



**HAL**  
open science

## Appareil de mesure pour sondes à plasma électrodynamiques en mode actif et passif

R. Massif, Tan-Kue Phan

► **To cite this version:**

R. Massif, Tan-Kue Phan. Appareil de mesure pour sondes à plasma électrodynamiques en mode actif et passif. [Rapport de recherche] Note technique CRPE n° 52, Centre de recherches en physique de l'environnement terrestre et planétaire (CRPE). 1978, 152 p. hal-02191367

**HAL Id: hal-02191367**

**<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02191367>**

Submitted on 23 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RP 182 (28)  
**CENTRE NATIONAL D'ETUDES  
DES TELECOMMUNICATIONS**

**CENTRE NATIONAL DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**CENTRE DE  
RECHERCHES  
EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT  
TERRESTRE  
ET PLANETAIRE**

# CRPE

**NOTE TECHNIQUE  
CRPE / 52**

*appareil de mesure  
pour sondes à plasma  
électrodynamiques  
en mode actif et passif*

*par  
Richard MASSIF  
et  
Tan-Khue PHAN*

CRPE/PCE  
45045 ORLÉANS CÉDEX

26 MARS 1979

CENTRE DE RECHERCHE EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT TERRESTRE ET PLANETAIRE

NOTE TECHNIQUE CRPE/52

Appareil de mesure pour sondes à plasma électrodynamiques  
en mode actif et passif

par

MASSIF R. et PHAN TAN-KHUE

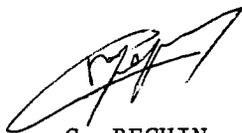
C.R.P.E./P.C.E.

45045 - ORLEANS CEDEX

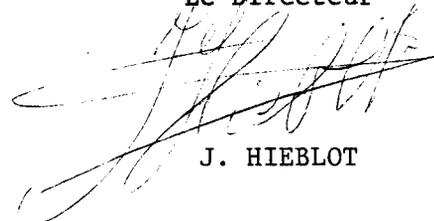


3

Le Chef du Département PCE

  
C. BEGHIN

Le Directeur

  
J. HIEBLOT

Janvier 1978

## REPARTITION DES TRAVAUX

Cette présente note est le résultat de travaux techniques effectués par Messieurs MASSIF R. et PHAN TAN KHUE au laboratoire du C.R.P.E. sous l'initiative de M. L.R.O. STOREY, en vue de confirmer les travaux théoriques de M. POTTELETTE sur la métrologie du plasma ionosphérique par la mesure de l'impédance de transfert et celle de la densité spectrale de la puissance croisée de signaux collectés par une sonde quadripolaire plongée dans le milieu.

Dans un premier temps, M. PHAN s'est vu confier la conception et la mise au point de l'électronique des sondes, du mode actif (mesure de l'impédance de transfert) et du mode passif (mesure de la densité spectrale).

Dans un deuxième temps, par suite d'une réorganisation des équipes de travail au sein du laboratoire, c'est M. MASSIF que l'on a chargé de la responsabilité de la conception électronique, de la réalisation et du fonctionnement de l'appareil servant à la mesure de la densité spectrale, effectuée par M. POTTELETTE avec la collaboration de M. I.L. FREESTON de l'Université de Sheffield (G.B.), tandis que M. PHAN se voyait confier, en collaboration avec M. GILLE, la gestion de l'informatique et de la programmation du T 2000 pour les essais expérimentaux en caisson de laboratoire qui ont eu lieu en mars et avril 1977. Enfin M. ILLIANO a participé à la coordination des travaux dans leur ensemble.

## REMERCIEMENTS

Les auteurs témoignent leur reconnaissance à M. L.R.O. STOREY qui les a aidés de ses conseils et notamment pour la rédaction de cet ouvrage.

Ils remercient vivement Melle FOURNIER pour les soins qu'elle a apportés dans la frappe de cette note technique et également Melles REVIL et SAVIN qui ont bien voulu compléter ce document.

R. MASSIF, quant à lui, tient à exprimer sa sympathie d'une part à l'égard de M. PHAN TAN KHUE qui lui a fait bénéficier agréablement de son expérience et d'autre part à l'égard de MM. ILLIANO et POTTELETTE qui ont bien voulu lui confier la responsabilité de l'électronique et de la mise au point du calculateur de puissance croisée ayant servi à la mesure de la densité spectrale de signaux reçus par une sonde quadripolaire plongée dans un plasma artificiel, ce qui lui a donné l'occasion d'élargir ses connaissances théoriques et techniques sur le "traitement du signal", vaste sujet que l'on considère aujourd'hui comme capital pour l'analyse des phénomènes en physique.

TABLE DES MATIERES

	PAGES
<u>REMERCIEMENTS</u>	
<u>TABLE DES MATIERES</u>	
<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	1
<u>I. MODE ACTIF</u>	3
<u>I.1. Introduction</u>	3
<u>I.2. Principe de fonctionnement</u>	3
<u>I.3. Description des circuits</u>	5
I.3.1. Sondes	5
I.3.1.1. Sonde émettrice	5
I.3.1.2. Sonde réceptrice	5
I.3.1.2.1. Préamplificateur	5
I.3.1.2.2. Transformateur	6
I.3.2. Amplificateurs	6
I.3.2.1. Amplificateur de gain 20 dB	6
I.3.2.2. Amplificateur de sortie 50 $\Omega$	6
I.3.2.3. Amplificateur accordé à 20 MHz	6
I.3.3. Mélangeurs	7
I.3.4. Filtres	7
<u>II. MODE PASSIF</u>	9
<u>II.1. Introduction</u>	9
<u>II.2. Rappel de la théorie de la corrélation</u> <u>de processus aléatoires</u>	11
<u>II.3. Calculateur de puissance croisée</u>	17
II.3.1. Application au cas des signaux sinusoïdaux	27
II.3.2. Conclusion sur ce paragraphe	29
<u>II.4. Données scientifiques de l'expérience</u>	30
II.4.1. Méthode et moyens mis en oeuvre pour la mesure du spectre croisé	30
II.4.2. Définition de la mesure expérimentale, erreur statistique	31

II.4.3. Calcul de l'erreur statistique correspondant au filtre choisi	32
II.4.4. Données numériques de la mesure et discussion	35
<u>II.5. Description technique de l'appareil</u>	38
II.5.1. Préliminaire	38
II.5.2. Les capteurs	38
II.5.3. Les amplificateurs d'entrée	40
II.5.4. Le calculateur proprement dit	40
II.5.5. Calcul de la chaîne de l'appareil	41
II.5.5.1. Les multiplicateurs	42
II.5.5.2. Les filtres d'analyse	42
II.5.5.3. Les sommateurs et soustracteurs	43
II.5.5.4. Les amplificateurs des filtres d'analyse	43
II.5.5.5. Les circuits déphaseurs $\frac{\pi}{2}$	43
II.5.5.6. Les mélangeurs H.F.	44
II.5.6. Réalisation pratique	45
<u>II.6. Mise au point et mode d'utilisation de l'appareil</u>	46
- le zéro du calculateur	49
II.7. <u>Résultats des mesures</u>	51
 <u>III. CONCLUSION</u>	 53
 <u>ANNEXE I : Corrélation - Apodisation - Estimation</u>	 55
- fonction de corrélation	55
- égalité de Parseval	55
- distribution de Dirac	57
- théorème de Dérichet	58
- distribution de Dirac dans le domaine des fréquences	58
- application	59
- apodisation	59
- estimation	60
- fonction de corrélation estimée	60
- propriétés de la fonction de corrélation	61
- conséquence	62

<u>ANNEXE II</u> : Probabilité - Puissance - Densité spectrale	63
- Probabilité	63
- Moments et Moyennes	63
- Cas des processus aléatoires stationnaires et ergodiques	64
- Puissance	64
- Densité spectrale de puissance moyenne	65
- Cas des bruits aléatoires stationnaires ergodiques et indépendantes	67
- Bande équivalente de bruit	68
<u>ANNEXE III</u> : Calcul des bandes équivalentes de bruit	
Application au multiplicateur	71
- Méthodes de calcul des bandes équivalentes ( $B_{eq}$ ) de bruit	71
<u>1ère Méthode</u> : Méthode des résidus	71
<u>2ème Méthode</u> : Par le calcul de la puissance de la réponse impulsionnelle du filtre	74
- Exemples	75
- Application : multiplicateur paramétrique	76
- Généralisation : les filtres intégrateurs	78
<u>ANNEXE IV</u> : Filtre passe-bas à - 12 dB/Oct.	
Calcul de la bande équivalente et construction	81
- Filtre d'analyse passe-bas à - 12 dB/Oct : calcul de la bande équivalente	81
- Filtre d'analyse passe-bas : construction	84
<u>ANNEXE V</u> : Erreur statistique	
- Calcul de $f(t)$	89
<u>ANNEXE VI</u> : Sonde H.F. Préamplificateur Haute Impédance	
Calcul de l'impédance d'entrée et du gain	91

<u>ANNEXE VII</u> : Sonde H.F.	
Bruit et rapport signal sur bruit en sortie	95
Facteur de bruit en entrée	95
- Calcul de bruit en sortie	95
- Facteur de bruit	96
<u>ANNEXE VIII</u> : Calcul du bruit de la chaîne	99
- Règles sur le calcul du bruit de la chaîne	99
- Valeur efficace d'un bruit en sortie d'un filtre linéaire	100
- Valeur efficace d'un bruit en sortie d'un multiplicateur	100
- Valeur efficace d'un bruit en sortie d'un additionneur (ou soustracteur)	101
<u>LEGENDES DES ILLUSTRATIONS</u>	103
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	175

## INTRODUCTION GENERALE

Pendant le jour, la fonction de distribution des électrons dans l'ionosphère comporte deux parties : une partie principale thermique, de forme Maxwellienne, dans laquelle la densité des électrons peut varier de  $10^3$  à  $10^6$   $\text{cm}^{-3}$  et leur énergie moyenne de 0,05 eV à 0,5 eV environ et une queue d'électrons suprathermiques (photoélectrons) dont la densité est typiquement de l'ordre de  $10$   $\text{cm}^{-3}$  et l'énergie moyenne de 10 eV. Or, la partie thermique peut être étudiée expérimentalement à l'aide des sondes de Langmuir classiques, tandis qu'à partir de 6 ou 10 eV la partie non-thermique peut être étudiée à l'aide d'analyseurs électrostatiques équipés de compteurs de particules.

Le problème consiste alors à combler le fossé qui existe dans les mesures concernant des électrons dont l'énergie est comprise entre 0,5 et 5 eV environ. L'intérêt pour la géophysique en est du rôle important que jouent les photoélectrons dans le bilan du flux de chaleur du plasma dans l'ionosphère et dans la magnétosphère.

Pour simplifier ce problème, on s'est proposé de l'étudier en premier lieu dans le cas d'un plasma sans champ magnétique.

La partie expérimentale de l'étude a été effectuée en plasma de laboratoire où l'on a pu annuler le champ magnétique.

Le principe de la méthode de mesure proposée est fondée sur l'interaction entre les électrons supra-thermiques et les ondes électrostatiques longitudinales (ondes de Landau) se propageant dans le plasma avec les mêmes vitesses. La partie capteur du dispositif expérimental comprend deux petites antennes électriques, du genre "dipôle double-sphère" immergées dans le plasma et séparées d'une distance allant d'une dizaine jusqu'à plusieurs centaines de longueurs de Debye. L'ensemble des deux antennes constitue une "sonde quadripolaire".

Ce capteur a deux modes d'utilisation : mode actif et mode passif. Dans le premier mode d'utilisation, dit actif, on émet sur une antenne un courant alternatif  $I$ , et on mesure la tension  $V$  recueillie sur l'autre antenne en circuit ouvert. On fait varier la fréquence d'excitation  $f$  et on détermine, en fonction de cette fréquence, l'impédance de transfert

$$Z(f) = \frac{V}{I}$$

entre les deux antennes.

Dans le second mode dit passif, les antennes fonctionnent toutes les deux en réception, et recueillent uniquement des signaux aléatoires provenant des fluctuations du microchamp naturel dans le plasma. On détermine le spectre de la corrélation  $S(f)$  des deux signaux.

Lorsque le plasma est en équilibre thermique, de sorte que la fonction de distribution des vitesses électroniques est Maxwellienne, on peut démontrer à partir des considérations thermodynamiques fondamentales que la composante corrélée des signaux recueillis sur les deux antennes n'est autre que le bruit thermique engendré dans la partie résistive de l'impédance de transfert. Il existe donc une relation de simple proportionnalité entre  $S(f)$  mesurée en mode passif et la partie réelle de  $Z(f)$  mesurée en mode actif. Dans ces conditions, l'une ou l'autre de ces fonctions peut être interprétée pour estimer les paramètres de la population d'électrons : densité et température électroniques.

Mais lorsque le plasma est hors d'équilibre, cette relation n'est plus valable. Les mesures actives et passives fournissent alors des informations indépendantes et complémentaires sur l'état du plasma, et conjointement elles permettent d'obtenir, outre la densité et la température des électrons thermiques, certains renseignements sur la population minoritaire d'électrons suprathermiques. (cf. : Thèse R. POTTELETTE, 3 mai 1977).

## I - MODE ACTIF

### I.1. INTRODUCTION

Dans cette présente note technique, on se propose de décrire un appareil qui permet de déterminer en fonction de la fréquence d'excitation  $f$ , l'impédance de transfert :

$$Z(f) = \frac{V}{I}$$

entre deux antennes. Cette "fonction de transfert" est sensible surtout aux propriétés des électrons thermiques, c'est à dire des électrons dont l'énergie est inférieure à 0,5 eV dans le cas du plasma ionosphérique.

#### Remarque

Ces mesures actives sont relativement insensibles aux électrons suprathermiques. Ceux-ci sont alors étudiés par des mesures passives.

Afin d'essayer l'appareil, pour simplifier le problème, on fait des mesures dans un plasma créé à l'intérieur d'un caisson de simulation où l'on peut annuler le champ magnétique terrestre.

L'ensemble de l'appareillage a été conçu sous une forme programmable, et fonctionne en liaison avec un ordinateur télémécanique T 2000.

### I.2. PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT (fig. 1, 2, 3)

Dans le cas du fonctionnement en mode actif, on émet de l'une des antennes un courant alternatif  $I$ , et on mesure la tension  $V$  recueillie sur l'autre antenne en circuit ouvert.

L'ordinateur T 2000 commande la variation de la fréquence d'excitation  $f$  et on détermine, en fonction de cette fréquence, l'impédance de transfert  $Z(f)$ .

Toutes les expériences sont faites à partir des capteurs constitués par des antennes du type double-sphère plongées dans un plasma isotrope créé à l'intérieur d'un caisson de simulation, où on parvient à réduire le champ magnétique à moins de 10 milligauss dans la zone utile du plasma.

Pour faciliter l'expérimentation en caisson, on dispose d'un chariot qui permet de faire varier la distance entre les deux antennes dans une plage de 0 à 50 cm par télécommande, ceci sans détruire le vide. Le mouvement mécanique déplace les deux antennes en même temps, de façon symétrique par rapport à l'axe du caisson, pour profiter autant que possible de la zone de plasma relativement homogène située sur l'axe.

L'ensemble électronique proprement dit, dont le rôle est de mesurer les caractéristiques des capteurs lorsque ceux-ci sont plongés dans le plasma, comprend :

- un émetteur
- un récepteur
- un transféromètre qui mesure l'atténuation et le déphasage du signal reçu par rapport au signal émis .

Cet ensemble fonctionne sous le contrôle de l'ordinateur T 2000 qui commande le déroulement des séquences et gère les données recueillies.

A l'émission, c'est un synthétiseur de fréquence Hewlett-Packard du type 3320 B, commandé par le T 2000, qui produit un signal dont la fréquence varie de 0 à 13 MHz.

A la réception, le signal de fréquence  $f$  issu des capteurs est mélangé avec une fréquence intermédiaire  $f + 20$  MHz, issue, elle aussi, du synthétiseur.

Un amplificateur accordé à 20 MHz filtre les fréquences autres que la fréquence 20 MHz. Pour la rendre compatible avec la gamme de fonctionnement du transféromètre HP 3575A, on fait une translation de fréquence pour la ramener à 1 MHz. Le signal de référence est fourni par la sortie 1 MHz du synthétiseur.

Les données de gain et de phase issues du transféromètre sont envoyées au T 2000 par l'intermédiaire des voies analogiques.

### I.3. DESCRIPTION DES CIRCUITS

#### I.3.1. Sondes

On distingue deux types de sondes

- la sonde émettrice
- la sonde réceptrice

##### I.3.1.1. Sonde émettrice (fig. 1)

La sonde émettrice comprend un transformateur du type North Hills 0900 HB, dont les deux sorties symétriques chargées sous  $1200 \Omega$  attaquent les deux capacités de  $0,1 \text{ pf}$  ; ces deux capacités sont reliées aux deux boules émettrices, dont le diamètre est de quelques longueurs de Debye, par l'intermédiaire d'un fil très fin. ( $10\mu$ )

##### I.3.1.2. Sonde réceptrice (fig. 2)

La sonde réceptrice comprend :

- les deux boules réceptrices reliées aux deux capacités de  $0,1 \text{ pf}$  par l'intermédiaire d'un fil très fin
- deux amplificateurs
- un transformateur de type North Hills 0300 HB dont la sortie se fait sous  $50 \Omega$ .

##### I.3.1.2.1. Préamplificateur (fig. 1)

Le préamplificateur est en fait un étage adaptateur d'impédance. L'entrée se fait sous  $10 \text{ M}\Omega$  avec une capacité d'environ  $6 \text{ pf}$ . La sortie se fait sous  $50 \Omega$ . La réponse en fréquence est pratiquement plate entre  $1$  et  $10 \text{ MHz}$ .

#### I.3.1.2.2. Transformateur

Le transformateur de sortie des sondes réceptrices est du type North Hills 0300 HB. Sa bande passante est de 0,1 MHz à 100 MHz ; la sortie se fait sous 50  $\Omega$ .

L'atténuation de l'ensemble de la sonde est d'environ :  
- 43 db.

#### I.3.2. Amplificateurs

On utilise principalement trois types d'amplificateurs :

- 1'amplificateur à 20 db à contre-réaction
- 1'amplificateur à sortie 50  $\Omega$
- 1'amplificateur accordé à 20 MHz

##### I.3.2.1. Amplificateur de gain 20 db (fig. 4a)

Le principe de base de cet amplificateur se trouve à la figure n° 4a. Le transistor T1 est monté en émetteur commun ; le gain se règle avec la valeur de R1 ; T2, monté en collecteur commun, permet de sortir le signal sous basse impédance. La polarisation de la base de T1 est prise sur l'émetteur de T2 ; ce montage présente une bonne stabilité en fonction de la tension d'alimentation et de la température.

##### I.3.2.2. Amplificateur de sortie 50 $\Omega$ (fig. 4b)

L'amplificateur de sortie 50  $\Omega$  est constitué par un seul transistor dont le collecteur est chargé par 51  $\Omega$  ; le gain se règle avec la résistance d'émetteur.

##### I.3.2.3. Amplificateur accordé à 20 MHz

L'amplificateur accordé à 20 MHz utilisé dans le mode actif est du modèle AFB 2, fabriqué par NUCLETUDES. Les caractéristiques de cet amplificateur sont les suivantes :

- Fréquence centrale : 20 MHz
- Bande passante : 1 MHz
- Puissance de sortie : 20 mW

- Alimentation : + 24 volts
- Gain : 40 db
- Niveau de bruit : 1,7 db maximum (figure de bruit)

### I.3.3. Mélangeurs (fig. 2)

Les mélangeurs utilisés dans le mode actif sont du type Summit 765 D, ayant les caractéristiques suivantes :

- Bande de fréquence : 0,05 MHz à 200 MHz
- Isolement : 40 db entre 10 MHz et 100 MHz
- Perte de conversion : 6,5 db entre 200 kHz et 100 MHz

### I.3.4. Filtres

Les filtres utilisés dans ce type d'expérience sont de deux sortes :

- un filtre de fréquence centrale 1 MHz à 300 Hz de bande latérale utilisé à l'étage de sortie ; les caractéristiques sont les suivantes :
  - . impédance d'entrée 50  $\Omega$
  - . impédance de sortie 50  $\Omega$
  - . Perte d'insertion : 0,8 db
- un filtre de 19 MHz de fréquence centrale et de 3 KHz de bande latérale utilisé pour produire une fréquence intermédiaire ; ses caractéristiques sont les suivantes :
  - . impédance d'entrée 150  $\Omega$
  - . impédance de sortie 150  $\Omega$
  - . Perte d'insertion : 2,4 db

## II - MODE PASSIF

### II.1. INTRODUCTION

Les fluctuations de la densité et de la température électronique dans le plasma donnent naissance à des microchamps aléatoires qui induisent des tensions  $v_a(t)$  et  $v_b(t)$  sur les deux dipôles d'une sonde quadripolaire.

Le plasma étudié est créé dans un caisson de simulation où on annule pratiquement le champ magnétique terrestre. Il est supposé homogène et les particules présentes dans le milieu sont sans interactions, ni collisions entre elles.

Les processus aléatoires envisagés sont stationnaires et ergodiques.

Deux configurations des antennes sont physiquement intéressantes, ce sont celles de la figure 5. Une des méthodes adoptée pour la métrologie du plasma consiste à mesurer en mode passif le spectre de corrélation croisée des signaux collectés par les deux capteurs.

Du point de vue statistique, il est commode de s'intéresser à la fonction de corrélation croisée  $\phi_{v_a v_b}(\vec{\rho}, \tau)$  des signaux reçus au niveau des antennes. On peut exprimer cette fonction par la relation :

$$\phi_{v_a v_b}(\vec{\rho}, \tau) = \lim_{TV \rightarrow \infty} \frac{1}{2VT} \cdot \int_V \int_{-\tau}^{+\tau} v_a(\vec{z}, t) v_b(\vec{z} + \vec{\rho}, t + \tau) dt d\vec{z}$$

où :

$v_a$  et  $v_b$  sont les signaux reçus.

$V$  est le volume d'espace dans lequel sont envisagés les processus

$2T$  est la durée d'observation des phénomènes

$\vec{r}$  est la position d'une antenne par rapport à un référentiel donné

$\vec{\rho}$  est la distance géométrique de l'autre antenne par rapport à la précédente

$t$  la coordonnée du temps

et  $\tau$  un retard.

$\phi_{v_a v_b}(\vec{\rho}, \tau)$  est donc représentée par une surface dans l'espace  $\phi$ ,  $\vec{\rho}$  et  $\tau$ .

Le spectre de corrélation croisé ou transformée de Fourier de la fonction de corrélation croisée devient, d'après l'égalité de Parseval :

$$\phi_{v_a v_b}(\omega, \vec{\rho}) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} v_a^*(\omega, \vec{r}) \cdot v_b(\omega, \vec{r} + \vec{\rho}) d\vec{r}$$

avec :

$$\phi_{v_a v_b}(\vec{\rho}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{v_a v_b}(\omega, \vec{\rho}) e^{j\omega\tau} d\omega$$

et

$$v_a(\omega, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_a(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \text{ même chose pour } v_b(\omega, \vec{r})$$

$$v_a^*(\omega, \vec{r}) = v_a(-\omega, \vec{r}) \quad (\text{cas des signaux physiques})$$

où :

$v_a(\omega, \vec{r})$  est la transformée de Fourier de  $v_a(\vec{r}, t)$

$V$  est le volume d'espace mesuré

$2T$  est la durée totale d'intégration du processus

$\omega$  la pulsation

Pour étudier le milieu, on considère les corrélations pour  $\tau = 0$  et pour  $\tau = \frac{\pi}{2\omega_0}$  après avoir fait passer le signal à travers un filtre à bande étroite de fréquence centrale d'analyse  $F_0$  telle que

$$\omega_0 = 2\pi F_0$$

Calculons la puissance croisée des signaux induits dans les deux dipôles séparés géométriquement de la distance  $\vec{l}$ .

On a la relation :

$$\phi_{v_a v_b}(\vec{l}, 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} v_a(\vec{r}, t) v_b(\vec{r} + \vec{l}, t) dt$$

Cette relation est identique à :

$$\phi_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{v_a v_b}(\omega, \vec{\ell}) d\omega$$

où  $\phi_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega)$  est la densité spectrale de puissance moyenne croisée des signaux  $v_a$  et  $v_b$ ,  $\omega$  la pulsation.

Ces relations expriment l'égalité des puissances écrites dans le domaine des fréquences et le domaine du temps et montrent comment déduire  $\phi_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega)$  en mesurant une puissance. On a aussi :

$$\phi_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega) = E \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_a^*(\vec{r}, \omega) \cdot v_b(\vec{r} + \vec{\ell}, \omega)}{2T} \right]$$

c'est la densité spectrale de puissance moyenne ou le spectre de puissance croisée que l'on désire étudier.

$E \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_a^*(\vec{r}, \omega) \cdot v_b(\vec{r} + \vec{\ell}, \omega)}{2T} \right]$  représente l'espérance mathématique, prise sur un grand nombre d'échantillons  $\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{V_a V_b}{2T} \right]$

## II.2. RAPPEL DE LA THEORIE DE LA CORRELATION DE PROCESSUS ALEATOIRES

Soient  $v_1$  et  $v_2$  les signaux collectés au niveau des dipôles de l'expérience, on suppose qu'il s'agit de processus aléatoires, non périodiques, stationnaires et ergodiques. Ces signaux peuvent être décomposés en série de fonctions orthogonales  $\psi_\alpha(t)$  telles que :

$$v = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\alpha \psi_\alpha(t)$$

où :

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_\alpha \psi_\beta^* dt = \delta_{\alpha\beta} \quad (\delta_{\alpha\beta} = 1 \text{ si } \alpha = \beta, \delta_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta)$$

lorsque les paramètres  $a_\alpha$  sont indépendants.

On peut choisir pour  $\psi_\alpha$  les fonctions trigonométriques complexes  $e^{j\omega_\alpha t}$  et par suite le développement en série devient :

$$v_i = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_{i\alpha} e^{j\omega_\alpha t} e^{j\omega_\alpha t}$$

avec :

$$i = 1, 2 ; \quad a_{i\alpha} = f_{i\alpha} e^{j\varphi_{i\alpha}}$$

où :

$$p_{i\alpha} e^{j\varphi_{i\alpha}} = \int_{t_1}^{t_2} v_i \psi_{i\alpha}^* dt$$

Les phases  $\varphi_{i\alpha}$  sont aléatoires et uniformément réparties entre 0 et  $\pi$ . Les amplitudes  $\rho_{i\alpha}$  sont aléatoires et possèdent une valeur efficace  $\sqrt{\sigma_{i\alpha}^2}$ . Les quantités  $v_i$  représentent la somme des signaux aléatoires corrélés (signaux utiles) et des bruits non corrélés statistiquement (bruit de l'électronique par exemple).

D'après la nature des processus envisagés, la stationnarité implique que toutes les moyennes d'ensemble (ou statistiques) soient indépendantes du temps. Si  $p(v_i)$  est la densité de probabilité d'un échantillon aléatoire  $v_i$ , nous définissons

$$E(v_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(v_i) dv_i$$

qui est l'espérance mathématique de  $v_i$ .

d'où

$$\frac{\partial E(v_i)}{\partial t} = 0 \iff \text{stationnarité}$$

soit encore :

$$E[v_i(t_1)] = E[v_i(t_2)] = \dots = E[v_i(t_n)] = \text{cte.}$$

L'ergodicité implique que toutes les moyennes temporelles prises sur plusieurs échantillons  $v_i(t)$  sont indépendantes de l'échantillon. Par suite pour des processus stationnaires et ergodiques, on a  $E(v_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v_i dt$ . Enfin, on suppose que les processus soient Gaussiens du moins pour les bruits parasites, c'est à dire que leur densité de probabilité est du type :

$$p(v_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-\frac{(v_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

où  $v_i$  représente la valeur efficace du signal  $v_i$ ,  $\sigma_i^2$  est le moment d'ordre 2 (ou variance), et  $m_i$  sa moyenne d'ensemble (moment d'ordre 1 ou espérance mathématique).

Pour déterminer les propriétés statistiques du plasma, on peut aussi mesurer la fonction de corrélation croisée entre les signaux des deux sondes séparées d'une distance  $\vec{\ell}$ , et décalés d'une durée  $\tau$ .

La fonction de corrélation croisée (ou mutuelle) est donnée par :

$$\phi_{v_1 v_2}(\vec{\ell}, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} v_1(t, \vec{\ell}) v_2(t + \tau, \vec{\ell} + \vec{\ell}) dt$$

Si on suppose que  $\vec{\ell}$ , est fixe, on considère l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{v_1 v_2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} v_1(t) v_2(t + \tau) dt = E[v_1(t) \cdot v_2(t + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t) v_2(t) p(v_1, v_2, \tau) dv_1 dv_2 \end{aligned}$$

d'après nos hypothèses de début. Ses principales propriétés sont les suivantes :

$$\phi_{v_1 v_2}(\tau) \neq \phi_{v_1 v_2}(-\tau)$$

$$\phi_{v_1 v_2}(\tau) = \phi_{v_2 v_1}(-\tau)$$

$$|\phi_{v_1 v_2}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_{v_1 v_1}(0) \cdot \phi_{v_2 v_2}(0)}$$

Enfin si  $v(t) = v_u(t) + b(t)$  où  $v_u$  est le bruit corrélé utile et  $b$  le bruit non corrélé (parasite) on a :

$$\phi_{vv}(\tau) = \phi_{v_u v_u}(\tau) + \phi_{v_u b}(\tau) + \phi_{b v_u}(\tau) + \phi_{bb}(\tau)$$

En supposant  $v_u$  et  $b$  statistiquement non corrélés, il vient :

$$\phi_{v_u b}(\tau) = \phi_{b v_u}(\tau) = 0$$

et

$$\phi_{vv}(\tau) = \phi_{v_u v_u}(\tau) + \phi_{bb}(\tau)$$

on peut alors déduire la densité spectrale  $\Phi_{v_1 v_2}(\omega, \vec{\ell})$  par la transformée de Fourier de  $\phi_{v_1 v_2}(\tau, \vec{\ell})$ . La représentation la mieux adaptée pour les fluctuations dans le plasma est celle de la transformée de Fourier dans le temps de la fonction de corrélation croisée, fonction de  $\vec{\ell}$  et  $\omega$ .

Dans la pratique, cette solution est moins aisée à réaliser.

On va établir la relation liant ce spectre à la corrélation dans le cas des signaux physiques.

Si on considère un signal  $v$ , la quantité

$$p = \frac{dE}{dt} = v^2$$

représente la puissance instantanée du signal et l'énergie totale contenue dans ce signal est :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} p dt$$

la puissance moyenne temporelle est alors :

$$\bar{p} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} p dt = \bar{v}^2$$

Pour des processus aléatoires stationnaires non périodiques,  $E$  est infinie. Théoriquement  $v(t)$  n'admet pas de transformée de Fourier ainsi que  $\phi v_1 v_2$  car la partie réelle  $\int_{-\infty}^{+\infty} v \cos \omega t dt$  va diverger.

Physiquement, aucune mesure ne dure un temps infini de sorte que l'on ne réalise que des "estimations" de moyennes (BIAS non nul) et de transformées de Fourier.

On suppose donc que  $v$  est définie de la façon suivante :

$$v_T(t) = v(t) \quad \text{pour} \quad |t| < T < \infty$$

l'énergie totale contenue dans  $v_T(t)$  est alors finie.

Pour  $|t| > T$ , on a :  $v_T(t) = 0$  (voir annexe n° I: Apodisation).

La transformée de Fourier de  $v_T(t)$  existe et s'écrit :

$$v_T(j\omega) = F [ v_T(t) ] = \int_{-\infty}^{+\infty} v_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

et la puissance moyenne dans l'intervalle  $(-T, T)$  est égale à :

$$\bar{p} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |v_T(t)|^2 dt = \frac{E(-T, T)}{2T}$$

D'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |v_T(\omega)|^2 d\omega \quad (I)$$

de sorte que :

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|v_T(\omega)|^2}{2T} d\omega \quad (II)$$

La fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$\phi_{v_T v_T}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v_T(t) \cdot v_T(t+\tau) dt$$

qui est une estimation de  $\phi_{VV}(\tau)$  que l'on écrit :  $\hat{\phi}_{VV}(\tau) = \phi_{v_T v_T}(\tau)$   
ou encore :

$$\phi_{v_T v_T}(\tau) = \frac{1}{2T} v_T(\tau) \otimes v_T(-\tau) \text{ produit de convolution (III)}$$

avec

$$\phi_{v_T v_T}(\tau) = 0 \quad \text{si} \quad |\tau| > T$$

La transformée de Fourier est :

$$\phi_{v_T v_T}(\omega) = F[\phi_{v_T v_T}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{v_T v_T}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

elle vaut, d'après (III) :

$$\phi_{v_T v_T}(\omega) = \frac{v_T(\omega) \cdot v_T^*(\omega)}{2T} = \frac{|v_T(\omega)|^2}{2T}$$

L'expression (II) devient :

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{v_T v_T}(\omega) d\omega \quad (IV)$$

Si  $\frac{d\bar{P}}{d\omega}$  est la densité spectrale de puissance moyenne de l'échantillon  $v$ ,  
on a :

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\bar{P}}{d\omega} d\omega$$

où

$$\frac{d\bar{P}}{d\omega} = \frac{|v_T(\omega)|^2}{2T}$$

Remarque : La puissance  $\bar{P}$  représente un potentiel mesurable. Sa valeur permet de connaître la densité spectrale  $\phi_{v_T v_T}(\omega)$ , à chaque fréquence, d'après la relation (IV).

Par conséquent, la fonction  $\phi_{v_T v_T}(\omega)$  représente physiquement la densité spectrale de puissance moyenne "estimée" d'un processus aléatoire, et s'écrit :  
 (cf. : Rq)  $\phi_{v_T v_T}(\omega) = \hat{\phi}_{v_T v_T}(\omega)$

Enfin :

$$\phi_{v_T v_T}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \phi_{v_T v_T}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\phi}_{v_T v_T}(\tau)$$

de sorte que l'auto-spectre s'écrit :

$$\phi_{v_T v_T}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \phi_{v_T v_T}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\phi}_{v_T v_T}(\omega)$$

donc :

$$\phi_{v_T v_T}(\omega) = F[\phi_{v_T v_T}(\tau)]$$

et on en déduit que :

$$\phi_{v_T v_T}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{v_T v_T}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

En définitive, pour un processus aléatoire, la densité spectrale de puissance moyenne s'écrit :

$$\phi_{v_T v_T}(\omega) = F[\phi_{v_T v_T}(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|v_T(\omega)|^2}{2T}$$

et si elle est ergodique, on aura :

$$\phi_{v_T v_T}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{v_T(\omega) v_T^*(\omega)}{2T} \right]$$

Dans le cas de deux variables  $v_1$  et  $v_2$ , la densité spectrale de puissance moyenne s'écrit :

$$\phi_{v_1 v_2}(\omega) = F[\phi_{v_1 v_2}(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_{1T}^*(\omega) v_{2T}(\omega)}{2T}$$

avec :

$$v_{1T}(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad |\tau| > T$$

C'est aussi le spectre de puissance croisé qu'on veut mesurer (se reporter aux propriétés "d'Apodisation" en annexe n° I)

Remarque

La propriété d'ergodicité (qui suppose que le plasma reste stable durant un intervalle de temps de mesure donné) sera utilisée lors du traitement numérique des informations... Une préintégration analogique est toujours préférable, celle-ci permet d'obtenir un spectre de puissance croisé approché qui sera ensuite lissé par des méthodes statistiques.

II.3. CALCULATEUR DE PUISSANCE CROISEE

L'appareil qui a été choisi pour effectuer les mesures du spectre de puissance croisé des signaux reçus est un calculateur de puissance croisée de ces signaux et non un corrélateur réel qui fournirait les courbes de la fonction d'inter-corrélation en fonction d'un retard  $\tau$  programmable. (cf. : pages 10 et 11, puis 15).

Pour des signaux sinusoïdaux à l'entrée du calculateur, on obtient en sortie une relation en  $\cos \psi$  sur la différence de phase  $\psi$  qui les caractérise, cela pour chaque fréquence désirée.

L'appareil peut être aussi considéré comme un détecteur synchrone des deux signaux explorés sur toute une plage de fréquences, chacune d'elle étant définie avec une fenêtre  $\Delta F$ , convenablement choisie.

En réalité, comme les mesures ne durent qu'un temps  $T$  fini, le calculateur ne réalise que l'estimation de la moyenne du produit  $v_a \cdot v_b$  qui s'écrit :

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} v_a(\vec{r}, t) \cdot v_b(\vec{r} + \vec{\ell}, t) dt$$

En introduisant la fonction "d'Apodisation"  $d(t)$  (voir annexe I) il vient :

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{aT}(\vec{r}, t) \cdot v_{bT}(\vec{r} + \vec{\ell}, t) dt$$

où  $V_{aT} = V_a \times d(t)$  ;  $d(t)$  étant une fenêtre temporelle (cf "apodisation" en annexe n° I) puis :

$$\begin{aligned} V_{aT} &= V_a \cdot d = \sqrt{V_a} & \text{si} & \quad |t| \leq T \\ V_{aT} &= 0 & \text{si} & \quad |t| > T \\ V_{bT} &= V_b \cdot d = \sqrt{V_b} & \text{si} & \quad |t| \leq T \\ V_{bT} &= 0 & \text{si} & \quad |t| > T \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

on a alors :

$$\hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{r}, \omega) d\omega$$

relation qui relie la puissance en sortie avec la densité spectrale étudiée où :

$$\hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2T} \cdot V_{aT}^2(\vec{r}, \omega) \cdot V_{bT}(\vec{r} + \vec{r}', \omega)$$

Cela représente "l'estimation" du spectre de corrélation croisée des valeurs  $V_a$  et  $V_b$ .  $V_{aT}(\vec{r}, \omega)$  est la transformée de Fourier de la tension  $V_{aT}(t, \vec{r})$  c'est aussi le produit de convolution de  $V_a(\Omega)$  et  $D(\Omega)$  qui s'écrit :

$$V_{aT}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int V_a(\Omega, \vec{r}) \cdot D(\omega - \Omega) d\Omega \quad (\text{convolution : } V_a \otimes D)$$

où :

$$D(\omega) = \mathcal{F}(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} d e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t} dt = 2T \cdot \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

on a la relation suivante :

$$\hat{\Phi}_{V_a V_b} = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\Phi}_{V_a V_b} = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\Phi}_{V_{aT} V_{bT}}$$

Remarque

Pour des processus aléatoires, en principe l'énergie étant infinie, les signaux n'admettent pas de transformée de Fourier.

On admet, dans ce cas, que les signaux  $V_{aT}$  et  $V_{bT}$  soient définis dans un intervalle de temps fini (conditions IV) ; ce sont les seuls qui ont une réalité physique. Alors les transformées de Fourier :

$$V_{aT}(\omega) = \int_{-T}^{+T} v_a e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v_a de^{-j\omega t} dt$$

sont finies et mesurables.

Dans la pratique, le calcul du spectre est limité dans le temps, on n'obtiendra ainsi comme "grandeurs mesurables" que les "fonctions estimées" définies plus haut.

Si les processus aléatoires sont en plus stationnaires et ergodiques, le spectre réel qui doit être effectivement mesuré s'exprime par la relation :

$$\hat{\Phi}_{V_{aT} V_{bT}}(\omega, \vec{\ell}) = E \left[ \frac{V_{aT}^*(\omega, \vec{\tau}) \cdot V_{bT}(\omega, \vec{\tau} + \vec{\ell})}{2T} \right]$$

qui est une moyenne d'ensemble de tous les spectre obtenus.

△ Théoriquement, le dispositif qui permettrait de réaliser "l'estimation" de la puissance croisée des signaux pourrait être représenté par le schéma synoptique de la figure n° 6, page 115.

Dans le cas théorique, pour étudier tout le spectre souhaité, il suffirait de faire varier la fréquence centrale  $F_0$  des filtres passe-bande de largeur  $\Delta F_0$  et de mesurer la puissance donnée par la tension en sortie, pour chaque fréquence définie à un  $\Delta F_0$  près.

Cette méthode de détermination du spectre croisé est, en pratique, plus simple que de mesurer la fonction de corrélation croisée, puis de prendre sa transformée de Fourier (§ pages 13 et 16) ce qui nécessiterait deux appareils.

La voie n° 1 du schéma correspond à la détection synchrone des signaux  $x_1$  et  $y_1$ . Elle donne la partie réelle du spectre de puissance croisée  $\hat{v}_{s\phi}$  "estimé" des signaux  $x_0$  et  $y_0$ .

La voie n° 2 fournit la partie imaginaire de ce spectre,  $\hat{v}_{sq}$

Pour les voies n° 1 et 2, on a les relations suivantes :

Pour la voie n° 1 :

$$\hat{v}_{sq} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{1T}(t) \cdot y_{1T}(t) dt$$

soit encore

$$\hat{v}_{sq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_{1T}^*(\omega) \cdot y_{1T}(\omega)}{2T} d\omega$$

où :

$$\hat{v}_{sq} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega_0}{2}} \phi_{x_{1T} y_{1T}}(\omega) d\omega$$

avec

$$\phi_{x_{1T} y_{1T}}(\omega) = |G(\omega)|^2 \hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega)$$

puisque

$$x_{1T} = G(\omega) x_0(\omega)$$

$$y_{1T} = G(\omega) y_0(\omega)$$

$$\hat{\phi}_{x_0 y_0} = \frac{x_{0T}^*(\omega) \cdot y_{0T}(\omega)}{2T}$$

$G(\omega)$  étant la fonction de transfert des filtres passe-bande.

D'après les propriétés des fonctions de corrélation et des spectres correspondants (pour  $\tau = 0$ ) on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega = \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega \right]$$

de sorte que :

$$\hat{v}_{sq} = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega_0}{2}} |G(\omega)|^2 \hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega) d\omega \right]$$

D'après les hypothèses sur les filtres et la nature des signaux à analyser, il vient :

$$\hat{V}_{2\phi} = \text{Re} [\hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega)] \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega_0}{2}} |G(\omega)|^2 d\omega$$

$$\hat{V}_{2\phi} \approx \text{Re} [\hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega)] \cdot \Delta F_0 \cdot |G(\omega_0)|^2$$

soit encore :

$$\hat{V}_{2\phi} = \text{Re} [\hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega)] \cdot B_{eq} \cdot |G(\omega_0)|^2$$

où :

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}{|G(\omega_0)|^2}$$

représente la bande équivalente de bruit du filtre d'analyse (voir annexe n° IV). On voit que le potentiel effectivement mesuré en sortie est proportionnel, d'une part à la fenêtre d'analyse du calculateur et, d'autre part, à la partie réelle du spectre des signaux reçus ; ce qui permet de déduire le spectre croisé.

Pour la voie n° 2, on a :

$$\tilde{x}_1(\omega) = e^{-j \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{\pi}{2} (1 + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0})} \cdot x_1(\omega)$$

Dans la mesure où :

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \ll 1$$

on a :

$$\tilde{x}_1(\omega) \approx j x_1(\omega)$$

Cette voie réalise la détection synchrone de deux signaux dont l'un a été déphasé de  $\frac{\pi}{2}$  sur toute la gamme de fréquences considérée.

Il vient :

$$\phi_{\tilde{x}_{1T} y_{1T}}(\omega) = \frac{\tilde{x}_{1T}^*(\omega) y_{1T}(\omega)}{2\pi} = -j \cdot \phi_{x_{1T} y_{1T}}(\omega)$$

ce qui donne pour le potentiel en sortie :

$$\hat{V}_Q = B_{eq} \cdot |G(\omega_0)|^2 \text{Re} [-j \hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega)]$$

Mais la densité spectrale de puissance des signaux captés peut s'écrire :

$$\hat{\Phi}_{x_0 y_0}(\omega) = \text{Re}(\hat{\Phi}_{x_0 y_0}) + j \text{Im}(\hat{\Phi}_{x_0 y_0})$$

donc :

$$\text{Im} \hat{\Phi}_{x_0 y_0} = \text{Re} [-j \hat{\Phi}_{x_0 y_0}]$$

d'où :

$$\hat{V}_a = B_{eq} \cdot |G(\omega_0)|^2 \text{Im} [\hat{\Phi}_{x_0 y_0}(\omega)]$$

La tension mesurée est proportionnelle à la partie imaginaire du spectre de corrélation croisée, et l'on a alors :

$$\hat{\Phi}_{x_0 y_0}(\omega) = \frac{\hat{V}_a}{B_{eq} \cdot |G(\omega_0)|^2} + j \frac{\hat{V}_a}{B_{eq} \cdot |G(\omega_0)|^2}$$

Malheureusement, ce qui a été dit plus haut n'est qu'un cas théorique. Dans la pratique, il est très difficile d'opérer ainsi à cause de la technologie des filtres. On doit faire un changement de fréquence. La fréquence intermédiaire est celle du filtre passe-bande  $F_0$ . Si  $F$  est une des fréquences des signaux reçus et  $F_L$  celle de l'oscillateur local modulé en fréquence, on a :

$$F_0 = F_L \pm F \quad (\text{voir figure 7})$$

on s'arrange pour ne garder que la composante  $F_L - F$  définie à un  $\Delta F_0$  près. La densité spectrale "estimée" des signaux des deux entrées du multiplicateur de la corrélation s'écrit aussi :

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\omega, \vec{\ell}) = \text{Re} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\omega, \vec{\ell}) + j \text{Im} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\omega, \vec{\ell})$$

où :

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b} = \frac{1}{2T} v_{aT}^*(\omega) \cdot v_{bT}(\omega, \vec{\ell})$$

dans le cas général.

Le potentiel effectivement mesuré sur la voie en phase est alors :

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \text{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega) d\omega = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega) d\omega$$

Faisons :

$$F = \frac{\omega}{2\pi} = F_L - F_0$$

puis

$$\tilde{V}_{aT}(t) = \mathcal{F}^{-1} [ j V_{aT}(\omega) ]$$

on a alors :

$$I_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{\ell}, \omega) d\omega = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{\tilde{V}_a V_b}(\vec{\ell}, \omega) d\omega$$

et aussi :

$$\hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{\ell}, 0) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{aT}(t) V_{bT}(\vec{\ell}, t) dt$$

puis

$$\hat{\Phi}_{\tilde{V}_a V_b}(\vec{\ell}, 0) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_{aT}(t) V_{bT}(\vec{\ell}, t) dt$$

Le potentiel réellement mesuré sur la voie en quadrature est :

$$\hat{\Phi}_{\tilde{V}_a V_b}(\vec{\ell}, 0) = I_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{\tilde{V}_a V_b}(\vec{\ell}, \omega) d\omega$$

avec :

$$\hat{\Phi}_{\tilde{V}_a V_b}(\vec{\ell}, \omega) = \frac{1}{2T} \cdot \tilde{V}_{aT}^*(\omega) \cdot V_{bT}(\omega)$$

et

$$\tilde{V}_{aT}(\omega) = j V_{aT}(\omega)$$

$$V_{aT}(\omega) = G(\omega_L - \omega_0) \cdot X_{aT}(\omega_L - \omega_0), \text{ idem pour } V_{bT}(\omega)$$

Finalement, on a la relation:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{\ell}, \omega) d\omega = \hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{\ell}, 0) + j \hat{\Phi}_{\tilde{V}_a V_b}(\vec{\ell}, 0)$$

qui relie le spectre total des signaux avec les potentiels mesurés sur les deux canaux de sortie du calculateur. Notons que  $\hat{\Phi}_{V_a V_b}(\vec{\ell}, \omega) = |G(\omega_L - \omega_0)|^2 \cdot \hat{\Phi}_{x_0 y_0}(\omega)$  où  $\omega = \omega_L - \omega_0$  est la fréquence d'entrée.

Remarque

Si l'on considère le cas des signaux sinuïdaux en entrées  $x_0$  et  $y_0$  déphasés d'un argument  $\psi$ , à l'entrée des multiplicateurs:

- pour la voie en phase, on a la relation :

$$z = xy \cos(\Omega t + \psi) \cos \Omega t$$

où :

$$\Omega = \Omega_L - \bar{\omega}$$

$\frac{\omega}{2\pi}$  : fréquence de  $x_0$  et  $y_0$ .

$\frac{\Omega_L}{2\pi}$  : fréquence de l'oscillateur local ( $\bar{\omega} < |\omega \pm \frac{\Delta\omega_0}{2}|$ )

soit :

$$z = \frac{xy}{2} \cos \psi + \frac{xy}{2} \cos(2\Omega t + \psi)$$

Après filtrage à la fréquence de coupure  $F_c$  telle que

$$F_c \ll \frac{2\Omega}{2\pi}$$

on a :

$$\bar{z} \approx \frac{xy}{2} \cos \psi$$

- pour la voie en quadrature, on obtiendra :

$$\bar{z} \approx \frac{xy}{2} \sin \psi$$

Ces quantités représentent les puissances des signaux calculés avec les parties réelles et imaginaires des spectres de puissances croisées (co-spectre et quad-spectre).

△ Pratiquement, on fait un deuxième changement de fréquence avant d'attaquer les multiplicateurs car il est difficile de réaliser avec une précision suffisante la quadrature, sur toute l'étendue du domaine de fréquences utilisé, d'un des signaux en sortie de la fenêtre d'analyse. C'est le cas si le filtre passe-bande n'est pas suffisamment sélectif pour que le rapport  $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$  soit négligeable devant 1, d'autre part, les multiplicateurs ne peuvent fonctionner avec une dynamique suffisante en haute fréquence, et peuvent présenter un off-set trop important.

La fréquence du deuxième oscillateur local est alors fixe et égale à la fréquence centrale  $F_0$  du filtre passe-bande de largeur  $\Delta F_0$ . (voir Fig. 8, page 119).

Avant tous les multiplicateurs de la corrélation, on introduit des filtres passe-bas de largeur de bande  $F_c$  qui servent alors de filtre d'analyse (dans la mesure où  $\Delta F_0 < \frac{F_0}{J}$  et  $F_c < \Delta F_0$ ). Les premiers filtres passe-bande  $\Delta F_0$  servent alors à diminuer le bruit électronique amont.

La relation :

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega) = \text{Re} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega) + j \text{Im} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega)$$

représente la densité spectrale de puissance croisée des signaux à l'entrée des multiplicateurs de corrélation

on a :

$$\text{Im} \hat{\Phi} = -j \hat{\Phi}$$

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b} = \frac{v_a^*(\omega) \cdot v_b(\vec{\ell}, \omega)}{2\pi}$$

$$\tilde{v}_a(\omega) = j v_a(\omega)$$

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega) = \hat{\Phi}_{\tilde{v}_a \tilde{v}_b}(\vec{\ell}, \omega)$$

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \hat{\Phi}_{v_b v_a}(-\vec{\ell}, 0)$$

et

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(-\vec{\ell}, -\omega) = \hat{\Phi}_{v_b v_a}(\vec{\ell}, \omega)$$

on en déduit

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega) d\omega$$

soit

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{v_b v_a}(-\vec{\ell}, 0)$$

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}^*(\omega, \vec{\ell}) = \hat{\Phi}_{\tilde{v}_a \tilde{v}_b}^*(\omega, \vec{\ell})$$

ce qui entraîne :

$$\hat{\phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) = \hat{\phi}_{\tilde{v}_a \tilde{v}_b}(\vec{\ell}, 0) = \hat{\phi}_{\tilde{v}_b \tilde{v}_a}(-\vec{\ell}, 0)$$

donc :

$$v_{\phi} = \text{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{v_a v_b} d\omega \right] = \frac{1}{2} \hat{\phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) + \frac{1}{2} \hat{\phi}_{\tilde{v}_a \tilde{v}_b}(\vec{\ell}, 0)$$

on a immédiatement :

$$v_{\phi} = B_{eq} |G(\omega_0)|^2 \text{Re} [\hat{\phi}_{x_0 y_0}(\vec{\ell}, \omega)] = \frac{1}{2} \hat{\phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) + \frac{1}{2} \hat{\phi}_{\tilde{v}_a \tilde{v}_b}(\vec{\ell}, 0)$$

Cette relation exprime un moyen d'obtenir la partie réelle du spectre de corrélation croisée des signaux reçus  $x_0$  et  $y_0$  en fonction d'une combinaison des potentiels des voies en phase et en quadrature.

Remarque

Pour  $F_c < B_{eq} = \Delta F_0$ , on remplacera :

$$B_{eq} |G(\omega_0)|^2 \quad \text{par} \quad |F(\omega)|^2 F_c$$

C'est le cas si on choisit le filtre passe-bas comme filtre d'analyse (choix technologique, par exemple si le calculateur fonctionne en H.F.)

-- Comme :

$$\text{Re} [\hat{\phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, \omega)] = \frac{\text{Re } v_{aT} \text{Re } v_{bT} + \text{Im } v_{aT} \text{Im } v_{bT}}{2T}$$

on a aussi :

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{v_a v_b}(\omega, \vec{\ell}) d\omega \right] &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } v_{aT} \text{Re } v_{bT} + \text{Im } v_{aT} \text{Im } v_{bT}}{2T} d\omega \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \tilde{v}_{aT} \text{Re } \tilde{v}_{bT} + \text{Im } \tilde{v}_{aT} \text{Im } \tilde{v}_{bT}}{2T} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \hat{\phi}_{v_a v_b}(\vec{\ell}, 0) + \frac{1}{2} \hat{\phi}_{\tilde{v}_a \tilde{v}_b}(\vec{\ell}, 0) \end{aligned}$$

puisque :

$$\tilde{v}_a(j\omega) = j v_a(j\omega)$$

De même :

$$\text{Im} \left[ \frac{1}{2\pi} \int \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\omega, \vec{t}) d\omega \right] = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \left[ \int \hat{\Phi}_{\vec{v}_a \vec{v}_b}(\vec{t}, \omega) d\omega \right] = \hat{\Phi}_{\vec{v}_a \vec{v}_b}(\vec{t}, 0)$$

Puisque :

$$\hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{t}, 0) = \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{t}, 0) + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{\vec{v}_a \vec{v}_b}(\vec{t}, 0)$$

et

$$\vec{v}_a = -v_a$$

on a :

$$v_Q = \text{Im} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{t}, \omega) d\omega \right] = \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{\vec{v}_a \vec{v}_b}(\vec{t}, 0) - \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{v_a \vec{v}_b}(\vec{t}, 0)$$

où :

$$\begin{aligned} v_Q &= \text{Im} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{t}, \omega) d\omega \right] = B_{eq} |G(\omega_0)|^2 \text{Im} [\hat{\Phi}_{x_a y_b}(\omega)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int \frac{\text{Re} \vec{V}_{aT} \text{Re} V_{bT} + \text{Im} \vec{V}_{aT} \text{Im} V_{bT}}{2\pi} d\omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int \frac{\text{Re} V_{aT} \text{Re} \vec{V}_{bT} + \text{Im} V_{aT} \text{Im} \vec{V}_{bT}}{2\pi} d\omega \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \hat{\Phi}_{x_a y_b}(\vec{t}, \omega) = \frac{1}{B_{eq} |G(\omega_0)|^2} \left\{ \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{v_a v_b}(\vec{t}, 0) + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{\vec{v}_a \vec{v}_b}(\vec{t}, 0) - \left[ \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{v_a \vec{v}_b}(\vec{t}, 0) - \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{\vec{v}_a v_b}(\vec{t}, 0) \right] \right\}$$

$v_\phi$  en phase

$v_Q$  en quadrature

Remarque

Si  $F_C < B_{eq}$ , on remplace  $B_{eq} |G(\omega)|^2$  par  $F_C |F(0)|^2$ . On obtient aussi une expression de la partie imaginaire du spectre en fonction des deux potentiels des sorties en quadrature.

### II.3.1. Application au cas des signaux sinusoïdaux

Dans ce cas, ce sont les densités spectrales d'énergie qui interviennent et auront pour expression :

$$\hat{\Phi}_{xy}(\omega) = x^*(\omega) \cdot y(\omega)$$

puisque  $2T$  correspond à la période du signal.

Il suffit de considérer alors les signaux  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\tilde{s}_1$  et  $\tilde{s}_2$  dont la fréquence est contenue dans la bande  $F_c$  d'analyse et qui se présentent à l'entrée des multiplicateurs de la corrélation.

Nous avons :

$$\begin{aligned} s_1 &= p_1 \cos \omega t + q_1 \sin \omega t & \tilde{s}_1 &= -p_1 \sin \omega t + q_1 \cos \omega t \\ s_2 &= p_2 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t & \tilde{s}_2 &= -p_2 \sin \omega t + q_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} s_1 &= \rho_1 e^{j\varphi_1} & \varphi_1 &= -\text{Arctg} \frac{q_1}{p_1} & s_1 &= F(\alpha_1) \\ s_2 &= \rho_2 e^{j\varphi_2} & \tilde{s}_1 &= \rho_1 (\omega t + \frac{\pi}{2}) & s_2 &= F(\alpha_2) \\ \rho_1 &= \sqrt{p_1^2 + q_1^2} & \tilde{s}_2 &= \rho_2 (\omega t + \frac{\pi}{2}) & & \text{(transformée de Fourier)} \end{aligned}$$

on voit que :

$$p_1 = \text{Re}(s_1); q_1 = -\text{Im}(s_1); p_2 = \text{Re}(s_2); q_2 = -\text{Im}(s_2)$$

Si on fait les calculs des produits, on obtient :

pour les voies en phase :

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{2} + \frac{p_1 p_2 - q_1 q_2}{2} \cos 2\omega t + \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{2} \sin 2\omega t \\ \tilde{s}_1 \tilde{s}_2 &= \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{2} - \frac{p_1 p_2 - q_1 q_2}{2} \cos 2\omega t - \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{2} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

pour les voies en quadrature :

$$\begin{aligned} s_1 \tilde{s}_2 &= \frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{2} + \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{2} \cos 2\omega t + \frac{q_1 q_2 - p_1 p_2}{2} \sin 2\omega t \\ \tilde{s}_1 s_2 &= -\frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{2} + \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{2} \cos 2\omega t + \frac{q_1 q_2 - p_1 p_2}{2} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

Pour les voies en phase, si on fait la somme  $s_1 s_2 + \tilde{s}_1 \tilde{s}_2$ , on obtient :

$$\Sigma = s_1 s_2 + \tilde{s}_1 \tilde{s}_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2 \text{ soit } \frac{1}{2T} \int_0^{2T} v_p dt \text{ en prenant les valeurs moyennes estimées.}$$

Pour les voies en quadrature, si on fait la différence, on obtient :

$$s_1 \tilde{s}_2 - \tilde{s}_1 s_2 = p_1 q_2 - q_1 p_2 \text{ soit } \frac{1}{2T} \int_0^{2T} v_q dt$$

Un examen rapide des formules montre que pour les voies en phase  $s_1$  et  $s_2$  et  $\tilde{s}_1$   $\tilde{s}_2$ , les composantes continues sont les mêmes et les composantes alternatives (de fréquence double que celle avant multiplicateur) sont en opposition de phase. Donc, la somme s'impose. Un filtrage élimine les résidus et le bruit non corrélé (aux erreurs statistiques près). Pour les voies en quadrature, c'est au contraire la différence qu'il faut introduire.

### II.3.2. Conclusion sur ce paragraphe

En partant du principe de base de la mesure (illustré par la relation n° IV page 15) nous avons décrit les différentes possibilités de réalisation d'un calculateur de puissance et nous avons choisi la solution qui semble la plus en rapport avec les techniques actuelles. (cf § II.3.4. page 24). Notons que les formules correspondantes en régime sinusoïdal sont indispensables pour la construction de l'appareil (symétrie des voies, réglages de gain et phase, niveaux, dynamique, off-set, déphaseur  $\frac{\pi}{2}$ , déphasage différentiel parasite ...).

Grâce à cette méthode alternative on peut facilement faire un zéro sur la voie imaginaire (quad-spectre) et un maximum sur la voie réelle (co-spectre) lorsque les signaux d'entrée sont les mêmes puis un zéro sur la voie réelle et un maximum sur la voie imaginaire lorsque les signaux de même amplitude sont en quadrature.

Le rôle des circuits sommateurs et soustracteurs est d'éliminer les composantes résiduelles parasites en optimisant ainsi le rapport signal sur bruit S/B ce qui rend plus aisé les réglages de mise au point (zéro et symétrie des deux voies notamment) tout en diminuant l'erreur statistique (cf fig. 27 page 157).

Pour que le rendement du calculateur de puissance soit maximum il faut toutefois qu'aucune des fonctions électroniques dans les deux voies en amont des multiplicateurs de la corrélation proprement dite ne soit le siège d'une saturation quelconque (amplificateurs et mélangeurs en régime de fonctionnement linéaire pour les forts signaux).

En effet, on recherche en sortie un niveau maximal à l'accord de fréquence pour deux tensions d'entrée identiques données. Il y a toutefois une limitation de la sensibilité globale du calculateur et ses performances sont altérées par les imperfections du montage d'après

le principe même du calcul de la puissance croisée (assymétrie des deux canaux, déphasage différentiel, non linéarité, off-set, bruit de fond, bande passante limitée, durée finie de la mesure...).

Une des améliorations du calculateur consiste alors à optimiser le gain de chacune des voies identiques en réglant les amplificateurs et les niveaux des oscillateurs locaux en entrée des deux mélangeurs H.F. de changement de fréquence.

#### II.4. DONNEES SCIENTIFIQUES DE L'EXPERIENCE

Des études théoriques faites sur la métrologie du plasma en mode passif par la méthode du spectre croisé laisse prévoir qu'on peut corrélérer des signaux utiles au niveau des capteurs de  $0,1 \mu\text{Veff}$  à  $10 \mu\text{Veff}$  dans une bande de 25 KHz ce qui définit une dynamique théorique de 200 (46 dB).

On souhaite en outre obtenir 10 V crête en sortie pour chaque composante du spectre avec  $10 \mu\text{Veff}$  de bruit corrélable sur les boules contenues dans une raie spectrale de 25 KHz. Enfin la bande de spectre explorée souhaitée va de 0,1 MHz à 10 MHz.

##### II.4.1. Méthode et moyens mis en oeuvre pour la mesure du spectre croisé

Sur le schéma synoptique de la figure 18, le filtre d'analyse choisi est un passe-bas de  $-12 \text{ dB}_{\text{oct}}$ . situé après le 2ème mélangeur. Sa largeur  $B_{\text{eq}}$ . définira l'incertitude sur la fréquence de chaque voie obtenue.

Pour chaque séquence de mesure, on effectue tout un balayage du spectre par paliers discrets de fréquence, chaque palier étant variable de 20 KHz à 100 KHz. A chaque passage sur un palier on intègre durant 2 T seconde de sorte que l'on peut tracer point par point la courbe du spectre croisé "estimé" des signaux reçus en fonction de la fréquence en faisant varier celle du 1° oscillateur local.

Pour effectuer les mesures nous avons à notre disposition un caisson à plasma artificiel de laboratoire sans champ magnétique dont on peut faire varier les paramètres (température, densité, pression...).

Les séries de mesures se font grâce à l'emploi d'un mini ordinateur, le T 2000 muni de périphériques comme la console de visualisation, la télécopie, la hard-copy.

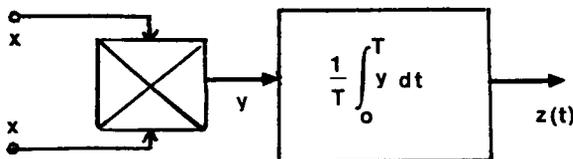
Un programme de mesure y a été introduit ce qui nous permet de fixer à la fois le nombre de paliers, la durée d'intégration par palier ainsi que le nombre de points de mesures sur 1 palier. En effet l'intégration effectivement utilisée pour le calcul de la puissance croisée est effectuée par le calcul numérique en prenant une moyenne discrète de n points de mesure à chaque palier de fréquence du spectre.

De plus le T 2000 commande un synthétiseur de fréquence qui fournit lui-même les deux fréquences intermédiaires nécessaires à l'exploration de tout le spectre.

Enfin pour visualiser de façon efficace les tensions analogiques représentant le co-spectre et le quad-spectre, il est alors apparu nécessaire de faire une pré-intégration analogique sur chaque sortie de l'appareil. On désire en effet obtenir une moyenne "estimée" approchée des signaux permettant de rendre compte de la bonne marche de l'expérience au moyen d'un oscilloscope.

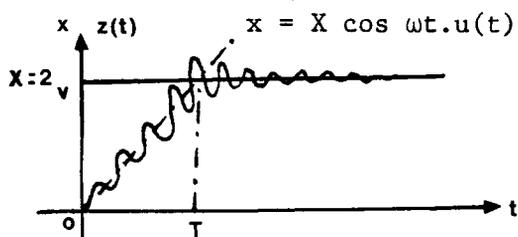
#### II.4.2. Définition de la mesure expérimentale, erreur statistique

La mesure du spectre de durée limitée (intégration de  $2 T_s$ ) à chaque palier apporte une erreur sur la valeur du résultat. On peut s'en rendre compte aisément de la façon suivante : considérons un calculateur de puissance simple tel que celui du schéma ci-dessous .



- S'il est idéal ( $\tau = 0$ ) et si  $T = \infty$  on a en sortie :  $z = \langle x^2 \rangle$  (moyenne vraie)

#### EXEMPLE :



(lorsque  $T \rightarrow \infty$ ,  $z_m \rightarrow 0$  et  $z \rightarrow z_i$ ).

- Si  $T < \infty$  on a  $\hat{z} = z_i + z_m$   
où  $z_i = \frac{X^2}{2}$  et  $z_m = -\frac{X^2}{2} \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T}$

Alors  $z_m$  est bornée à la valeur maximale :  $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2\omega T}$ .

On en déduit l'erreur statistique en sortie du calculateur :

$$\epsilon_{st} = \frac{\Delta z}{z_i} = \frac{z_m}{z_i} = \frac{1}{2\omega T}$$

Rq : cette erreur est nulle si  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ( $\sin 2\omega T = 0$ ).

Dans notre cas à nous où les signaux d'entrée sont aléatoires, on montre que l'erreur statistique relative sur la mesure de la partie réelle du spectre "estimé" est :

$$\epsilon_{st}(\tau) = \frac{\hat{\phi}_{x_1 y_1}(\tau) - \phi_{x_1 y_1}(0)}{\phi_{x_1 y_1}(0)} = \frac{(2)^{\frac{1}{2}}}{(2 \text{ Beq} \cdot 2T)^{\frac{1}{2}}} \left( 1 + \frac{\phi_{x_1 y_1}^2(0)}{\phi_{x_1 y_1}^2(\tau)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où Beq est la bande de bruit équivalente du filtre passe-bas d'analyse du calculateur (soit  $\frac{\omega_n}{8}$ , cf. page 82), et où  $\phi_{x_1 y_1}$  et  $\hat{\phi}_{x_1 y_1}$  sont les fonctions d'intercorrélation "vraie" et "estimée" de  $x_1$  et  $y_1$ ,  $\tau$  étant le retard différentiel entre les 2 signaux. On a :

$$\hat{\phi}_{x_1 y_1}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_1(t) \cdot y_1(t+\tau) dt$$

En sortie de l'appareil nous avons :

$$\hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega) = \frac{1}{2 \text{ Beq} \cdot |G(\omega)|^2} \cdot (V_s \phi + j V_s Q)$$

L'erreur statistique sur la part réelle  $\text{Re} \left\{ \hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega) \right\} = \frac{1}{|G(\omega)|^2} \cdot \frac{V_s \phi}{2 \text{ Beq}}$

est donc  $\epsilon_{st} = \frac{\Delta V_s \phi}{V_s \phi}$ , où  $|G|^2$ , le gain global du système est supposé connu. La définition de la mesure est liée à l'erreur statistique. L'incertitude sur la fréquence est la  $\frac{1}{2}$  largeur d'un palier soit Beq. L'incertitude sur les composantes du spectre est :  $\Delta \hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega) = \epsilon_{st}(\tau) \cdot \hat{\phi}_{x_0 y_0}(\omega)$ .

### II.4.3. Calcul de l'erreur statistique correspondant au filtre choisi

Nous nous plaçons dans le cas général où le déphasage différentiel  $\Delta\psi$  total du au retard  $\tau = \tau_2 - \tau_1$  entre les 2 voies du calculateur en amont des multiplicateurs n'est pas nul. Nous aboutissons au schéma simplifié de la fig. 8 bis où  $|G_1(\omega)| e^{j\phi_1(\omega)}$  est le

gain d'une des voies (n° 1) et  $F(\omega)$  la fonction de transfert du filtre d'analyse (cf page 84).

$$\text{Il vient : } \overline{P} = \hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\tau) = \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T x_{1T}(t+\tau) y_{1T}(t) dt.$$

$$\hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\tau, \omega) = \hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau}.$$

$$\hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\tau) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\omega, \tau) d\omega \right\}$$

où  $\hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\omega) = \frac{X_{1T}^*(\omega) \cdot Y_{1T}(\omega)}{2T}$ , avec  $X_{1T}(\omega) = \hat{X}_1(\omega)$ ,

$$\hat{X}_1(\omega) = F(\omega) \cdot \hat{X}(\omega) \quad \text{et} \quad \hat{Y}_1(\omega) = F(\omega) \cdot \hat{Y}(\omega).$$

puis  $\hat{X}(\omega) = |G_1(\omega)| \cdot e^{j\phi_1(\omega)} \cdot \hat{X}_0$  et  $\hat{Y}(\omega) = |G_2(\omega)| \cdot e^{j\phi_2(\omega)} \cdot \hat{Y}_0$ .

On admet que le corrélateur est suffisamment bien réglé pour que  $|G_1| \approx |G_2|$  et  $\phi_2 \approx \phi_1$  de sorte que  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \approx \omega \cdot \theta$ , ce qui suppose que les amplificateurs en amont des filtres d'analyse ont une bande passante grande devant celle de ces filtres pour que leur déphasage absolu dans la bande utile soit considéré comme une fonction linéaire de la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  ( $\phi_2 \neq \omega\theta_2$ ,  $\phi_1 \neq \omega\theta_1$  et  $\theta = \theta_2 - \theta_1$ ).

$$\text{Il vient : } \hat{X}_1(\omega) = \hat{X}_0 \cdot |G| e^{j\omega\theta_1} \cdot F(\omega).$$

$$\hat{Y}_1(\omega) = \hat{Y}_0 \cdot |G| e^{j\omega\theta_2} \cdot F(\omega).$$

$$\text{Donc : } \hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\omega, \tau) = \frac{1}{2T} \hat{X}_0^* \hat{Y}_0 |G|^2 \cdot e^{j\omega\theta} \cdot |F(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega\tau}$$

où  $\tau = \theta + \xi$ ,  $\xi$  étant le retard différentiel propre

aux 2 filtres d'analyse.

$$\text{Par suite : } \hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\omega, \tau) = \hat{\Phi}_{x_0 y_0}(\omega) \cdot |G|^2 \cdot |F(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega\tau}$$

$$\text{et } \hat{\Phi}_{x_1 y_1}(\omega) = \hat{\Phi}_{x_0 y_0}(\omega) \cdot |G|^2 \cdot |F|^2.$$

où  $\hat{\phi}_{x_0, y_0}(\omega)$  est le spectre "estimé" étudié. On en déduit :

$$\hat{\phi}_{x_1, y_1}(z) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{x_0, y_0}(\omega) \cdot e^{j\omega z} \cdot |G|^2 |F(\omega)|^2 d\omega \right\}$$

soit :

$$\hat{\phi}_{x_1, y_1}(z) \neq |G(\omega)|^2 \cdot \text{Re} \left\{ \hat{\phi}_{x_0, y_0}(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega z} d\omega \right\}$$

car on émet l'hypothèse que le gain  $|G|$  des amplificateurs est constant avec une bonne précision sur toute la bande du spectre exploré et de plus que la densité spectrale de puissance croisée des signaux collectés aléatoires est uniforme dans une raie étroite de largeur  $\Delta F = 2 \text{ Beq}$ .

Rq : On admettra que les filtres d'analyse sont suffisamment bien appairés pour confondre leur module et ne s'intéresser qu'à leur écart de phase.

Pour  $x_1 = y_1$  :

$$\hat{\phi}_{x_1, x_1}(0) = |G|^2 \cdot \text{Re} \left\{ \hat{\phi}_{x_0, y_0}(\omega) \right\} \cdot 2 \text{ Beq}$$

$$\hat{\phi}_{x_1, x_1}(z) = |G|^2 \cdot \text{Re} \left\{ \hat{\phi}_{x_0, y_0}(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega z} d\omega \right\}$$

où  $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega z} d\omega = f(t)$  est l'original de  $|F|^2$ ; calculons  $f(t)$ .

Nous choisissons le filtre - 12 dB/oct où l'on fera pour simplifier  $\zeta = 1$  (cf page 81).

$$F(\omega) = \frac{1}{(1 + j\Omega)^2} \text{ avec } \Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \text{ et } |F(\omega = \omega_n)| = \frac{1}{2}$$

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{(1 + \Omega^2)^2}$$

En appliquant la méthode des résidus (voir calcul annexe page 89), nous trouvons :

$$f(t) = 2 \cdot \text{Beq} \cdot \frac{(1 + \tau \omega_n)}{e^{\tau \omega_n t}} \quad \text{où } \text{Beq}' = \frac{\omega_n}{8}$$

Par suite :

$$\hat{\phi}_{x_1, x_1}(z) = |G|^2 \cdot \text{Re} \left\{ \hat{\phi}_{x_0, y_0}(\omega) \right\} \cdot 2 \text{Beq}' \cdot \frac{1 + \tau \omega_n}{e^{\tau \omega_n z}}$$

Nous avons alors :

$$\hat{\phi}_{\tau_1 \tau_1}(z) = \hat{\phi}_{\tau_1 \tau_1}(0) \cdot \frac{1 + z\omega_n}{e^{z\omega_n}}$$

L'erreur statistique globale s'écrit alors :

$$\epsilon_{st}(z) = \frac{(z)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2B_{\text{eq}} \cdot 2T}} \cdot \left\{ 1 + \left( \frac{e^{z\omega_n}}{1 + z\omega_n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ou encore :

$$\epsilon_{st}(z) = \frac{(z)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2B_{\text{eq}} \cdot 2T}} \cdot \left\{ 1 + \left( \frac{e^{z\omega_n}}{1 + z\omega_n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Pour les amplificateurs de gain total  $|G|$  la phase différentielle maximale est

$$\Delta \phi_{\text{MAX}} = \omega_{\text{MAX}} \cdot \theta.$$

Celle des deux filtres d'analyse est :

$$\Delta \phi_{\text{MAX}} = \omega_n \cdot \theta$$

De sorte que  $\tau = \frac{\Delta \phi_{\text{MAX}}}{\omega_{\text{MAX}}} + \frac{\Delta \phi_{\text{MAX}}}{\omega_n}$

et  $\omega \tau = \Delta \psi = \frac{\omega_n}{\omega_{\text{MAX}}} \Delta \phi_{\text{MAX}} + \Delta \phi_{\text{MAX}}$

Comme  $\frac{\omega_{\text{MAX}}}{2\pi}$  est la bande totale du spectre croisé exploré (environ 10 MHz) et  $\frac{\omega_n}{2\pi}$  la fréquence de coupure des filtres d'analyse (environ 20 KHz). On voit que :  $\Delta \phi_{\text{MAX}} \frac{\omega_n}{\omega_{\text{MAX}}} \ll \Delta \phi_{\text{MAX}}$ , il reste alors :

$$\epsilon_{st}(z) \approx \frac{(z)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2B_{\text{eq}} \cdot 2T}} \cdot \left\{ 1 + \left( \frac{e^{\Delta \phi_{\text{MAX}}}}{1 + \Delta \phi_{\text{MAX}}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

où  $\Delta_{\text{MAX}}$  est la phase différentielle maximale admissible entre les 2 filtres d'analyse pour avoir une erreur statistique donnée.

#### II.4.4. Données numériques de la mesure et discussion

Chaque séquence de mesure du spectre croisé dure  $\theta_s$  ce qui correspond à N paliers de durée  $2T_s$ . Si  $F_{\text{MAX}} - F_{\text{Min}}$  est l'étendue du spectre et si  $B_{\text{eq}}$  est la bande équivalente de bruit du filtre d'analyse choisie égale à  $\frac{1}{2}$  largeur de palier, nous avons :

$$N = \frac{F_{\text{MAX}} - F_{\text{Min}}}{2B_{\text{eq}}} \quad \text{et} \quad \theta = N \cdot 2T_s.$$

Donc 
$$\frac{F_{MAX} - F_{min}}{2 B_{\text{eq}}} = \frac{\theta'}{2T}$$
 ou 
$$\frac{F_{MAX} - F_{min}}{2 B_{\text{eq}} \cdot 2T} = \frac{\theta'}{(2T)^2}$$

Par suite :

$$\epsilon_{\text{stat}}(z) \approx \left\{ \frac{\theta'}{\frac{F_{MAX} - F_{min}}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{e^{\Delta\phi_n}}{1 + \Delta\phi_n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{2T}$$

Les valeurs probables du temps d'intégration sont comprises entre 0,1 et 1 s et la durée de la séquence de mesure entre 30 s et 3 mn.

Nous avons choisi  $F_{\text{min}} = 0,1 \text{ MHz}$

$F_{\text{MAX}} = 10 \text{ MHz}$

pour  $B_{\text{eq}} = 25 \text{ KHz}$ .

Nous prenons  $2T \approx 0,4 \text{ s}$  il vient :  $N = 200$  paliers et  $\theta = 80 \text{ s}$  ou  $1 \text{ m } 20 \text{ s}$ . Puis :

$$\epsilon_{\text{stat}}(z) = \frac{1}{100} \cdot \left\{ 1 + \left( \frac{e^{\Delta\phi_n}}{1 + \Delta\phi_n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Dans la pratique, pour 2 filtres d'analyse de - 12 dB on peut s'assurer un écart de phase maximum de  $20^\circ$  au delà de la fréquence de coupure (dans la région de la pente du filtre) de sorte que  $\Delta\phi = 0,35_{\text{rad}}$  et

$$e^{\Delta\phi_n} = 1,42 \quad \text{soit} \quad \frac{e^{\Delta\phi_n}}{1 + \Delta\phi_n} = 1,05, \quad \text{puis :} \quad \left( \frac{e^{\Delta\phi_n}}{1 + \Delta\phi_n} \right)^2 = 1,1$$

Finalement :

$$\epsilon_{\text{stat}}(z) = \frac{1}{100} \sqrt{2,1} = 1,45 \%$$

Lorsqu'on intègre seulement durant 0,1 s, cette erreur est doublée, soit 3,0 %. En conclusion on peut dire que l'erreur statistique probable est de 2 %.

Remarque : Le temps d'intégration moyen étant de 0,5 s il faut donc que les filtres moyenneurs de pré-intégration analogique du calculateur aient une constante de temps de 0,1 s maximum. En effet à chaque palier de fréquence de durée 0,5 s, l'ordinateur prend n points d'information (par exemple 100) dont les valeurs ne doivent pas être altérées par les filtres analogiques car elles servent au traitement de la moyenne numérique.

Or, on utilise des filtres actifs de - 6 dB/oct. insérés après les multiplicateurs. Si on envoie en entrée de ces filtres un échelon unité, la réponse  $v_s$  du filtre à cette entrée est exponentielle.

Elle est représentée sur les fig. n° 9.a et 9.b.

Pour  $t < \tau = RC$ , l'amplitude en sortie ne correspond pas à la bonne valeur (ici 1 V). On montre que l'on commet une erreur inférieure à 10 % si on prend  $\tau < \frac{2T}{5}$  soit 0,1 s (90 % des points pris en compte par le T 2000 pendant 0,50 s sont significatifs pour le calcul de la moyenne).

Ajoutons enfin d'autres possibilités offertes par le T 2000 : outre les signaux de commande des séquences de mesure des spectres qu'il fournit au synthétiseur et dont le diagramme séquentiel est représenté sur la fig. 9 c, il peut mesurer sur les 2 voies réelle et imaginaire du spectre les potentiels simultanément en temps réel et le résultat est visualisé sous forme de spectre en fréquence immédiatement après le calcul sur la console de visualisation.

Enfin nous pouvons faire une 1° séquence de mesure avec le vide dans le caisson puis la 2° avec du plasma, ce qui permet de normaliser les spectres par rapport au vide par soustraction automatique et programmée.

Il est aussi facile de régler les zéros des sorties analogiques du calculateur en jouant sur les off-set des multiplicateurs au fur et à mesure du déroulement des séquences et ainsi apprécier les performances de l'appareil.

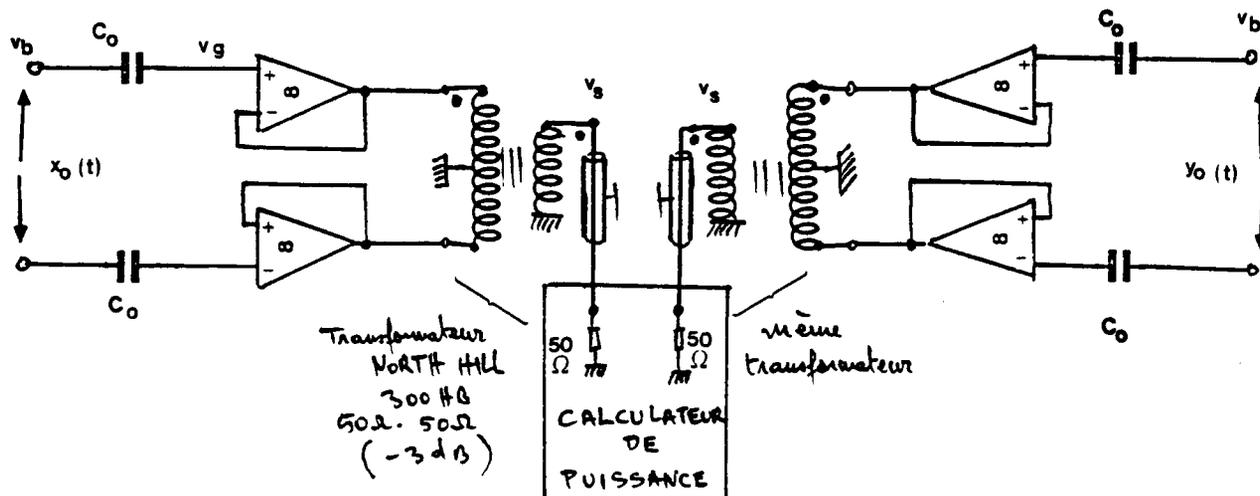
II.5. DESCRIPTION TECHNIQUE DE L'APPAREIL

II.5.1. Préliminaire

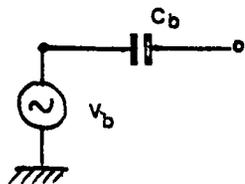
Sachant ce que l'on veut en sortie du calculateur en fonction d'un certain niveau sur les dipôles, le calcul de la chaîne nécessite de savoir ce qui se présente à son entrée. Pour cela nous devons d'abord connaître les performances des capteurs fournissant les signaux à corrélérer.

II.5.2. Les capteurs

Les sondes employées sont du type "haute impédance" comme le montre le circuit de la fig. n° 10. Le schéma synoptique de l'ensemble est le suivant :



Chaque boule de 2 cm de diamètre et plongée dans le plasma est équivalente au générateur suivant :



où  $c_b = 4 \pi \epsilon r_b$

$v_b = \frac{q}{c_b}$  et  $q = \sigma 4 \pi r_b^2$

avec  $\epsilon \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$  ;  $r_b \approx 1 \text{ cm.}$

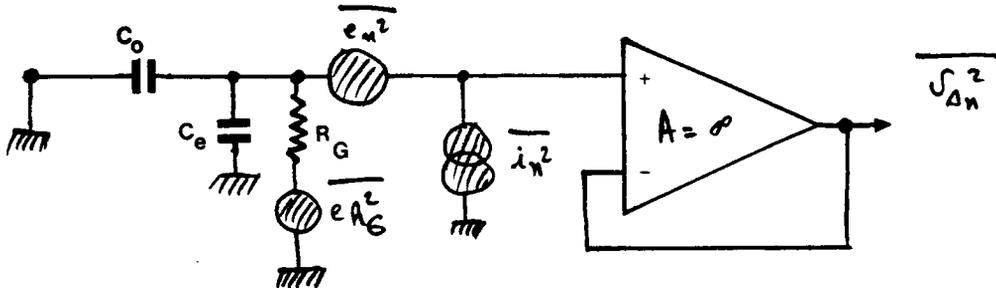
$\sigma$  est la densité superficielle des charges, collectées sur la sphère de rayon moyen  $r_b$  (gaine d'ions comprise).

Afin de s'assurer un original  $v_g$  indépendant de l'impédance propre  $Z_b$  de l'ordre de  $\frac{1}{j\omega_b c}$  on met en série entre boule et amplificateur une petite capacité  $c_0$  de 0,1 pF environ.

Ainsi le plasma voit-il toujours une haute impédance. En annexe n° VI nous avons calculé l'impédance d'entrée et le gain d'un des préamplificateurs du schéma précédent. L'application numérique montre que l'on a une capacité d'entrée de l'ordre de 6,4 pF et un gain de - 37,7 dB.

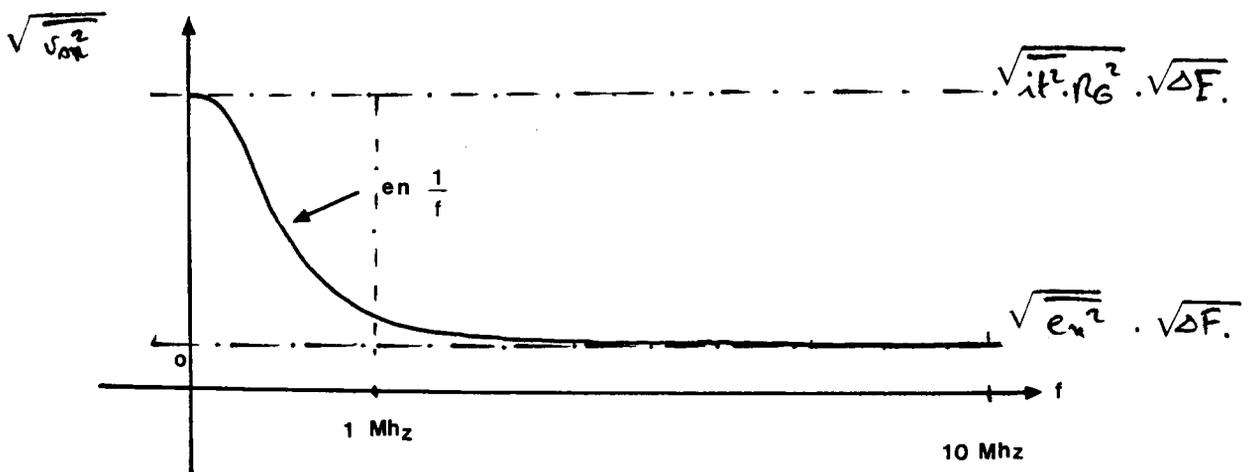
Après passage du signal dans les transformateurs de sortie et les longs câbles reliant les dipôles au ordinateur, nous avons une perte globale d'insertion de -4,3dB ce qui ramène le gain total entre sortie et boules d'un des dipôles à - 42 dB.

D'autre part, du point de vue bruit, le préamplificateur est équivalent au schéma suivant :



$\overline{e_n^2}$  et  $\overline{i_n^2}$  sont les densités spectrales de puissance moyenne de tension et de courant de bruit propres au préamplificateur.

Nous avons reporté en annexe n°VII le calcul sur la valeur efficace du bruit en sortie et l'expression du facteur de bruit F. Nous donnons ici l'allure de la courbe résultante du bruit en sortie dans une bande  $\Delta F$  :



Des mesures à l'aide de l'analyseur de spectre Hewlett Packard montrent que  $\sqrt{-2} \approx 1,4 \mu\text{Veff}$  pour  $\Delta F = 30 \text{ KHz}$ .

Finalement les performances de la sonde peuvent se résumer ainsi :

- atténuation sortie entrée  $\frac{v_o}{x_o} = 42 \text{ dB}$
- bruit en sortie  $\sqrt{\frac{v_o^2}{S \cdot B}} = 1,4 \mu\text{Veff}$  dans 30 KHz environ

ce qui correspond à plus de 150  $\mu\text{Veff}$  de bruit sur les boules.

Ces résultats montrent clairement combien nous sommes pénalisés par les capteurs pour le calcul du spectre croisé puisque le calculateur doit être capable de fournir 10 V en sortie correspondant à un rapport signal sur bruit  $\frac{S}{B}$ , en entrée de l'ordre de  $\frac{1}{20}$ . Bien mieux, on espère avoir  $\frac{S}{B} = 10$  en sortie, soit 1 V de bruit résiduel seulement. Il doit donc réaliser l'exploit de multiplier par 100 minimum le  $\frac{S}{B}$  d'entrée.

### II.5.3. Les amplificateurs d'entrée

Pour réhausser le niveau émis par les sondes précédentes, nous avons introduit entre celles-ci et le calculateur lui-même deux amplificateurs à circuit intégré du type PLESSEY SL 10 30 C à large bande et à faible bruit ( $\frac{1}{10}$  du bruit des sondes). Ils sont appairés, un pour chaque voie d'entrée.

Le schéma électrique et le dessin du circuit imprimé (implantation) sont donnés sur la fig. 19 page 141. L'ensemble est adapté à 50  $\Omega$  en entrée et en sortie. Pour avoir un gain en tension de 45 dB jusqu'à 25 MHz, il faut + 15 V d'alimentation pour 1 volt crête maximum en sortie (avec seulement 0,1  $\mu\text{Veff}$  de bruit en entrée dans 30 KHz). Chaque circuit intégré est logé avec ses composants annexes extérieurs dans un petit boîtier hermétique muni de trois prises RIM.

### II.5.4. Le calculateur proprement dit

Nous possédons un synthétiseur programmable Hewlett Packard fournissant un signal fixe à 20 MHz sur 50  $\Omega$  et un signal à fréquence commandée (V.C.O.) à partir de 20 MHz sur 50  $\Omega$ , jusqu'à 33 MHz.

Tous les niveaux sont possible de  $- 12 \text{ dB}_m$  à  $+ 30 \text{ dB}_m$ . Nous avons donc choisi comme 1° fréquence intermédiaire  $F_o$  après le 1° changement de fréquence de la fig. 18, la fréquence 20 MHz, de sorte que le 1° oscillateur local (O.L.<sub>1</sub>) balaiera de 20 MHz à 33 MHz pour couvrir tout le spectre à étudier.

Le 2° oscillateur local (O.L.<sub>2</sub>) sera par conséquent à 20 MHz, ce qui fournira une 2° fréquence intermédiaire équivalente à la largeur du filtre d'analyse soit 25 KHz environ.

Pour ne pas perturber ces derniers pour le calcul de la densité spectrale nous avons introduit comme 1° filtres pour la 1° fréquence intermédiaire  $F_o$  des amplificateurs H.F. de 20 dB de gain accordé à  $20 \text{ MHz} \pm 1 \text{ MHz}$  de largeur de bande. Ils sont alimentés sous 30 V et appairés en phase et en niveau, un par voie, au moins dans les 25 KHz de largeur de bande nécessaire à l'analyse.

Le reste des amplificateurs H.F. nécessaires à l'obtention de la sensibilité importante du calculateur sont du type "inverseurs" à transistors à large bande et à contre-réaction négative en continu. On peut en voir des exemples sur les fig. 20, 21 et 24. Par leur faible bruit en sortie ils sont excellents en H.F. et offrent une grande souplesse d'emploi et de réglages.

#### II.5.5. Calcul de la chaine de l'appareil

On s'intéresse en outre au niveau minimum de signal utile  $x_{o \text{ min}}$  corrélable en entrée du calculateur. Celui-ci correspond en fait au minimum de signal significatif en sortie qui décolle du bruit c'est à dire en fait le résiduel de bruit B après une intégration limitée à  $2 T_s$ .

Si G est le gain global du calculateur, nous avons

$$x_{o \text{ min}} = \frac{B}{G}$$

Si d est la dynamique en entrée au niveau des dipôles et D la dynamique en sortie de l'appareil nous avons  $D = d^2$

( $D = \frac{S_{\text{MAX}}}{S_{\text{min}}}$  et  $d = \frac{x_{o\text{MAX}}}{x_{o\text{min}}}$ ). Nous nous fixons  $x_{o\text{MAX}} = 10 \mu\text{Veff}$  (dans 25 KHz) et  $S_{\text{MAX}} = 10 \text{ V}_C$ .

Compte tenu d'un certain nombre de règles sur le calcul du bruit en sortie de circuits électroniques différents (se reporter à l'annexe VIII, nous avons établi sur la fig. 27 le schéma synoptique du calculateur où sont reportés les valeurs de tous les potentiels et bruits, ainsi que les gains des diverses parties de la chaîne. Apportons quelques précisions supplémentaires sur la partie électronique du schéma nécessaires pour le calcul.

#### II.5.5.1. Les multiplicateurs (fig. 25)

Utilisés pour la corrélation ceux sont les MC1494L de chez Motorola. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

- . alimentation :  $\pm 15$  V
- . tension d'entrée :  $\pm 10$  V MAX
- . linéarité :  $\pm 1$  % en x et en y
- . bande passante pour les faibles signaux : 1 MHz

Ils sont munis d'une correction automatique du zéro en sortie et de réglages manuels de tous les off-set (entrées et sortie). En outre nous avons ajoutés sur l'amplificateur de sortie LM301, fixant le gain du multiplicateur, une capacité de  $0,1 \mu\text{F}$  déterminant en parallèle avec la résistance de  $100 \text{ K}\Omega$  un filtre passe-bas de fréquence de coupure de 100 Hz réalisant ainsi une pré-intégration analogique qui nettoie la sortie en bruit résiduel avant soustraction et sommation.

#### II.5.5.2. Les filtres d'analyse (fig. 15)

Ces filtres passe-bas de 12 dB/oct sont des filtres actifs à circuits intégrés de chez BURR-BROWN. Leur calcul est effectué en annexe n° IV page 84. Leur réponse en fréquence est reportée sur la fig. 16. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

- . tension d'entrée :  $\pm 10$  V
- . résistance d'entrée :  $100 \text{ K}\Omega$
- . gamme de la fréquence centrale  $f_0$  : 0,001 KHz à 20 KHz
- . précision en fréquence :  $\pm 1$  %
- . tension en sortie maximale pour  $f_0 < 20 \text{ KHz}$  : 10 V
- . bruit dans 50 KHz :  $200 \mu\text{Veff}$
- . alimentation :  $\pm 15$  V

II.5.5.3. Les sommateurs et soustracteurs (fig. 26)

Le circuit sommateur est constitué d'un amplificateur inverseur à deux entrées grâce à un amplificateur opérationnel LM 301 contre-réactionné. Deux cellules RC permettent d'en faire un filtre passe-bas de 10 Hz, inconditionnellement stable. Pour le circuit soustracteur nous avons ajouté devant une des entrées du filtre sommateur un circuit inverseur du même type que ceux de la fig. 23.

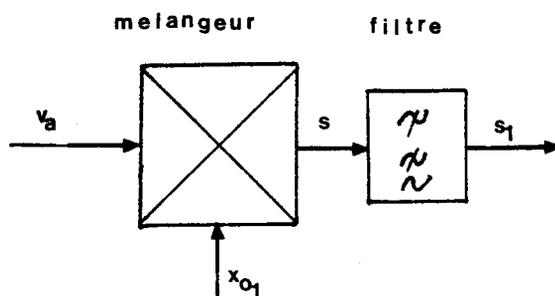
II.5.5.4. Les amplificateurs des filtres d'analyse (fig. 23)

Ils procurent un niveau convenable pour les entrées des multiplicateurs. Ceux sont aussi des circuits inverseurs constitués d'amplificateurs opérationnels LM 301 contre-réactionnés et munis d'une correction en fréquence (stabilité assurée). C'est à leur niveau que se fera le réglage définitif des gains et des symétries des 2 voies avant les multiplicateurs et après les filtres. Nous laissons ainsi fixes les gains de ces derniers qui demandent à rester stables et parfaitement bien ajustés afin de réduire l'inter-modulation parasite ou le déphasage différentiel, en sortie.

II.5.5.5. Les circuits déphaseurs  $\frac{\pi}{2}$  (fig. 22)

Leur rôle est de réaliser la quadrature rigoureuse des signaux  $s_1$  et  $s_2$  avant multiplication (cf fig. 8, page 119).

Considérons le schéma suivant :



où  $x_{01} = X_0 \cos \omega_0 t$ ,  $F_0 = 20 \text{ MHz}$

$$v_a = V_{a1} \cos (\omega - \omega_0)t + V_{a2} \sin (\omega - \omega_0)t$$

En sortie nous obtenons :

$$s = \frac{X_0 \cdot V_{a1}}{2} \cdot \cos \omega t + \frac{X_0 \cdot V_{a2}}{2} \cdot \sin \omega t + f [2\omega_0 t, \omega t]$$

Après filtrage à la fréquence  $F_c \ll F_o$  et en posant  $p_1 = \frac{X_o V_{a1}}{2}$  et  $q_1 = \frac{X_o V_{a2}}{2}$  il vient  $s_1 = p_1 \cos \omega t + q_1 \sin \omega t$ .

Maintenant déphasons  $x_{o1}$  de  $(-\frac{\pi}{2})$ , nous avons en sortie  $\tilde{s}_1 = -p_1 \sin \omega t + q_1 \cos \omega t$ . Pour réaliser ce calcul nous utilisons un transformateur à point milieu attaquant un circuit RC déphaseur à gain unité. Celui-ci est adapté au moyen d'un amplificateur suiveur H.F. à haute impédance d'entrée (fig. 22).

En sortie du transformateur nous avons  $+ \alpha x_{o1}$  et après filtrage  $+ \alpha x_{o1} \cdot \frac{1 - \tau p}{1 + \tau p}$ ,  $p = j \omega$ ,  $\alpha$  perte d'insertion du transformateur soit encore  $+ \alpha x_{o1} e^{-j\psi}$  où  $\psi = 2 \text{Arg} \omega \tau$  et  $\tau = RC$ .

En faisant  $\omega_o = \frac{1}{\tau}$  (ou  $F_o = \frac{1}{2\pi RC}$ ) nous avons  $\psi = \frac{\pi}{2}$ . Enfin en ajoutant avant mélange au niveau de l'oscillateur local O.L.<sub>2</sub> un amplificateur non inverseur de gain A (fig. 21, 24 et 28), le niveau de l'O.L.<sub>2</sub> devient  $U_2 = -A \alpha x_{o1} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , (fig. 24, carte n° 11) puis  $+A \alpha x_{o1} e^{-j\frac{\pi}{2}}$  (fig. 21, carte n° 3).

Le gain A peut alors compenser les pertes d'insertion  $\alpha$  dues au transformateur.

#### II.5.5.6. Les mélangeurs H.F.

Pour réaliser correctement les changements de fréquences vers 20 MHz, nous avons utilisés les circuits SUMMIT 765D de chez Tekelec Airtronic.

Il faut que les oscillateurs locaux hauts niveaux soient à  $+ 7 \text{ dB}_m$  environ. Sur la fig. n° 29 nous avons représenté la courbe des produits d'inter-modulation du 3° ordre en fonction des signaux d'entrée bas niveaux.

Nous voyons que si ces signaux sont de  $0 \text{ dB}_m$ , les produits d'inter-modulations ne sont que de  $- 30 \text{ dB}_m$ . Après multiplication pour la corrélation ils seront donc à  $- 60 \text{ dB}$  en dessous des signaux utiles de sorte que la distorsion d'inter-modulation n'altérera pratiquement pas le rendement du calculateur.

Rq : Notons que ces circuits attaqués sur  $50 \Omega$  infligent une perte d'insertion de  $- 6 \text{ dB}$  au signal d'entrée (cf fig. 27, page 157).

### II.5.6. Réalisation pratique

Tout l'ensemble de l'appareillage nécessaire à l'obtention du spectre croisé se subdivise en plusieurs blocs interconnectables entre eux. D'abord nous avons la sonde quadripolaire (photo n° 2) montée sur pied pour la fixer sur le chariot dans le caisson. Nous pouvons modifier toutes les distances entre les boules des deux capteurs. Puis, entre les deux dipôles dont les sorties sont des prises RIM et le calculateur, nous utilisons deux préamplificateurs de 45 dB appairés, logés dans deux petits boîtiers avec prises RIM (fig. 19, page 141).

Le calculateur lui-même est constitué d'un rack fermé dont la face avant comprend toutes les entrées et sorties utiles (photo n° 1, page 171).

A l'intérieur sont enfichées toutes les cartes constituant les parties H.F. et B.F. de la corrélation. Nous y avons mis aussi les deux amplificateurs 40 dB appairés accordés à 20 MHz. Des prises RIM relient le rack précédent au synthétiseur fournissant les oscillateurs locaux (photo n° 2). Enfin, une interface logique à transistors relie par un long câble ce dernier au mini-ordinateur T 2000.

Toutes les cartes sont numérotées et presque toutes appairées deux à deux du point de vue implantation car il s'agit de symétriser au mieux en phase et en amplitude les deux voies H.F. du calculateur. Sur la figure n° 28 nous avons reporté le schéma général d'inter-connection de toutes les fonctions du système conformément au schéma de principe de la fig. n° 8. Sur les fig. 19 à 26, nous avons fait figurer les détails des circuits électroniques avec les valeurs exactes des éléments employés.

Toutes les entrées et sorties sont indexées et numérotées. Nous avons précisé aussi les longueurs de certains câbles coaxiaux 50  $\Omega$  les reliant entre-elles ; en effet, pour les sorties à 20 MHz fixe il est aisé d'ajuster le déphasage  $\Delta\psi$  différentiel entre les deux voies H.F. en jouant sur les différences de longueurs  $\Delta x$  des câbles conformément à la relation  $\Delta\psi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda_0}$  où  $\lambda_0 = \frac{v}{F_0}$  ( $F_0 = 20$  MHz et  $v < 300\,000$  km/s).

## II .6. MISE AU POINT ET MODE D'UTILISATION DE L'APPAREIL

Après avoir testé et réglé séparément toutes les cartes contenues dans le rack ainsi que tous les modules annexes (sondes et préamplificateurs H.F.) nous avons connectés tous ces éléments ensembles.

Pour faire fonctionner correctement le calculateur il est nécessaire de l'alimenter avec six régulateurs de tension différents. En effet, il faut du + 15 V et du - 15 V pour les cartes enfichables dans le rack, il faut 32 V pour les amplificateurs de 40 dB accordés à 20 MHz, puis 10 V pour les amplificateurs des oscillateurs locaux  $OL_1$  et  $OL_2$  ainsi que 5,5 V pour les préamplificateurs placés après les sondes H.F. quadripolaires. Pour ces dernières enfin, nous avons besoin de + 9 V.

Pour commencer la mise au point, nous attaquons les boules des deux récepteurs H.F. par le même signal  $v_e(t)$  à des fréquences discrètes depuis 1 MHz jusqu'à 10 MHz. En premier lieu nous fixons les niveaux d'attaque  $w_1$  et  $w_2$  sur le 1° mélangeur de l'oscillateur local  $OL_1$  à + 7 dBm (cf fig. 20, page 143).

Nous ajustons  $v_e$  à 10  $\mu$ Veff et sa fréquence à 1 MHz par exemple. Nous regardons les sorties  $v_4$  et  $v'_4$  des amplificateurs accordés à 20 MHz chargés sur 50  $\Omega$ . Lorsque la fréquence de l' $OL_1$  est 21 MHz nous avons deux signaux maximum. En jouant sur les gains et les déphasages des amplificateurs de la carte n° 1 ainsi que sur les longueurs des câbles coaxiaux de liaisons nous appairons au mieux ces signaux en phase et en amplitude. En parcourant tout le spectre des signaux sur les boules de 1 à 10 MHz par bonds de 1 MHz et en modifiant simultanément la fréquence de l' $OL_1$  de façon à avoir toujours 20 MHz d'écart entre les deux fréquences des signaux d'entrée du 1° mélangeur nous réajustons gain et phase de façon à obtenir une réponse plate ainsi qu'un écart de phase constant (le plus petit possible) sur toute la bande d'analyse du spectre.

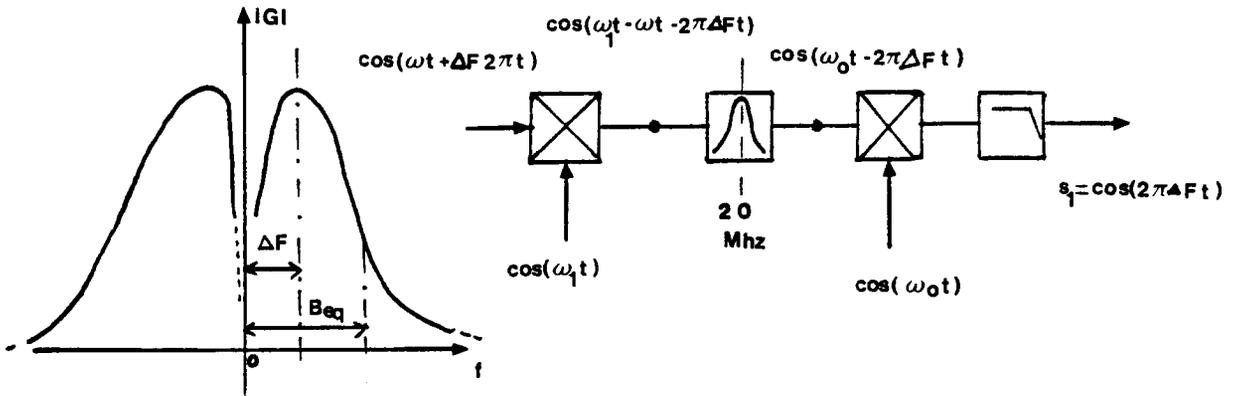
Lorsque ce circuit de 1° changement de fréquence est correctement ajusté nous notons les niveaux de sortie  $v_4$  et  $v'_4$  (de l'ordre de 8 mVeff). Ensuite nous réglons le circuit déphaseur  $\frac{\pi}{2}$ ; pour cela nous ajustons les niveaux  $x_{OI}$  et  $x_{OD}$  du 2° oscillateur local  $OL_2$  à + 7 dBm et leur fréquence à 20 MHz (carte n° 11), ce qui nous permet de régler les filtres de quadrature afin d'obtenir deux signaux  $U_1$  et  $U'_1$  de même phase, de même amplitude mais déphasés tous les deux de  $-\frac{\pi}{2}$  par rapport au signal émis (cf carte n° 2 et fig. 22).

Pour parfaire les écarts de phase et ramener les niveaux des signaux  $U_2$  et  $U'_2$  à + 7 dBm aux entrées des 2ème mélangeurs nous réglons de même les amplificateurs (résistances et capacités des cellules de gain et filtres RC) dans les cartes n° 11, n° 3 et n° 4 (cf fig. 21 et 24).

Pour la partie H.F. il reste à introduire dans les cartes n° 3 et n° 4 les signaux  $v_4$  et  $v'_4$  issus du 1° mélangeur. Nous recommandons le même balayage en fréquence pas à pas mais cette fois, nous réajustons correctement les gains et les déphasages entre les deux voies des amplificateurs H.F. des cartes précédentes de façon que les signaux  $v_6$  et  $v_7$  soient en quadrature ainsi que  $v'_6$  et  $v'_7$  et qu'ils soient tous de même niveau (cf fig. 21). Cette partie de la mise au point est très longue et délicate. Il faut en plus s'assurer que les niveaux sur les pins 1 et 8 des deux mélangeurs du 2° changement de fréquence (les signaux  $v_4$  et  $v'_4$  inversés) ne dépassent pas 0 dBm afin d'être en régime linéaire de fonctionnement.

Mais la partie essentielle des réglages est la suivante. En introduisant les signaux  $v_6$ ,  $v'_6$ ,  $v_7$  et  $v'_7$  dans les cartes n° 8 et n° 9 (cf fig. 15), il s'agit alors de faire  $\tilde{s}_1 = s_1 (\omega t + \frac{\pi}{2})$ ,  $\tilde{s}_2 = s_2 (\omega t + \frac{\pi}{2})$  puis  $|s_1| = |s_2| = |\tilde{s}_1| = |\tilde{s}_2|$ . Pour cela nous choisissons un écart de fréquence  $\Delta F$ , toujours le même, par exemple 10 KHz entre la fréquence de  $1'OL_1$  (1° mélangeur) et celle du même signal d'entrée  $v_e$  (pour les deux voies du calculateur) à 20 MHz près. Cet écart doit être inférieur à la bande équivalente  $Beq = 25$  KHz des filtres d'analyse. De cette façon, en sortie de ces derniers nous retrouvons la 2° fréquence intermédiaire (10 KHz ici). En faisant ensuite balayer  $1'OL_1$  nous devons régler le niveau constant et les déphasages minimum de tous les signaux  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\tilde{s}_1$  et  $\tilde{s}_2$  de 1 MHz à 10 MHz.

Remarque : Ces signaux doivent donner l'image du filtre d'analyse lorsque pour une fréquence d'accord de l'OL<sub>1</sub> donnée, on fait varier l'écart de fréquence ΔF de 0 à 100 KHz par exemple, comme le montre la figure ci-dessous.



Nous constatons que la réponse passe par zéro lorsque la fréquence des battements est nulle (ΔF = 0).

En effet les capacités de liaisons entre les amplificateurs des deux canaux évite le passage du continu au niveau des multiplicateurs.

En fait, il faut s'arranger pour obtenir des amplitudes de s<sub>1</sub> (ou s<sub>2</sub>...) maximales en réglant correctement l'écart ΔF.

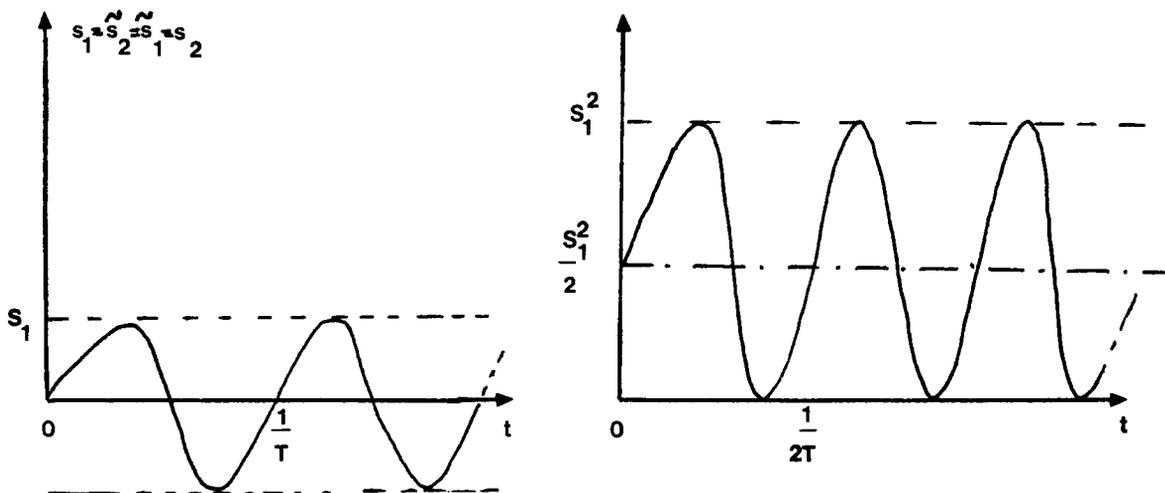
Cette symétrie des deux voies H.F. du calculateur oblige à revenir souvent en amont du circuit pour parfaire les réglages des éléments composant des fonctions électroniques.

Lorsque tout est presque au point nous devons régler les 4 multiplicateurs de la corrélation (cf. carte n° 14 et fig. 25).

Avec un gain de 10 pour les filtres d'analyse à la fréquence de 10 KHz cela nous fait des signaux s<sub>1</sub>, s<sub>2</sub> etc... de 2,26 V crête (√5). Chaque multiplicateur de gain 1 réalise le produit :

$$s_1 \cdot s_2 = \frac{s_1^2}{2} \cos[2\Delta F \times 2\pi t] + \frac{s_1^2}{2}$$

comme le montre le diagramme suivant :



Nous obtenons une fréquence double en sortie. En jouant sur les off-set d'entrée de ce circuits nous diminuons la distorsion du produit en sortie.

Après les deux multiplicateurs de la voie réelle (co-spectre) nous avons les potentiels  $s_1 \cdot s_2$  et  $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$  de 2,5 V d'amplitude. Leur fréquence est limitée à 0,1 KHz (à - 3 dB) par pré-intégration analogique cf fig 25). Nous réalisons leur somme comme le montre la fig. 26. Pour avoir 10 V en sortie (pour 10  $\mu$ Veff en entrée de chaque dipôle de la sonde H.F.) pour la partie réelle du spectre il faut régler le gain du filtre sommateur à 2. Sa fréquence de coupure est de 10 Hz.

#### - Le zéro du calculateur

Lorsque les signaux  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\hat{s}_1$  et  $\hat{s}_2$  sont tous égaux en amplitude, nous avons 0 V en sortie de la voie en quadrature conformément aux formules établies à la page 30 (il faut parfaire les réglages du déphaseur  $\frac{\pi}{2}$  pour y parvenir, à 5° près).

Afin d'obtenir un zéro à peu près plat sur toute l'étendue du spectre étudié nous devons modifier légèrement les gains de  $OL_1$  et  $OL_2$  autour de la valeur + 7 dBm (cela joue aussi en faveur du rendement du calculateur, en abaissant le niveau de distorsion).

Pour ajuster 0 V nous touchons à certains off-set des multiplicateurs (-ceux de la sortie). Sur la carte n° 14 nous avons pour cela placés une batterie de potentiomètres 10 tours de 50 K $\Omega$ .

Lorsque le signal sur les boules est nul nous devons aussi avoir 0 V en sortie.

Au moyen d'un circuit à déphasage  $\frac{\pi}{2}$  placé à l'entrée d'un des dipôles nous pouvons obtenir un maximum sur la partie imaginaire du spectre et nous assurer d'un zéro correct sur la partie réelle.

Comme le rapport  $\frac{S}{B}$  des sondes est médiocre nous avons pas mal de bruit sur les sorties (1,96Veff) ; toutefois lorsque l'accord de fréquence est parfait le signal utile est bien au-dessus du bruit.

Nous avons obtenu une sensibilité maximale de l'appareil à l'accord de fréquence correspondant à 10 V en sortie de la voie en phase et 20  $\mu$ Veff de signaux à l'entrée des sondes (soit - 80 dB) lorsque les amplificateurs près celles-ci étaient alimentés sous 5,5 V (gains inférieurs à 45 dB), ceux des OL<sub>1</sub> et OL<sub>2</sub>, sous 10 V et leurs niveaux atténués ensuite de -39 dB pour l'OL<sub>2</sub> et 42 dB pour l'OL<sub>1</sub> (cf fig.27, page 157).

Remarque : Lorsqu'il y a 1 V en sortie le niveau minimum corrélable en entrée est de - 120 dB soit 0,2  $\mu$ Veff.

Pour cette configuration optimale du calculateur de puissance nous avons notés les consommations suivantes :

V <sub>cc</sub> = + 15 V	I <sub>s</sub> = 670 mA
V <sub>cc</sub> = - 15 V	I <sub>s</sub> = 85 mA
V <sub>cc</sub> = 33 V	I <sub>s</sub> = 70 mA
V <sub>cc</sub> = 9 V	I <sub>s</sub> = 10 mA
V <sub>a</sub> = 10 V	I <sub>s</sub> = 50 mA
V <sub>a</sub> = 5,5 V	I <sub>s</sub> = 40 mA

ce qui donne 925 mA au total

## II.7. RESULTATS DES MESURES

A la fin de cette note technique nous donnons plusieurs exemples de spectres obtenus dans le caisson de laboratoire du C.R.P.E. où règne un plasma artificiel plus ou moins dense. Les mesures de ces spectres effectués avec R. Pottelette au moyen du T 2000 dans deux configurations des sondes parallèles et perpendiculaires (cf. fig. 5) et pour différentes géométries des dipôles ont confirmé la théorie du spectre croisé qui a fait l'objet du sujet de sa thèse présentée à Paris le 3 Mai 1977.

Sur ces courbes normalisées nous distinguons très nettement les séries de zéros des parties réelles des densités spectrales ainsi que la raie principale au voisinage de la fréquence plasma. Il apparait aussi très clairement des ondulations dans la partie imaginaire du spectre pratiquement proportionnelles aux écarts de phase entre les signaux collectés entre les deux capteurs.

Nous pouvons aussi constater à quel point la méthode de lissage réalisée par le T 2000 est efficace ce qui nous permet de régler plus efficacement les zéros du corrélateur au fur et à mesure du défilement des paliers de fréquence.

### III - CONCLUSION

Bien que les chiffres cités précédemment concernant la sensibilité et le bruit du corrélateur, ne sont pas tout à fait ce que l'on espérait (un facteur 2 seulement), tous les essais dans toutes les combinaisons possibles des sondes et des états du plasma ont donnés des résultats très satisfaisants. Nous avons obtenus malgré tout de très belles raies de la partie réelle du spectre croisé à haut niveau pour lesquelles les erreurs de mesure sont faibles (2 % environ). (cf. spectres : fig. 30, 31, 32, 33).

En ce qui concerne la partie imaginaire nous nous sommes contentés seulement d'apprécier le caractère inhomogène et anisotrope du plasma en accord avec la théorie sans toutefois admettre des mesures précises vu le faible écart des niveaux obtenus par rapport au bruit résiduel.

En combinant les mesures actives donnant la partie réelle de l'impédance de transfert  $Z_M$  et les mesures passives donnant la partie réelle de la densité spectrale de puissance croisée  $\phi_{x_0y_0}(\omega)$  nous pouvons conclure sur la dynamique des électrons ; en effet le rapport

$$\frac{\text{Re}[\phi_{x_0y_0}(\omega)]}{\text{Re}[Z_M]}$$

est significatif de l'écart entre la fonction de distribution des électrons suprathermiques (plasma hors d'équilibre) et celle de forme maxwellienne (plasma en équilibre) (cf thèse de R. Pottellette page 4).

Des progrès restent à faire pour améliorer les performances des capteurs. Il est envisagé de les transformer en double dipôle mixte dont le double rôle sera pour l'un d'émettre et de recevoir simultanément (mode actif et impédance propre  $Z_p$ ) et en même temps pour l'autre de recevoir (mode actif et impédance de transfert  $Z_M$ ). Les rôles pourraient être échangés. Enfin tous les deux travailleraient en récepteur (mode passif et spectre croisé).

Tout ceci pourrait se faire par un jeu de commutations au cours d'une suite de séquences de mesures faisant passer d'un mode à l'autre, en  $Z_p$  ou en  $Z_M$  au rythme d'une horloge bien définie.

Nous espérons aussi pouvoir gagner + 20 dB sur le gain des sondes tout en minimisant leur bruit propre et en réduisant leurs dimensions géométriques afin de perturber le moins possible le plasma.

Le calculateur de puissance qui a servi en quelque sorte de prototype de laboratoire pourrait être mis sous une forme embarquable plus élaborée notamment par le jeu de relais et des circuits de commutation puis par la complexité des mesures qu'il effectuerait (calibrations internes à plusieurs niveaux, déphasages étalons, sorties bas et haut niveau...).

Tout cet ensemble pourrait faire partie d'un nouveau programme spatial d'étude du plasma ionosphérique dans les années à venir.

ANNEXE I - CORRELATION, APODISATION, ESTIMATION

FONCTION DE CORRELATION

Soient deux fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  ayant pour transformée de Fourier  $X(\omega)$  et  $Y(\omega)$ ,  $\omega$  étant la pulsation ; on a :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

et

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

la fonction d'intercorrélation (ou corrélation croisée) entre  $x$  et  $y$  s'écrit :

$$\Phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

EGALITE DE PARSEVAL

Soit

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt$$

et

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

on a :

$$f_1(t) = \mathcal{F}^{-1} [ F_1(\omega) ] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

par suite :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] f_2(t) dt$$

ou

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ F_1(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

donc :

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) d\omega$$

où  $F_2^*(\omega)$  est la conjuguée de  $F_2(\omega)$ .

Soit :

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega$$

on trouvera de même :

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(\omega) F_2(\omega) d\omega \quad (1)$$

comme :

$$\operatorname{Re} [ F_1^* F_2 ] = \frac{F_1^* F_2 + F_1 F_2^*}{2}$$

on a :

$$I = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(\omega) F_2(\omega) d\omega \right]$$

DISTRIBUTION DE DIRAC :  $\delta(t)$  (fig. 11.a.)

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u_h}{h} = \frac{du}{dt}, \text{ dérivée de } u(t). \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t), \text{ où } \delta_h(t) = \frac{\Delta u_h}{h}, \end{aligned}$$

et où :

$$\Delta u_h(t) = u(t) - u(t-h), \text{ puis :}$$

$u(t)$ : fonction Heaviside avec  $u(t) = 1$  pour  $t \geq 0$

$u(t) = 0$  pour  $t < 0$

Propriétés :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{dt} dt = 1 \quad \text{ce qui entraîne :} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Par extension, on montre que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$$

si  $f(t)$  est impaire on a zéro, si  $f(t)$  est paire on a  $f(0)$ .

Application :

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

donc :

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}(1) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{j\omega t} d\omega$$

d'où

$$\delta(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2\lambda}{2\pi} \frac{\sin \lambda t}{\lambda t}, \quad \lambda \text{ paramètre}$$

CONSEQUENCE : THEOREME DE DIRICHLET

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{\pi}{2} f(0^+)$$

DISTRIBUTION DE DIRAC DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES

Soit :

$$D(\omega) = \int_{-T}^{+T} e^{j\omega t} dt$$

où :

$$D(\omega) = \mathcal{F}(d)$$

avec

$$d(t) = 1 \quad \text{pour} \quad |t| \leq T$$

fenêtre temporelle naturelle

$$d = 0 \quad \text{pour} \quad |t| > T$$

on a :

$$D(\omega) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

donc :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = F(1)$$

par suite :

$$1 = F^{-1} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} D(\omega) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} D(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

soit :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(\omega)}{2\pi} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

conséquence :

$$\delta(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2T \sin \omega T}{\omega T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(\omega)}{2\pi}$$

qui est la distribution de Dirac dans l'espace des fréquences

$$\delta(\omega - \bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega - \bar{\omega})t} dt \quad (2)$$

APPLICATION

En utilisant l'égalité de Parseval (1) ou la relation (2), on trouve :

$$\Phi_{xy}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}(\omega) e^{j\omega z} d\omega$$

avec :

$$\Phi_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x^*(\omega) y(\omega)}{2T}$$

on voit que :

$$\Phi_{xy}(z) = F^{-1} [\Phi_{xy}(\omega)]$$

donc  $\Phi_{xy}(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélacion ou spectre de corrélacion croisée.

APODISATION

Soit un signal  $x(t)$  admettant pour transformée de Fourier :

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

considérons la fonction  $d(t)$  définie par les relations :

$$\begin{aligned} d(t) &= 1 & \text{pour} & & t \leq |T| & & \text{fen\^etre temporelle naturelle} \\ d(t) &= 0 & \text{pour} & & t > |T| \end{aligned}$$

(voir figure 11.b) on voit que  $d(t) = u(t+T) - u(t-T)$

On forme le produit :

$$x_T = x(t) \cdot d(t)$$

dont la transformée s'écrit :

$$F(x_T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) \cdot D(\omega - \Omega) d\Omega = X(\omega) \otimes D(\omega)$$

(convolution)

où :

$$D(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} d(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

Si T est fini, on a :

$$F(x, d) = X(j\omega) \otimes D(j\omega) \text{ convolution}$$

et

$$F(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} F(x_T)$$

D( $\omega$ ) est la fonction "d'apodisation" de X( $\omega$ ).

Par extension d(t) peut prendre une forme quelconque X(j $\omega$ )  $\otimes$  D(j $\omega$ ) est alors le spectre d'apodisation correspondant (exemple d(t) triangulaire).

#### ESTIMATION

$$F(d) = \int_{-T}^{+T} d e^{-j\omega t} dt$$

est l'expression de la transformée de Fourier physiquement réalisable puisque la durée de la mesure T est finie.

on dit que :

$$F(d) = \hat{F}(1)$$

est "l'estimation" de la transformée de Fourier de l(t) on aura de même :

$$\hat{F}(\omega) = F(x, d) = X(j\omega) \otimes D(j\omega)$$

où :

$$F(x_T) = \int_{-T}^{+T} x e^{-j\omega t} dt$$

c'est "l'estimation" de la transformée de Fourier de x(t)

$$\hat{X}(\omega) = X \otimes D \quad (\text{convolution})$$

avec

$$D = \hat{F}(1) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

#### FONCTION DE CORRELATION ESTIMEE

La mesure réelle de la fonction est :

$$\hat{\phi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y(t+\tau) dt$$

Posons :

$$x_T(t) = x.d$$

$$x_T(t) = 1 \quad \text{pour} \quad |t| < T$$

$$x_T(t) = 0 \quad \text{pour} \quad |t| > T$$

Donc :

$$\hat{\phi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) y_T(t+\tau) dt$$

D'après l'égalité de Parseval, cela donne :

$$\hat{\phi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_T^*(\omega) \cdot y_T(\omega)}{2T} e^{j\omega\tau} d\omega$$

où :

$$x_T(\omega) = \hat{F}(x) = X(\omega) \otimes \mathfrak{D}(\omega)$$

on pose :

$$\hat{\phi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

l'expression :

$$\hat{\phi}_{xy}(\omega) = \frac{X_T^*(\omega) Y_T(\omega)}{2T}$$

est le spectre de corrélation croisée "estimée" de x et y.

### PROPRIETES DE LA FONCTION DE CORRELATION

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X^* Y}{2T} e^{j\omega\tau} d\omega$$

soit, d'après l'égalité de Parseval :

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X Y^*}{2T} e^{-j\omega\tau} d\omega$$

par suite :

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$$

et

$$\phi_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X^* Y}{2T}$$

donc

$$\phi_{xy}^*(\omega) = \phi_{xy}(-\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X Y^*}{2T} = \phi_{yx}(\omega)$$

CONSEQUENCE

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{X^*(\omega) Y(\omega) e^{j\omega t} + X Y^* e^{-j\omega t}}{2T} d\omega$$

où :

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X^*(\omega) Y(\omega)}{2T} e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Remarque

soit :

$$z(t) = y(-t) \otimes x(t)$$

un produit de convolution; on a :

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(-\tau) x(t-\tau) d\tau$$

si  $t' = -\tau$  on a :

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t') x(t+t') dt'$$

donc :

$$\begin{aligned} \phi_{yx}(t) &= y(-t) \otimes x(t) \\ &= x(t) \otimes y(-t) \\ &= \phi_{xy}(-t) \end{aligned}$$

ANNEXE II - PROBABILITE, PUISSANCE, DENSITE SPECTRALE

PROBABILITE

Soit  $p(x)$  une fonction de densité de probabilité d'un signal  $x$ . On a la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

et

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = P(x < x)$$

puis :

$$P(|x| < x) = \int_{-x}^x p(x) dx = F(x) - F(-x)$$

$F(x)$  représente la fonction de répartition

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

est la densité de probabilité.

MOYENNES ET MOMENTS

Le moment du premier ordre ou espérance mathématique s'écrit :

$$E(x) = m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

Le moment du second ordre ou variance s'écrit :

$$E(x^2) = m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \sigma_x^2$$

S'il est centré, on aura :

$$\mu_2 = E[(x - m_1)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 p(x) dx$$

$$\mu_2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = m_2 - m_1^2$$

L'écart type a pour expression :

$$\sigma = \sqrt{m_2 - m_1^2}$$

En règle générale, le moment d'ordre  $n$  s'écrit :

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx$$

CAS DES PROCESSUS ALEATOIRES STATIONNAIRES ET ERGODIQUES

Soient  $b_1$  et  $b_2$  les deux signaux remplissant les conditions énumérées ci-dessus. Le moment composé d'ordre 2 vaut :

$$m_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} b_1 b_2 p(b_1, b_2) db_1 db_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1 b_2 dt$$

(ergodicité et stationnarité)

Le moment composé d'ordre mn s'écrit :

$$m_{12}^{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} b_1^n b_2^m p(b_1, b_2) db_1 db_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1^n b_2^m dt$$

L'espérance mathématique a pour expression :

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} b_1 p(b_1) db_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1 dt \quad (\text{pour le signal } b_1)$$

c'est aussi la moyenne dans le temps du signal.

L'expression de la fonction d'intercorrélation s'écrit :

$$\phi_{b_1 b_2}(\tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} b_1 b_2 p(b_1, b_2, \tau) db_1 db_2$$

où :

$$\phi_{b_1 b_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1(t) b_2(t+\tau) dt$$

PUISSANCE

Pour  $\tau = 0$ , l'expression

$$\phi_{b_1 b_2}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1 b_2 dt$$

représente la puissance du signal

Pour  $b_1 = b_2$ , on aura :

$$\begin{aligned} \phi_{b_1}^2(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b_1^2 p(b_1) db_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1^2 dt \\ &= m_2 = \sigma_1^2 \end{aligned}$$

Donc la valeur efficace du signal est

$$\sigma_1 = \sqrt{\phi_{b_1}^2(0)}$$

et la fonction d'autocorrélation de  $b_1$  pour  $\tau = 0$  représente la puissance moyenne de ce signal.

DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE MOYENNE

Dans le cas des phénomènes aléatoires stationnaires et non périodiques mathématiquement la difficulté principale réside dans le fait que l'énergie totale de tels signaux est infinie.

Si  $x(t)$  est un de ces signaux, il n'admet pas de transformée de Fourier puisque :

$$R_e [ x(\omega) ] = R_e(F(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cos \omega t \, dt$$

va tendre vers l'infini.

On tourne la difficulté en prenant une partie  $x_T$  de cet échantillon telle que :

$$\begin{aligned} x_T &= x(t) && \text{pour } |t| < T \\ x_T &= 0 && \text{pour } |t| > T \end{aligned} \quad ; \text{ soit : } x_T = x(t) \cdot d(t)$$

l'énergie totale dans  $x_T$  est alors finie, car :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2 \, dt = \int_{-T}^{+T} x^2 \, dt < \infty$$

La transformée de Fourier devient alors :

$$\begin{aligned} F(x_T) &= X_T(\omega) = \int_{-T}^{+T} x e^{-j\omega t} \, dt \\ X_T(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_T e^{-j\omega t} \, dt \end{aligned}$$

on voit donc qu'il suffit de considérer "l'estimation" de la transformée de Fourier de  $x$  pour analyser les processus aléatoires. On a alors :

$$F(x_T) = \hat{F}(x) = X(\omega) \otimes D(\omega) \quad (\text{voir annexe I})$$

la puissance moyenne du signal devient :

$$\bar{P} [-T, +T] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2 \, dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2 \, dt$$

donc :

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_T^* x_T}{2T} d\omega \quad , \quad \text{d'après l'égalité de Parseval}$$

on peut exprimer cette puissance dans l'espace des fréquences de la manière suivante :

$$\bar{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{P}}{df} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{P}}{d\omega} d\omega \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f$$

En comparant les deux expressions, on a :

$$\frac{d\bar{P}}{d\omega} = \frac{x_T^* x_T}{2T} = \frac{|x_T|^2}{2T}$$

où :

$$x_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\Omega) \mathcal{D}(\omega - \Omega) d\Omega$$

L'expression  $\frac{d\bar{P}}{d\omega} = \hat{\phi}_{xx}(\omega)$

est alors "l'estimation" de la densité spectrale de puissance moyenne du signal.

Comme les mesures physiques durent un temps T fini, seules les grandeurs "estimées" sont à considérer dans les méthodes statistiques.

Dans le cas de processus ergodiques et stationnaires, il faut considérer l'espérance mathématique du spectre qui s'écrit :

$$\hat{\phi}_{xx}(\omega) = E \left[ \frac{|x_T|^2}{2T} \right]$$

Dans le cas général de la puissance de deux signaux aléatoires on a :

$$\bar{P}_{xy} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T y_T^* dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{xy}(\omega) d\omega$$

où :

$$\hat{\phi}_{xy}(\omega) = \frac{x_T y_T^*}{2T} = \frac{d\bar{P}}{d\omega}$$

On voit que  $\hat{\phi}_{xy}(\omega)$  est aussi l'estimation de la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélacion (voir annexe I).

CAS DES BRUITS ALEATOIRES STATIONNAIRES ERGODIQUES ET INDEPENDANTS

On a :

$$\phi_{b_1, b_2}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1 b_2 dt = \iint_{-\infty}^{+\infty} b_1 b_2 p(b_1, b_2) db_1 db_2$$

ou :

$$\phi_{b_1, b_2}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_1 p(b_1) db_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} b_2 p(b_2) db_2$$

puisque :

$$p(b_1, b_2) = p(b_1) \cdot p(b_2) \quad (\text{indépendance statistique})$$

Comme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_1 p(b_1) db_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1 dt = 0$$

on a :

$$\phi_{b_1, b_2}(0) = 0$$

Pour  $T < \infty$

$$\phi_{b_{1T} b_{2T}}(0) = \hat{\phi}_{b_1, b_2}(0) \neq 0$$

on commet une erreur sur le résultat de la mesure qui est l'erreur statistique de la puissance :

$$\epsilon_{gT}(0) = \frac{\Delta \phi_{b_1, b_2}}{\phi_{b_1, b_2}(0)}$$

soit :

$$\epsilon_{gT}(0) = \left| \frac{\phi_{b_1, b_2}(0) - \hat{\phi}_{b_1, b_2}(0)}{\phi_{b_1, b_2}(0)} \right|$$

La mesure de la puissance du produit :

$$b = b_1 b_2$$

doit alors se faire en considérant son moment d'ordre 2, on a :

$$\phi_{b^2}(0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} b^2 p(b) db_1 db_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} b_1^2 b_2^2 dt$$

soit :

$$\phi_{b^2}(0) = \phi_{b_1^2}(0) \cdot \phi_{b_2^2}(0)$$

ce qui entraîne :

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

Dans le cas où :

$$b_1 = b_2$$

$\phi_{b_1^2}(0)$  représente la puissance de  $b_1$  et  $\sqrt{\phi_{b_1^2}(0)}$  sa valeur efficace

$$\phi_{b_1^2}(0) = \sigma^2 \quad ; \quad \sigma = \sigma_1 \sigma_2$$

est la valeur efficace du produit  $b$ .

C'est le résultat de la mesure d'un signal en sortie d'un opérateur paramétrique comme le multiplicateur analogique attaqué par deux événements aléatoires (voir fig. 14 et page 64).

Si les processus sont gaussiens, leur densité de probabilité est :

$$p(b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_1} \cdot e^{-\frac{b_1^2}{2\sigma_1^2}}$$

où :

$$\sigma_1^2 = \int b_1^2 p(b_1) db_1$$

est la variance, et  $\sigma_1$  la valeur efficace du signal  $b_1$ .

#### BANDE EQUIVALENTE DE BRUIT

La figure n° 12.b.c montre la fonction de transfert d'un filtre idéal et d'un filtre quelconque.

Si on attaque ces deux filtres par un signal aléatoire, la puissance en sortie, pour le filtre idéal, s'écrit :

$$\phi_{v_0 v_0}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega_0)|^2 d\omega = B_{eq} \cdot G(\omega_0)^2$$

Pour le filtre quelconque, l'expression vaut :

$$\phi_{v_1 v_1}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

Lorsque les deux puissances sont égales, on définit la bande équivalente du filtre quelconque par l'expression :

$$B_{eq} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}{|G(\omega_0)|^2}$$

Remarquons que :

$$B_{eq} > B_{-3db}$$

pour ce dernier filtre.

Exemple : filtre à -6db par octave.

(voir figure n° 12.d)

On a :

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

avec

$$\tau = RC$$

et

$$B_{eq} = \frac{\pi}{2} F_c$$

soit :

$$B_{eq} = \frac{\pi}{2} B_{-3db}$$

où :

$$F_c = \frac{1}{\tau}$$

$$|G(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$B_{-3db} = F_c$$

ANNEXE III - CALCUL DES BANDES EQUIVALENTES DE BRUIT  
APPLICATION AU MULTIPLICATEUR

METHODES DE CALCUL DES BANDES EQUIVALENTES (B<sub>eq</sub>) DE BRUIT

1ère Méthode: Méthodes des résidus (Fig. n° 13.a)

Soit :

$$B_{eq} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}{|G(\omega_0)|^2}$$

Remplaçons  $\omega$  par la variable complexe :

$$z = x + jy$$

HYPOTHESES

La fonction  $F(z) = |G(z)|^2$  admet des pôles imaginaires  
n'admet pas de pôles réels

Considérons le contour dans le plan complexe défini par le  
demi-cercle  $y > 0$  représenté sur la figure n° 13.a ; R étant le rayon du  
demi-cercle  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  sont, par exemple, 4 pôles de  $G(z)$ .

D'après le théorème des résidus, on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} F(\omega) d\omega + \int_{C^+} F(z) dz = 2\pi j \sum_{\alpha} R_{\alpha}$$

où  $R_{\alpha}$  sont les résidus relatifs aux pôles pour  $y > 0$  de  $F(z)$  :

Si  $zF(z) \rightarrow 0$  lorsque  $z \rightarrow \infty$ , donc :

$$\text{degré de } Q(z) - \text{degré de } P(z) \geq 2$$

où :

$$F(z) = \frac{f(z)}{Q(z)}$$

alors :

$$\int_{C^+} z f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{si } |z| \rightarrow \infty$$

ou  $R \rightarrow \infty$

CONSEQUENCES

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} F(\omega) d\omega = 2\pi j \sum_{\alpha} R_{\alpha}$$

APPLICATION

$$B_{eq} = \frac{j}{|G(\omega_0)|^2} \cdot \sum_{\alpha} R_{\alpha}$$

(voir théorème de Cauchy pour le calcul traité en exemple, page 73).

REMARQUE

Puisque  $B_{eq}$  est un nombre réel, il faut que

$$\sum_{\alpha} R_{\alpha} = \frac{k}{j}, \quad k \text{ réel}$$

Exemple :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

$$|G(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} \quad \text{et} \quad |G(\omega)|^2 = 1$$

Posons :

$$\Omega = \omega\tau, \quad d\omega = \frac{d\Omega}{\tau}$$

nous avons :

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\Omega^2} d\Omega$$

car  $\omega$  varie de 0 à  $\infty$  pour un filtre passe-bas, et :

$$\Im f(z) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \Im z \rightarrow 0$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\Omega^2} d\Omega = 2\pi j \sum_{\alpha} R_{\alpha}$$

un seul résidu correspond à  $y > 0$ , c'est :

$$\Im_{\alpha} = j$$

THEOREME DE CAUCHY

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi j \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

où :

$$f^{(n)}(a) = \left[ \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right] (a) \text{ et } R_a = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ (résidu n° a)}$$

on a :

APPLICATION

$$f(z) = \frac{1}{z+j} \quad ; \quad n = 0$$

on a un pôle simple d'ordre 1, donc :

$$R_a = \frac{f(a)}{Q'(a)}$$

car  $Q = (z-a) Q'(a) + \frac{1}{2}(z-a)^2 Q''(a) + \dots$

et  $R_a = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z)$

où :

$$F(z) = \frac{f(z)}{Q(z)}$$

avec :

$$f(z) = \frac{1}{z+j}$$

et

$$Q(z) = z-j$$

$$R_a = \frac{1}{2j} \quad \text{avec} \quad z_a = j \quad \text{car} \quad Q'(z) = 1$$

S'il y avait plusieurs pôles, on aurait eu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi j \sum_a \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \neq 0$$

Notons que :

$$R_a = f(a) \quad \text{puisque} \quad n = 0$$

d'où :

$$R_a = \frac{1}{2j}$$

donc :

$$B_{eq} = \frac{1}{2} j \frac{1}{\tau} R_a = \frac{1}{4\tau}$$

comme

$$F_{-3db} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

d'où :

$$B_{eq} = \frac{\pi}{2} F_{-3db}$$

2<sup>e</sup> METHODE : PAR LE CALCUL DE LA PUISSANCE DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE DU FILTRE

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|G(\omega_0)|^2} d\omega$$

Où  $\omega_0$  correspond au maximum de  $|G(\omega)|$

Soit  $f(t)$  la réponse impulsionnelle de  $G(\omega)$

$\delta(t)$  à travers le filtre donne  $f(t)$

1

"

$G(\omega)$  par transformée de Fourier

D'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t)]^2 dt$$

Pour un filtre passe-bas, on a :

$$g(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0$$

$$G(\omega) = 0 \quad \text{pour} \quad \omega < 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} g^2(t) dt$$

et :

$$B_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|G(\omega_0)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|G(\omega_0)|^2} d\omega$$

donc :

$$B_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|G(\omega_0)|^2} \int_0^{+\infty} g^2(t) dt$$

Exemple :

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

ce qui donne :

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ceci correspond à un filtre de -6 db par octave, on a :

$$|G(\omega_0)|^2 = 1$$

$$B_{eq} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\tau}{\tau^2} \cdot \left[ e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4\tau}$$

on trouve le même résultat que pour la première méthode.

### AUTRE EXEMPLE

Soit :

$$g(t) = \frac{u(t) - u(t-T)}{T}$$

(voir figure n° 13.b)

$$G(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2j \frac{\omega T}{2}}$$

$$G(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

$$|G(\omega)|^2 = \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{(\frac{\omega T}{2})^2} ; \quad |G(0)|^2 = 1$$

### PREMIERE METHODE

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{(\frac{\omega T}{2})^2} d\omega$$

on n'utilise pas le théorème des résidus car on n'a pas de pôles.

Posons :

$$\frac{\omega T}{2} = \Omega \quad d\omega = \frac{2}{T} d\Omega$$

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \Omega}{\Omega^2} d\Omega$$

or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2c n^2 \Omega}{\Omega^2} d\Omega = \pi$$

d'où :

$$B_{eq} = \frac{1}{T}$$

DEUXIEME METHODE (Fig. 13.c)

$$B_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt}{|G(\omega_0)|^2} = \int_0^{\infty} g^2(t) dt$$

$$B_{eq} = \frac{\int_0^T dt}{T^2} = \frac{1}{T}$$

ici, c'est un filtre passe-bande, donc on ne divise pas par 2 car  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

APPLICATION : MULTIPLICATEUR PARAMETRIQUE (Fig. 14)

Soient  $b_1$  et  $b_2$  deux bruits aléatoires stationnaires, ergodiques, on a :

$$b = b_1 b_2$$

et

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

où  $\sigma$  est la valeur efficace après multiplication.

La fonction de corrélation en sortie du multiplicateur s'écrit :

$$\Phi_{b_2}(\tau) = \iint b_1^2 b_2^2 p(b_1, b_2, \tau) db_1 db_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} b_1^2 p(b_1) db_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} b_2^2 p(b_2) db_2$$

où :

$$\Phi_{b_2}(\tau) = \Phi_{b_1}(\tau) \cdot \Phi_{b_2}(\tau)$$

ce qui entraîne :

$$F[\Phi_{b_2}(\tau)] = \Phi_{b_2}(\omega) \quad \text{spectre de bruit}$$

$$\text{on a : } \Phi_{b_2}(\omega) = \Phi_{b_1}(\omega) \otimes \Phi_{b_2}(\omega) \quad \text{convolution}$$

Soit :

$$\Phi_{b^2}(\omega) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{b_1^2}(j\Omega) \cdot \Phi_{b_2^2}[j(\omega - \Omega)] d_j\Omega$$

Théorème :

Le spectre du bruit en sortie du multiplicateur est le produit de convolution des deux spectres en entrée.

Par hypothèse :

$$\Phi_{b_1^2}(\omega) = \Phi_{b_2^2}(\omega) \quad \text{spectre de chaque entrée}$$

L'allure du spectre en entrée est représentée sur la figure n° 14.

On a :

$$\Phi_{e^2} = \text{constante}$$

en sortie :

$$\Phi_{b^2} = (\Phi_{e^2})^2 \cdot \frac{(2\omega_c - |\omega|)}{2\pi}$$

or :

$$(\Phi_{e^2})^2 \frac{2\omega_c}{2\pi} = 2B_{eq} (\Phi_{e^2})^2$$

car :

$$2B_{eq} = \frac{2\omega_c}{2\pi}$$

et

$$\sigma_1^2 = \Phi_{e^2} 2B_{eq} = \sigma_2^2$$

pour le filtre d'analyse.

Soit  $\sigma_s$  la valeur efficace en sortie du second filtre. On a :

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{b_3^2}(\omega) d\omega$$

mais

$$\Phi_{b_3^2}(\omega) = \Phi_{b^2} |G_3|^2$$

d'où :

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{F_3} \frac{(\Phi_{e^2})^2}{2\pi} (2\omega_c - \omega) d\omega = F_3 2B_{eq} (\Phi_{e^2})^2 - (\Phi_{e^2})^2 \frac{F_3^2}{2}$$

car :

$$G_b = 0 \quad \text{pour} \quad \omega < 0$$

car c'est un filtre passe-bas

$$\sigma_0^2 = \frac{F_0}{2B_{eq}} \sigma_1^4 - \frac{\sigma_1^4}{2} \left( \frac{F_0}{2B_{eq}} \right)^2$$

Si  $\frac{F_0}{2B_{eq}} \ll 1$  on a :

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &\approx \sigma_1^4 \frac{F_0}{2B_{eq}} \\ \sigma_0 &\approx \sigma_1^2 \sqrt{\frac{F_0}{2B_{eq}}} = \sigma \sqrt{\frac{F_0}{2B_{eq}}} \end{aligned}$$

Cela revient à assimiler  $\phi_b^2(\omega)$  avec  $(\phi_e^2)^2_{2B_{eq}}$  et :

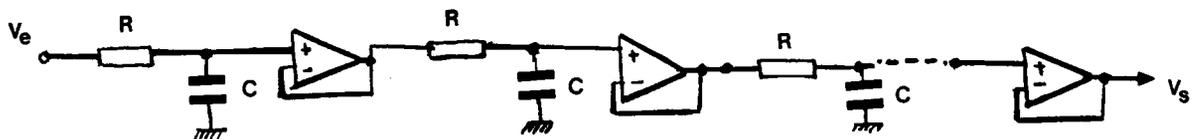
$$\sigma_0^2 = \phi_b^2 F_0 \quad (\text{loi des puissances de bruit})$$

GENERALISATION : Les filtres intégrateurs

Leur fonction de transfert est de la forme :

$$\frac{v_s}{v_e} G(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega\tau)^n} \quad , \quad n \text{ entier} \quad , \quad \tau \text{ constante de temps}$$

ils sont constitués de n cellule RC intégrateur en cascade et adaptées :



pour 1 cellule (n=1) on a un filtre à  $-6d_B/oct.$  (cf. fig. 12-d et pages 57 et 63).

Pour  $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$  soit  $F_c = \frac{1}{2\pi\tau}$  ,  $|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$F_c$  est la fréquence de coupure,  $\tau = RC$

D'une façon générale :  $|G(\omega)|^2 = \frac{|G(0)|^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^n}$

et la bande équivalente de bruit est :

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2\tau^2)^n} d\omega \quad \text{Posons } x = \omega\tau$$

On a 
$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

$$|G(\omega)| = \frac{|G(0)|}{(1+\omega^2\tau^2)^{\frac{n}{2}}} \quad \text{et} \quad \left|G\left(\frac{1}{\tau}\right)\right| = \frac{|G(0)|}{\sqrt{2}^n}$$

$F_c = \frac{1}{2\pi\tau}$  correspond à la bande passante à  $-3nd_B$

On montre que : 
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx = \frac{(2n-3)!!}{2(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{a^{2n-1}}$$

pour  $a = 1$  on a : 
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Donc : 
$$B_{eq} = \text{B.P.}_{-3nd_B} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$$

où  $n$  est le nombre de pôles du filtre et  $6nd_B/\text{oct}$ , la pente du filtre.

La bande à  $-3d_B$  du filtre d'ordre  $n$  est  $\text{B.P.}_{-3d_B} = \frac{1}{2\pi\tau} (2^{\frac{1}{n}}-1)^{\frac{1}{2}}$

soit  $\text{B.P.}_{-3d_B} = \text{B.P.}_{-3nd_B} (2^{\frac{1}{n}}-1)^{\frac{1}{2}}$

par suite 
$$B_{eq} = \frac{\text{B.P.}_{-3d_B}}{(2^{\frac{1}{n}}-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$$

APPLICATION :

$n = 1 \quad \text{B.P.}_{-3d_B} = F_c = \frac{1}{2\pi\tau}$

$B_{eq} = \text{B.P.}_{-3d_B} \times \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ B.P.}_{-3d_B}$

pente :  $-6d_B/\text{octave}$

$n = 3 \quad \text{B.P.}_{-9d_B} = F_c = \frac{1}{2\pi\tau}$

$B_{eq} = \text{B.P.}_{-3d_B} \times \frac{3}{16} \pi \times \frac{1}{0,5099}$

$B_{eq} \neq \text{B.P.}_{-3d_B} \times 1,15$

pente :  $-18d_B/\text{oct}$

ANNEXE IV - FILTRE PASSE-BAS A 12db PAR OCTAVE :  
CALCUL DE LA BANDE EQUIVALENTE ET CONSTRUCTION

FILTRE D'ANALYSE PASSE-BAS A 12db PAR OCTAVE : CALCUL DE LA BANDE EQUIVALENTE

On a la relation :

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

L'expression de la bande equivalente de bruit s'écrit :

$$B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}{|F(0)|^2} \quad \text{pour la première méthode}$$

$$B_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^{\infty} f^2(t) dt}{|F(0)|^2} \quad \text{pour la seconde méthode}$$

où  $f(t)$  est la réponse impulsionnelle du filtre

$$F(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\zeta j \frac{\omega}{\omega_n}} \quad \text{avec } F(0) = 1$$

Posons :

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \Omega$$

nous avons :

$$F(\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 2j \Omega}$$

pour simplifier, on se place dans le cas où :

$$\zeta = 1 \quad (\text{cf. : fig. 16})$$

on est sûr qu'il n'y a pas de résonance ; on a :

$$F(\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 2j\Omega} = \frac{1}{(1 + j\Omega)^2}, \quad n = 2 \quad (\text{cf. page 78})$$

$$|F(\Omega)|^2 = \frac{1}{(1 + \Omega^2)^2}$$

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{1 + \Omega^2} \quad \text{et } |F(0)| = 1$$

$$B_{eq} = \frac{\omega_n}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \Omega^2)^2} d\Omega$$

Pour  $n = 2$  on trouve :

$$B_{eq} = \frac{B_{-3db}}{(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{4} \quad (\text{cf. pages 78 et 79})$$

$$B_{-3db} = \frac{1}{2\pi\tau} (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

pour  $\Omega = 1$  (ce qui correspond à la bande de -6db), on a :

$$|F(i)| = 1/2 \quad \text{et} \quad B_{eq} = \frac{\pi}{4} \cdot B_{-6DB}$$

$$B_{-3db} = B_{-6db} (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

pour :

$F = F_n$	cela correspond à un filtre de -6db	d'atténuation
$F = F_n (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}$	" " " "	-3db
$B_{eq} = F_n \cdot \frac{\pi}{4}$	où $F_n = \frac{\omega n}{2\pi}$	
$B_{eq} = \frac{F_{-3db}}{(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{4} = 1,22 F_{-3db}$		

Application :

Lorsque :  $F_{-3db} = 20,5 \text{ Khz}$  , alors  $F_{-6db} = 31,8 \text{ Khz}$  .

on a :

$$B_{eq} = 25 \text{ Khz} \quad (\text{cf. calcul et remarques pages 85 à 87})$$

DEUXIEME METHODE

on a :

$$F(p) = \frac{1}{(1 + \frac{p}{\omega_n})^2} \quad \text{On cherche la réponse}$$

impulsionnelle  $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{(1 + \frac{p}{\omega_n})^2} dp$

$$f(t) = \frac{\omega_n^2}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{(p + \omega_n)^2} dp$$

Or

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

si  $n = 1$ , on a :

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

on pose :

$$a = -\omega_n$$

$$f(z) = e^{zt}$$

on a :

$$\frac{df}{dz} = t e^{zt} ; \quad \frac{df}{dz} (-\omega_n) = t e^{-\omega_n t}$$

Donc :

$$f_s(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$$B_{eq} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_s^2(t) dt = \frac{1}{2} \omega_n^4 \int_0^{\infty} t^2 e^{-2\omega_n t} dt$$

Pour calculer cette intégrale, on pose :

$$I = \int_0^{\infty} t^2 e^{-2\omega_n t} dt = -\frac{1}{2\omega_n} \left[ t^2 e^{-2\omega_n t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\omega_n} \int_0^{\infty} 2t e^{-2\omega_n t} dt$$

$$I = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{\infty} t e^{-2\omega_n t} dt = \frac{1}{\omega_n} J$$

on pose :

$$J = \int_0^{\infty} t e^{-2\omega_n t} dt = -\left[ \frac{t}{2\omega_n} e^{-2\omega_n t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\omega_n} \int_0^{\infty} e^{-2\omega_n t} dt$$

$$J = -\frac{1}{4\omega_n^2} \left[ e^{-2\omega_n t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4\omega_n^2}$$

en remontant à I et à  $B_{eq}$ , on a :

$$I = \frac{1}{4\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\omega_n}$$

$$B_{eq} = \frac{\omega_n^4}{2} \cdot \frac{1}{4\omega_n^3} = \frac{\omega_n}{8} = F_n \times \frac{\pi}{4} \text{ c.q.f.d.}$$

comparons avec la première méthode, nous avons :

$$B_{eq} = \frac{\omega_n}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{(1+\Omega^2)^2}$$

les pôles s'obtiennent en faisant :

$$\Omega^2 + 1 = 0$$

d'où :

$$\Omega = \pm j$$

Comme on ne considère que le demi-cercle supérieur, les pôles n'existent que pour :

$$\Omega = j$$

on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{(1+\Omega^2)^2} = 2\pi j \sum_{\alpha} R_{\alpha} \quad ; \quad R_{\alpha} \text{ s'obtient en faisant } \Omega = j$$

car :

$$\Omega f(\Omega) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \Omega \rightarrow \infty$$

Posons :

$$z = \Omega$$

nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z+j)^2(z-j)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{(z-j)^2} dz$$

avec :

$$f(z) = \frac{1}{(z+j)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = 2\pi \cdot \frac{2}{8}$$

$$B_{eq} = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{8} = \frac{\omega_0}{8}$$

nous retrouvons le même résultat qu'avec la deuxième méthode.

FILTRE PASSE-BAS D'ANALYSE : CONSTRUCTION (Fig. 15)

on a :

$$F(\omega) = \frac{V_0}{V_e}$$

$$A_{LE} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + p^2} \quad ; \quad F_{LE} = A_{LE} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_0 Q} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

APPLICATION

$$F(p) = A_{LE} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec :

$$p = j\omega \quad \omega_0 = \omega_n \quad ; \quad f_0 = F_n = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{Q\omega_n} \quad , \quad Q = \text{facteur de résonance}$$

pour :

$$p = 0 \quad \text{on a} \quad F(0) = A_{LP}$$

$$p = \infty \quad F(p) = 0$$

Le maximum s'obtient en prenant :

$$|F|^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4}{\omega_n^2} \omega^2} = \frac{1}{D^2}$$

si :

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} = 0 \quad \text{on obtient le maximum}$$

On trouve :  $\frac{\partial D}{\partial \omega} = 0$  pour  $\omega = \omega_R$  avec  $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

si  $\zeta^2 < \frac{1}{2}$ ,  $\omega_R$  existe

si  $\zeta > \frac{1}{2}$ ,  $\omega_R$  n'existe pas et il n'y a pas de résonance

Pour  $\omega = \omega_R$ , on a :

$$|F(\omega_R)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Si  $\zeta^2 = \frac{1}{2}$ , on aura :

$$|F(\omega_R)| = \frac{\sqrt{2}}{2\zeta} = \sqrt{2}Q = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \omega_R = 0 \quad \text{(limite de résonance)}$$

$= \sqrt{2} \cdot \zeta$

### CONSTRUCTION DU FILTRE

(voir figure 15)

On a les relation suivantes :

$$V_3 = \frac{1}{C_8 p} V_2$$

$$p = j\omega$$

$$V_2 = -\frac{1}{C_7 p} V_1$$

$$C_8 = R_8 C_8$$

$$V_{13} = \frac{R_9}{R_4 + R_4 + R_5} V_2$$

$$C_7 = R_7 C_7$$

et :

$$\frac{V_2 - V_{13}}{R_6} = \frac{V_{13} - V_3}{R_1} + \frac{V_{13} - V_2}{R_2}$$

on déduit de ces relations :

$$\frac{V_e}{R_6} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_2} = V_{10} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right]$$

$$\frac{V_e}{R_6} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{1}{R_2} z_7 z_8 p^2 V_2 = - \frac{R_4}{R_4 + R_4 + R_5} z_8 p V_2 \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right]$$

$$\frac{V_e}{R_6} R_1 + V_2 \left[ 1 + \frac{R_1 R_4}{R_4 + R_4 + R_5} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right) z_8 p + z_7 z_8 \frac{R_1}{R_2} p^2 \right] = 0$$

d'où :

$$V_2 = - \frac{\frac{R_1}{R_6} V_e}{1 + z_8 \frac{R_1 R_4}{R_4 + R_4 + R_5} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right) p + z_7 z_8 \frac{R_1}{R_2} p^2}$$

Cette expression est de la forme :

$$F = \frac{A_{LE}}{1 + \frac{p}{Q\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec :

$$A_{LE} = - \frac{R_1}{R_6} \quad (\text{gain en continu})$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = z_8 \frac{R_1 R_4}{R_4 + R_4 + R_5} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right]$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = z_7 z_8 \frac{R_1}{R_2}$$

où :

$$\frac{R_1}{R_2} = 10 ; \quad z_7 = z_8 = R_7 c_7$$

$$R_7 = \frac{3,16 \times 10^8}{\omega_0}$$

Application numérique :

(Données du constructeur)

$$A_{LE} = 10 ; \quad f_0 = 20,5 \text{ Khz} \quad (f_0 \text{ correspond à } -3\text{dB})$$

$$Q = 0,70711 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ici :  $\zeta = 0,7$  car  $Q = \frac{1}{2\zeta} = \zeta$ ,  $\zeta^2 = \frac{1}{2}$  (soit  $\zeta = 0,7$ ).

$$Q A_{LE} = 3,16 A_{BE}$$

$$Q_7 = 0,7$$

$$A_{BE} = 3,2377$$

$$R_6 = 3,16 \cdot 10^4 \cdot \frac{Q_7}{A_{BE}}$$

$$\frac{1}{R_2} = 1,1 \cdot 10^{-4} + \frac{1}{R_6} = 7,1 \cdot 10^{-4}$$

$$R_6 = 10 \text{ K}\Omega ; R_8 = 56 \text{ K}\Omega ; C_4 = C_5 = 1000 \text{ pF}$$

$$R_7 = R_9 = 3,16 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{\omega_0} = 2,4 \text{ K}\Omega$$

$$R_1 = R_2 = 100 \text{ K}\Omega$$

Pour les hautes fréquences, on a mis  $11 \text{ K}\Omega$  en parallèle avec  $R_2$ . Les équations correspondantes sont données dans la documentation technique Burr-Brown.

On a :

$$f_0 = \frac{5,03 \cdot 10^7}{R_7}$$

$f_0$  étant la fréquence à -3db pour  $\zeta^2 = \frac{1}{2}$

$$f_0 = \frac{5,03 \cdot 10^7}{2,4 \cdot 10^3} = 20,5 \text{ Khz}$$

d'où :

$$\text{bande passante du filtre} = 20,5 \text{ khz}$$

$$\text{bande équivalente d'analyse} = f_0 \times 1,22 = 25 \text{ Khz}$$

(voir Fig. 16).

Remarque : On démontre en effet par un calcul complet que la Beq. du filtre pour  $\zeta = 0,7$  est sensiblement la même que celle qui a été déjà calculée pour le filtre où  $\zeta = 1$  à condition de faire  $F - 3 \text{ dB} = f_0 = 20,5 \text{ KHz}$  pour ce dernier.

On a alors  $\text{Beq} = 1,22 F - 3 \text{ dB}$  pour  $\zeta = 1$  avec  $f_0 = F - 3 \text{ dB}$   
(20,5 KHz).  $\zeta = 0,7$

ANNEXE V

ERREUR STATISTIQUE

CALCUL DE f(t)

Soit à calculer :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} e^{j\omega t} d\omega.$$

Posons  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ , on a :

$$f(t) = \frac{\omega_n}{2\pi} \cdot \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \Omega^2)^2} e^{j\Omega \tau \omega_n} d\Omega$$

Pour  $z = \Omega$ ,  $z \cdot F(z) \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow \infty$  avec  $F(z) = \frac{e^{j\tau \omega_n z}}{(1 + z^2)^2}$

On peut donc appliquer le théorème des résidus. Les pôles de F(z) n'existent que pour  $z = j$  ou  $z^2 + 1 = 0$ .

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^2} e^{j\tau \omega_n z} = \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(z)}{(z-j)^2} dz \quad \text{avec :}$$

$$g(z) = \frac{e^{j\tau \omega_n z}}{(z+j)^2}$$

D'après le théorème de Cauchy on a :

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(z)}{(z-j)^2} dz = \left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=j} \times 2\pi j.$$

$$\frac{dg}{dz} = \frac{j\tau \omega_n}{(z+j)^2} e^{j\tau \omega_n z} - e^{j\tau \omega_n z} \times \frac{1}{(z+j)^4} \times 2(z+j).$$

$$\left( \frac{dg}{dz} \right)_{z=j} = \frac{\tau \omega_n}{4j} e^{-\tau \omega_n} - e^{-\tau \omega_n} \cdot \frac{1}{(2j)^3} = -j (1 + \tau \omega_n) e^{-\tau \omega_n} \cdot \frac{1}{4}.$$

Par suite :

$$f(t) = \frac{\omega_n}{2\pi} \cdot 2\pi j \left[ -j (1 + \tau \omega_n) e^{-\tau \omega_n} \times \frac{1}{4} \right].$$

soit : 
$$f(t) = \frac{\omega_n}{4} \cdot [1 + \tau \omega_n] e^{-\tau \omega_n}$$

et puisque  $\text{Beq} = \frac{\omega_n}{8}$ , il vient : 
$$f(t) = 2 \text{Beq} \cdot \frac{1 + \tau \omega_n}{e^{\tau \omega_n}}$$

ANNEXE VI

SONDE H.F.

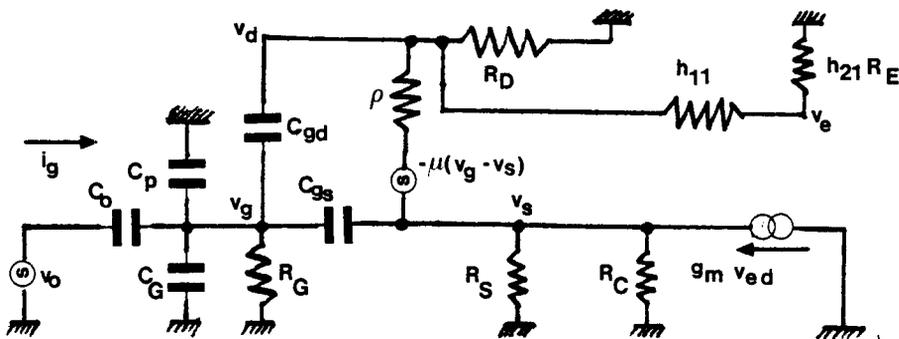
PREAMPLIFICATEUR A HAUTE IMPEDANCE D'ENTREE

Calcul du gain et de l'impédance d'entrée

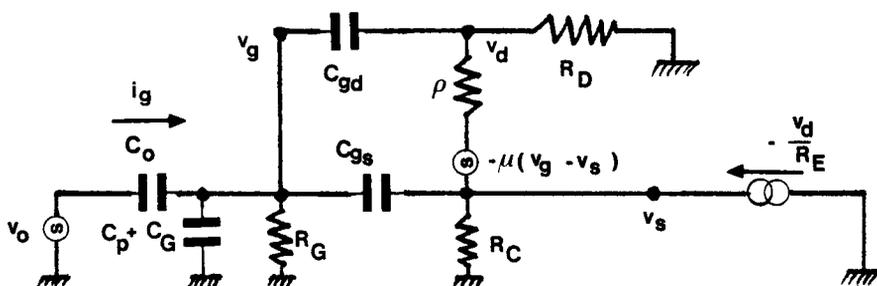
GAIN DU PREAMPLIFICATEUR

Considérons un des préamplificateurs d'un des dipôles de la page 38, représenté sur la fig. 10.

Aux variations le circuit électronique est le suivant :



En pratique  $R_S \gg R_C$ ,  $R_D \ll h_{11} + h_{21} \cdot R_E$  puis  $h_{11} \ll h_{21} \cdot R_E$  de sorte que le schéma ci-dessus se réduit au suivant :



où  $c_p$  : capacité parasite de câblage

Nous avons alors : 
$$j\omega_d \neq \frac{R_D}{R_D + \rho} \{ -\mu j\omega_g + (\mu + 1) \cdot j\omega_s \}$$
 et 
$$j\omega_d = -R_C \left( \frac{j\omega_d}{R_E} + \frac{j\omega_d}{R_D} \right)$$
 soit 
$$j\omega_d \neq -\frac{R_E}{R_C} \cdot j\omega_s$$
 . Comme  $\mu \gg 1$  il vient : 
$$-j\omega_d \neq \frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{R_D}{R_D + \rho} \mu \cdot j\omega_s \quad - \quad \frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{R_D}{R_D + \rho} \mu \cdot j\omega_g$$

Ce qui donne : 
$$V_D \neq \frac{\frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{R_D}{R_D + \rho} \cdot \mu}{1 + \frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{R_D}{R_D + \rho} \cdot \mu} \cdot v_g$$

Or  $\frac{\mu}{\rho} = S$  est la pente du F E T

Donc : 
$$V_D \neq \frac{\frac{R_C}{R_E} \cdot S \cdot \frac{R_D}{1 + \frac{R_D}{\rho}}}{1 + \frac{R_C}{R_E} \cdot S \cdot \frac{R_D}{1 + \frac{R_D}{\rho}}} \cdot v_g$$

IMPEDANCE D'ENTREE  $Z_g$  :

C'est l'expression  $Z_g = \frac{V_g}{i_g}$

Nous avons : 
$$i_g = \frac{v_g}{R_G} + \rho \left[ (C_G + C_P) v_g + C_{gd}(v_g - v_d) + C_{gs} \cdot (v_g - v_s) \right]$$

où :  $\rho = j\omega$

Or 
$$v_g - v_d \neq \frac{1}{1 + S \cdot \frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{R_D}{1 + \frac{R_D}{\rho}}} \cdot v_g$$

$$v_g - v_s \neq \frac{1}{1 + \frac{R_C}{R_E} \cdot S \cdot \frac{R_D}{1 + \frac{R_D}{\rho}}} \cdot v_g$$

De sorte que l'admittance d'entrée  $Y_g$  s'écrit :

$$Y_g = Y_G + \rho \left[ \{C_G + C_P + C_{gd}\} + \frac{C_{gs} \cdot S \cdot \frac{R_D}{1 + \frac{R_D}{\rho}} \cdot C_{gd}}{1 + S \cdot \frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{R_D}{1 + \frac{R_D}{\rho}}} \right]$$

où  $Y_G = \frac{1}{R_G}$

APPLICATION NUMERIQUE

Dans la pratique  $\mu \neq 1000$ ,  $\rho \neq 10 \text{ K}\Omega$ ,  $C_G + C_P \neq 0,2 \text{ pF}$ ,  $C_{gd} \neq 2 \text{ pF}$  et  $C_{gs} \neq 5 \text{ pF}$ .

Nous avons alors :

$$\frac{R_D}{\rho} \neq 0,1; \frac{R_C}{R_E} \neq \frac{1}{2} \text{ et } S \cdot \frac{R_C}{R_E} \cdot \frac{R_D}{1 + \frac{R_D}{\rho}} \neq 50$$

Par suite:  $v_s \neq 0,98 v_g$ .

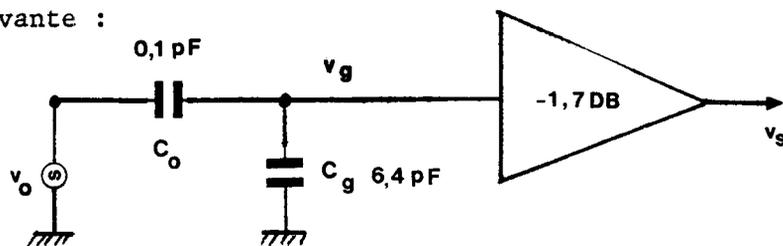
soit:  $\left(\frac{v_s}{v_g}\right)_{dB} = -1,7 \text{ dB}$

D'autre part :  $Y_g = Y_G + p c_g$  ; où :

$$c_g = 0,2 \text{ pF} + 3 \times 2 \text{ pF} + \frac{5}{50} \text{ pF} \longrightarrow c_g \approx 6,4 \text{ pF}$$

Enfin :  $Y_G = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ mho} \ll |j\omega c_g|$  pour  $f > 0,10 \text{ MHz}$

Finalement en entrée le schéma se simplifie de la façon suivante :



$$\text{Nous avons : } \frac{v_g}{V_o} = \frac{C_o}{C_o + C_g} = \frac{1}{64} \text{ soit } \frac{v_g}{V_o} = -36,0 \text{ dB}$$

L'impédance d'entrée se réduit pratiquement à une capacité  $C_g$  de l'ordre de 6 pF.

#### ATTENUATION TOTALE D'UN DIPOLE

D'après la fig. ci-dessus nous avons  $\frac{v_s}{V_o} = (-36 - 1,7) \text{ dB}$   
 soit  $\frac{v_s}{V_o} = -37,7 \text{ dB}$ .

Si l'on considère la fig. de la page 40, nous avons un transformateur de sortie à point milieu suivi d'un câble coaxial  $50\Omega$  de plusieurs mètres de longueur. L'ensemble est équivalent à un atténuateur de  $-4,3 \text{ dB}$  environ dans toute la bande du spectre analysé s'étalant de  $0,1 \text{ MHz}$  à  $10 \text{ MHz}$ .

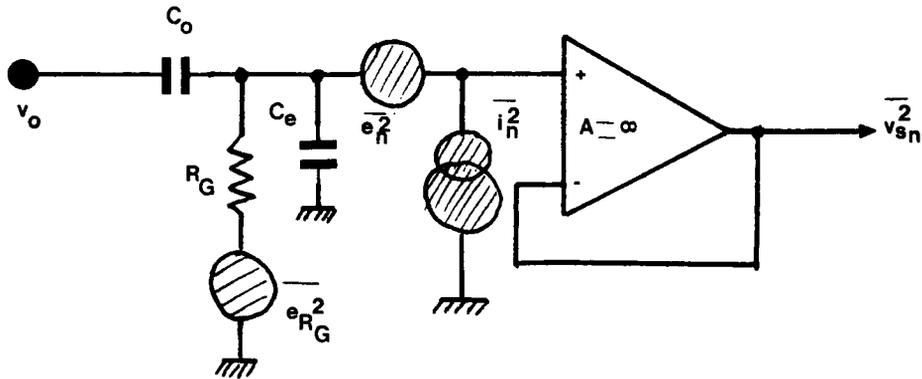
Au total chaque dipôle atténue de  $-42 \text{ dB}$  environ dans la bande explorée.

ANNEXE VII

SONDE H.F.

BRUIT ET RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT EN SORTIE

FACTEUR DE BRUIT EN ENTREE



Soit un des préamplificateurs de la sonde représentée page  
Du point de vue bruit il est équivalent au générateur d'entrée dessiné  
sur la fig. ci-dessus, suivi d'un adaptateur idéal.

⊗ CALCUL DU BRUIT EN SORTIE

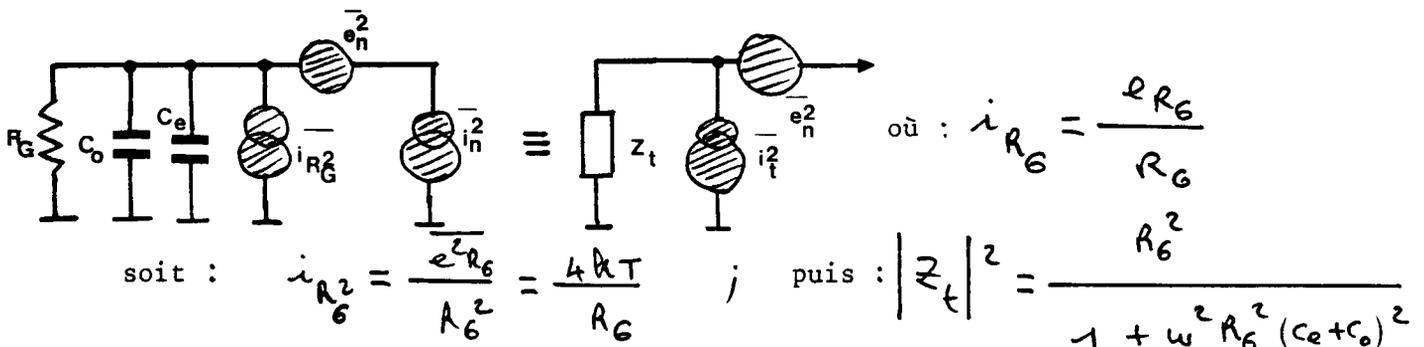
Ce est sa capacité d'entrée et sa résistance. La quantité  
totale de bruit en entrée dans une bande  $\Delta F$  est :

$$\overline{v_{sn}^2} = \overline{e_n^2} \Delta F + (\overline{i_n^2} + \overline{i_R^2}) \cdot |Z_t|^2 \Delta F$$

$$Z_t = R_G \parallel \frac{1}{j\omega(C_e + C_o)} \quad \overline{i_R^2} = \overline{e_{R_G}^2} \times \frac{1}{R_G^2}$$

puis  $\overline{e_{R_G}^2} = 4 k.T.R_G$ ,  $k$  : constante de Boltzmann

On a en effet le schéma équivalent suivant :



La contribution du bruit en sortie est donc :

$$J_{\Delta m} = \sqrt{J_{\Delta n}^2} = \sqrt{\Delta F} \times \left( \overline{e_n^2} + \overline{i_n^2} R_G^2 + \overline{e_{R_G}^2} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 R_G^2 (c_e + c_o)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Si  $\omega \rightarrow 0$  :  $J_{\Delta m} \neq \sqrt{\Delta F} \cdot (\overline{i_n^2} \cdot R_G^2)^{\frac{1}{2}}$ ,

car en général  $\overline{i_n^2} R_G^2 \gg \overline{e_n^2} + \overline{e_{R_G}^2}$ .

- Si  $\omega \rightarrow \infty$  :  $J_{\Delta m} \neq \sqrt{\Delta F} \cdot \sqrt{\overline{e_n^2}}$ .

En milieu de bande :  $J_{\Delta m} \neq \sqrt{\Delta F} \cdot \frac{1}{\omega R_G (c_e + c_o)} \cdot (\overline{i_n^2} \cdot R_G^2)^{\frac{1}{2}}$ , (en  $\frac{1}{f}$ ).

Rapport signal sur bruit  $\frac{S}{B}$  :

Soit  $v_o$  le signal présent sur la boucle. La contribution du signal en sortie est :

$$J_s = \frac{c_o}{c_o + c_e} \cdot \frac{R_G j \omega \cdot [c_e + c_o]}{1 + R_G j \omega \cdot [c_e + c_o]} v_o \cdot \frac{c_o}{c_o + c_e} Z_t \cdot j \omega (c_e + c_o) \cdot v_o$$

De sorte que :

$$\frac{J_s^2}{J_{\Delta m}^2} = \left[ \frac{c_o}{c_o + c_e} \right]^2 \cdot \omega^2 \cdot (c_e + c_o)^2 \cdot |Z_t|^2$$

On en déduit :

$$\frac{S}{B} = \frac{v_o \frac{c_o}{c_o + c_e} \cdot \omega \cdot (c_e + c_o) |Z_t|}{\left[ \Delta F \cdot (\overline{e_n^2} + \overline{i_n^2} + \overline{i_{R_G}^2} |Z_t|^2) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

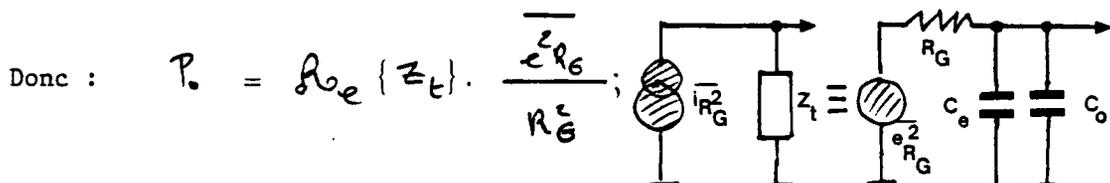
Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$  :

$$\frac{S}{B} \rightarrow \frac{c_o}{c_e + c_o} \cdot \frac{v_o}{(\Delta F \overline{e_n^2})^{\frac{1}{2}}}$$

⊗ FACTEUR DE BRUIT

\* La puissance de bruit en entrée due à la source  $R_G$  est :

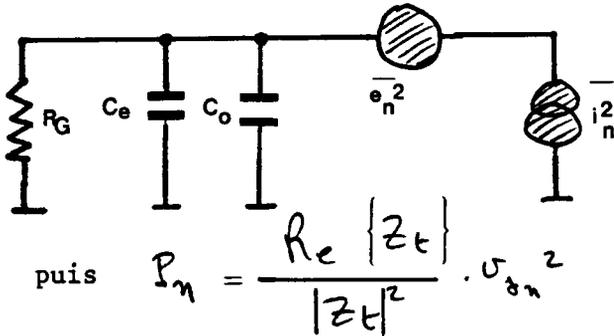
$$P_o = \frac{Re\{Z_t\}}{Z_t^2} \cdot J_{\Delta n}^2 \quad \text{où} \quad J_{\Delta n}^2 = \frac{\overline{e_{R_G}^2} \cdot |Z_t|^2}{R_G^2}$$



Rq :  $\overline{i_{R_G}^2} = \frac{\overline{e_{A_G}^2}}{R_G^2}$ , par suite on retrouve l'expression  $P_o = R_{oe} \{Z_t\} \cdot \overline{i_{R_G}^2}$

\* La puissance de bruit  $P_n$  en entrée due au préamplificateur est :

$$P_n = \overline{i_n^2} R_{oe} \{Z_t\} + \overline{e_n^2} \cdot \frac{R_{oe} \{Z_t\}}{|Z_t|^2} \quad (\text{cf. fig. ci-dessous})$$



car  $v_{sn} = i_t \cdot Z_t$  et  
 $i_t = i_n + \frac{e_n}{Z_t}$

\* La puissance totale  $P_t$  du bruit en entrée est donc :

$$P_t = P_n + P_o \quad \text{soit : } P_t = R_{oe} \{Z_t\} \cdot \left\{ \overline{i_n^2} + \frac{\overline{e_n^2}}{|Z_t|^2} + \frac{\overline{e_{R_G}^2}}{R_G^2} \right\}$$

Le facteur de bruit F est l'expression :

$$F = \frac{P_t}{P_o} \quad \text{soit } F = 1 + \frac{P_n}{P_o}$$

Nous trouvons :  $F = 1 + \frac{\overline{i_n^2} + \frac{\overline{e_n^2}}{|Z_t|^2}}{\frac{\overline{e_{R_G}^2}}{R_G^2}}$

Lorsque l'amplificateur est idéal  $F_{dB} = 0$  dB. Ce facteur est donc significatif du récepteur qui perturbe la mesure.

ANNEXE VIII - CALCUL DU BRUIT DE LA CHAÎNE

CALCUL DU BRUIT DE LA CHAÎNE

En règle générale, le niveau minimum corrélable en entrée correspond au signal en sortie égal au bruit parasite B de l'électronique. Pour déterminer la dynamique en entrée, il faut donc connaître le bruit B permanent en sortie. Un certain nombre de règles permettent d'évaluer son importance.

REGLES SUR LE CALCUL DU BRUIT DE LA CHAÎNE

Nous supposons un bruit électrique  $b(t)$  aléatoire stationnaire et ergodique dont la densité de probabilité  $p(b)$  est une gaussienne. Toutes les moyennes d'ordre  $m$  sont alors de la forme :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b_1^n b_2^m dt = \iint_{-\infty}^{+\infty} b_1^n b_2^m p(b_1, b_2) db_1 db_2$$

où :

$$p(b_1, b_2) = p(b_1) \cdot p(b_2)$$

car les évènements sont indépendants.

La valeur efficace du bruit est :

$$\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\sigma^2}$$

où :

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} b^2 dt$$

soit encore

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{bb}(\omega) d\omega \quad (\text{voir annexe})$$

Nous admettons que les densités spectrales de puissance moyenne  $\phi_{bb}(\omega)$  des bruits sont constantes dans une bande  $\Delta F$ , étroite

Exemple : bruit thermique d'une résistance pure :

$$\sqrt{e_n^2} = \sqrt{\phi_{ee}(\omega) \Delta F} \quad \text{où} \quad \phi_{ee} = 4kTR = \text{constante}$$

où k est la constante de Boltzmann

T la température

R la valeur de la résistance

Dans ce cas il vient :

$$\sigma^2 = \phi_{bb}(\omega) B_{eq}$$

où  $B_{eq}$  est la bande passante du réseau à l'endroit considéré

### VALEUR EFFICACE D'UN BRUIT EN SORTIE D'UN FILTRE LINEAIRE

En se reportant à la figure n° 17.a, on a :

$$\phi_{ee} = \frac{\sigma_e^2}{\Delta F_e} = \frac{\sigma_s^2}{\Delta F_s} = \text{constante}$$

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\Delta F_s}{\Delta F_e}} \sigma_e \quad \text{en volt efficace.}$$

D'autre part, on a :

$$\Delta F_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(\bar{\omega})|^2}{|F(\omega_0)|^2} d\omega \quad (\text{voir annexe n° II page 68})$$

Où  $F(\omega)$  est la fonction de transfert du filtre centré sur  $\omega_0$ ,  $\sqrt{\phi_{ee}}$  s'exprime en volt efficace/ $\sqrt{\text{Hz}}$ .

### VALEUR EFFICACE D'UN BRUIT EN SORTIE D'UN MULTIPLICATEUR

En se reportant au schéma n° 17.b et compte tenu des propriétés des valeurs moyennes, on trouve

$$\sigma_b^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

où :

$$\sigma_b^2 = \langle b^2 \rangle$$

$$b = b_1 b_2$$

$$\sigma_1^2 = \langle b_1^2 \rangle$$

on montre alors que :

$$\sigma_b^2 = \sqrt{\phi_{bb} \Delta F_2} = \sigma_b \sqrt{\frac{\Delta F_2}{2\Delta F_1}} = \sqrt{\phi_{b_1 b_1}^2 \Delta F_2 \cdot 2\Delta F_1}$$

VALEUR EFFICACE D'UN BRUIT EN SORTIE D'UN ADDITIONNEUR (OU SOUSTRACTEUR)

En considérant la figure n° 17.c, on a :

$$b = b_1 \pm b_2$$

$$\sigma_b^2 = \sigma_{b_1}^2 + \sigma_{b_2}^2 \quad \text{puisque} \quad \sigma_{b_1 b_2} = \langle b_1 b_2 \rangle = 0$$

donc :

$$\sigma_b = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma_1 \sqrt{2} \quad \text{pour} \quad \sigma_2 = \sigma_1$$

LEGENDES DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : mode actif : émission et étage d'entrée de la réception

Figure 2 : mode actif : changement de fréquence

Figure 3 : mode actif : étage de sortie

Figure 4 : schéma de principe de l'amplificateur à 20 db et de l'amplificateur 50 ohms

Figure 5 : configurations des dipôles

Figure 6 : dispositif d'estimation de la puissance croisée de deux signaux dans la cas théorique : 1ère solution

Figure 7 : même dispositif avec changement de fréquence : 2ème solution

Figure 8 : même dispositif avec un deuxième changement de fréquence : 3ème solution

Diagrammes séquentiels :

Figure 9 : a) échelon unité à l'entrée d'un filtre  
b) réponse du filtre à un échelon unité à l'entrée  
c) diagrammes représentant une séquence de mesure

Figure 10 : préamplificateur haute impédance - Sonde H.F.

Figure 11 : éléments de calcul : - distribution de Dirac - Fenêtre temporelle

Figure 12 : bande équivalente de bruit - filtres

Figure 13 : calcul des bandes équivalentes de bruit

Figure 14 : calcul de bruit - multiplicateur paramétrique

Figure 15 : filtre 25 KHz, 20 dB.

Figure 16 : Courbe de réponse du filtre passe-bas d'analyse - 12dB/oct.

Figure 17 : Valeur efficace du bruit en sortie (calcul du bruit électronique) :

- a) d'un filtre linéaire
- b) d'un multiplicateur
- c) d'un additionneur.

Figure 18 : Schéma synoptique du mode passif : solution adoptée.

Figure 19 : Amplificateur d'entrée.

Figure 20 : Premier changement de fréquence, carte n° 1.

Figure 21 : Second changement de fréquence, carte n° 3 et 4.

Figure 22 : Déphaseur de 90°, carte n° 2.

Figure 23 : Amplificateurs pour filtres 25 Khz, carte n° 20.

Figure 24 : Amplificateurs de sortie sous 50 ohms et amplificateurs à 20 db, carte n° 11.

Figure 25 : Multiplicateurs, carte n° 14.

Figure 26 : Filtre 10 Hz. Sommateurs-sous tracteurs, carte n° 20.

Figure 27 : Valeurs des éléments de la chaîne.

Figure 28 : Schéma synoptique général du calculateur.

Figure 29 : Mélangeur H.F. SUMMIT 765 D.

Figures 30-31-32-33 : Exemples de spectres croisés des signaux collectés dans un plasma artificiel (caisson du C.R.P.E. - mai 1977).

Photo n° 1 : Appareil pour sonde à plasma.

Photo n° 2 : Appareil en cours d'essais.



MODE ACTIF

CHANGEMENT DE FREQUENCE

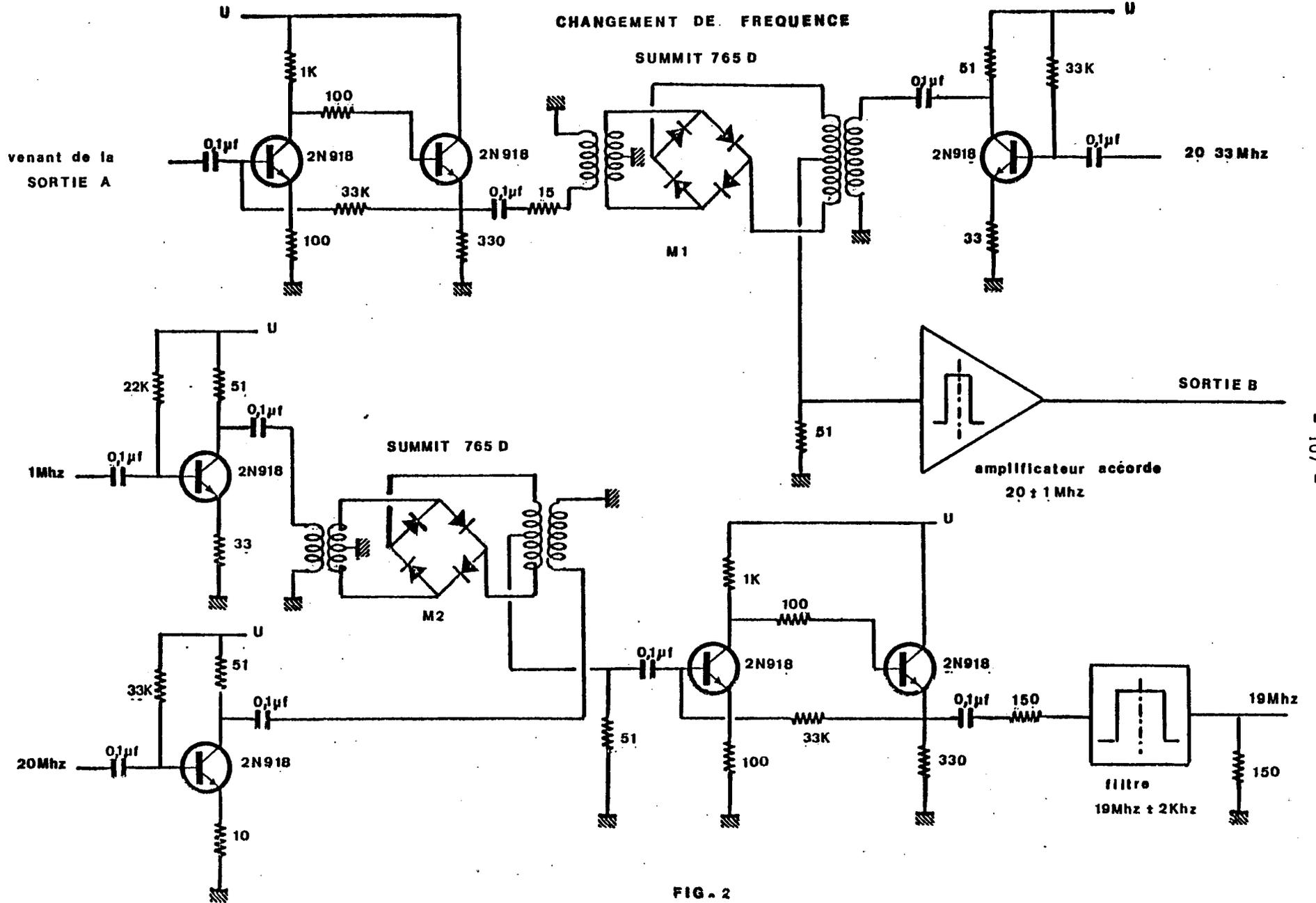
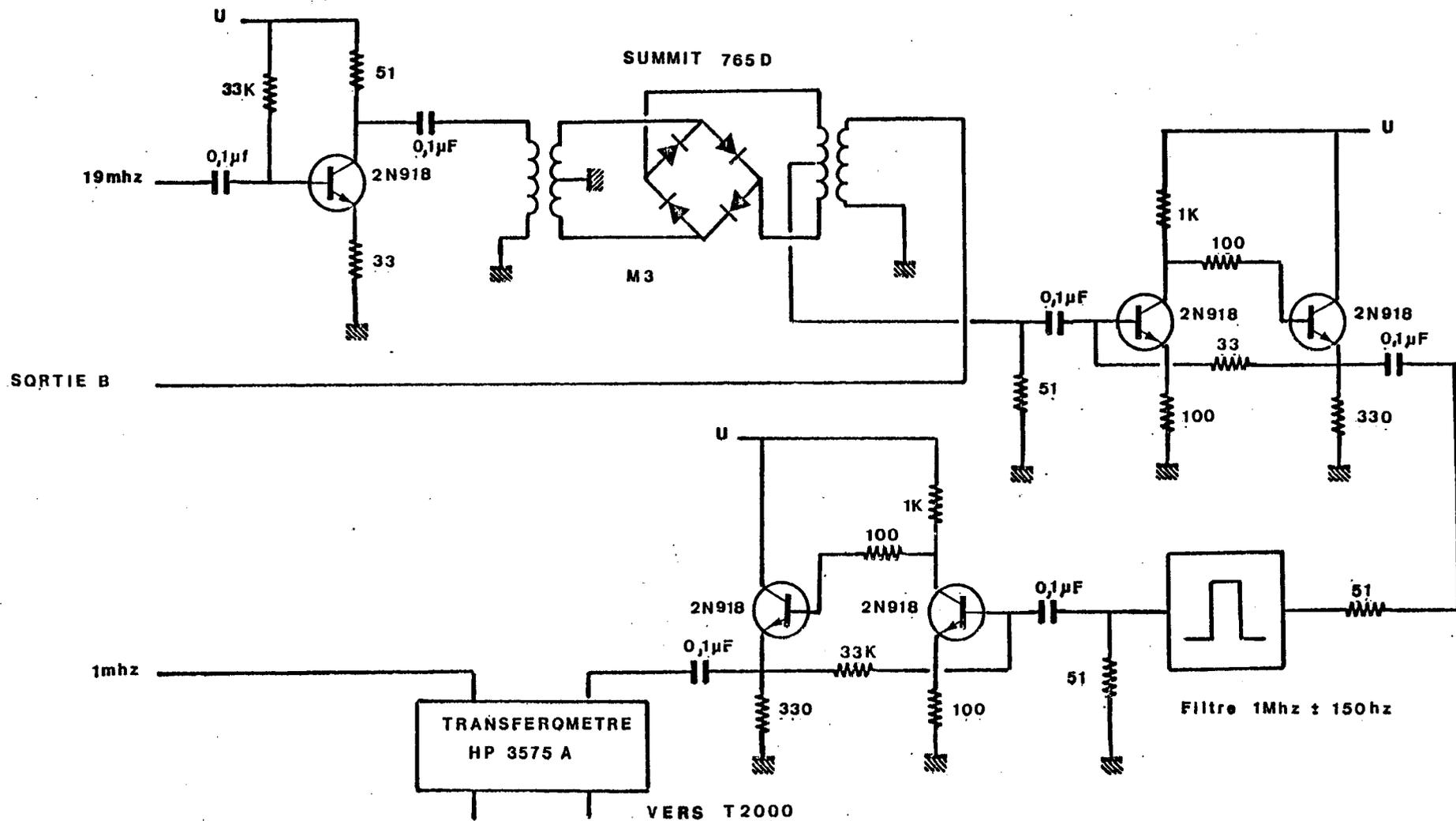
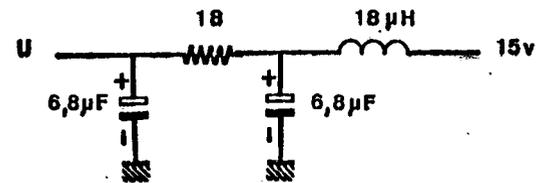


FIG. 2

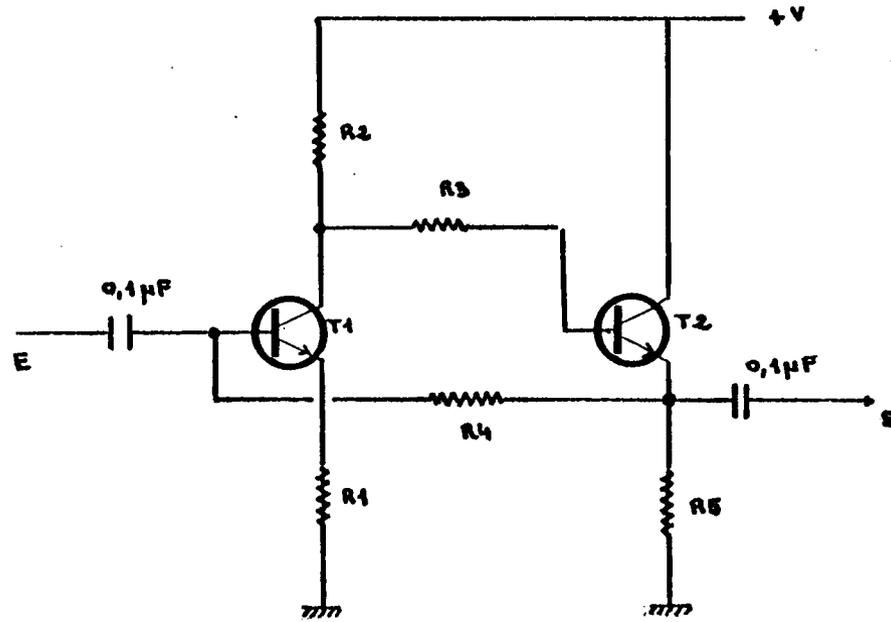
MODE ACTIF  
ETAGE DE SORTIE



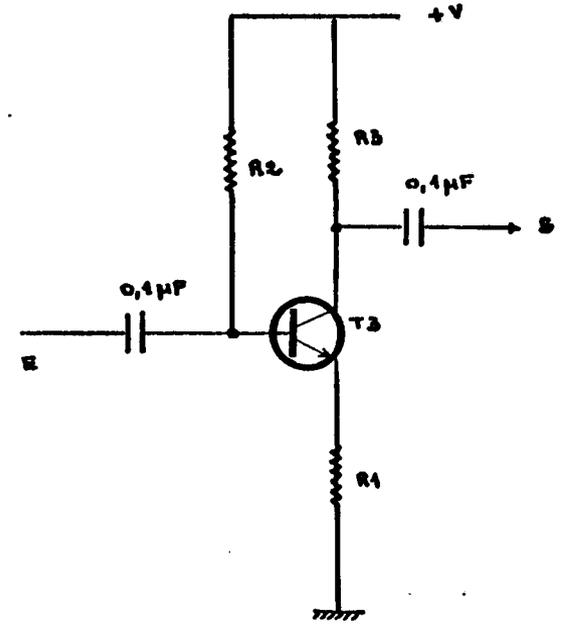
VERS T2000

FIG. 3

# AMPLIFICATEURS



a



b

T<sub>1,2,3</sub> : 2N 918

FIG 4

- III -

CONFIGURATIONS  
DES  
DIPOLES

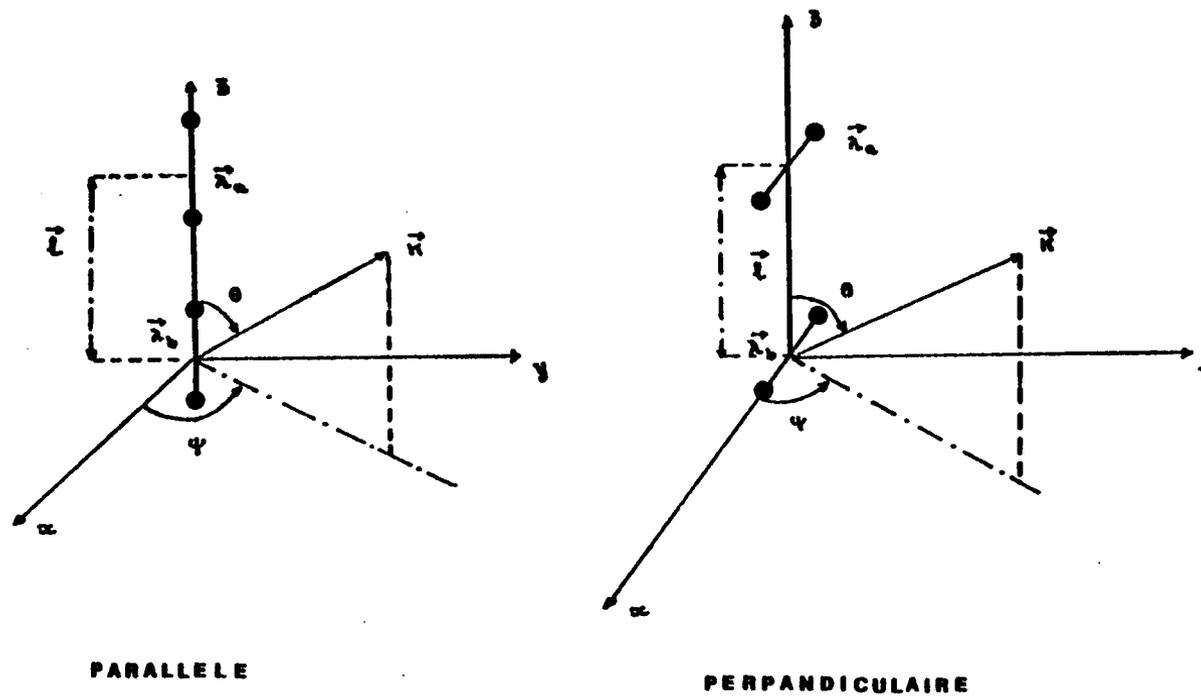


FIG. 6

1ère SOLUTION

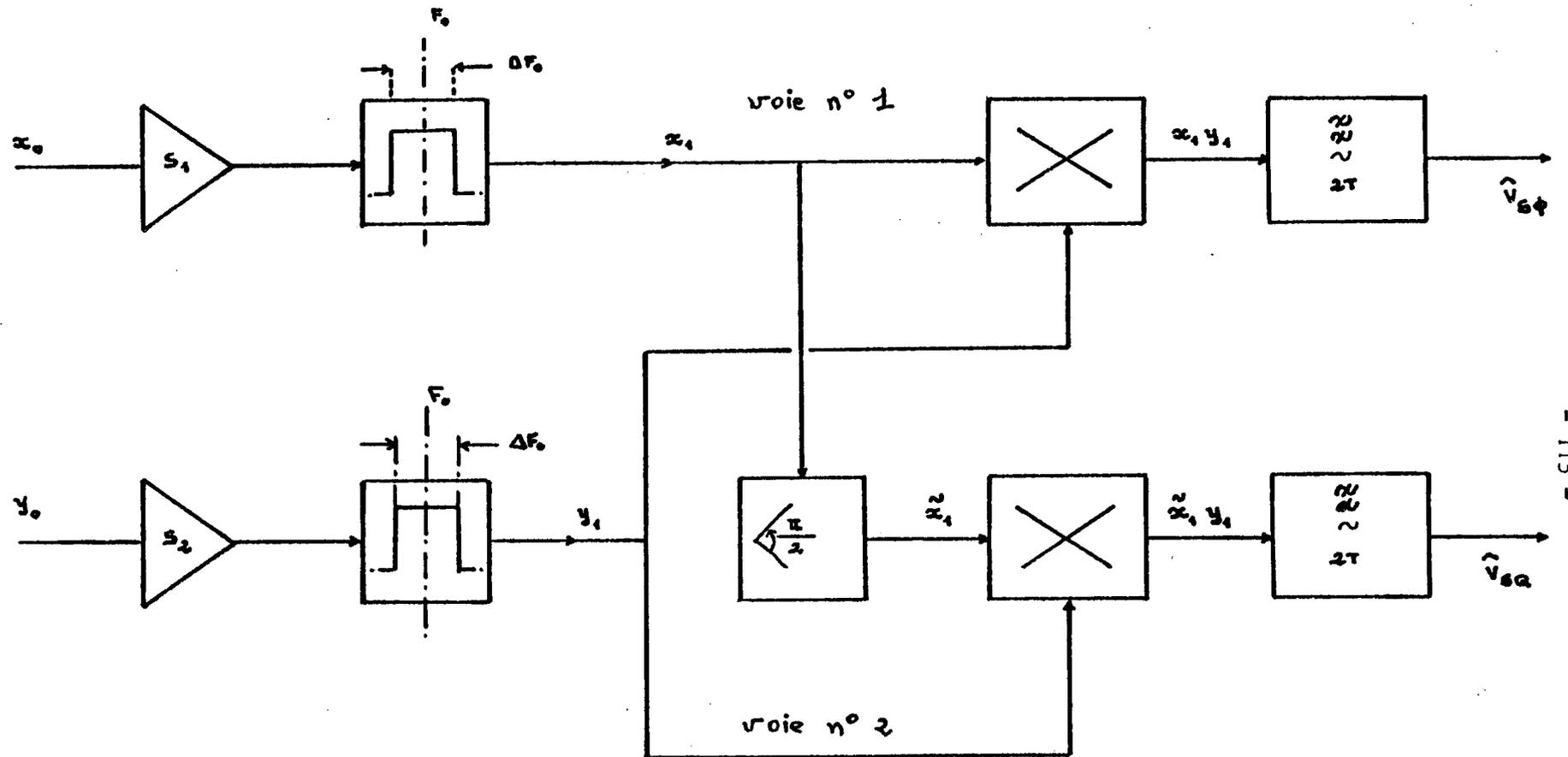


FIG. 6

2<sup>ème</sup> SOLUTION

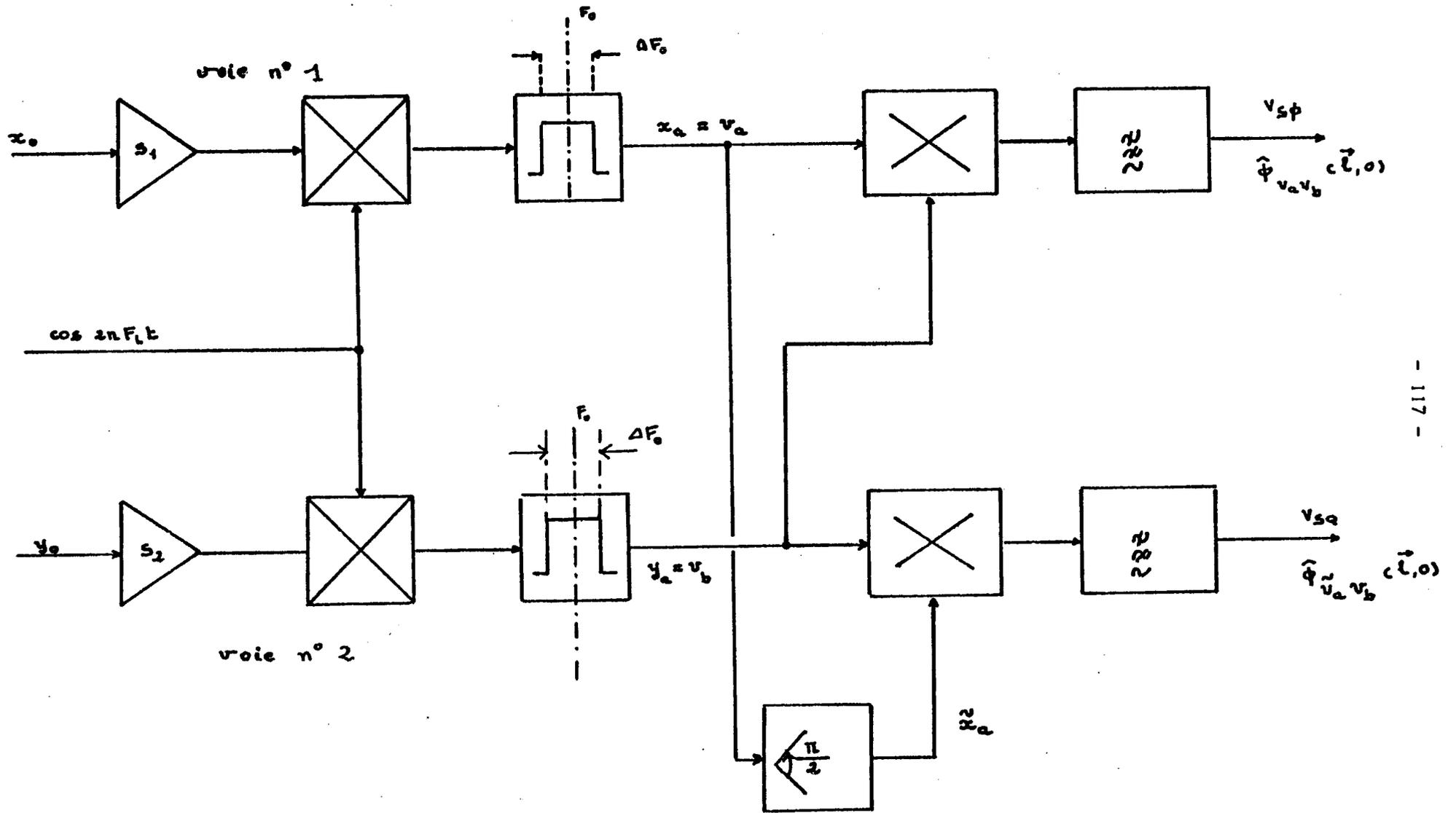


FIG. 7

3<sup>me</sup> SOLUTION

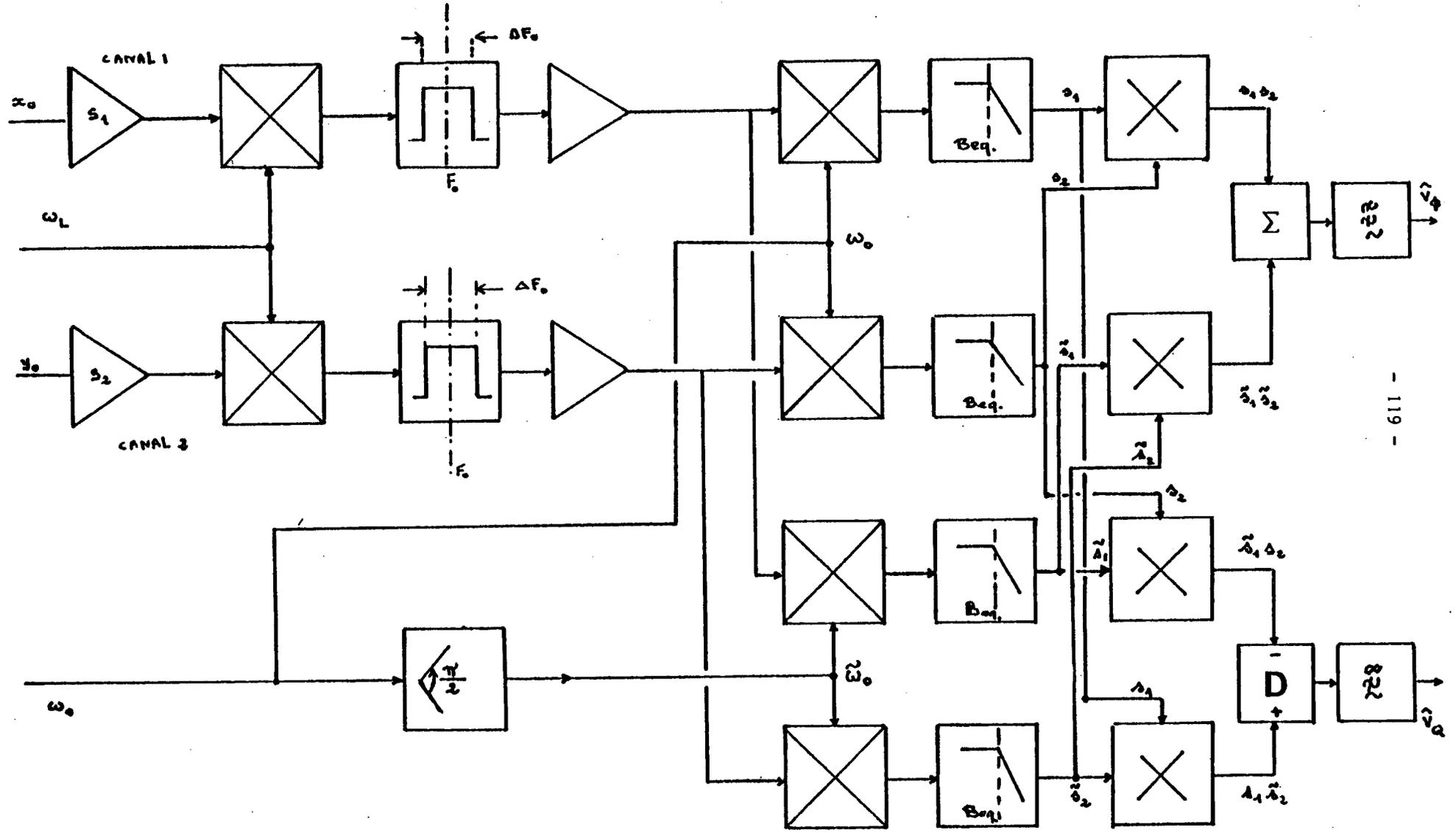
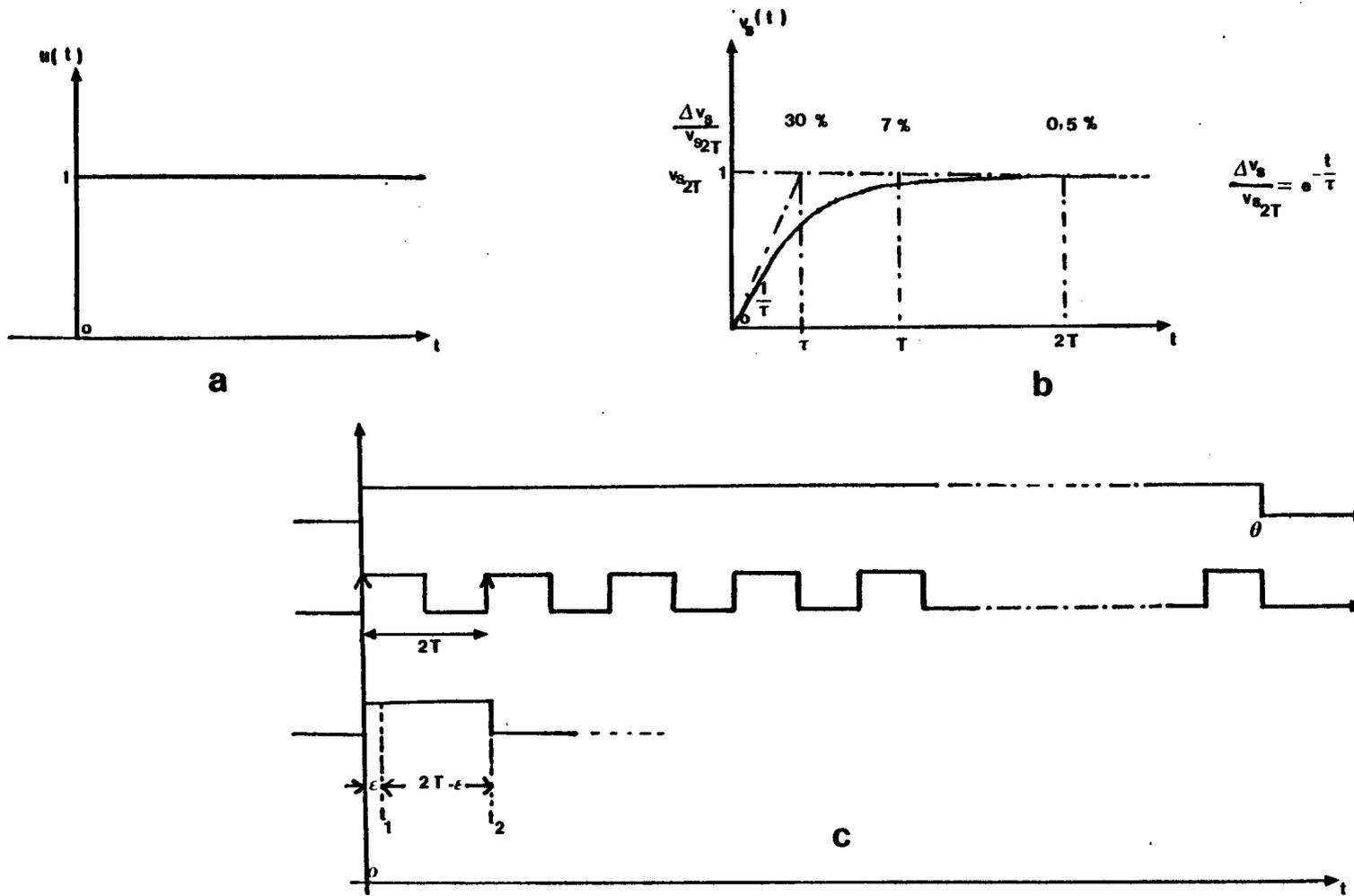


FIG. 8

DIAGRAMMES SEQUENTIELS



$\epsilon$ : temps de retablissement de la frequence du synthetiseur

$t_1$ : debut prelevement de l'information

$t_2$ : fin " " " "

} numerisation, calcul par T2000

FIG.9

SONDE HF.  
PREAMPLIFICATEUR  
HAUTE IMPEDANCE

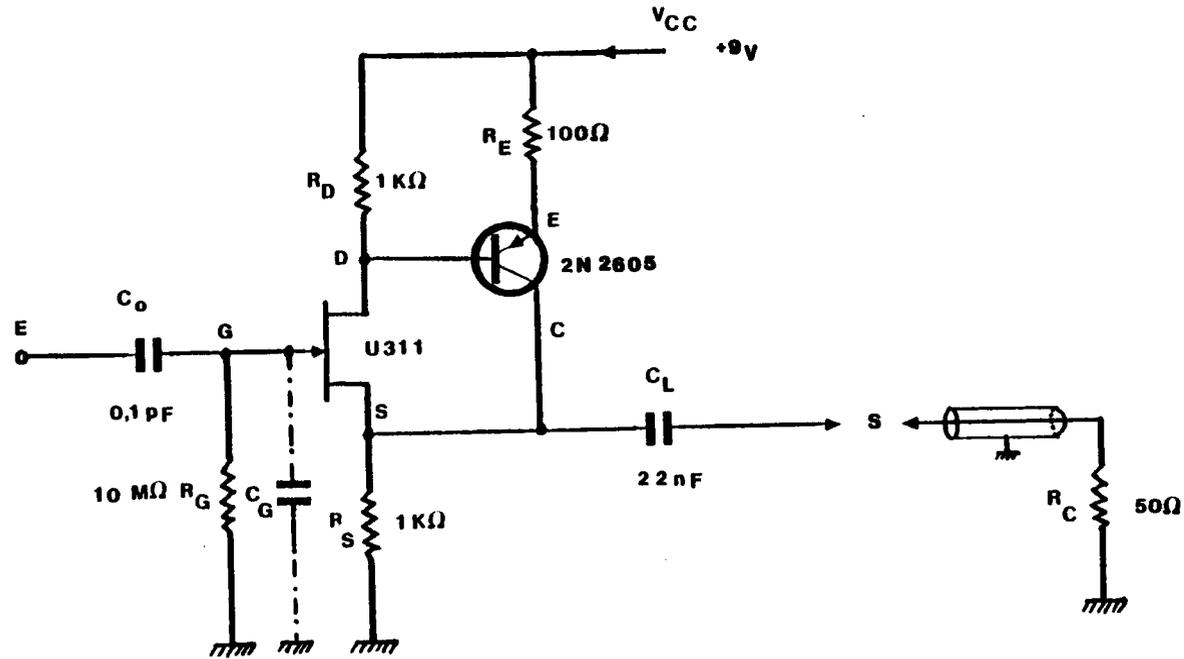
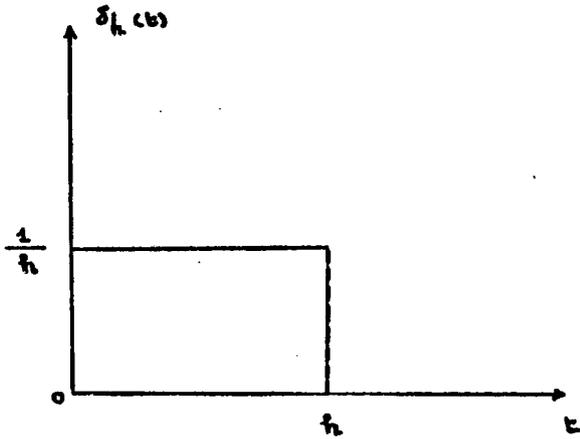


FIG. 10

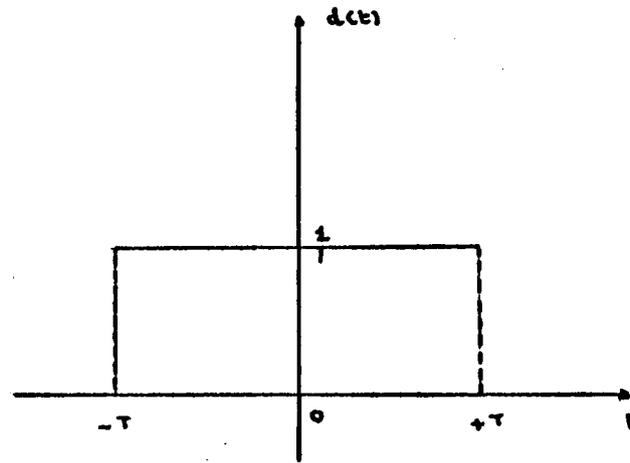
ELEMENTS DE CALCUL

Dirac



a

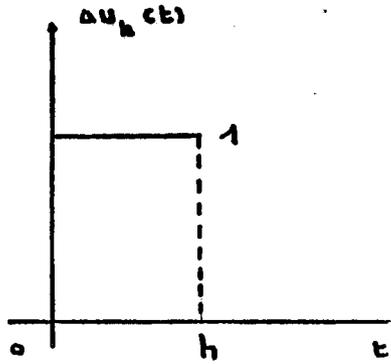
Fenêtre temporelle



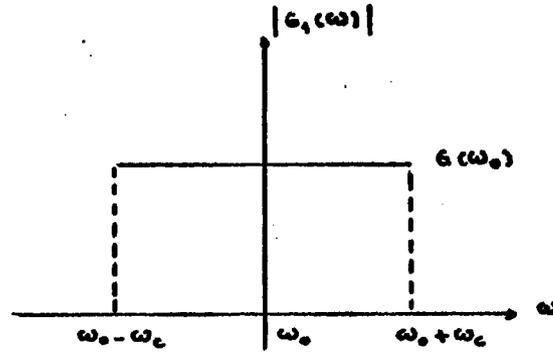
b

FIG. 11

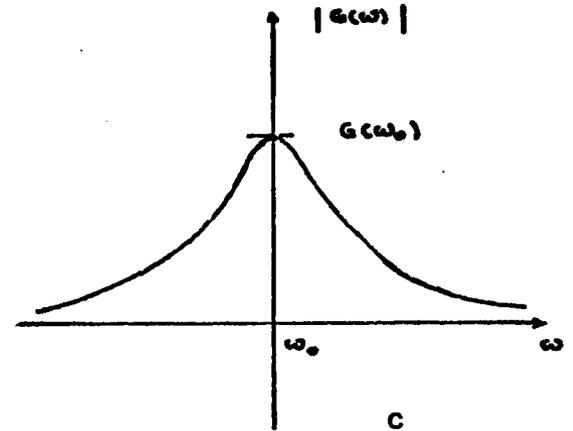
FILTRES



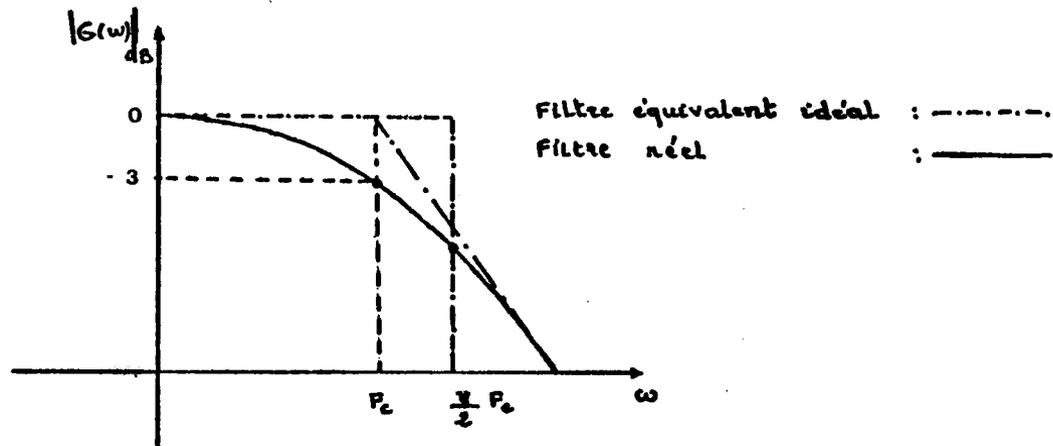
a



b



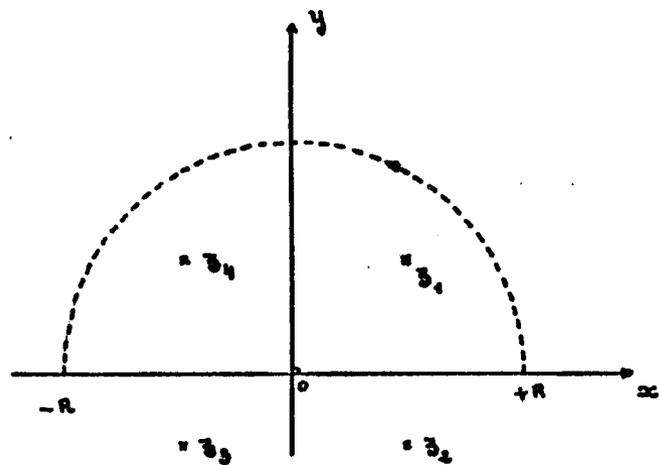
c



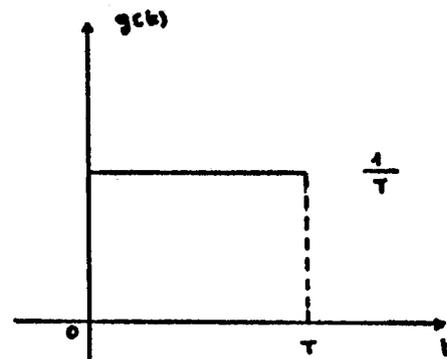
d

FIG. 12

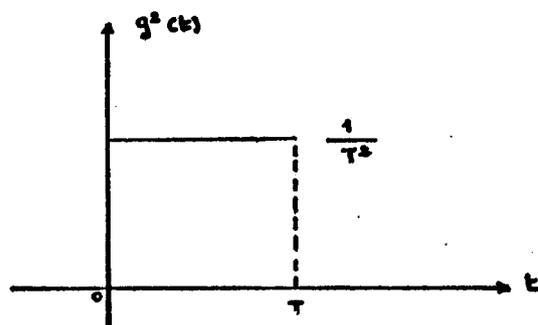
CALCUL  
DES  
BANDES EQUIVALENTES DE BRUIT



a



b



c

FIG. 13

CALCUL DE BRUIT, MULTIPLIPLICATEUR

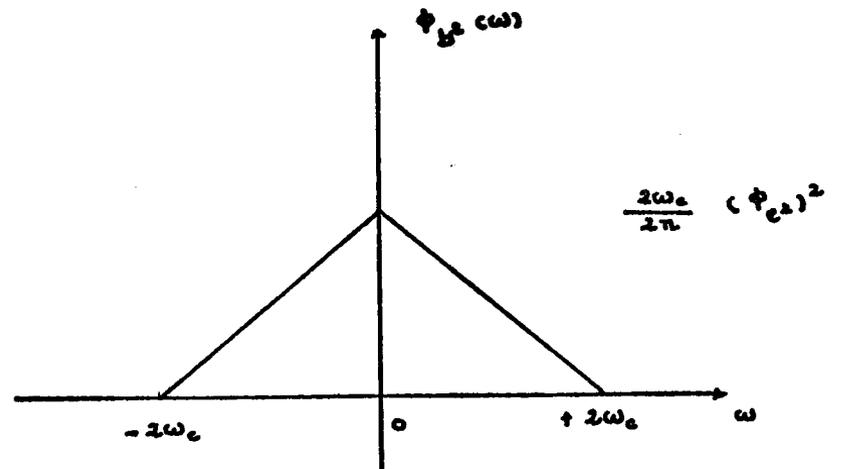
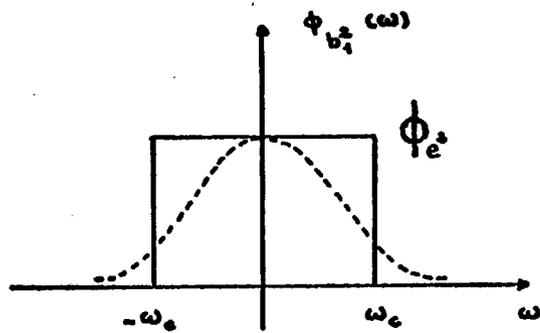
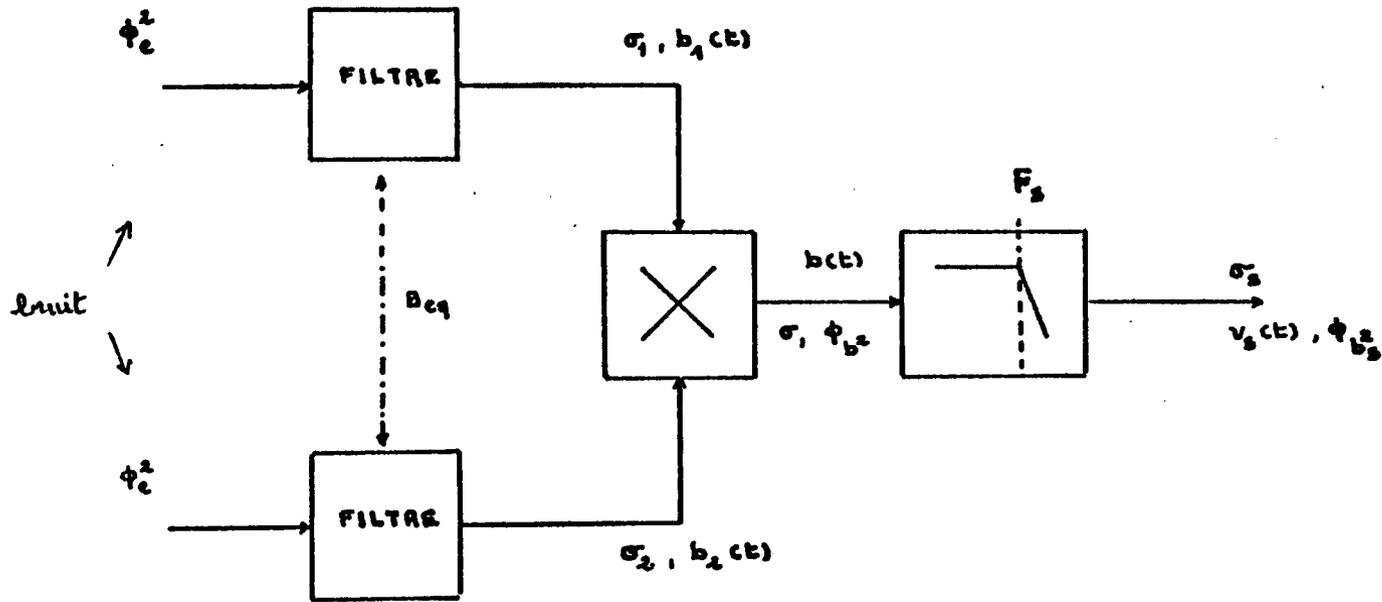


FIG.14

FILTRE 25 KHz  
 20 DB  
 CARTES n° 8 et 9

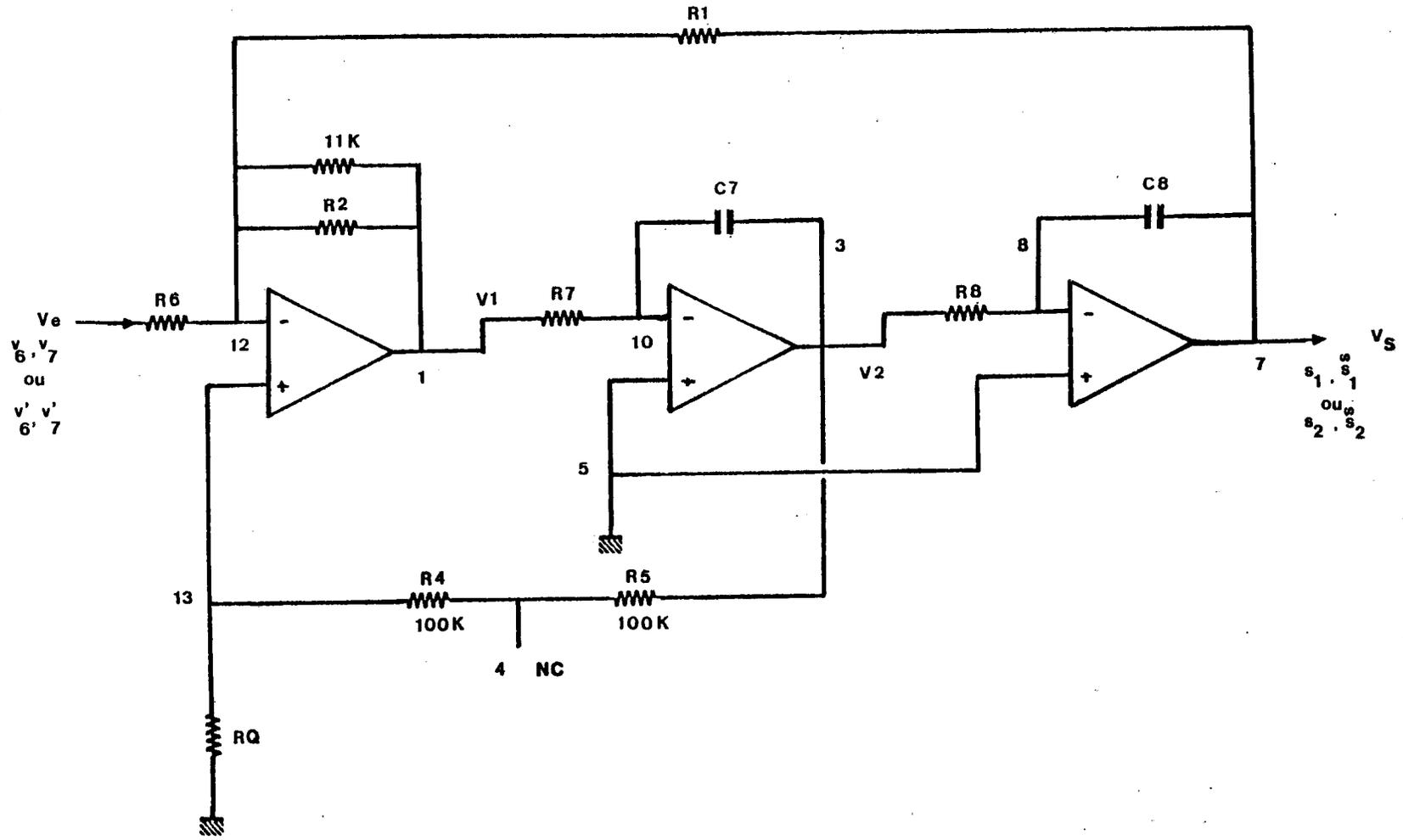
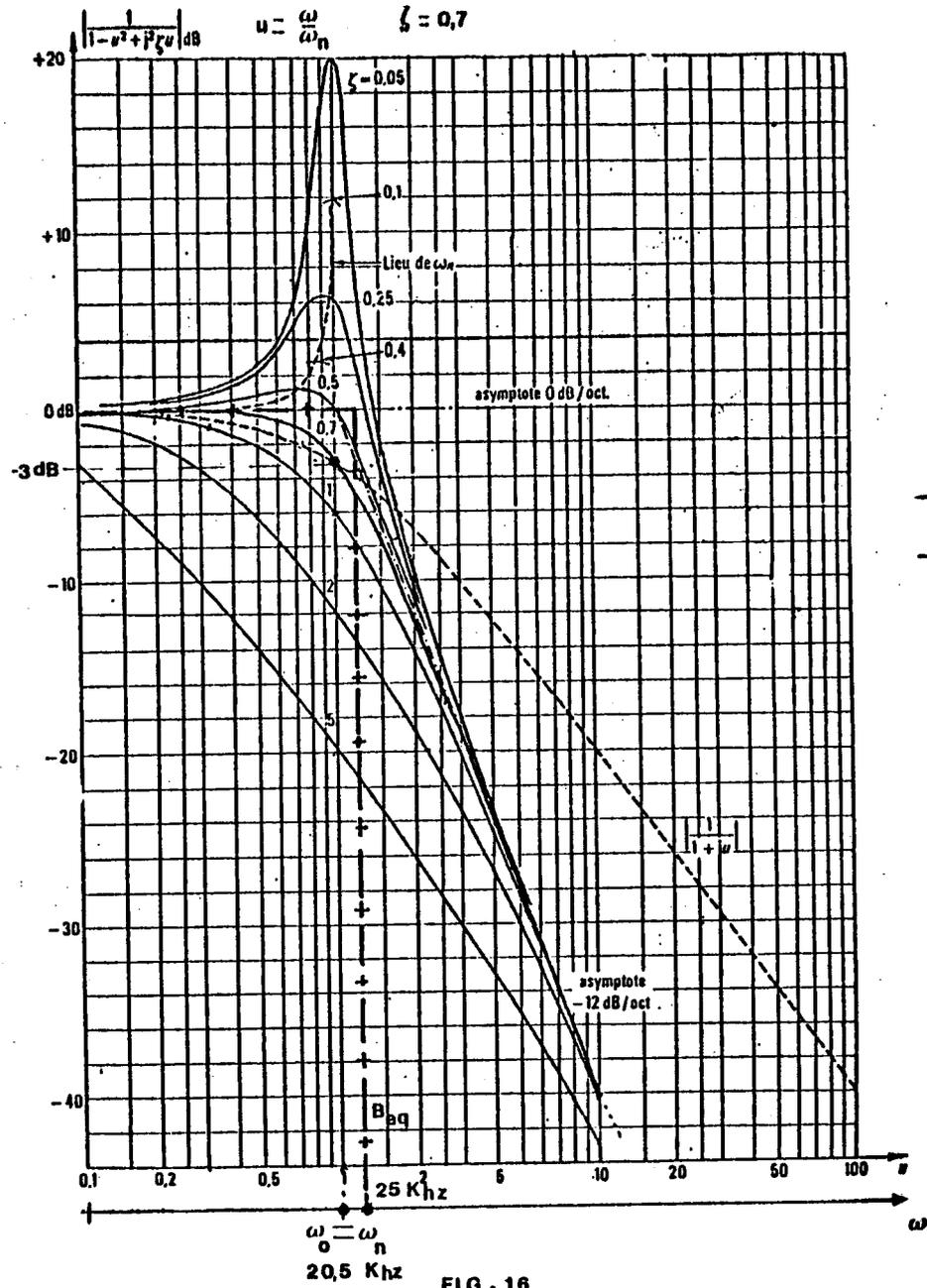


FIG. 15

FILTRE D'ANALYSE - 12 dB/oct.



— : filtre utilisé ( $\zeta=0,7$ )

- + - + : filtre de bruit  
équivalent

FIG. 16

# CALCUL DU BRUIT ELECTRONIQUE

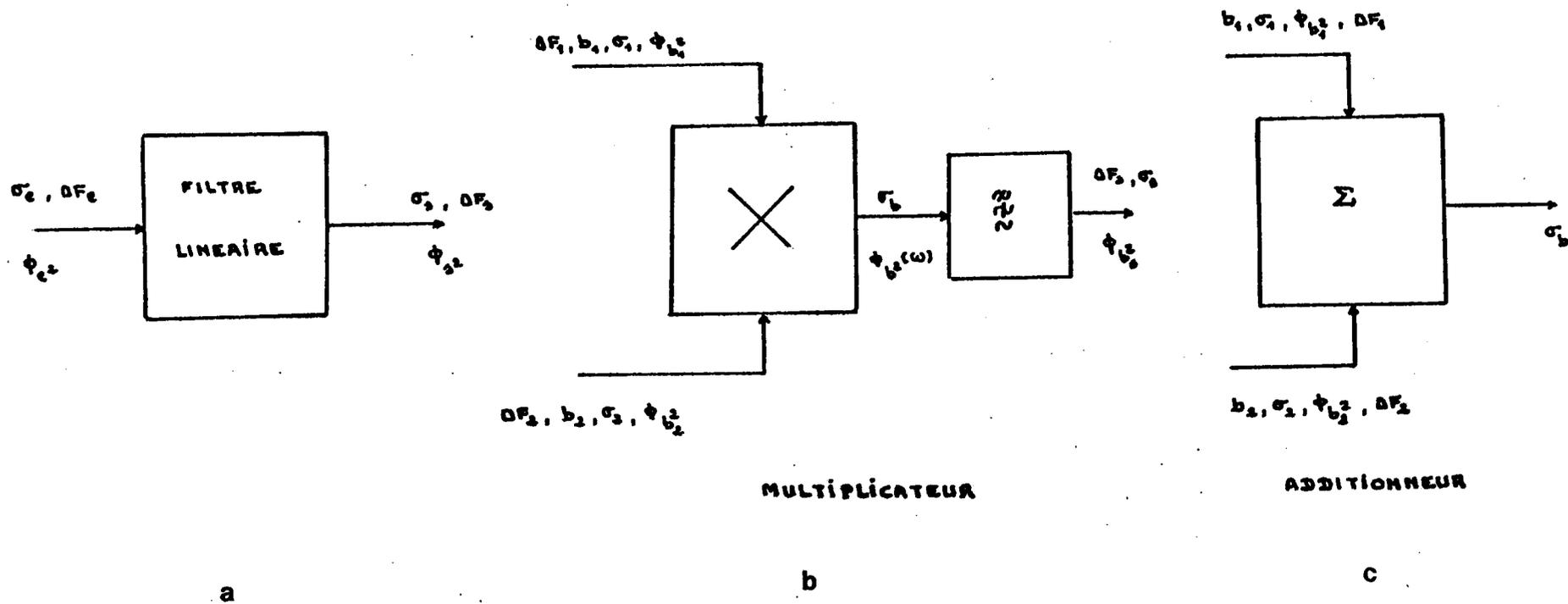


FIG. 17

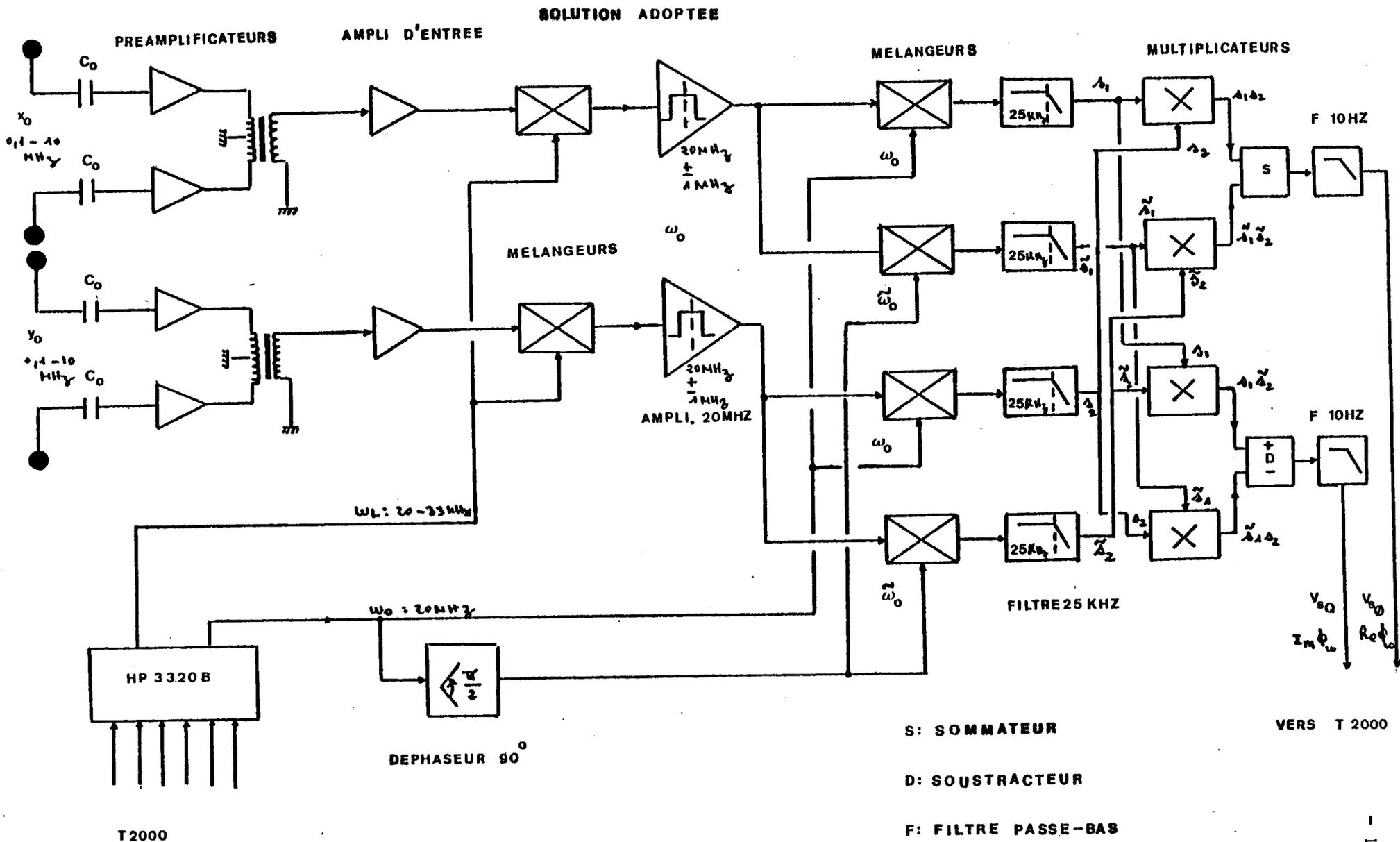
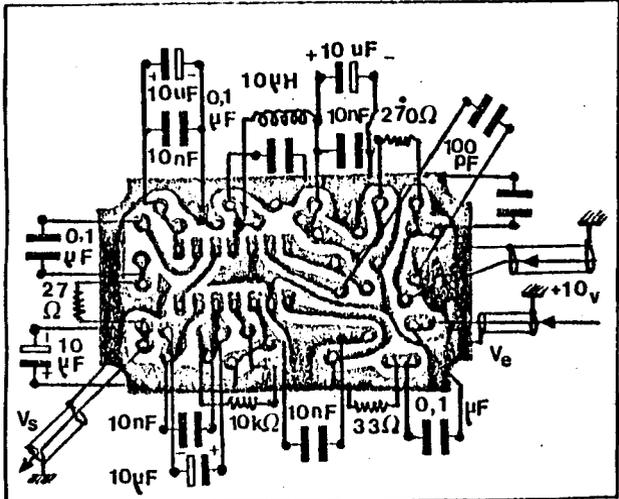
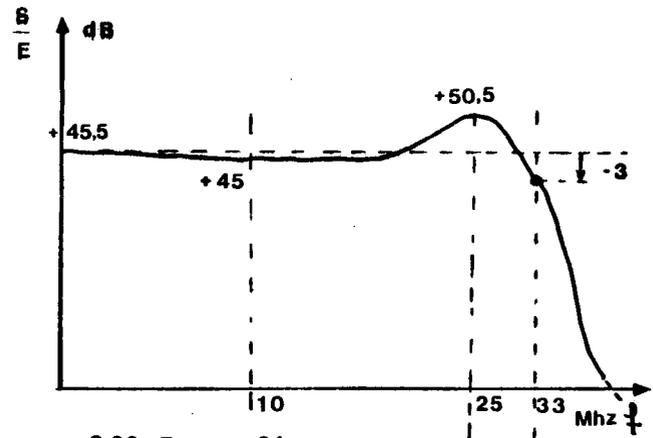
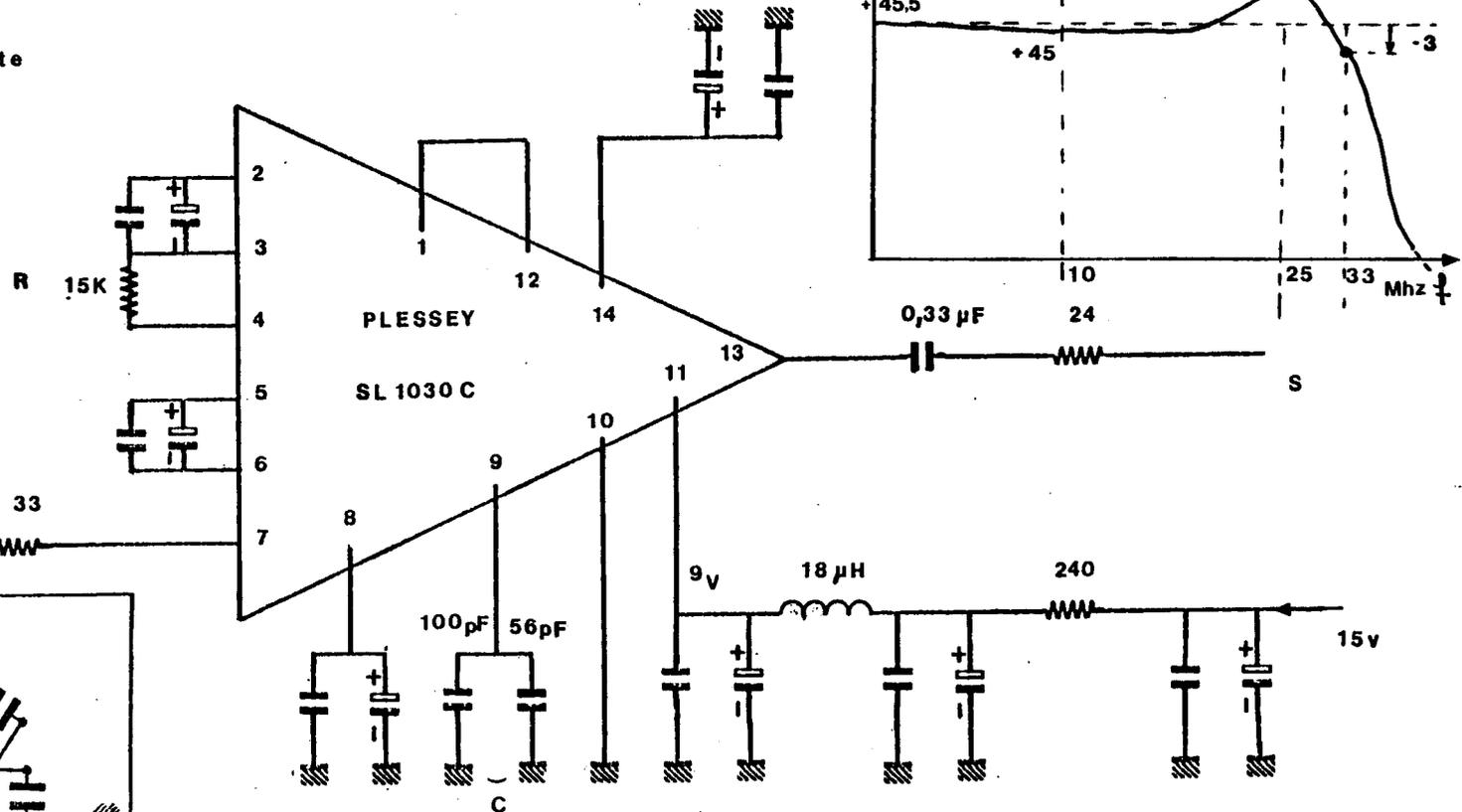


FIG. 18

# AMPLIFICATEUR D'ENTREE

Le produit R.C règle  
le gain et la bande passante

Bruit sortie = -82 dBm  
dans 30 KHz

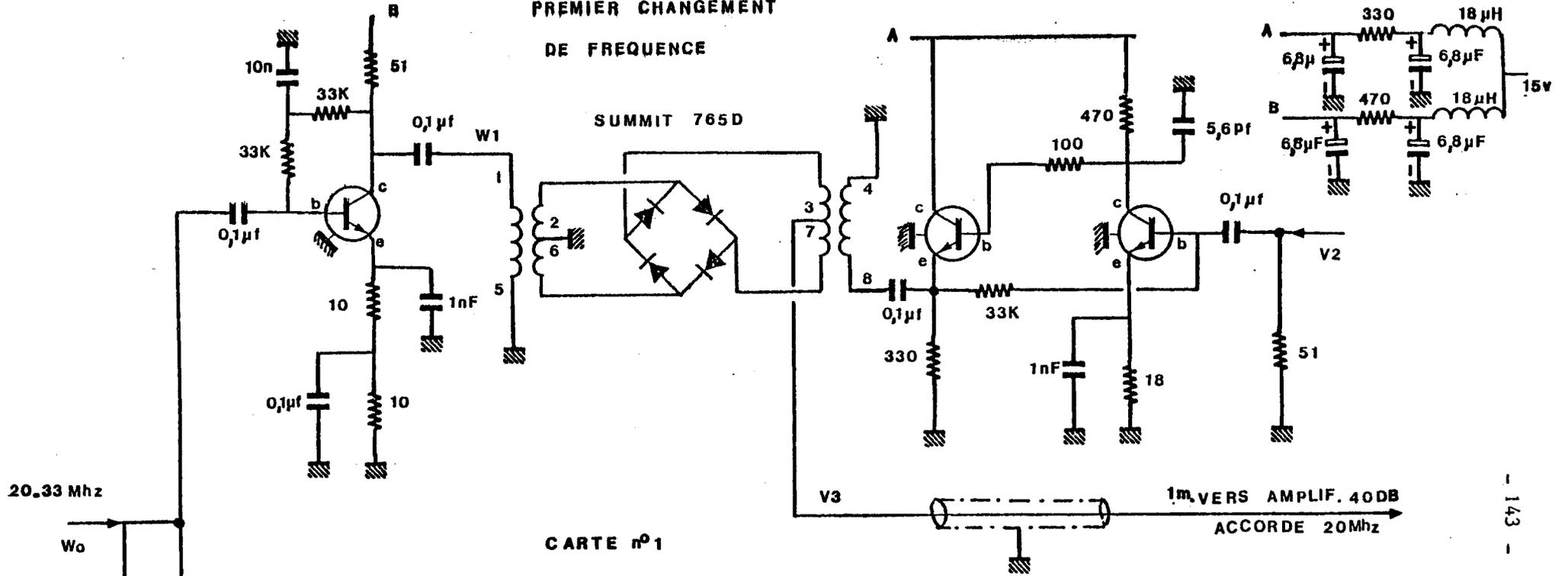


implantation

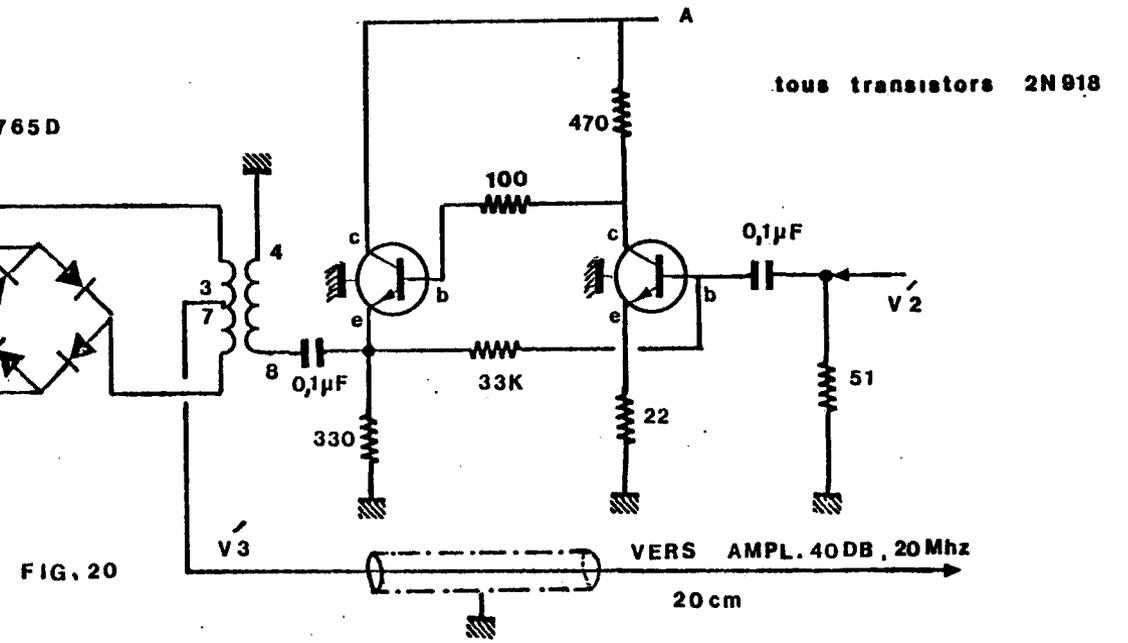
capacités non polarisées : 10 nF  
polarisées : 10 μF

FIG. 19

**PREMIER CHANGEMENT  
DE FREQUENCE**

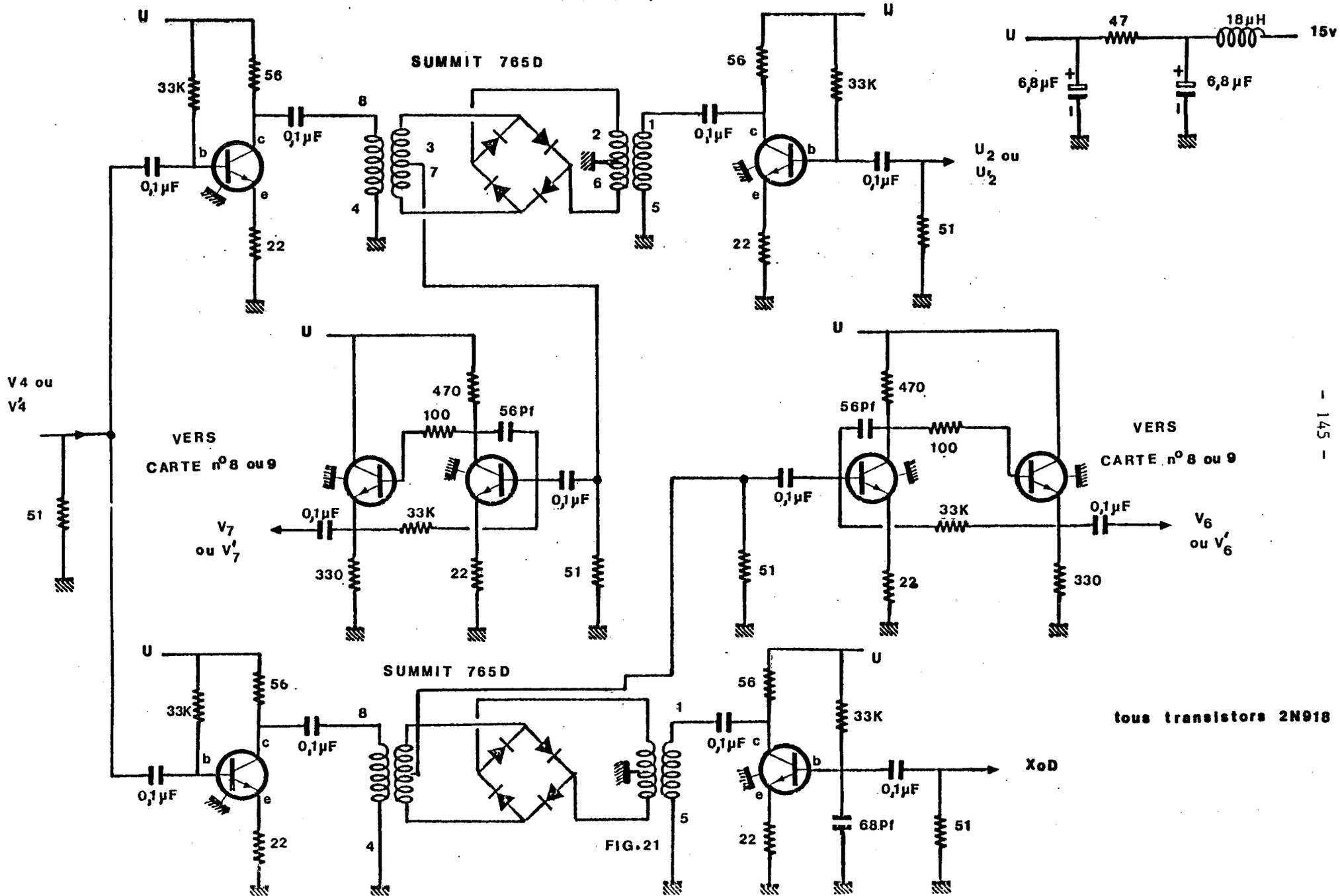


**SUMMIT 765D**



SECOND CHANGEMENT DE FREQUENCE

CARTE n°3 ou n°4



DEPHASEURS  $\frac{\pi}{2}$

CARTE n° 2

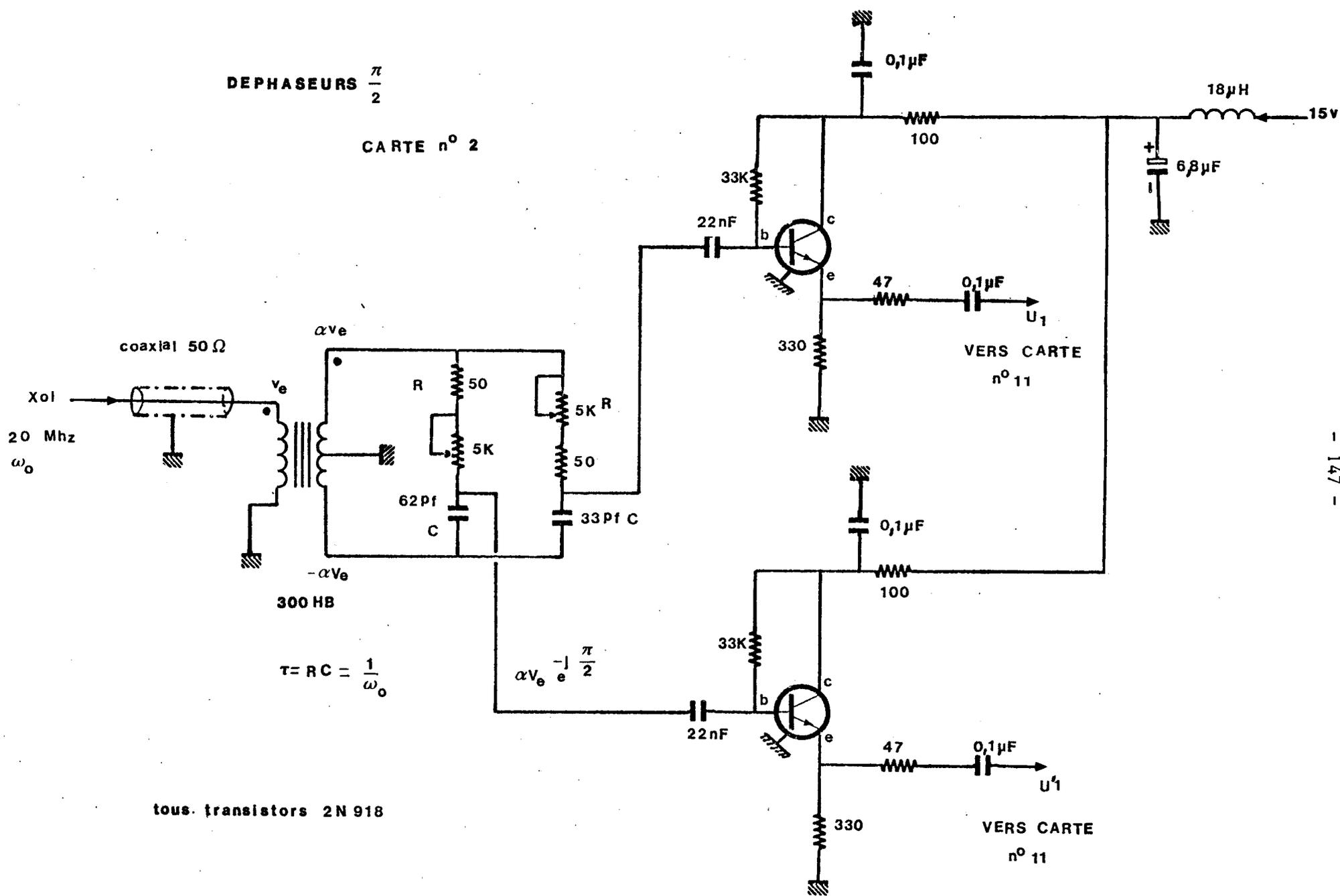


FIG. 22

# AMPLIFICATEURS

## DES FILTRES 25KHz

CARTE n° 20

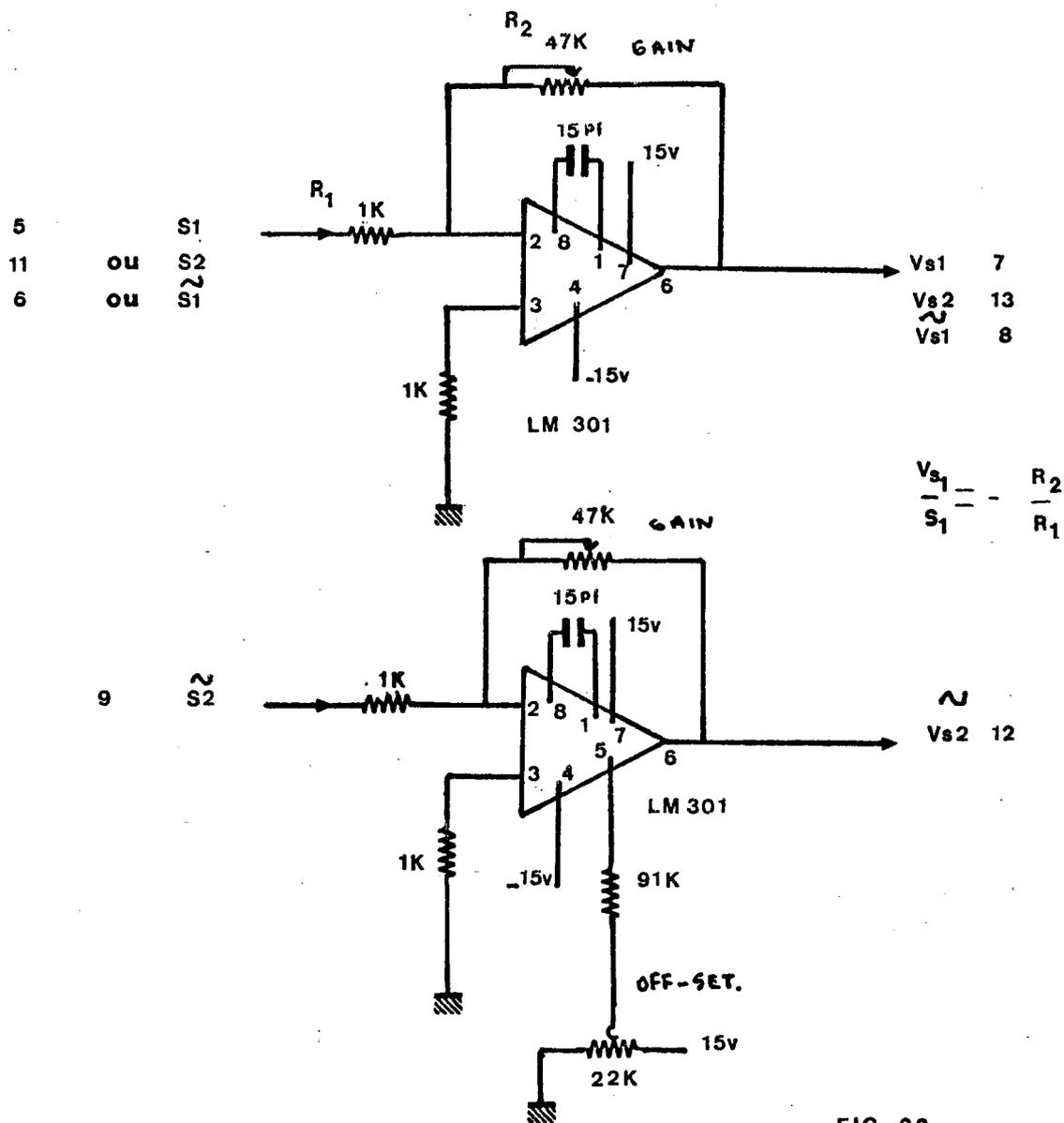
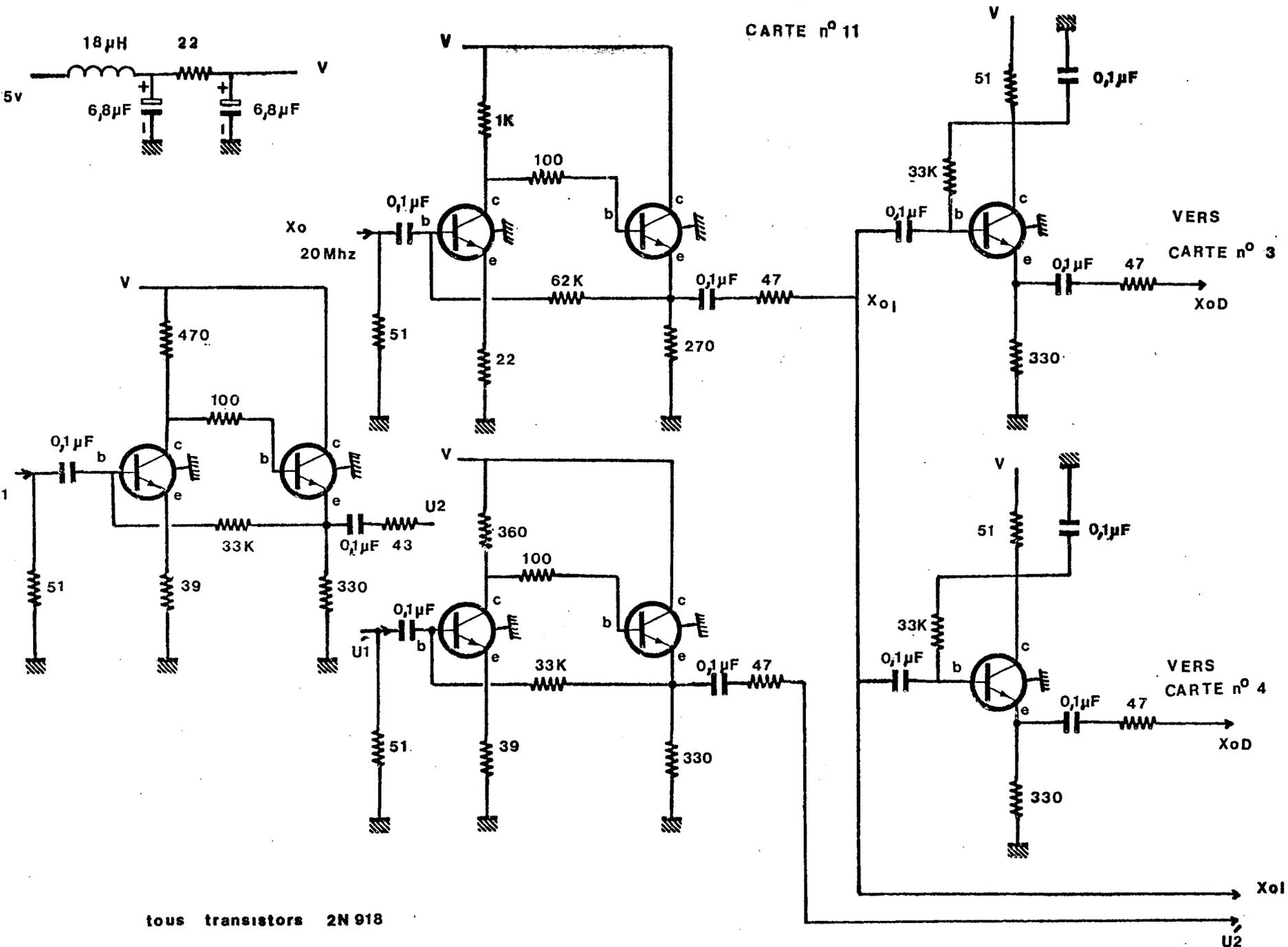


FIG. 23

AMPLIFICATEURS 50 OHMS

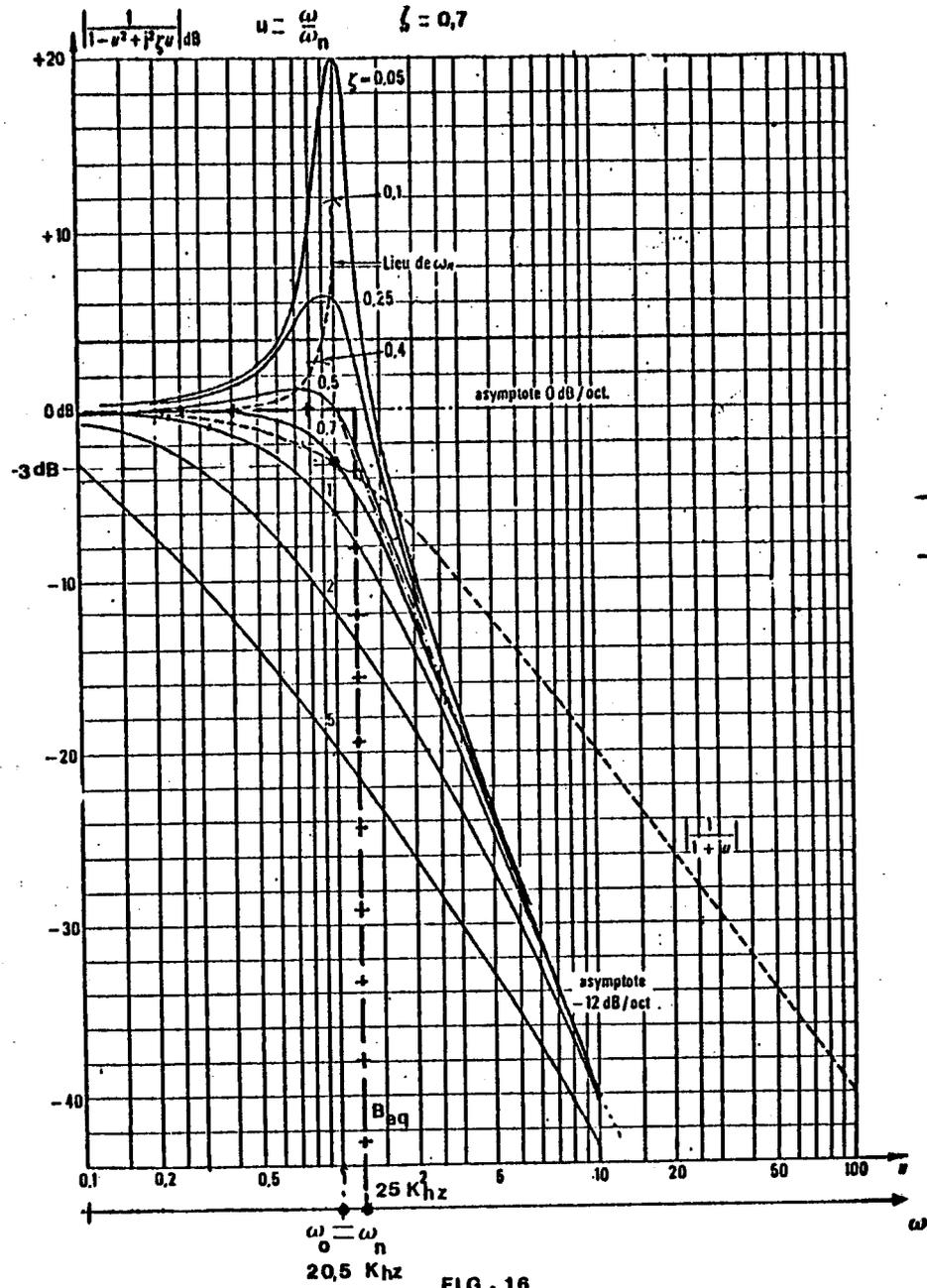
CARTE n° 11



tous transistors 2N 918

FIG. 24

FILTRE D'ANALYSE - 12 dB/oct.



— : filtre utilisé ( $\zeta=0,7$ )

- + - + : filtre de bruit  
équivalent

FIG. 16

# CALCUL DU BRUIT ELECTRONIQUE

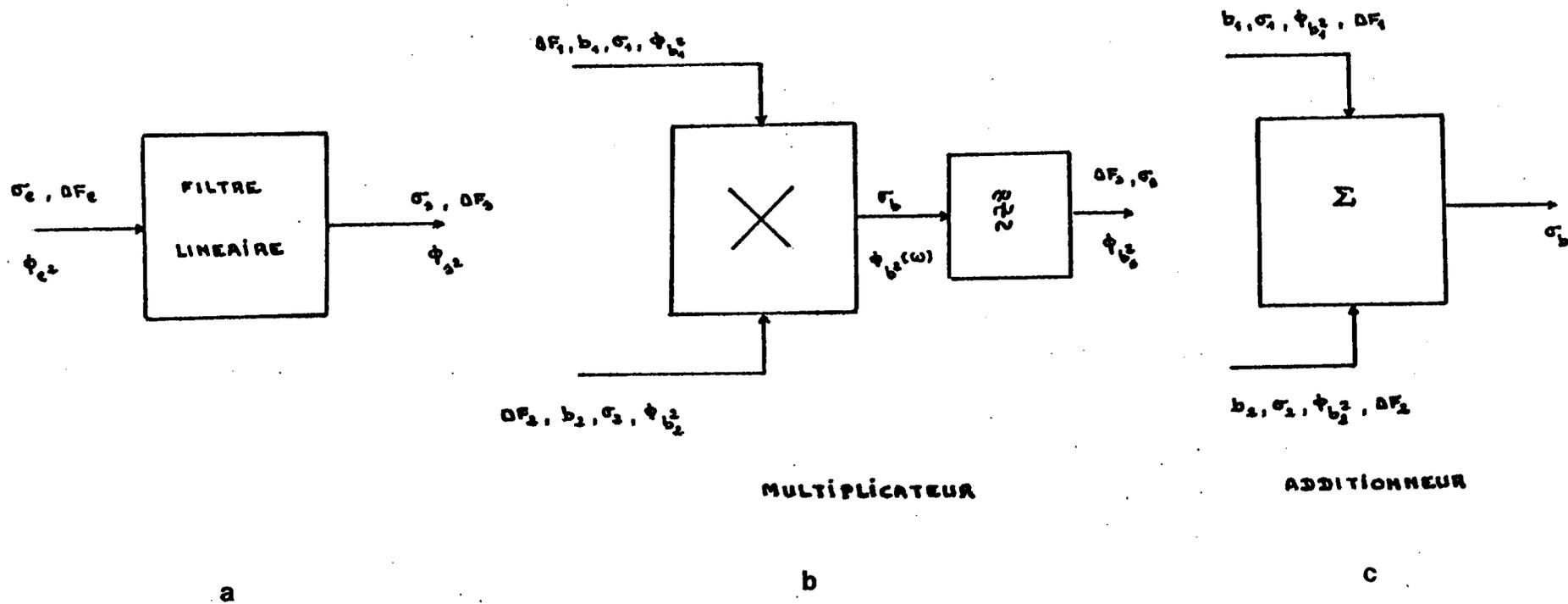


FIG. 17

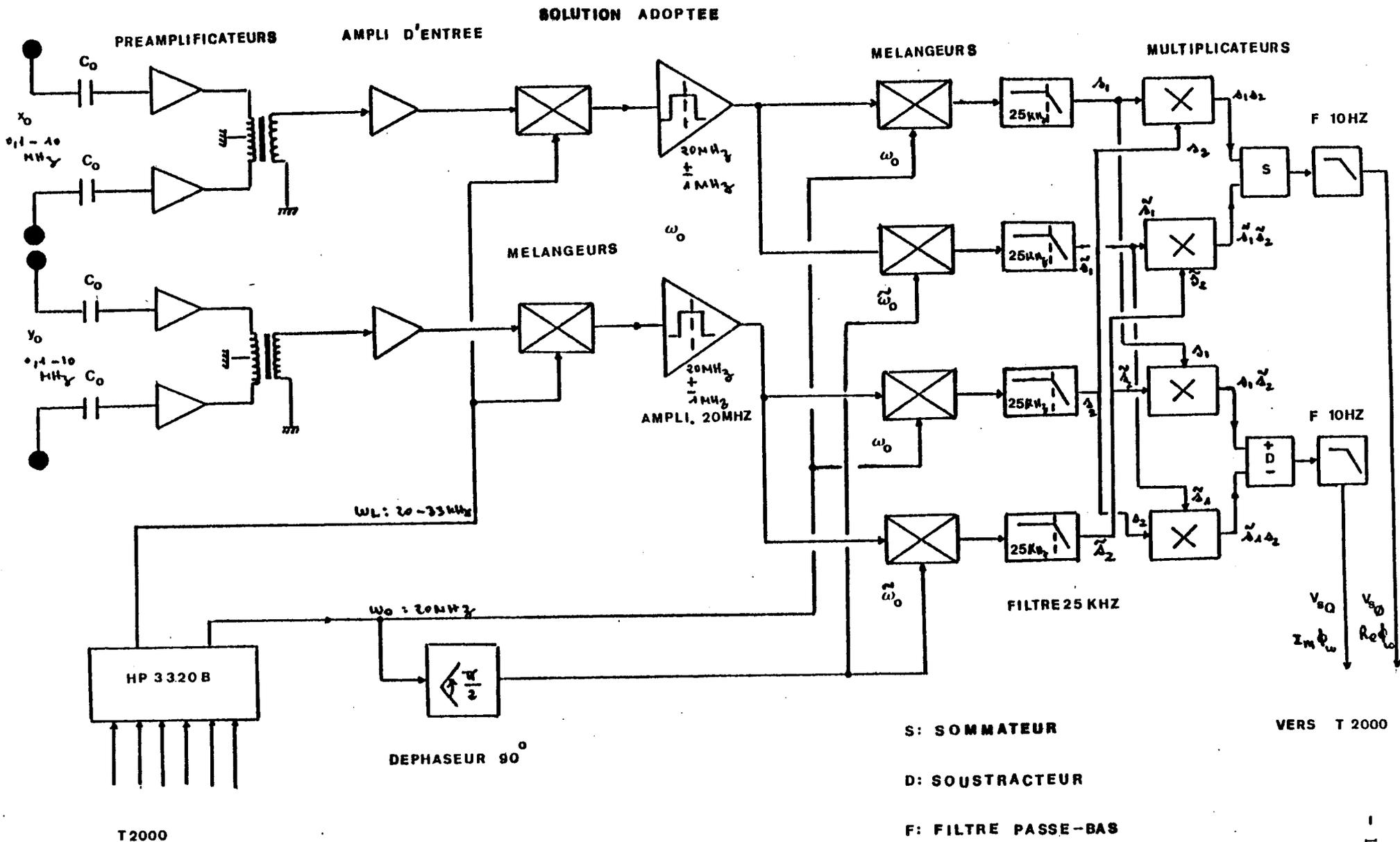
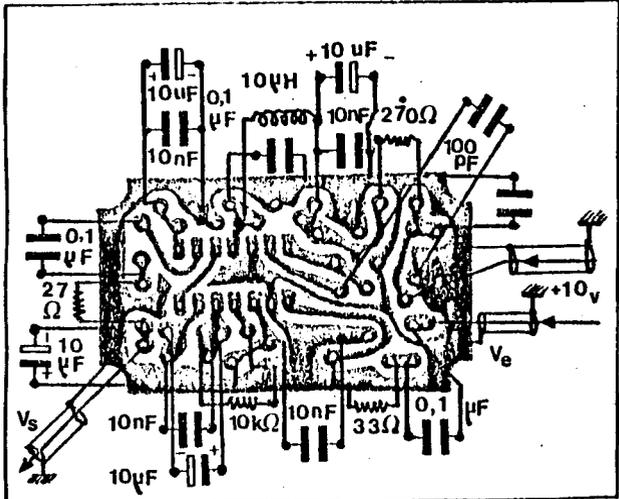
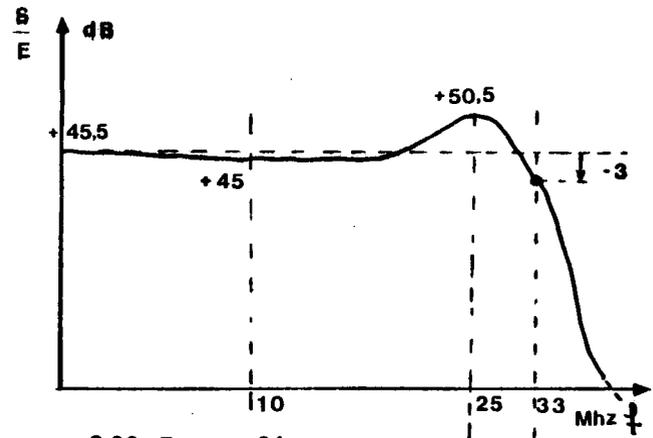
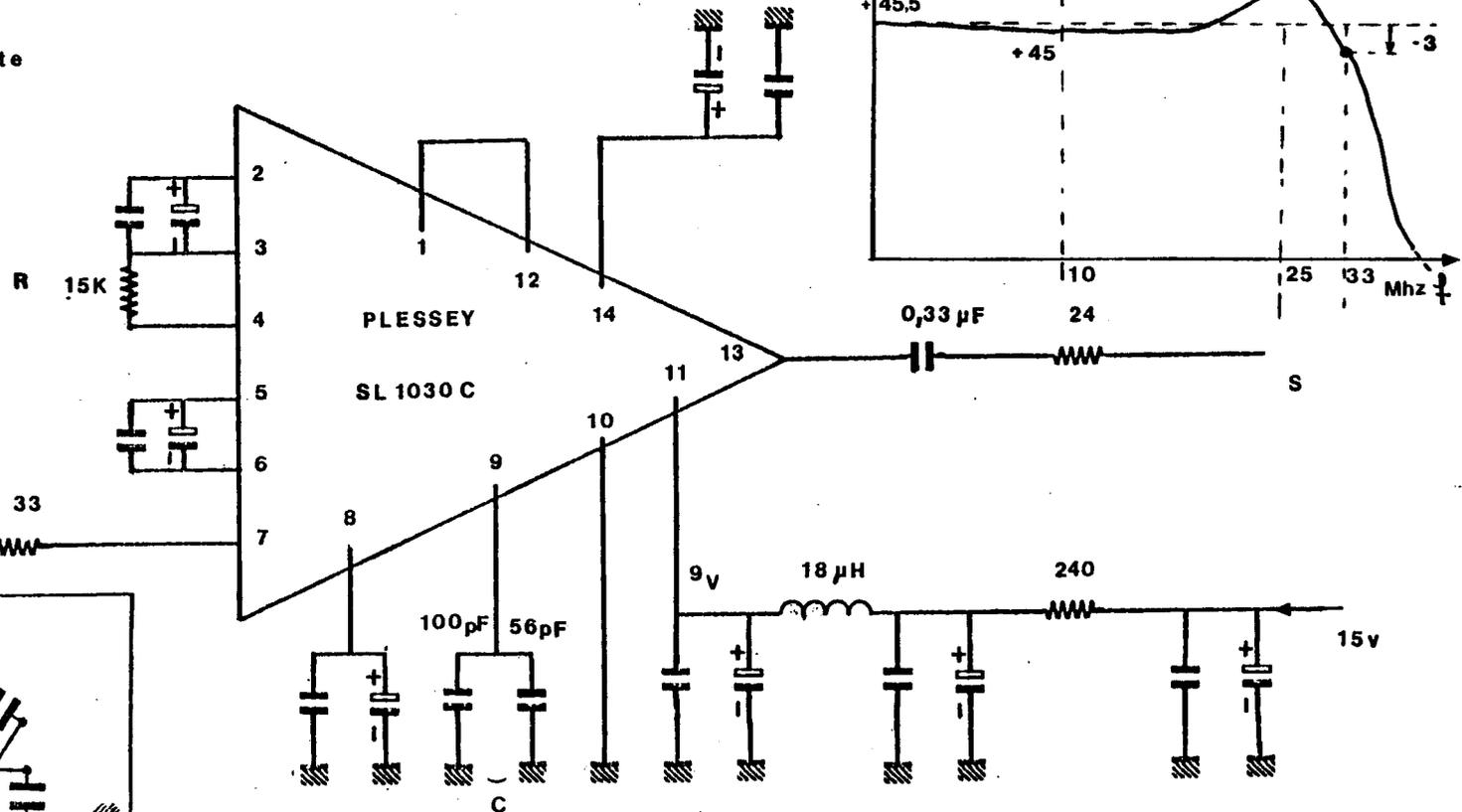


FIG. 18

# AMPLIFICATEUR D'ENTREE

Le produit R.C règle  
le gain et la bande passante

Bruit sortie = -82 dBm  
dans 30 KHz

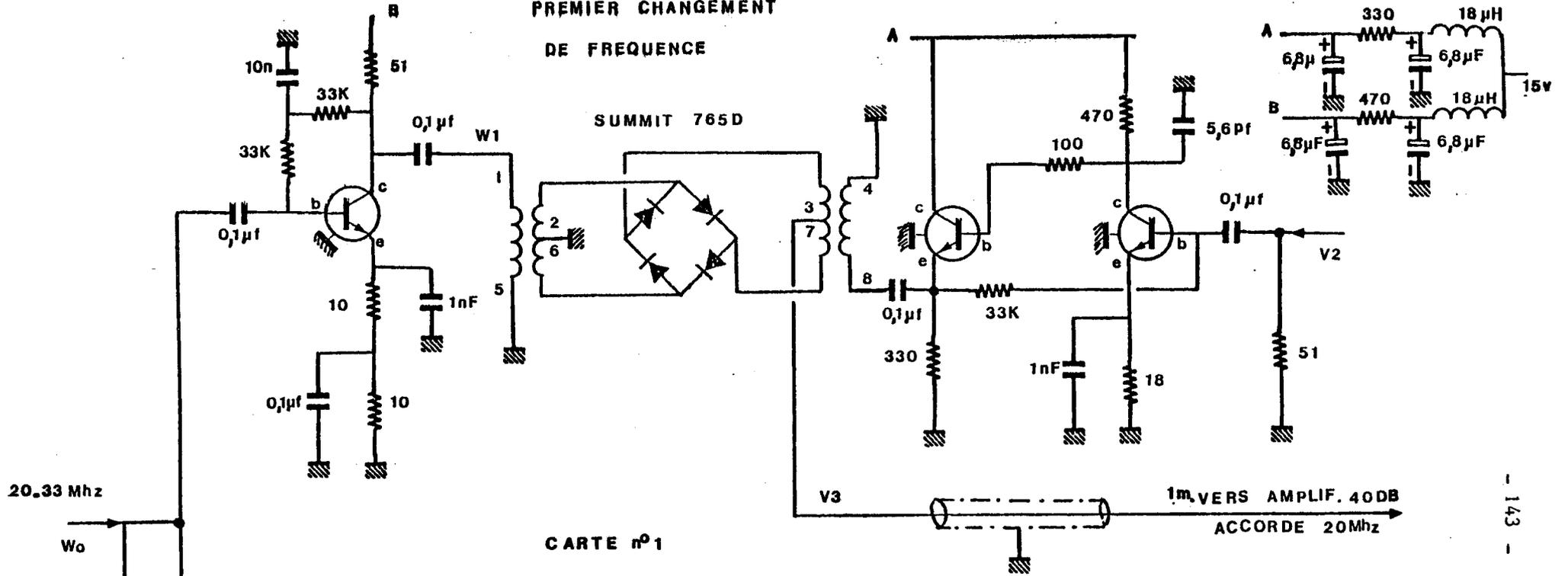


implantation

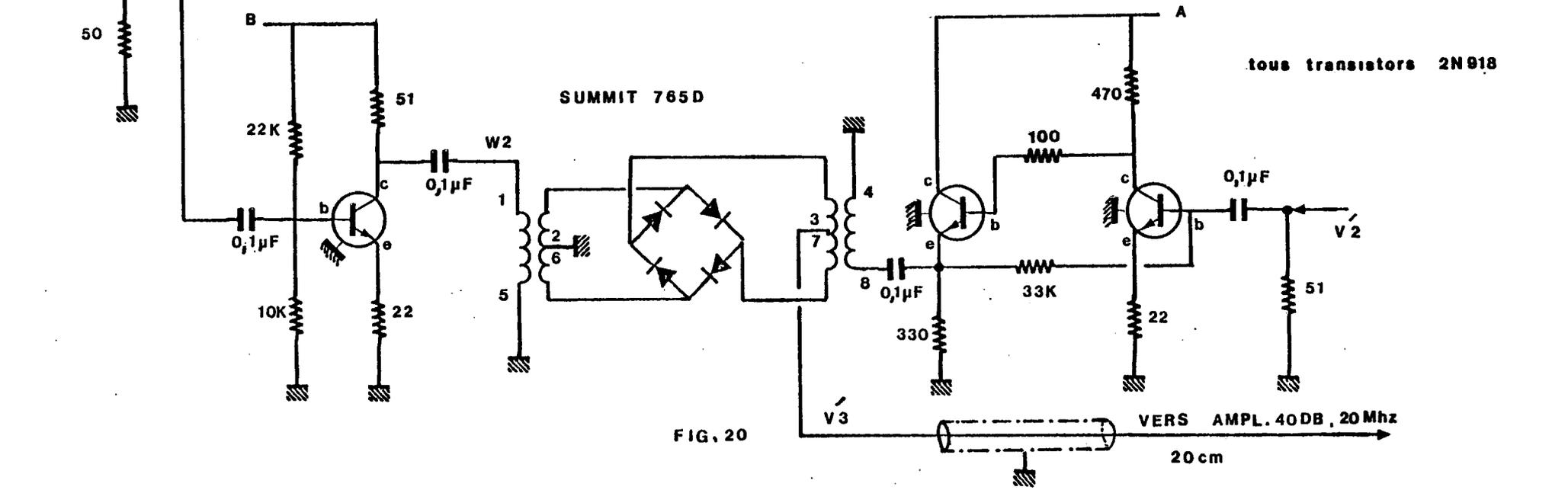
capacités non polarisées : 10 nF  
polarisées : 10 μF

FIG. 19

**PREMIER CHANGEMENT  
DE FREQUENCE**



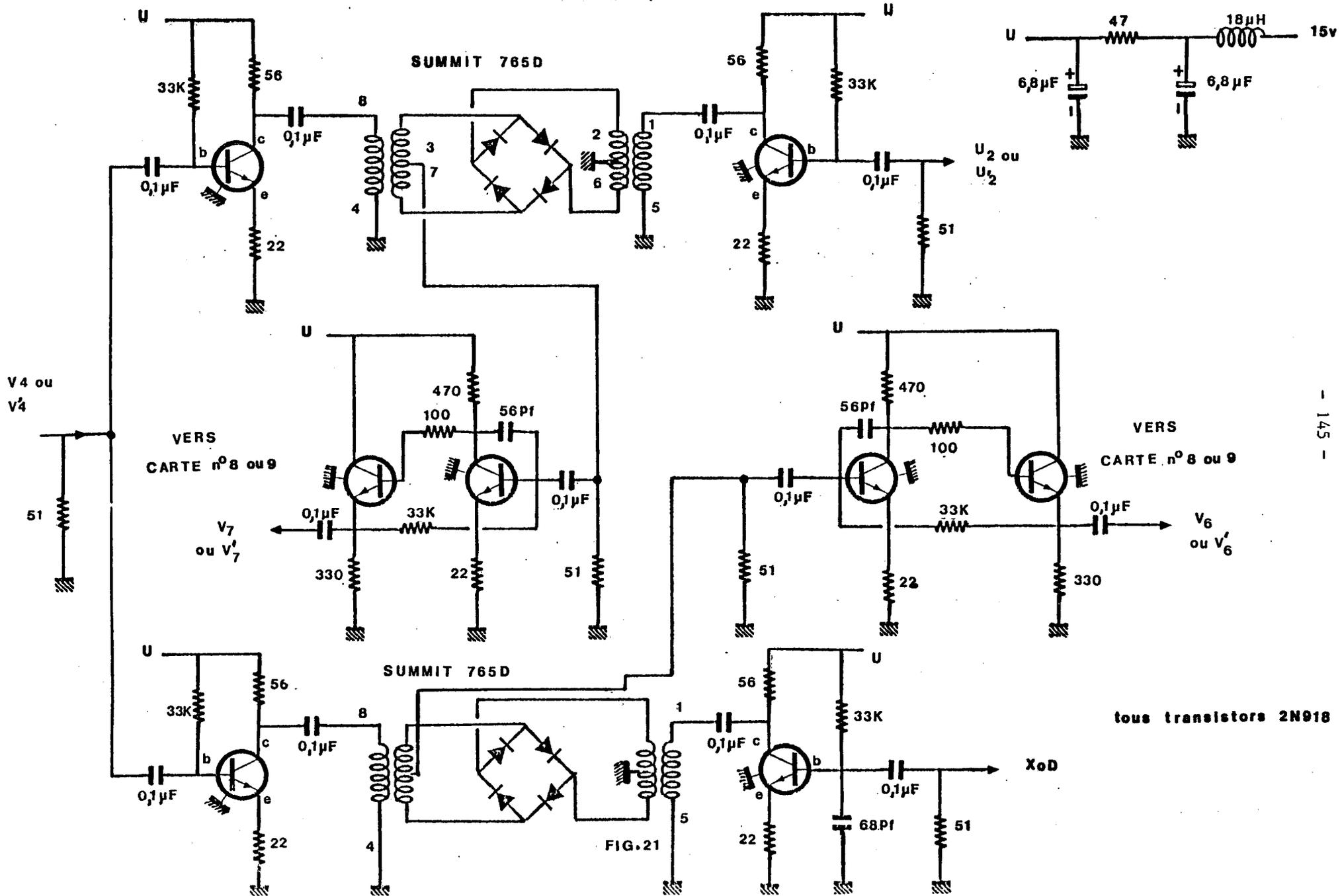
**CARTE n°1**



**FIG. 20**

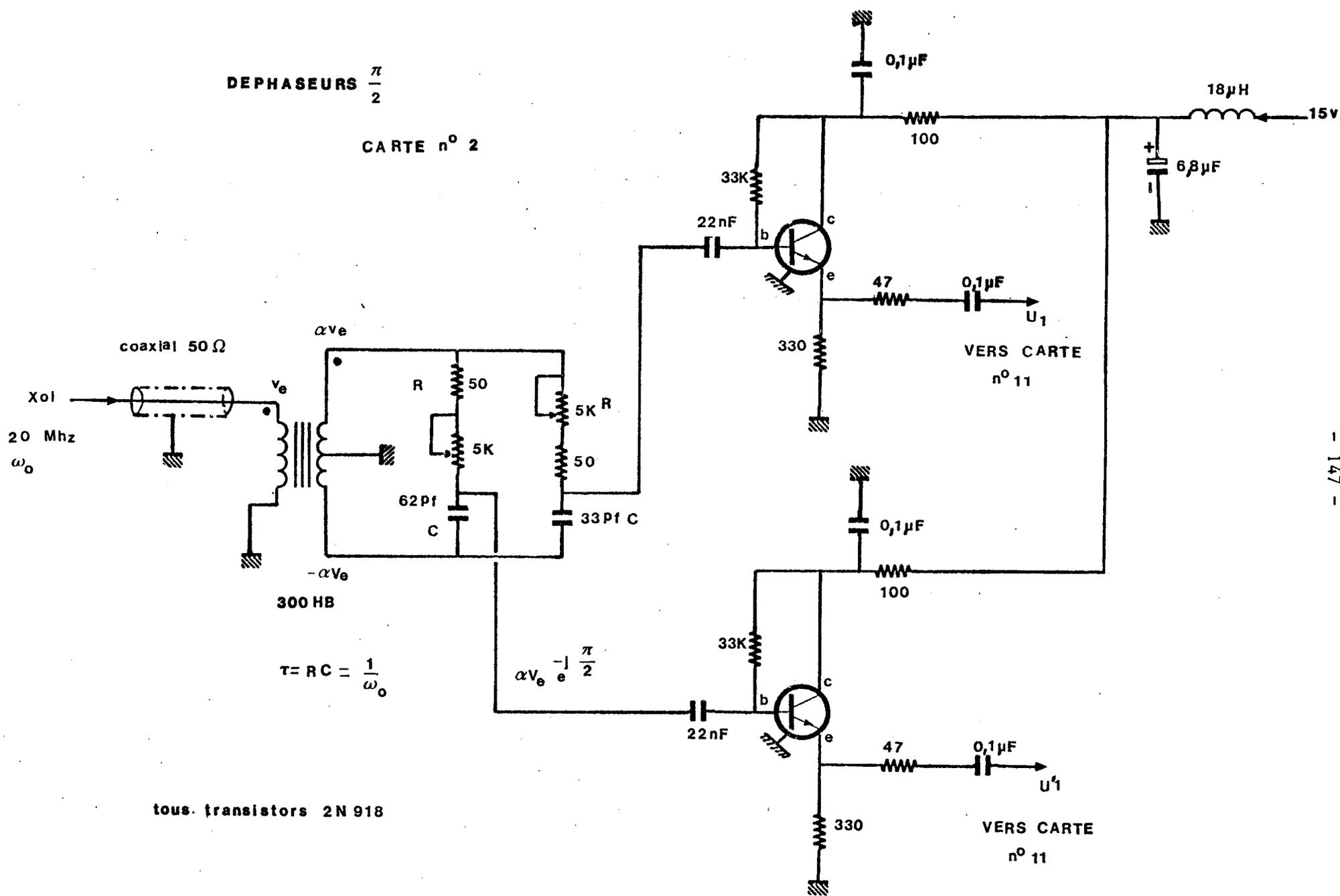
SECOND CHANGEMENT DE FREQUENCE

CARTE n°3 ou n°4



DEPHASEURS  $\frac{\pi}{2}$

CARTE n° 2



tous transistors 2N 918

FIG. 22

# AMPLIFICATEURS

## DES FILTRES 25KHz

CARTE n° 20

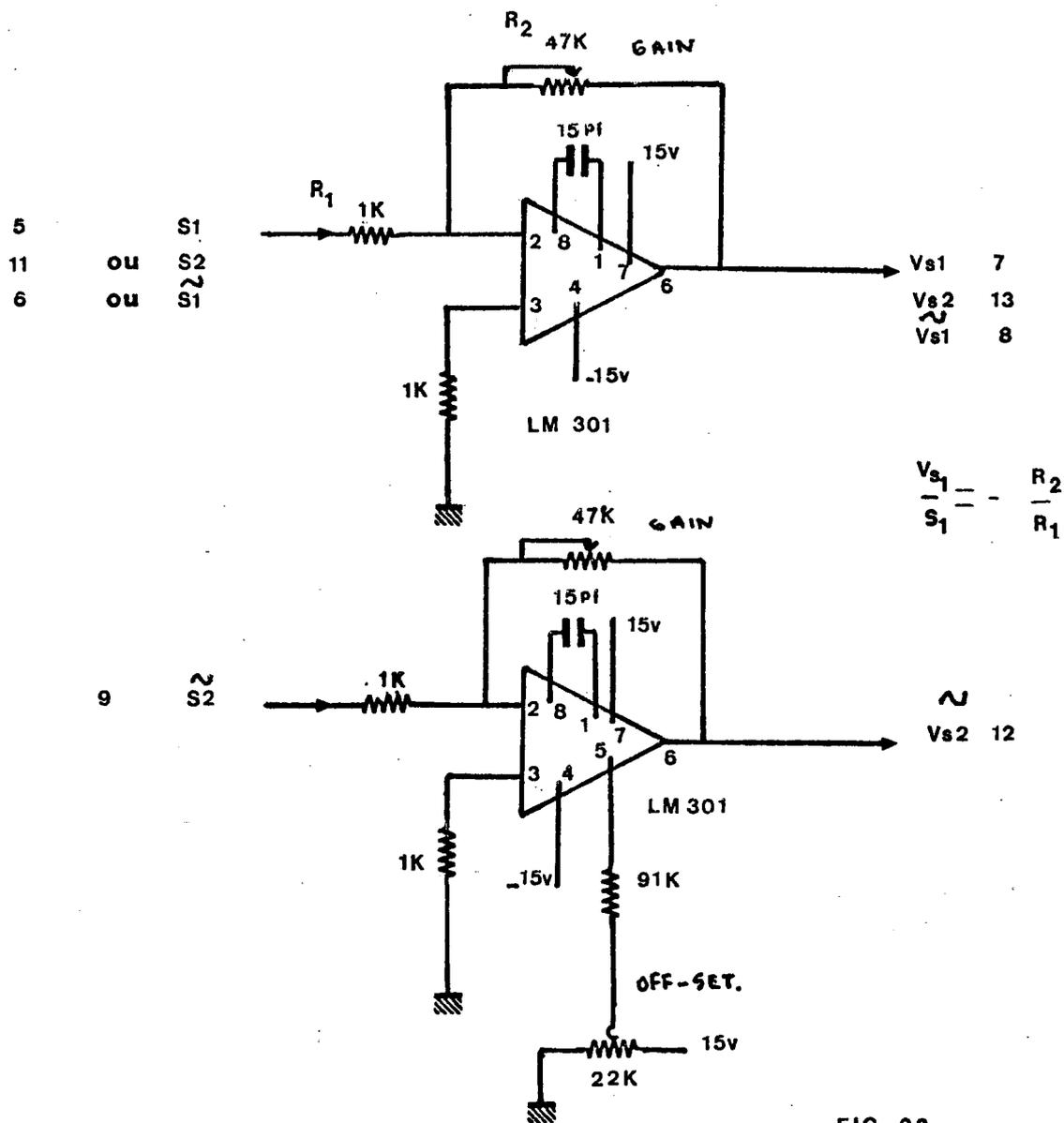
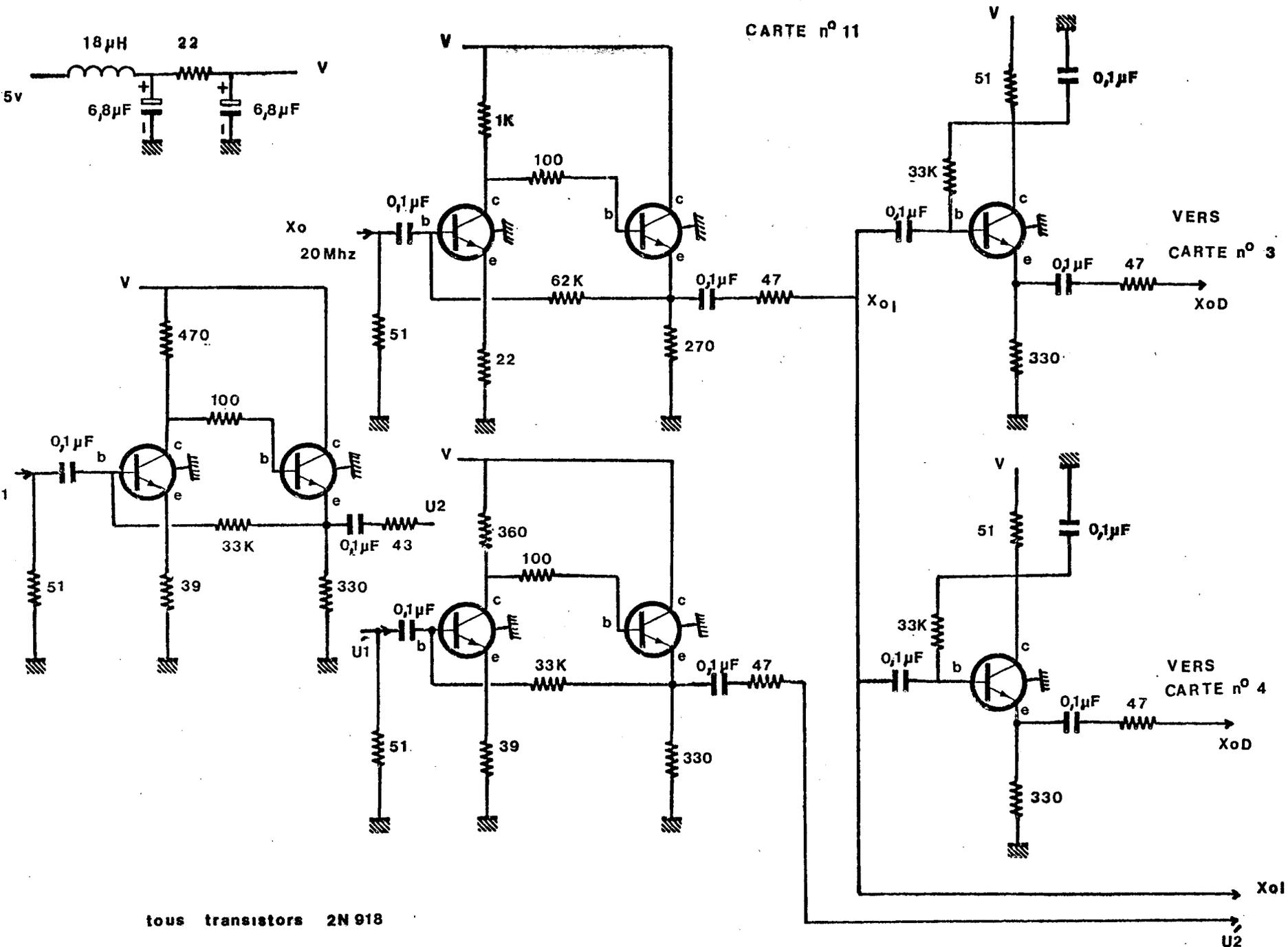


FIG. 23

AMPLIFICATEURS 50 OHMS

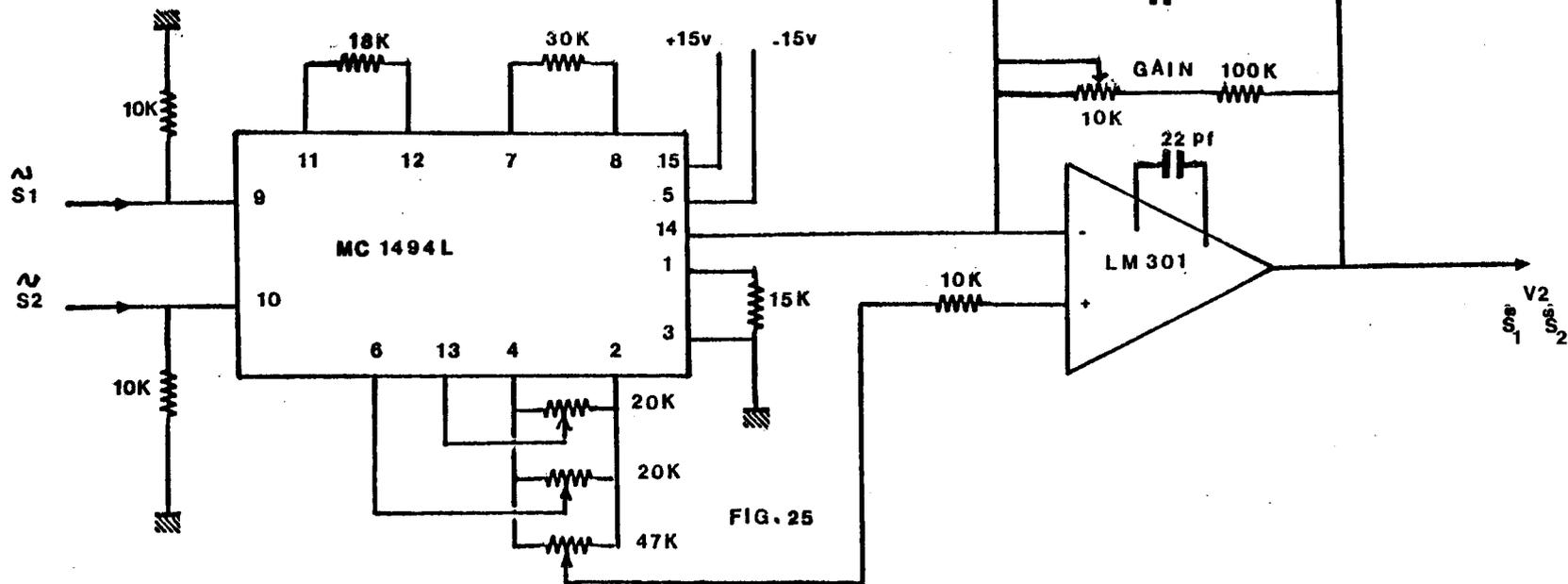
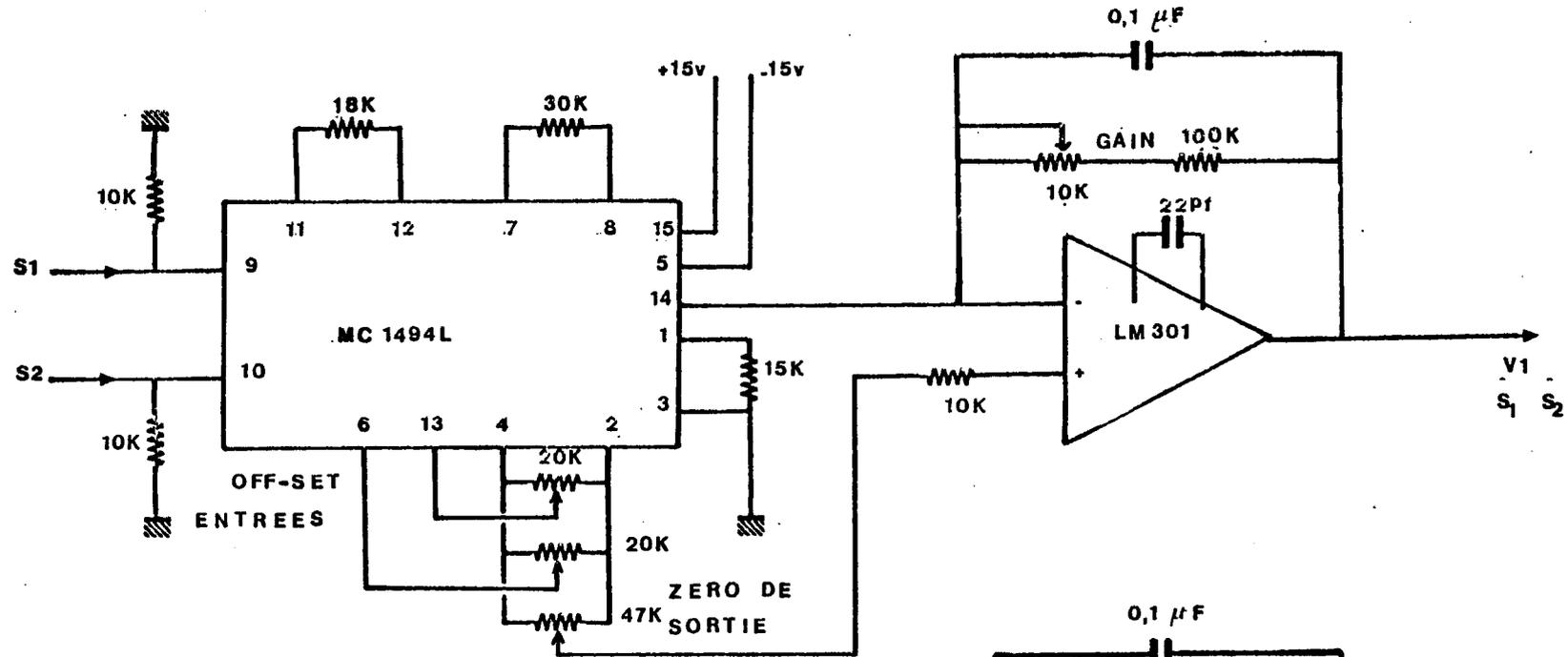
CARTE n° 11



tous transistors 2N 918

FIG. 24

MULTIPLICATEURS  
CARTE n° 14

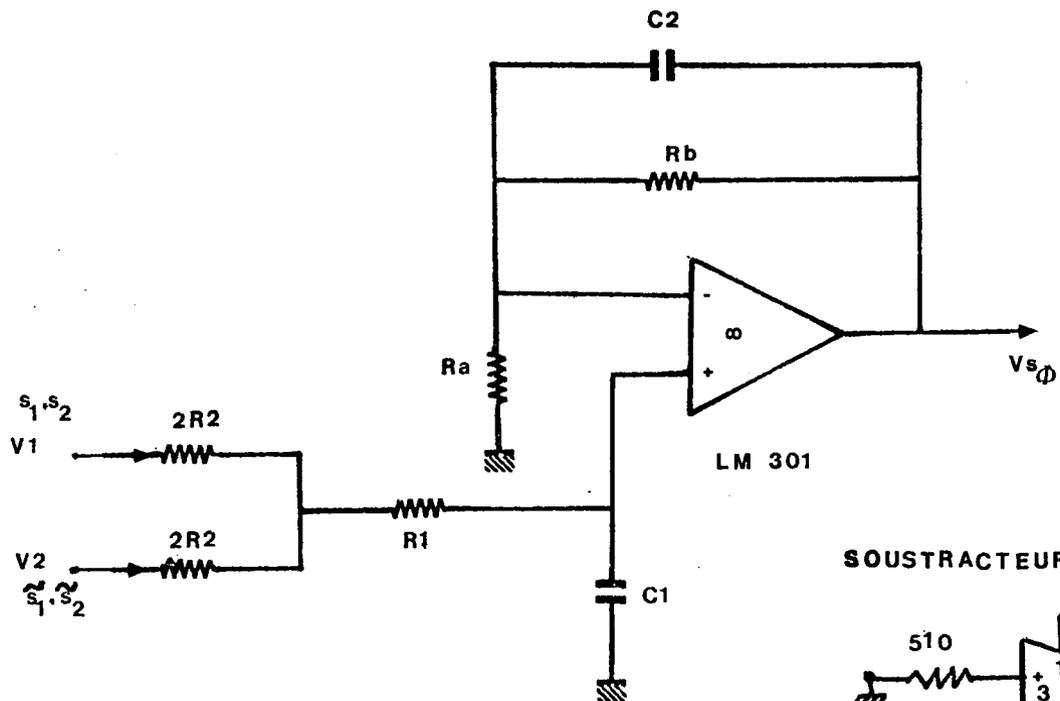


SOMMATEUR:

FILTRE 10Hz

6 DB

CARTE n° 20



$$R_a // R_b = R_1 + R_2 \text{ (off-set)}$$

$$\frac{R_a + R_b}{R_a} = 4$$

$$R_b = 3 R_a$$

$$C_1 = 4 C_2$$

$$V_{s\Phi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_a + R_b}{R_a} \cdot \frac{1 + \tau_2' p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \cdot (V_1 + V_2)$$

$$p = j\omega$$

- $2R_2 = 7,6 \text{ K}\Omega$
- $R_1 = 2,4 \text{ K}\Omega$
- $R_a = 13 \text{ K}\Omega$
- $R_b = 39 \text{ K}\Omega$
- $C_1 = 1,67 \mu\text{F}$
- $C_2 = 0,42 \mu\text{F}$

$$\tau_1 = (R_1 + R_2) C_1$$

$$\tau_2 = R_b C_2$$

$$\tau_2' = (R_a // R_b) C_2$$

SOUSTRACTEUR:

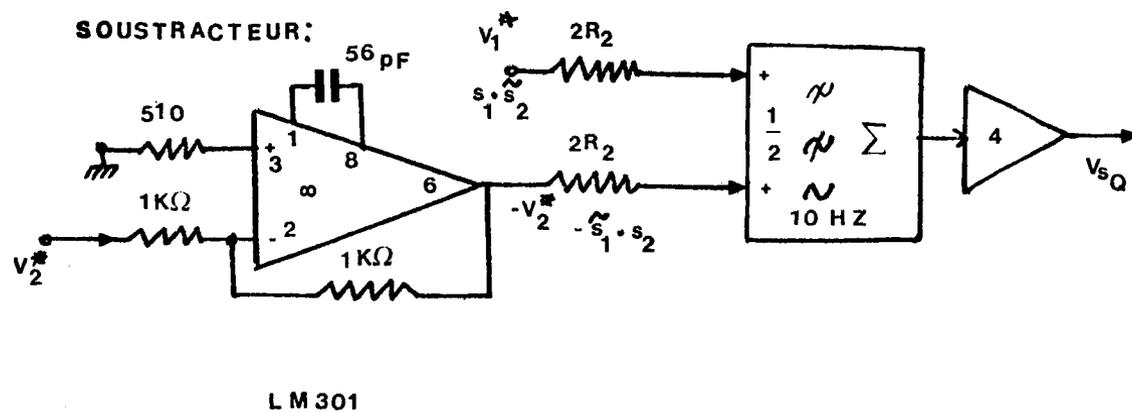
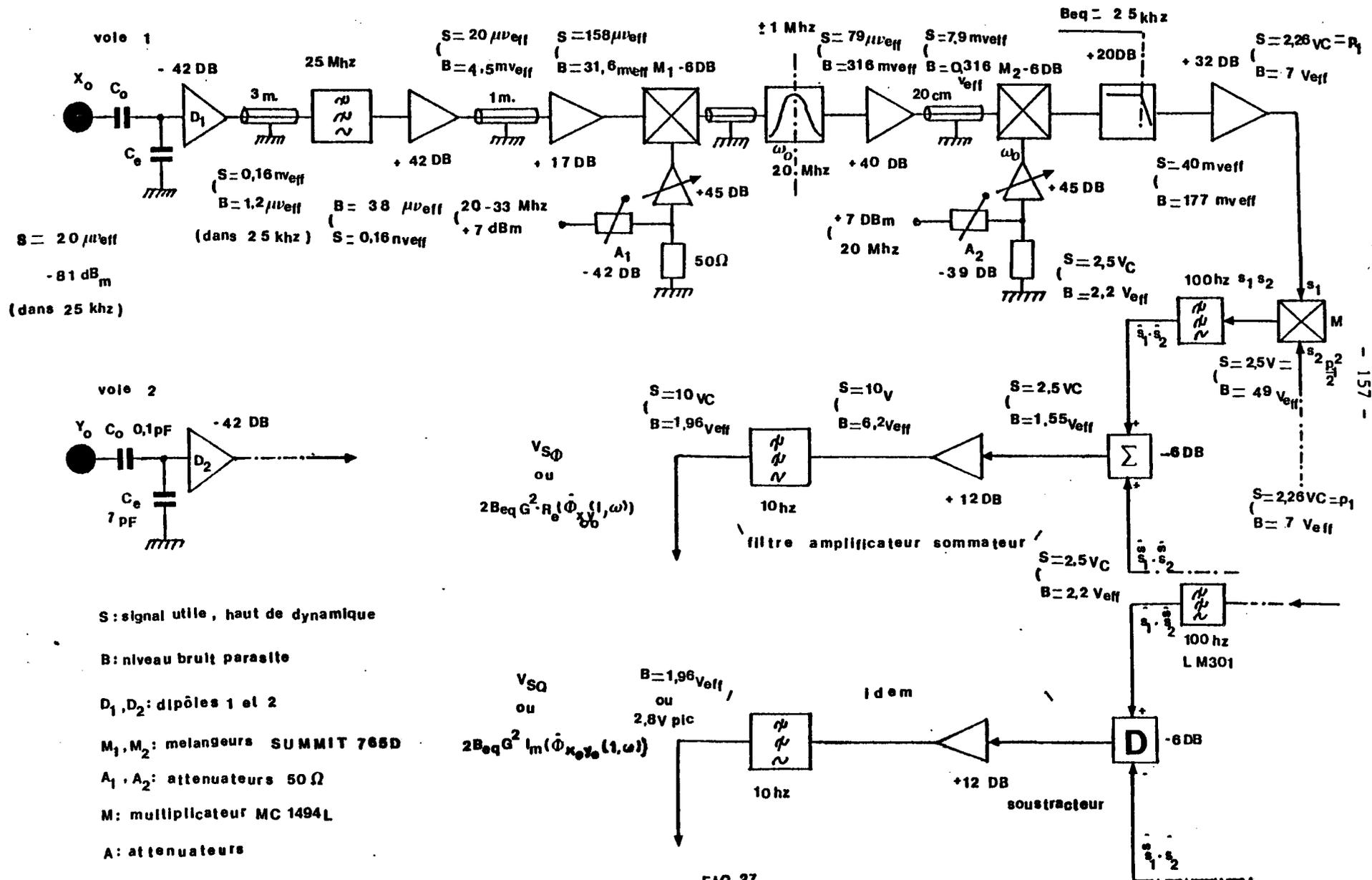


FIG. 26

VALEURS DES ELEMENTS  
DE LA CHAINE



- S: signal utile, haut de dynamique
- B: niveau bruit parasite
- $D_1, D_2$ : dipôles 1 et 2
- $M_1, M_2$ : mélangeurs SUMMIT 785D
- $A_1, A_2$ : atténuateurs  $50\ \Omega$
- M: multiplicateur MC 1494L
- A: atténuateurs

SCHEMA SYNOPTIQUE GENERAL DU CALCULATEUR

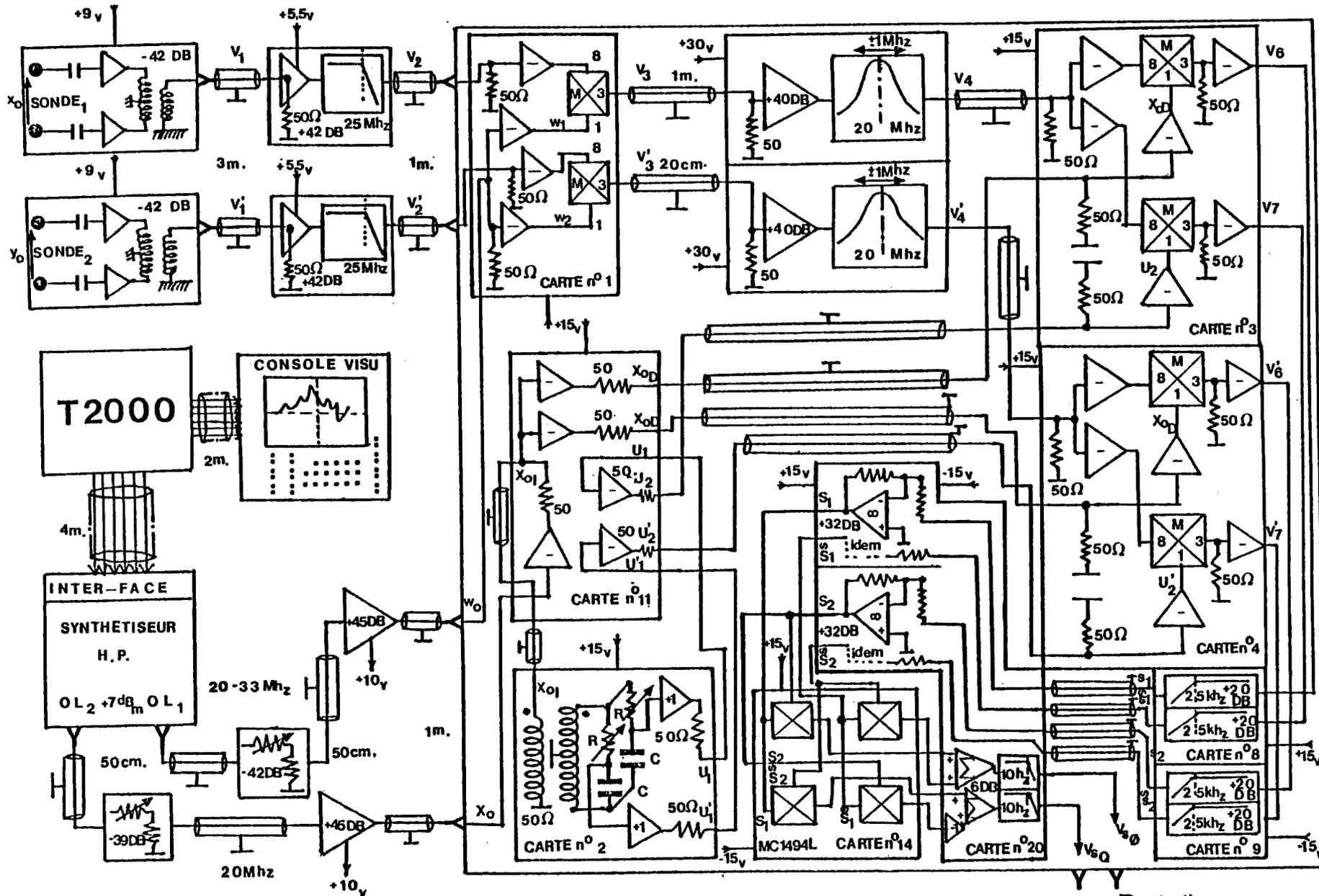


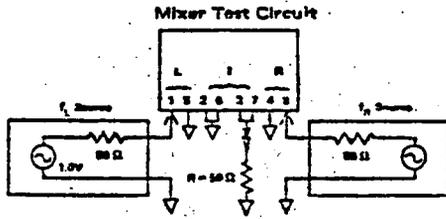
FIG. 28

$$I_m \phi_{x_0 y_0}(\omega, l) R_o \phi_{x_0 y_0}^{(\omega, l)}$$

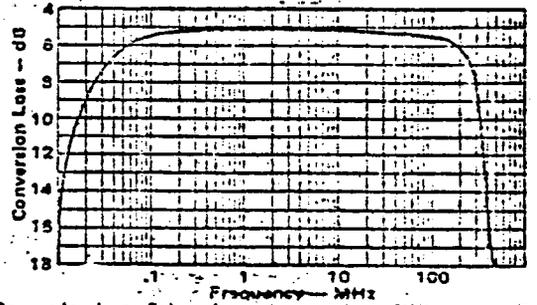
# DOUBLE-BALANCED MIXER



## TYPICAL PERFORMANCE AT 25°C.



When terminated as shown, the mixer impedance at the R- and I-ports is 50 ohms. The impedance at the L-port is non-linear and is a function of the  $f_L$  level. For most applications, the  $f_L$  level would be as shown. This is equivalent to delivering 5 milliwatts (+7 dBm) into a 50 ohm load.



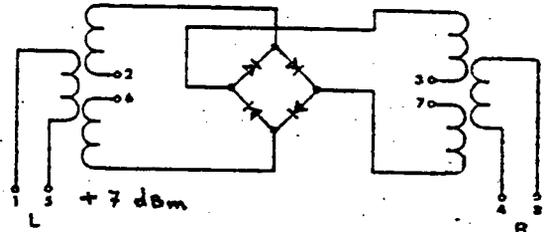
Conversion loss of the mixer when used in a SSB system. The frequency ordinate refers to the inputs  $f_L$  and  $f_R$  with  $f_L$  any frequency less than 500 MHz.

FIG. 29



.05 to 200 MHz

### SCHEMATIC



The I-port is formed by externally connecting pins 2 and 6 together and pins 3 and 7 together. Best performance is obtained by grounding the 2, 5 side.

### OUTLINE (dimensions in inches)

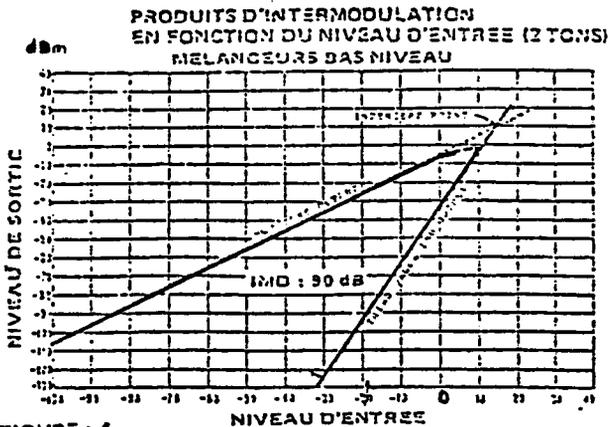
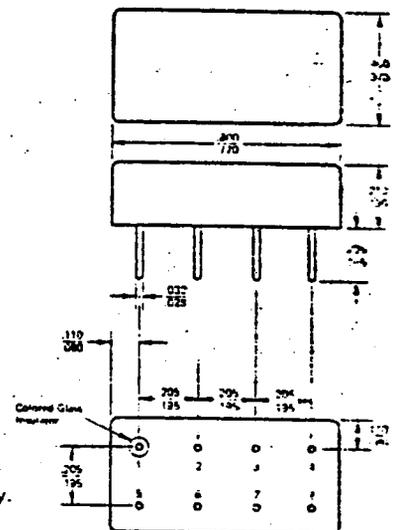
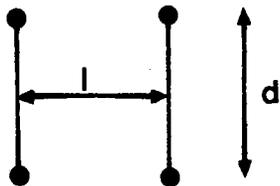
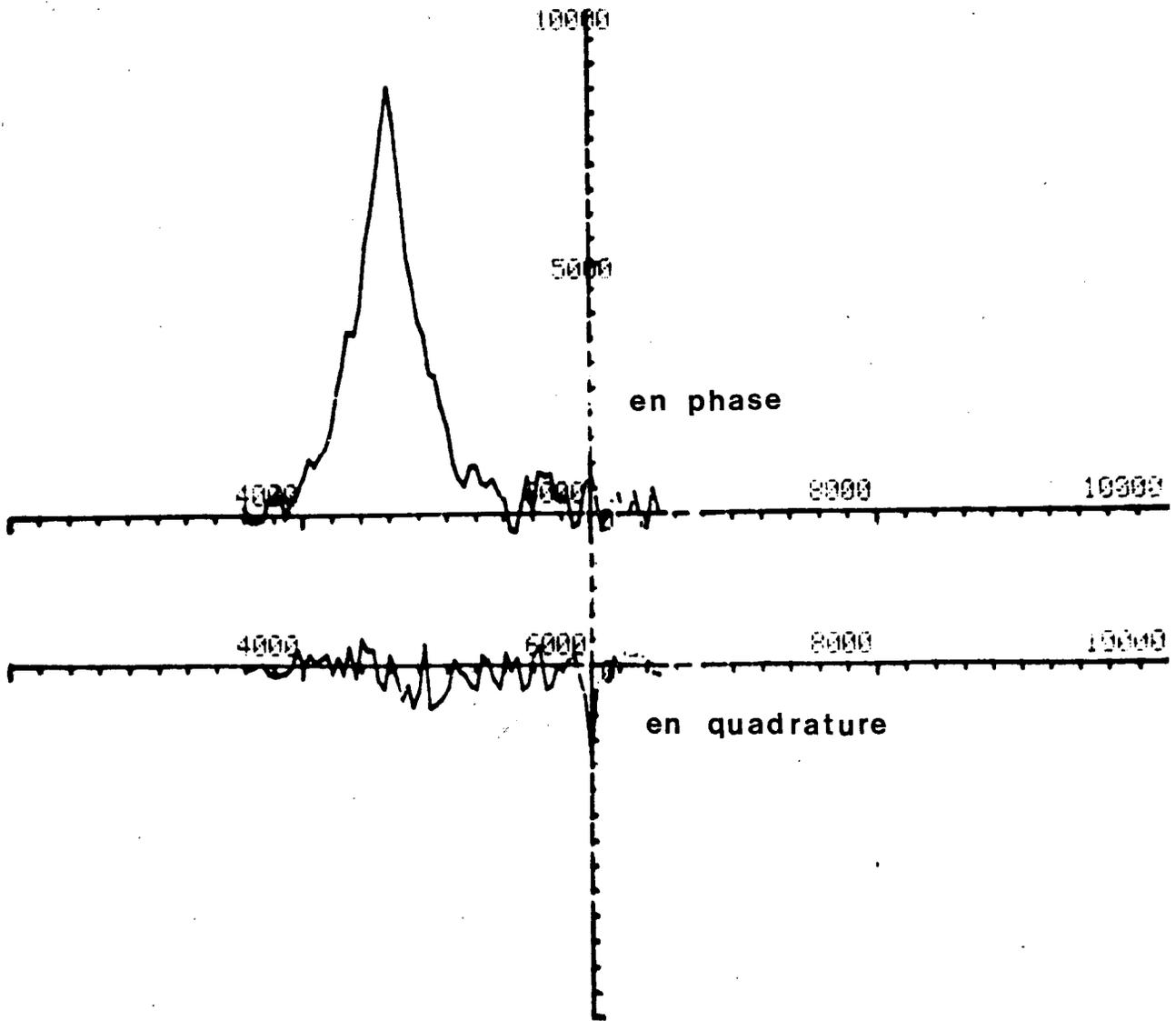


FIGURE : 4

Les caractéristiques indiquées sur cette courbe sont typiques des caractéristiques de transfert et d'intermodulation des mélangeurs TÈXELEC-AIRTRONIC Modèles 765 D. La courbe de pente 3/1 des produits d'intermodulation et la courbe de transfert théorique entrée/sortie de pente 1/1 se coupent au "point d'interaction". Ce point se trouve approximativement à +9 dBm, sur la courbe ci-dessus. Les mesures ont été faites avec un niveau d'oscillateur local de +7 dBm à 50 MHz, les signaux d'entrée à 20 et 22 MHz.

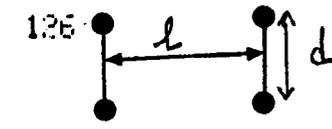


$l = d = 5,5 \text{ cm}$   
 $f_p = 4,6 \text{ MHz}$   
 $T_e = 980^\circ \text{ K}$

FIG. 30

2  
 000\*661  
 3500 6000 40 63 2  
 ESSAI CILE 23 7 76

$R_e \phi(\omega)$   
 $x_0 y_0$



$l = 10.5 \text{ cm}$      $d = 5.5 \text{ cm}$   
 $f_{p1} = 4.55 \text{ MHz}$      $f_{p2} = 4.8 \text{ MHz}$   
 $T_c = 1020^\circ \text{ K}$

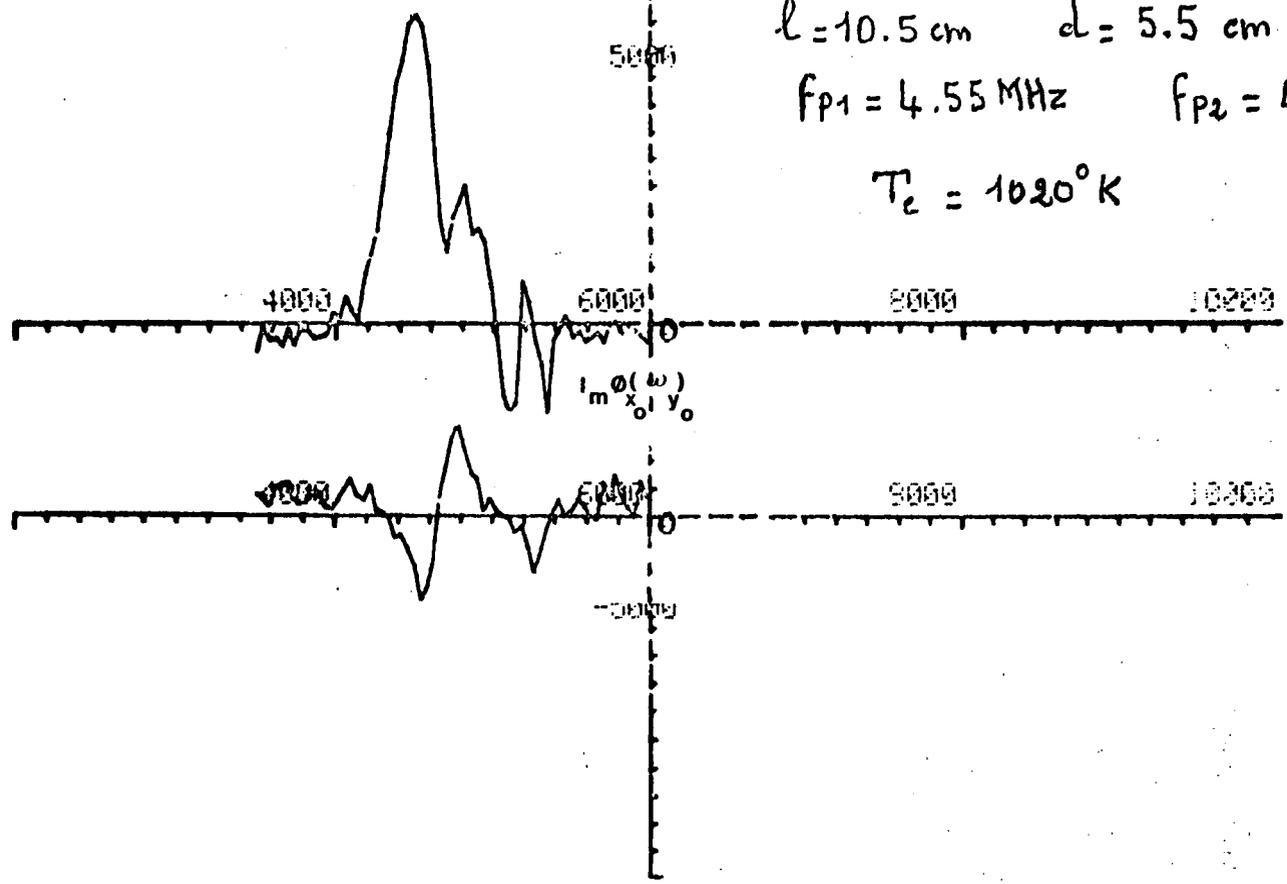


FIG. 31

0000\*262

Q. 3500 6500 40 76 10000 2

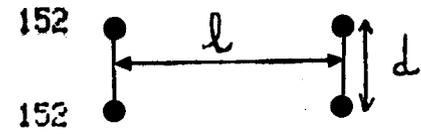
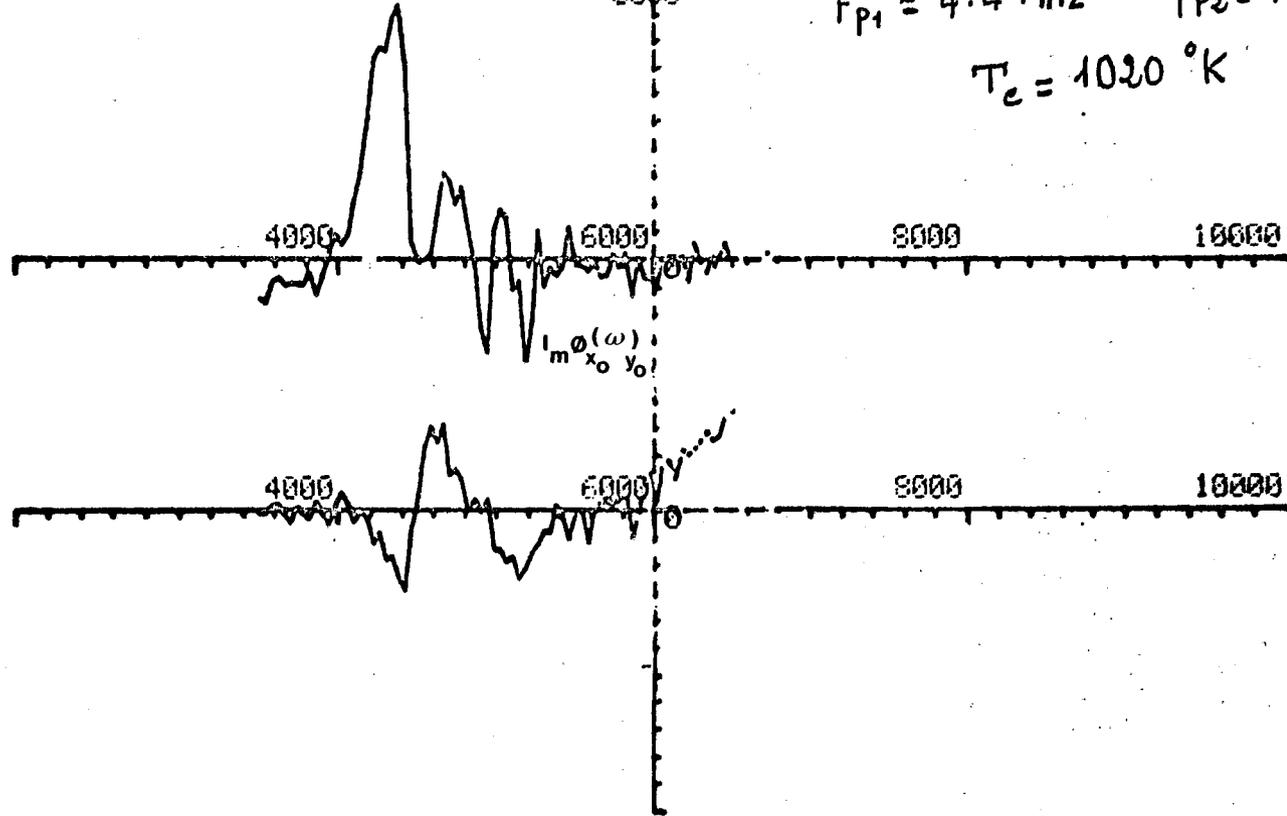
0000\*661

3500 6500 40 76 2

ESSAI DILE 23 7 76

$Re \phi_{x_0 y_0}(\omega)$

5000



$l = 15.5 \text{ cm}$      $d = 5.5 \text{ cm}$

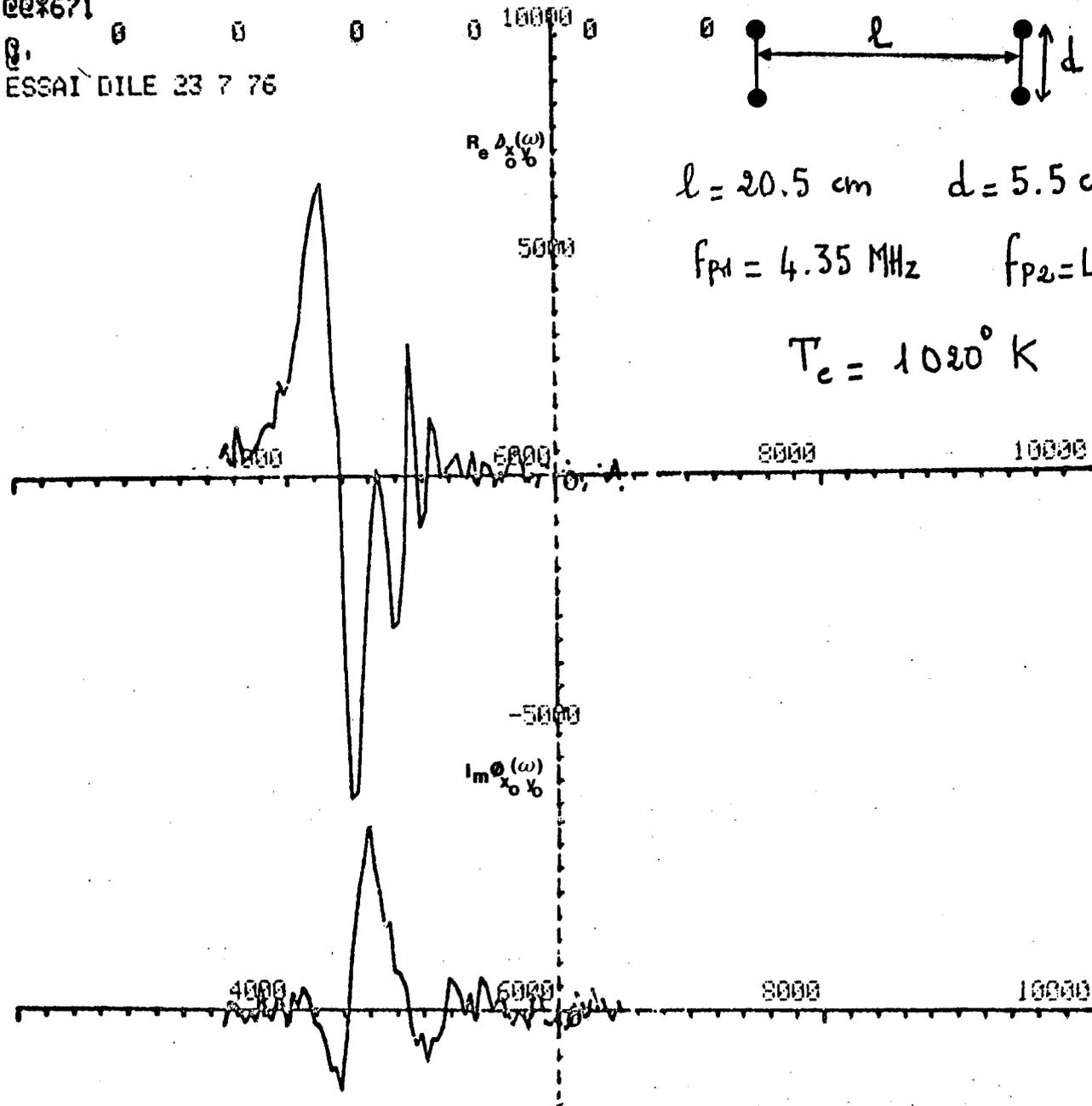
$f_{p1} = 4.4 \text{ MHz}$      $f_{p2} = 4.6 \text{ MHz}$

$T_c = 1020 \text{ }^\circ\text{K}$

FIG - 32

00x671

0 0 0 0 10000 0  
0.  
ESSAI DILE 23 7 76



$$l = 20.5 \text{ cm} \quad d = 5.5 \text{ cm}$$

$$f_{p1} = 4.35 \text{ MHz} \quad f_{p2} = 4.65 \text{ MHz}$$

$$T_c = 1020^\circ \text{ K}$$

FIG 33

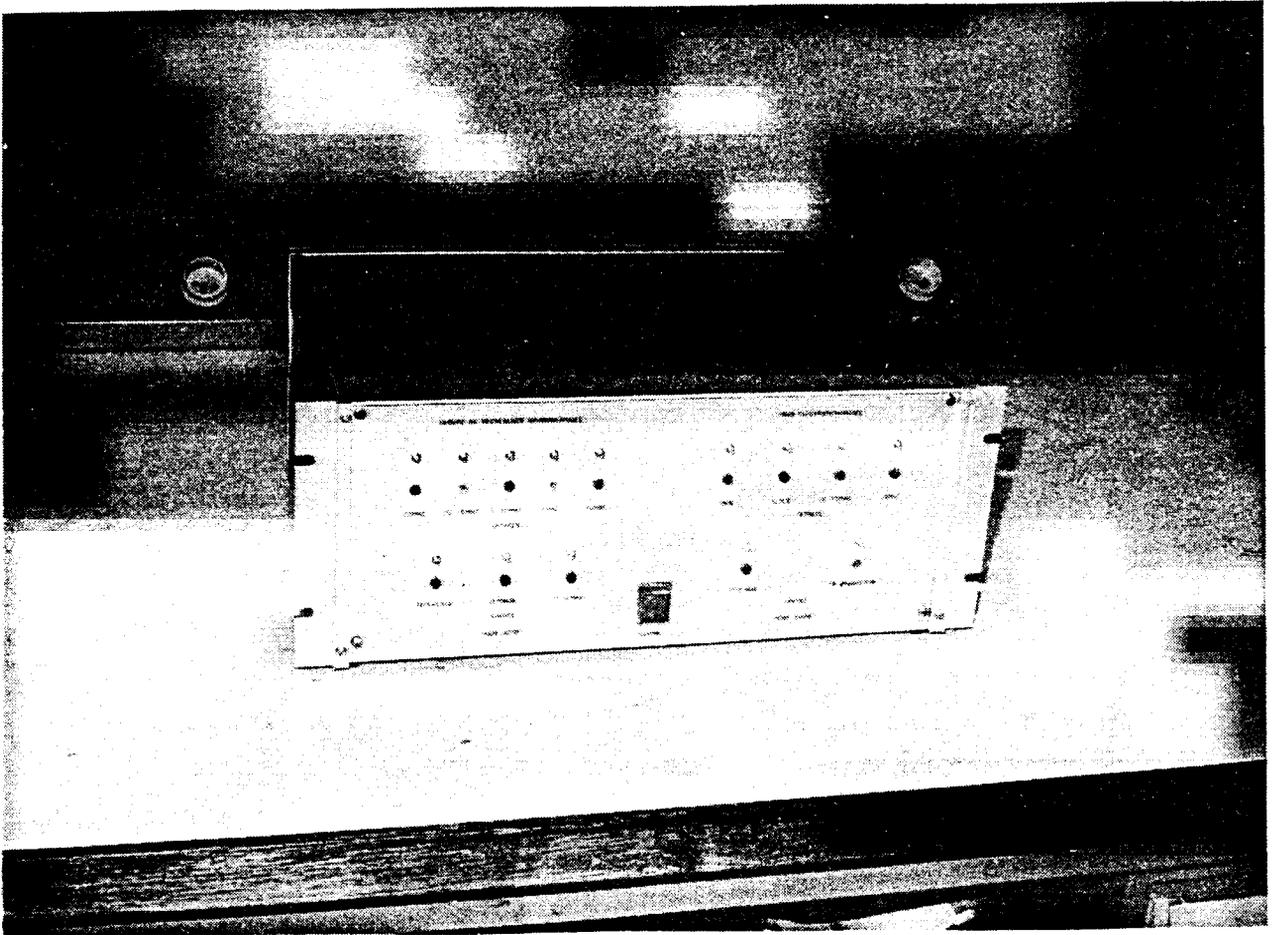


PHOTO 1

APPAREIL POUR SONDES A PLASMA

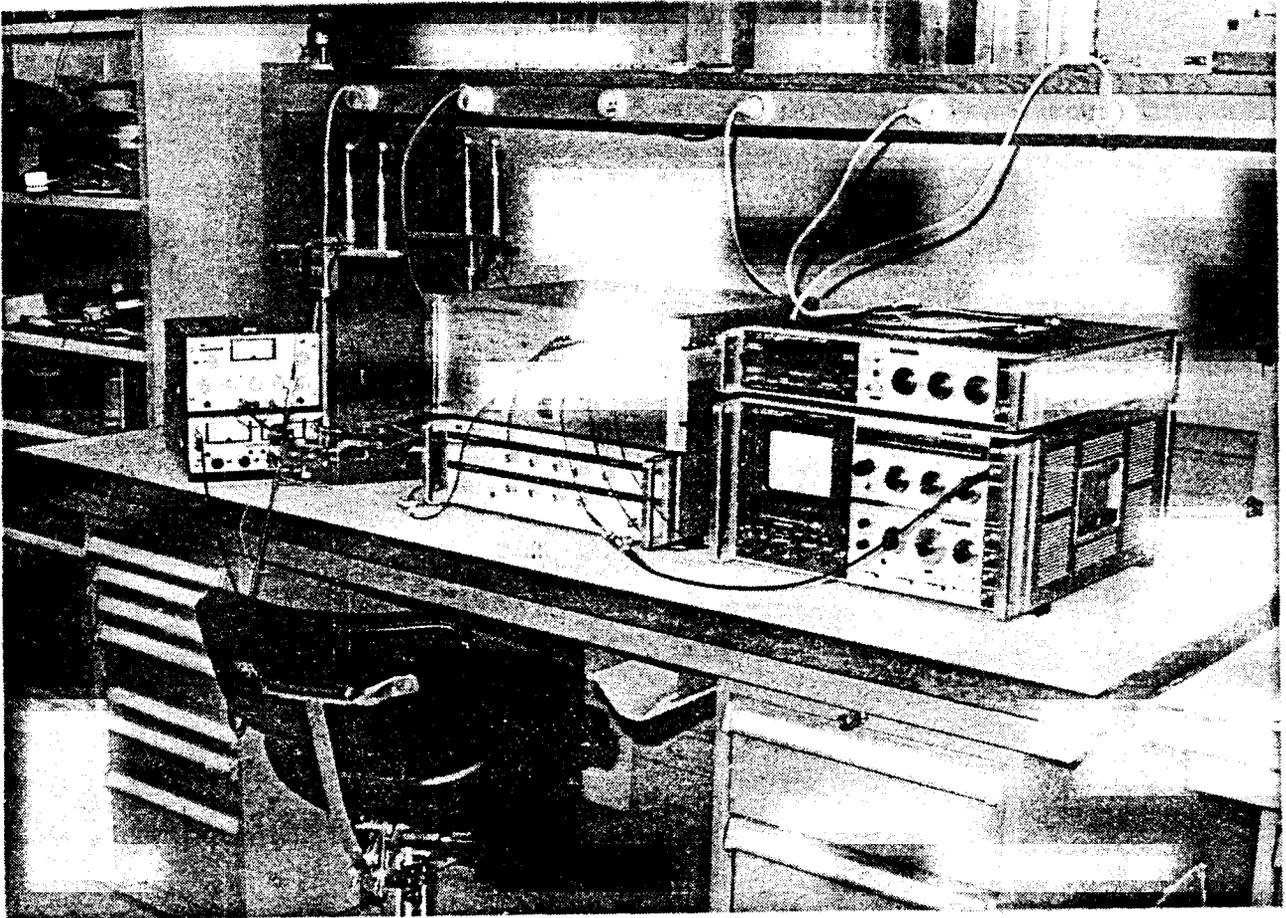


PHOTO 2

APPAREIL EN COURS D'ESSAI

BIBLIOGRAPHIE

- ARSAC, J., "Transformation de Fourier et théorie des distributions",  
Dunod, Paris, 1961.
- BENDAT, J. and PIERSOL, A., "Measurements and analysis of random data",  
John Wiley and Sons, 1966.
- BELL, H. and RIDEOUT, V. "A high speed correlator", Proc. IRE, Ec. 3,  
n° 2, pp. 30-36, June 1954.
- BROWN, W., "Analysis of linear time invariant systems", Mc. Graw Hill,  
New York, 1963.
- COWLEY, P., FANO, R. and B. BASORE, "Short-time correlator for speech  
waves", Technical Report n° 174, Laboratory of Electronics,  
M.I.T. 1951.
- CRAMER, H., "Mathematical methods of statistics", Princeton, 1946.
- FELLER, W., "An introduction to probability theory and its applications",  
second edition, John Wiley and Sons, New York, 1957.
- FAY, T.C., "Probability and its engineering uses", D. Van Nostrand Company,  
Princeton, 1928.
- GELFAND, I.M., CHILOV, G.E. et VILENKIN, N.Y., "Les Distributions", Dunod,  
Paris, 4 volumes, 1962, 1964, 1965, 1967.
- GOLBERG, R.R., "Fourier Transforms", Cambridge UN. Press, Cambridge, 1962.
- JAVID, M. and BRENNER, E., "Analysis transmission and filtering of signals",  
Mc. Graw Hill, N.Y. 1963.
- LEE, Y.W., "Statistical theory of communication", John Wiley and Sons,  
Inc., New York, 1960.

- LEE, Y.W., CHEATHAM, T.P. Jr and WIESNER, J.B., "Application of correlation analysis to the detection of periodic signals in noise", Proc. IRE, 38, 1165-1171, 1950.
- MAX, J., "Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques", Masson et Cie, Paris, 1972.
- MOOD, A.M., "Introduction to the theory of statistics", Mc. Graw Hill Book Company, New York, 1950.
- PAPOULIS, A., "The Fourier integral and its applications", Mc. Graw Hill, New York, 1962.
- REINTJES, J.F., "An analogue electronic correlator", Proc. NEC. 7, 390-400, 1951.
- ROUBINE, E., "Introduction à la théorie de la communication", Masson et Cie, Paris, 1970.
- SCHWARTZ, L., "Théorie des distributions", Hermann, Paris, 1966.
- STEWART, J., "Fundamentals of signal theory", Mc Graw Hill, New York, 1960.
- TITCHMARSH, E.C., "Introduction of the theory of Fourier integrals", Clarendon Press, Oxford, 1948.
- USPENSKY, J.V., "Introduction to mathematical probability", Mc Graw Hill Book Company, New York, 1937.
- WIENER, N., "The Fourier integral and certain of its applications", Doyer, New York, 1933.
- WIENER, N., "The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications", John Wiley and Sons, New York, 1949.
- ZIMANIAN, A.H., "Distribution theory of transform analysis", Mc Graw Hill, New York, 1965.

FREESTON, I.L., POTTELETTE, R., STOREY, L.R.O., "Diagnostic de plasmas hors d'équilibre au moyen de mesures du microchamp aléatoire", Note Technique CRPE/13, Novembre 1975.

POTTELETTE, R., "Méthodes actives et passives de diagnostic de plasma hors d'équilibre au moyen d'une sonde quadripolaire. Application aux plasmas spatiaux", Thèse de Doctorat ès Sciences soutenue le 3 Mai 1977, Université de Paris VI.

PUN, LUCAS, "Phénomènes aléatoires en physique", cours à l'E.N.S.E.R.B., Edition 1972.

De CARFORT, F., FOULARD, C., "Asservissements linéaires continus" maîtrise d'E.E.A. C3 automatique Dunod Université.

VALENTIN, F., BOUSSEAU, G., "Circuits et dispositifs électroniques" Maîtrise d'E.E.A. C3 électronique Dunod Université.

SEVELY, Y., "Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés" Maîtrise d'E.E.A. C3 automatique Dunod Université.

**CRPE**  
*Centre de Recherches  
en Physique de l'Environnement  
terrestre et planétaire*

*Avenue de la Recherche scientifique  
45045 ORLEANS CEDEX*

**Département PCE**  
*Physique et Chimie  
de l'Environnement*

*Avenue de la Recherche scientifique  
45045 ORLEANS CEDEX*

**Département ETE**  
*Etudes par Télédétection  
de l'Environnement*

*CNET - 38-40 rue du général Leclerc  
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX*