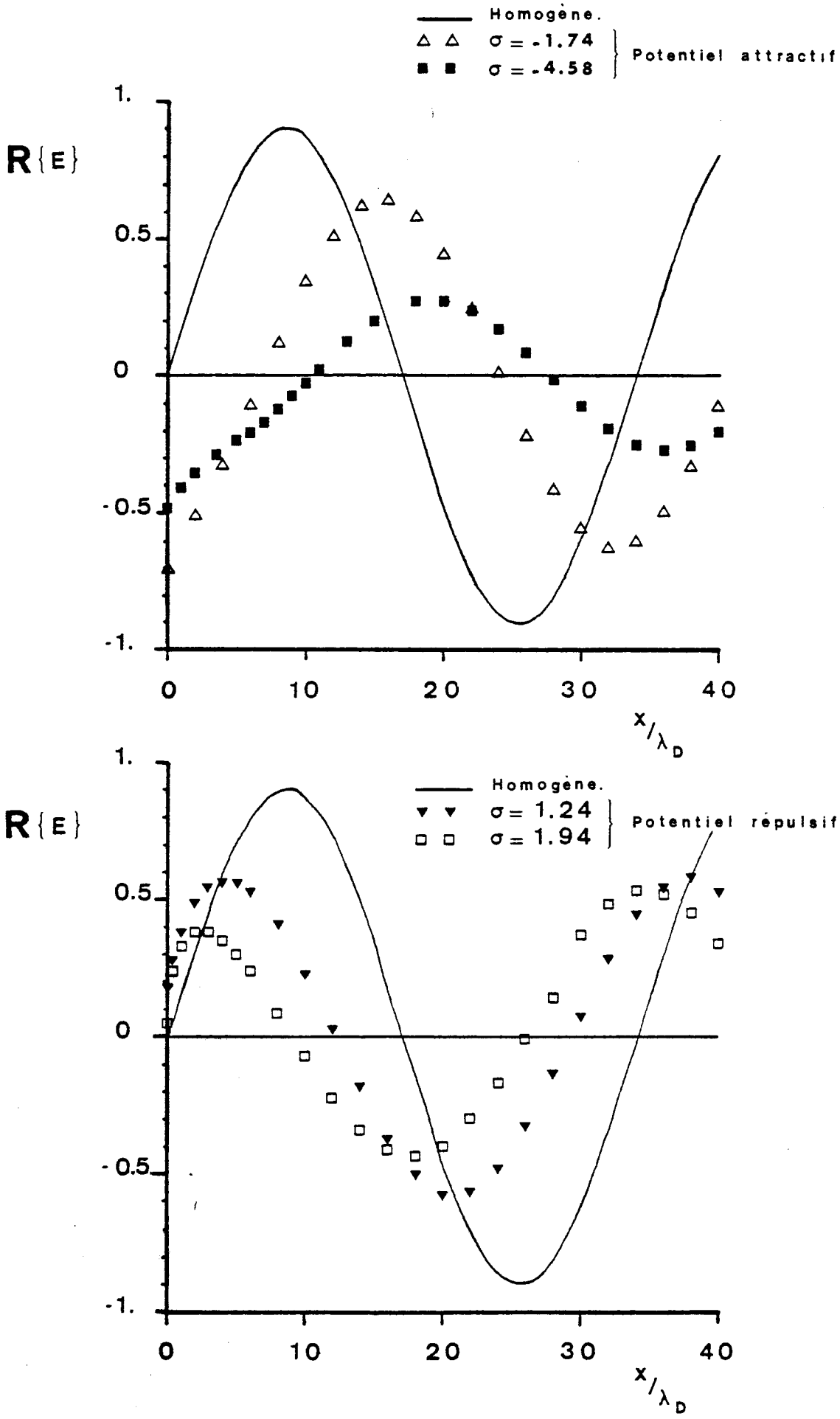
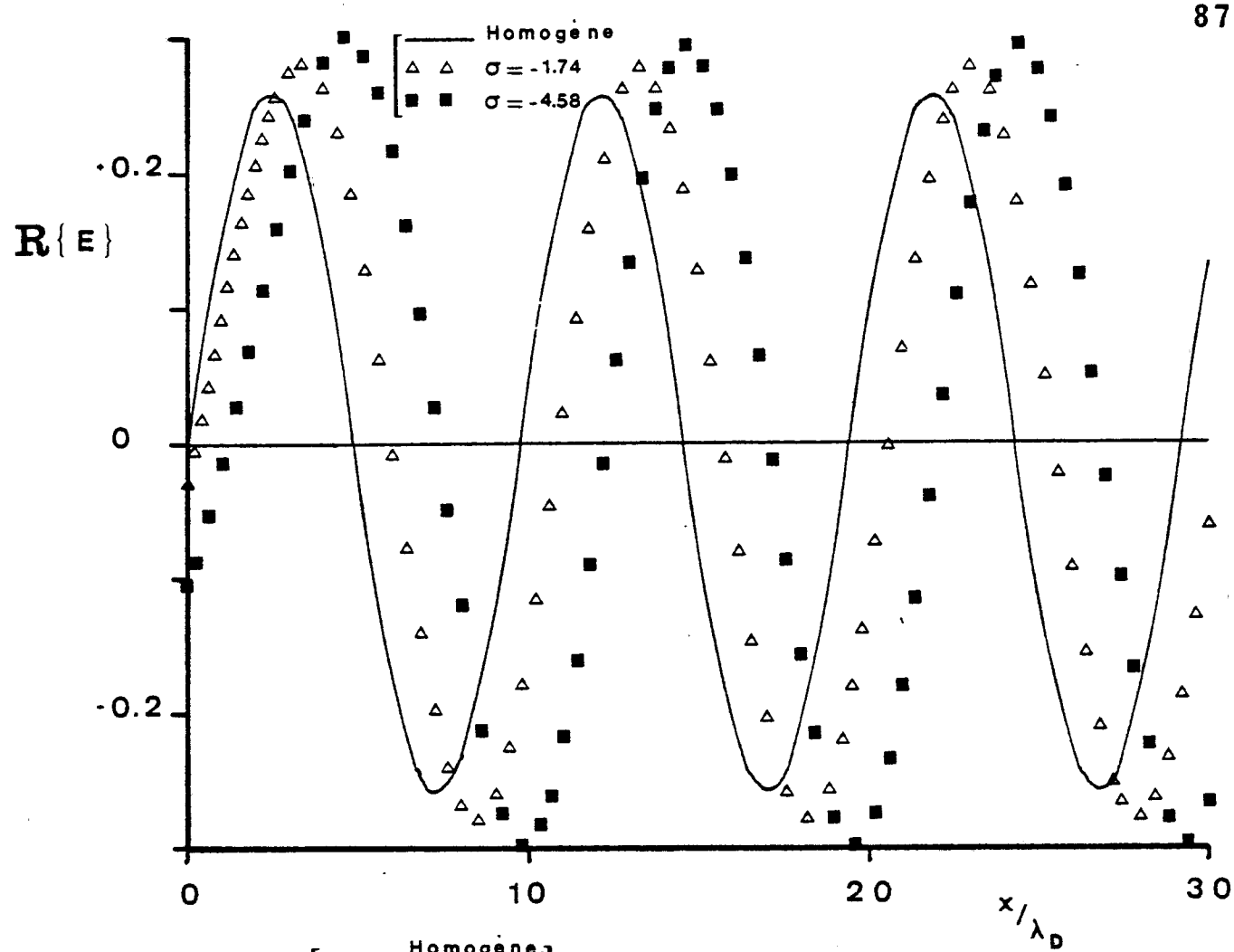


Fig.26. Un bag. $\omega/\omega_p = 1.05$



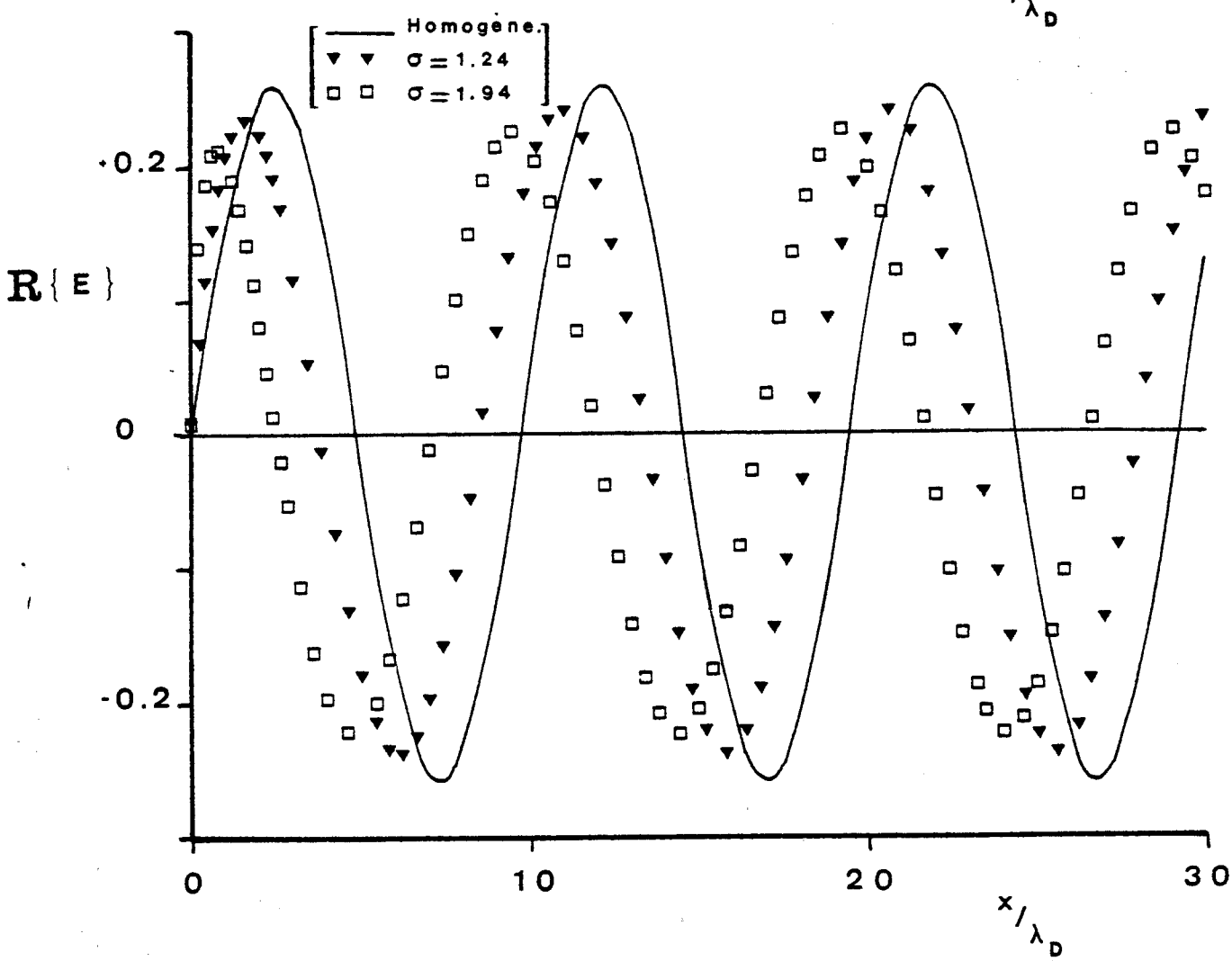


Fig. 27. Un bag. $\omega/\omega_p = 1.5$

On considère alors trois zones avec des conditions de continuités. A l'origine, on a , en tenant compte de la symétrie et de la non discontinuité des champs, $\frac{dE_{sc}}{dx} = 0$. En $x = \Delta$, on aura continuité de E_{sc} et de sa dérivée, alors qu'en L , on a continuité de E_{sc} et de $a(x)\frac{dE_{sc}}{dx}$.

On obtient alors tous calculs faits :

$$G = i\frac{K}{2}\frac{\omega_a^2}{a^2 k_a}\frac{\sin k_a \Delta}{k_a \Delta}\frac{\exp i k_b L}{\frac{b}{a}\frac{k_b}{k_a}\cos k_a L + i \sin k_a L} \qquad (91)$$

Un tel traitement analytique est plus délicat , voir impossible dans le cas d'un plus grand nombre de discontinuités des contours de l'espace des phases. Il faudra donc traiter numériquement les produits de matrices.

Pour des raisons évidentes de simplicité, mais aussi de limitations du temps de calcul et de la taille mémoire de nos programmes numériques, nous avons choisi de ne travailler qu'avec des modèles de un ou de deux bags. (Bien entendu, ces programmes peuvent être facilement généralisables pour des nombres de bags plus élevés).

<u>Cas un bag ouvert</u> :

Le cas d'un bag ouvert ne présente aucune difficulté et est traité en utilisant directement la méthode précitée, où les matrices rencontrées sont de dimension 2 x 2.

On représente, pour différentes fréquences, sur les figures 25, 26 et 27, le champ électrique en fonction de x/λ_D (où λ_D est la longueur de Debye définie par la partie homogène) pour différents potentiels stationnaires attractifs et répulsifs. On pourra de plus, comparer ces champs avec le champ du milieu, supposé uniforme , équivalent à celui qui apparaît à l'infini.

<u>Note</u> : On a représenté, pour $\omega > \omega_p$, uniquement, la partie réelle du champ. De plus, le potentiel K sera pris égal à l'unité.

Cas un bag fermé :

Ce cas est intéressant dans la mesure où on peut en donner un traitement analytique, en supposant toutefois ω grand devant ω_p, ce qui permet de tester la convergence de notre méthode de discrétisation.

Envisageons tout d'abord la méthode numérique. Si le bag se ferme en $x = x_{max}$, on a les relations (HOHL, 1969).

$$a(x_{max}) = 0$$

$$E(x_{max}) = 0 \qquad (92)$$

et $$\frac{dE}{dx}(x_{max}) = \infty$$

La dernière de ces trois conditions nous indique qu'il faut traiter à part la dernière matrice de passage. En effet, supposons x_{max} découpé en M intervalles Δx. (Figure 28 a, où M = 3).

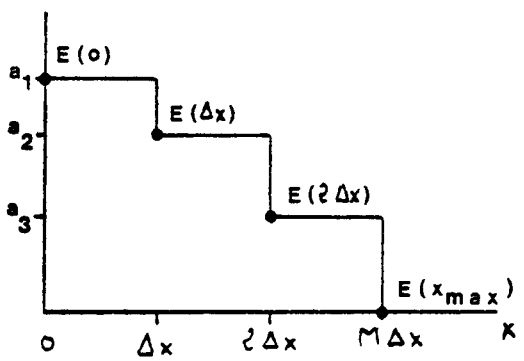


Figure 28 a : M = 3

On peut obtenir numériquement :

$$\begin{bmatrix} E\left(\{M-1\}\,\Delta x\right) \\ F\left(\{M-1\}\,\Delta x\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(o) \\ F(o) \end{bmatrix} \qquad (93)$$

La dernière matrice de passage va par contre s'écrire :

$$\begin{bmatrix} E(x_{max}) \\ F(x_{max}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_M \Delta x & \dfrac{\sin k_M \Delta x}{k_M} \\ \infty & \infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(\{M-1\}\Delta x) \\ F(\{M-1\}\Delta x) \end{bmatrix} \qquad (94)$$

En effet :

$$\frac{a_M}{a_{M+1}} = \frac{a_M}{a(x_{max})} = \infty$$

En utilisant (93), (94) et le fait que $E(x_{max}) = 0$, on obtient la valeur de $E(0)$:

$$E(0) = -F(0)\,\frac{\alpha C_2 + \beta C_4}{\alpha C_1 + \beta C_3} \qquad (95)$$

où

$$\alpha = \cos k_M \Delta x \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\sin k_M \Delta x}{k_M}$$

On obtient alors par propagation, le champ électrique en tout point. On a représenté sur la figure 28 b, E en fonction de x/λ_D pour différentes fréquences.

Voyons maintenant le traitement analytique. Nous définissons une quantité fondamentale, la période T, par la relation :

$$T = 4\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{a(x)} \qquad (96)$$

On voit donc que T représente le temps mis par une particule pour faire un tour complet en suivant le contour fermé de l'espace des phases. Cette période peut être calculée numériquement en utilisant les points qui définissent le contour stationnaire, après cependant un traitement analytique de la singularité en $x = x_{max}$.
On a :

$$T = 4\int_{0}^{x_{max}-\varepsilon} \frac{dx}{a(x)} + 4\int_{x_{max}-\varepsilon}^{x_{max}} \frac{dx}{a(x)} \qquad (97)$$

La première intégrale est calculée numériquement. Pour calculer la deuxième , nous allons déterminer une expression donnant a(x) au voisinage de x_{max} .

Sachant que $\Phi(x_{max}) = 0$, on obtient en utilisant le fait que les trajectoires sont à énergie constante.

$$\phi(x) = -\frac{a^2(x)}{2}$$

Si on suppose qu'au voisinage de $x = x_{max}$ $\frac{d\Phi}{dx}$ est constant et égal à 3, on obtient :

$$a(x) = \sqrt{6}\,(x_{max} - x)^{1/2}$$

Soit :

$$\int_{x_{max}-\varepsilon}^{x_{max}} \frac{dx}{a(x)} = 2\sqrt{\frac{E}{6}} \qquad (98)$$

Pour calculer le champ électrique à l'origine, nous allons supposer ω grand devant $\omega_p(0)$, on a alors l'équation :

$$\omega^2 E + a(x)\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dE}{dx}\right) = 0$$

qui s'écrit en utilisant la variable de Lagrange $\theta = \int_0^x \frac{dx}{a(x)}$

$$\frac{d^2 E(\theta)}{d\theta^2} + \omega^2 E(\theta) = 0 \qquad (99)$$

qui admet la solution bien connue

$$E(\theta) = C \cos \omega\theta + D \sin \omega\theta \qquad (100)$$

On choisit $\theta = 0$ à $x = 0$ et $\theta = \theta_m$ à $x = x_{max}$.

Sachant que $E(\theta_m)$ doit être nul, (100) s'écrit encore :

$$E(\theta) = E(0) \left[\cos \omega\theta - \operatorname{cotg} \omega\theta_m \cdot \sin \omega\theta \right] \qquad (101)$$

De plus $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{x=0} = \frac{K}{2} \frac{\omega_p^2(0)}{a^2(0)} = \frac{1}{a(0)} \frac{dE}{d\theta}(0)$. On obtient alors tous calculs faits :

$$E(0) = -\frac{K}{2} \frac{\omega_p^2(0)}{a(0)\,\omega} \operatorname{tg} \omega\theta_m \qquad (102)$$

Nous avons pris $a(0) = 2.5$, $\omega_p^2(0) = 1$ et $K = 1$. Soit, en remarquant que $\theta_m = \frac{T}{4}$,

$$E(0) = -\frac{1}{5} \frac{\operatorname{tg}(\omega T/4)}{\omega} \qquad (103)$$

On aura donc des résonances pour $\frac{\omega T}{4} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

La première est obtenue pour $\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq \frac{2\pi}{3.56} \simeq 1.76$.

L'équation (101) nous indique que le champ électrique $E(\theta)$ peut présenter des extrêmums donnés par la relation :

$$\operatorname{tg} \omega\theta = -\operatorname{cotg} \frac{\omega T}{4} \qquad (104)$$

Tous ces résultats sont bien en accord avec ceux de la figure 28 b.

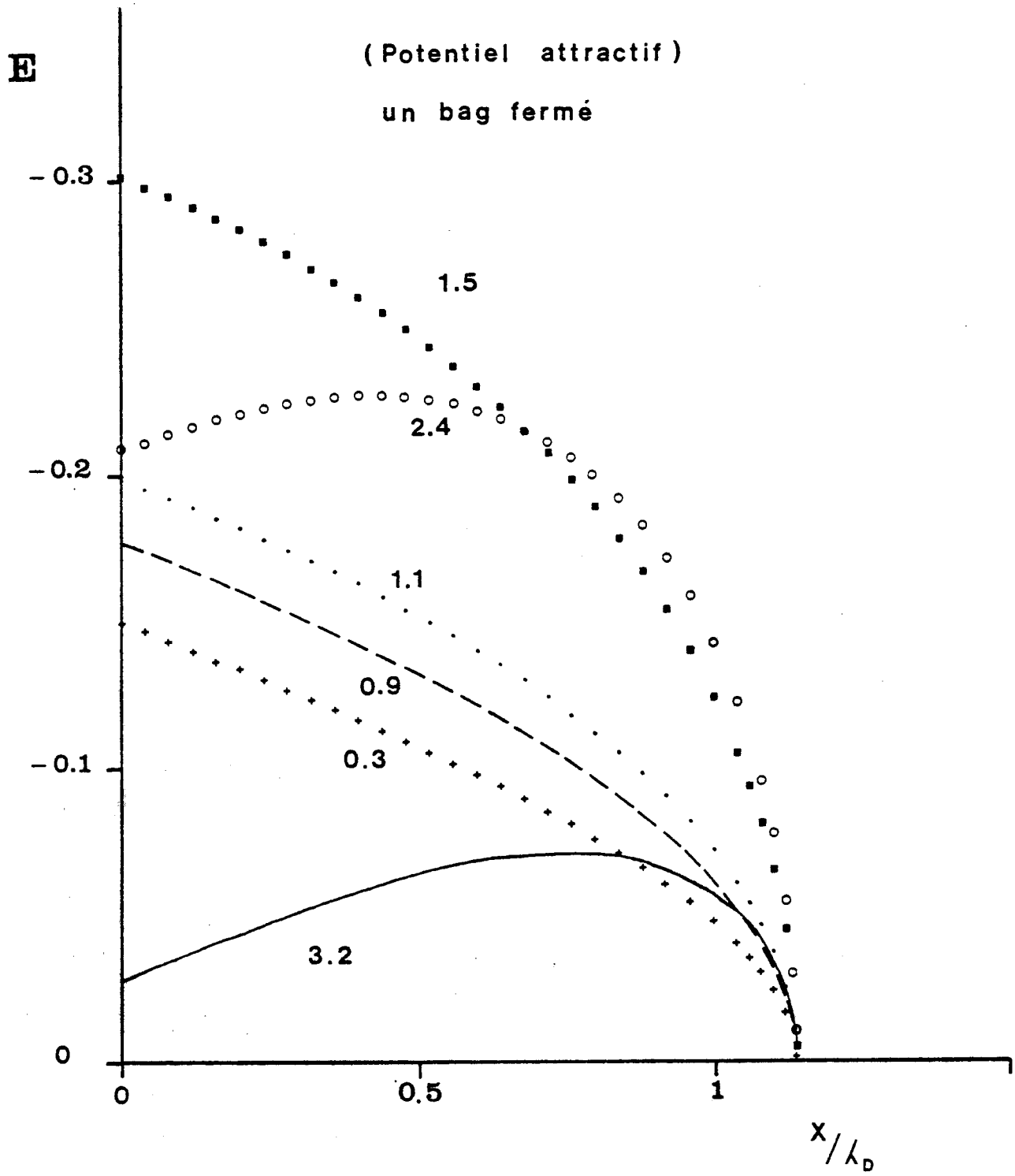

E
(Potentiel attractif)
un bag fermé
-0.3
-0.2
-0.1
0
1.5
2.4
1.1
0.9
0.3
3.2
0
0.5
1
X/λD

Figure 28b.

Cas deux bags dont un fermé :

Considérons le cas de deux bags dont un fermé indiqué sur la figure 16 a. La zone III étant homogène , on a :

$$\begin{bmatrix} E_b(x_2) \\ F_b(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -ik_\infty \end{bmatrix} . e^{-ik_\infty x_2} . \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} \qquad (105)$$

où E_b désigne le champ partiel relatif au second bag b.

Dans la zone II, on écrira :

$$\begin{bmatrix} E_b(x_1) \\ F_b(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_b(x_2) \\ F_b(x_2) \end{bmatrix} \qquad (106)$$

En utilisant (105) et (106) , on obtient deux équations :

$$E_b(x_1) = (d_1 - ik_\infty d_2)\, G\, e^{-ik_\infty x_2} \qquad (107)$$

$$F_b(x_1) = (d_3 - ik_\infty d_4)\, G\, e^{-ik_\infty x_2} \qquad (108)$$

Dans la zone I, où deux bags sont en présence, la propagation se fera à l'aide de matrices de dimensions 2 x 2. Les conditions $E_a(x_1) = 0$, et $\frac{dE_a}{dx}(x_1) = \infty$ seront traités d'une façon analogue à celle exposée dans le cas d'un bag fermé.

On obtient tous calculs faits :

$$\begin{bmatrix} E_a(x_1) \\ E_b(x_1) \\ F_a(x_1) \\ F_b(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(0) \\ E_b(0) \\ F_a(0) \\ F_b(0) \end{bmatrix} \qquad (109)$$

On obtient alors les trois équations :

$$0 = C_1\, E_a\,(0) + C_2\, E_b\,(0) + C_3\, F_a\,(0) + C_4\, F_b(0) \qquad (110)$$

$$E_b(x_1) = C_5\, E_a(0) + C_6\, E_b(0) + C_7\, F_a(0) + C_8\, F_b(0) \qquad (111)$$

$$F_b(x_1) = C_{13}\, E_a(0) + C_{14}\, E_b(0) + C_{15}\, F_a(0) + C_{16}\, F_b(0) \qquad (112)$$

Comme nous l'avons vu précédemment $F_a(0)$ et $F_b(0)$ sont connus.

La première équation donne donc une relation entre $E_a(0)$ et $E_b(0)$.

En utilisant (107), (111) et (108), (112) on trouve :

$$(d_1 - i k_\infty d_2)\, G\, e^{-i k_\infty x_2} = C_5\, E_a(0) + C_6\, E_b(0) + C_7\, F_a(0) + C_8\, F_b(0) \qquad (113)$$

$$(d_3 - i k_\infty d_4)\, G\, e^{-i k_\infty x_2} = C_{13}\, E_a(0) + C_{14}\, E_b(0) + C_{15}\, F_a(0) + C_{16}\, F_b(0) \qquad (114)$$

On peut éliminer la variable G entre ces deux équations et obtenir la seconde relation entre $E_a(0)$ et $E_b(0)$ qui permet avec (110) de déterminer ces deux inconnues.

Le problème est alors résolu puisque nous connaissons les champs partiels et leurs dérivées à l'origine qu'il suffit de propager.

Les figures 29, 30 et 31 montrent l'évolution de la partie réelle du champ électrique pour différentes valeurs de la hauteur A du bag fermé.

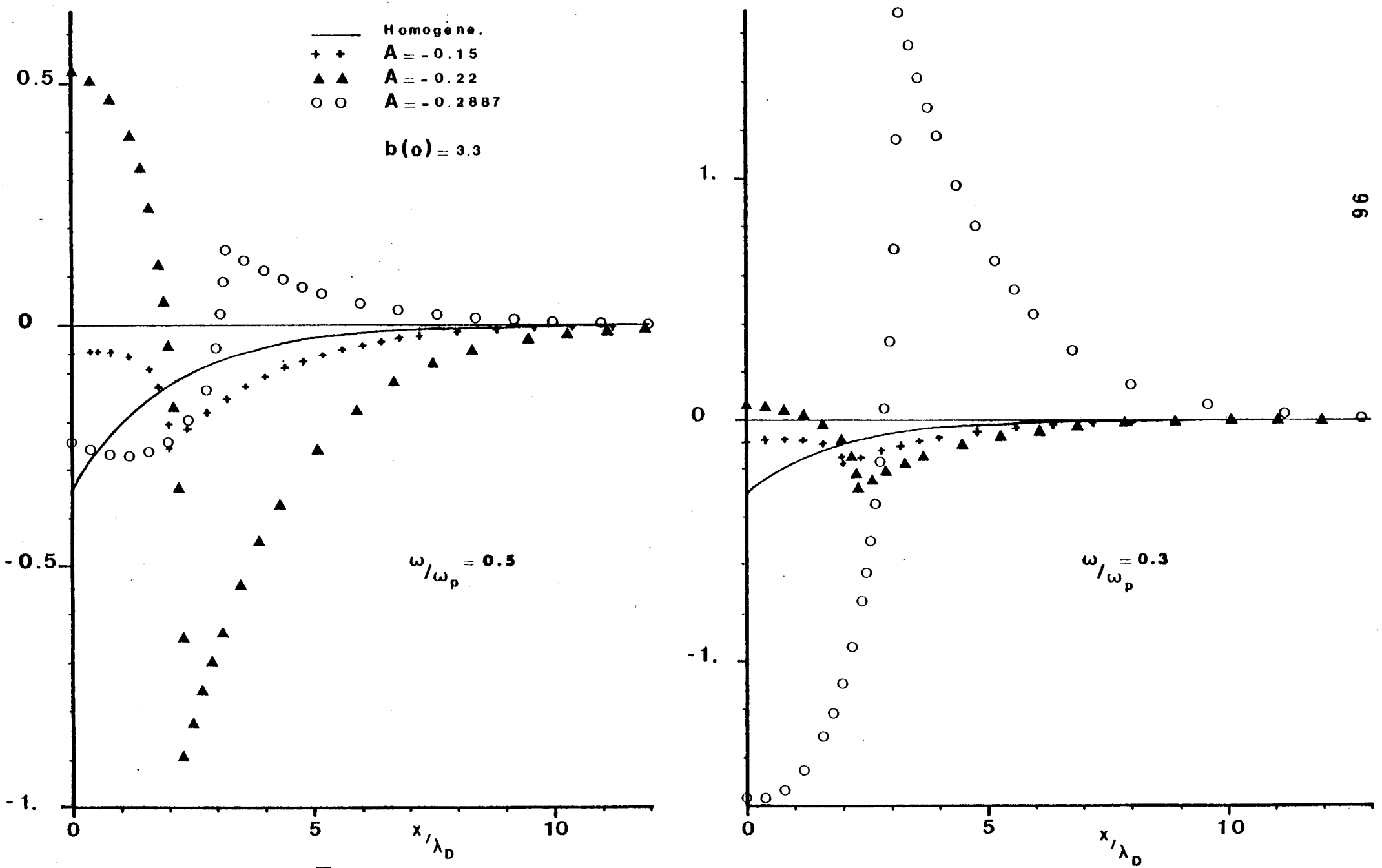


Fig. 29. Deux bags.

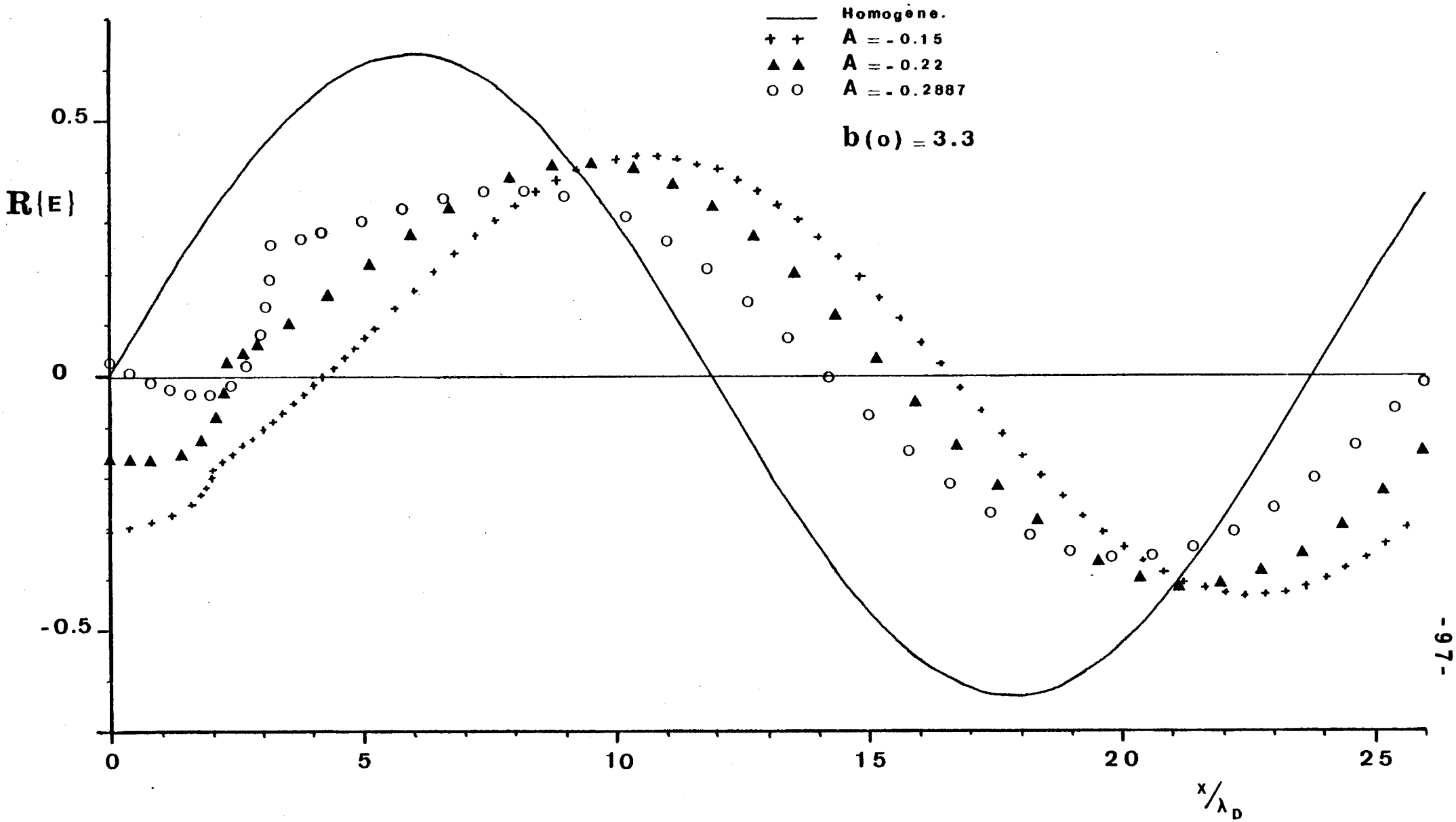


Fig.30. Deux bags. $\omega/\omega_p = 1.1$

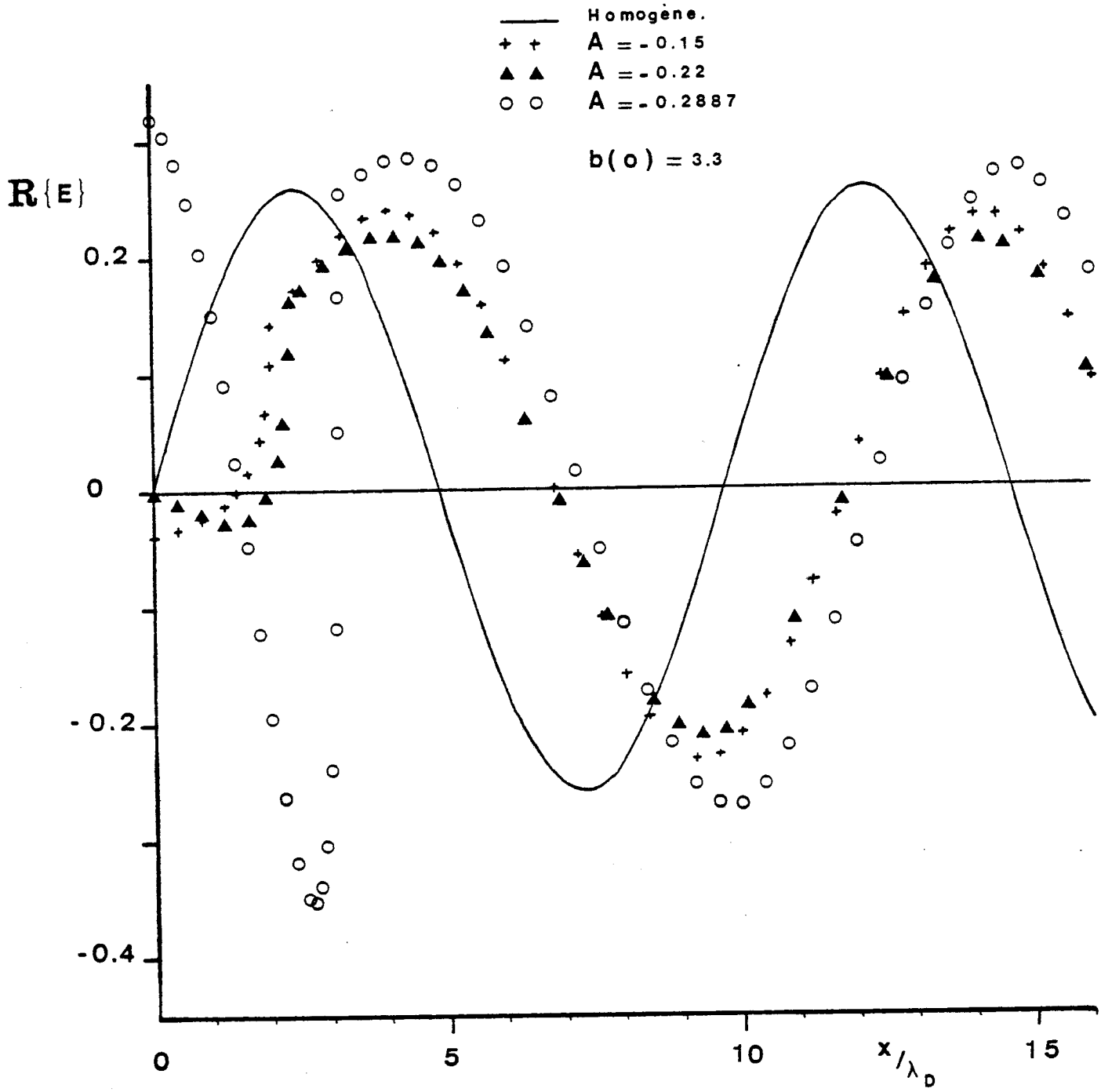


Fig.31. Deux bags. $\omega/\omega_p = 1.5$

6. CONCLUSION.

L'idée maîtresse de ce second chapitre était de considérer des problèmes de perturbations linéarisées d'équilibres spatialement inhomogènes. Nous les avons abordés sous l'angle du "Multiple Water Bag" qui, rappelons-le, est entre autre, une bonne représentation numérique de la fonction de distribution des vitesses. Une des propriétés, et non des moindres, de ce modèle est de ramener l'étude complète de l'évolution temporelle du système à celle de l'évolution des contours dans l'espace des phases.

Nous avons développé deux méthodes pour approximer ces contours : la méthode des "rampes" et celle des "marches". A la première qui est une méthode purement numérique, nous avons préféré la seconde pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle relève d'une philosophie analogue à celle qui consiste à discrétiser la fonction de distribution par une fonction en escalier. A ce titre, elle mérite le qualificatif de méthode analytico-numérique puisque la propagation le long de chaque marche ainsi que les discontinuités du premier ordre associées aux marches ont été traitées analytiquement.

De plus, elle ne nécessite qu'un temps de calcul relativement court. Enfin, et c'est peut-être la propriété la plus intéressante, elle est facilement généralisable à N bags en utilisant des exponentielles de matrices.

Nous avons , ensuite, étudié quelques cas de structures stationnaires non linéaires avec des modèles à un ou deux bags. En particulier, nous avons montré que, dans le cas d'un modèle constitué de deux bags : un bag extérieur ouvert et un bag intérieur fermé , ce dernier indiquant la présence de particules piégées, on pouvait obtenir un changement de signe du champ stationnaire. Ce phénomène se produit à condition que la hauteur négative du second bag qui représente alors l'importance du trou créé dans la fonction de distribution des vitesses de l'espace des phases, soit suffisamment grande. Cette constatation permet de montrer qu'il est possible d'obtenir des structures stationnaires, non linéaires, périodiques, analogues à celles rencontrées par FINZI.

Pour l'étude de la propagation d'ondes électrostatiques en plasma non uniforme, nous avons considéré l'introduction dans le milieu d'un dipôle excitateur créant un champ extérieur $K\,\delta(x)$.

Nous avons, alors, été amenés à considérer un système de conditions aux limites mixtes, constituées par l'introduction de l'hypothèse plasma homogène à l'infini et par la détermination des dérivées des champs partiels à l'origine.

En utilisant ces conditions aux limites, nous avons pu déterminer l'évolution du champ électrique correspondant aux différents états d'équilibre considérés précédemment. On a pu ainsi, en particulier, mettre en évidence l'influence des particules piégées.

Pour finir, nous allons considérer quelques problèmes qu'il serait intéressant de résoudre pour compléter cette étude.

Un premier problème qui apparaît en filigrane de ce travail, est, non seulement de généraliser plus systématiquement les différents concepts au cas d'un nombre plus élevé de bags, mais aussi d'envisager d'autres conditions aux limites. En particulier,on peut penser à l'étude des ondes électrostatiques crées par un condensateur plan de largeur finie ou par un système constitué de plusieurs grilles.

De plus, en ce qui concerne l'étude des structures stationnaires non linéaires, on peut citer le problème des ondes B.G.K. qui consiste, pour un potentiel $\Phi(x)$, donné, à déterminer la fonction de distribution qui décrit le phénomène. Ceci est faisable en utilisant la remarque concernant la possibilité d'inverser le signe du champ stationnaire, à l'aide de l'introduction de nouveaux bags à structure fermée.

On peut enfin citer le cas où la fonction de distribution dépendant de x et de v est totalement déterminée en posant :

$$f(x,v) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_0}{V_T} \exp -\beta\,\Phi(x) \;.\; \exp -\frac{\beta v^2}{2 V_T^2}$$

$\Phi(x)$ étant le potentiel stationnaire obtenu par l'équation de Poisson où la densité des électrons sera prise égale à $N_0 \exp -\beta\Phi$.

Le problème sera alors en utilisant le modèle "Multiple Water-Bag" comportant des bags fermés, de déterminer l'évolution des contours.

BIBLIOGRAPHIE

H.L. BERK, K.V. ROBERTS, Methods in Computational Physics, Vol. 9 p. 87 Academic Press (1970).

I. BERSTEIN, J. GREENE, M. KRUSKAL, Physical Review, 108, 546 (1957).

P. BERTRAND, Thèse d'état - Université de Nancy I C.N.R.S. n° A.O. 7002 (1972).

P. BERTRAND, J.P. DOREMUS, G. BAUMANN, and M.R. FEIX, Phys. Fluids 15, 1275 (1972).

H.W. BLOOMBERG and H.L. BERK, J. Plasma Phys. 9, 235 (1973).

H.W. BLOOMBERG, Phys. Fluids 17, 1404 (1974).

D.C. DE PACKH, Journal of Electronics and Control, 13, 417 (1962).

J.P. DOREMUS, M.R. FEIX, Astr. Astrophys. 20, 259 (1972).

J.E. DRUMMOND, R.A. GERWIN, B.G. SPRINGER, Journal of Nuclear Energy (Part C), 2, 98 (1961).

F. ENGELMANN, M.R. FEIX, E. MINARDI, Il Nuovo Cimento, XXX, 830 (1963).

U. FINZI, Thèse d'Etat - Université de PARIS VII C.N.R.S. n° A.O. 8258 (1973).

F. HOHL, M.R. FEIX, J. Astrophys. 147 , 1164 (1967).

F. HOHL, Phys. Fluids 12 , 230 (1969).

A. NADEAU, J. GUYARD, M.R. FEIX, Mathematics of Computation, 28, 1057 (1974).

M. NAVET, P. BERTRAND, Physics Letters, 34 A , 117, (1971).

M. NAVET, Thèse de 3ème cycle - Université d'ORLEANS (1973).

M.L. NOYER, M. NAVET and M.R. FEIX, J. Plasma Phys. 13, 63 (1975).

L.D. STATON, Thèse Virginia Polytechnic Institute (1968).

CRPE
Centre de Recherches
en Physique de l'Environnement
terrestre et planétaire

Avenue de la Recherche scientifique
45045 ORLEANS CEDEX

Département PCE
Physique et Chimie
de l'Environnement

Avenue de la Recherche scientifique
45045 ORLEANS CEDEX

Département ETE
Etudes par Télédétection
de l'Environnement

CNET - 38-40 rue du général Leclerc
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX

CNET Imp 75/1163