



**HAL**  
open science

# Effet de dérive sur les oscillations forcées d'un plasma de Vlasov

Gérard Mourgues

► **To cite this version:**

Gérard Mourgues. Effet de dérive sur les oscillations forcées d'un plasma de Vlasov. [Rapport de recherche] Note technique CRPE n° 39, Centre de recherches en physique de l'environnement terrestre et planétaire (CRPE). 1977, 195 p. hal-02191364

**HAL Id: hal-02191364**

**<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02191364>**

Submitted on 23 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

182 (17)  
CENTRE NATIONAL D'ETUDES  
DES TELECOMMUNICATIONS

CENTRE NATIONAL DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

RA  
CENTRE DE  
RECHERCHES  
EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT  
TERRESTRE  
ET PLANETAIRE

**CRPE**

NOTE TECHNIQUE  
CRPE / 39



*Effet de dérive  
sur les oscillations forcées  
d'un plasma de Vlasov*

par

G. MOURGUES

17 MAI 1977

CENTRE DE RECHERCHE EN PHYSIQUE DE  
L'ENVIRONNEMENT TERRESTRE ET PLANETAIRE

NOTE TECHNIQUE CRPE/39

EFFET DE DERIVE SUR LES OSCILLATIONS FORCEES D'UN PLASMA DE VLASOV

par

Gérard MOURGUES

C.R.P.E./P.C.E.

45045 - ORLEANS CEDEX

Le Chef du Département P.C.E.



C. BEGHIN

P. Le Directeur



J. HIEBLOT

<u>SOMMAIRE</u>	PAGES
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>NOTATIONS</u>	5
<u>CHAPITRE UN : HYPOTHESES ET FORMULATION DU PROBLEME</u>	7
I.1. Les hypothèses	7
I.2 Rappel sur la linéarisation du système Vlasov Poisson et sur le traitement de Landau	8
I.3 Le modèle multiple Water Bag ou relation de dispersion discretisée avec figuration explicite de la dérive	10
I.4 Normalisation des variables	12
I.5 Le modèle Hydrodynamique	14
<u>CHAPITRE DEUX : TOPOLOGIE DES POLES ET BRANCHES DE DISPERSION DU-MODELE</u>	17
II.1 Quelques considérations relatives au graphe de la fonction diélectrique $\epsilon(k)$	17
II.2 Recherche des racines de $\epsilon(k)$ et branches de dispersion	22
a) principe	22
b) étude du cas d'un modèle à 3 "bags"	32
c) étude du cas d'un modèle à 100 "bags"	52
<u>CHAPITRE TROIS : CALCUL TRADITIONNEL DU CHAMP FORCE</u>	55
Introduction	55
III.1 Calcul des résidus des divers pôles et calcul formel du champ	55
III.2 Discontinuité du champ à l'origine dans le cas d'une excitation monopolaire	59
a) cas où tous les pôles sont simples	59
b) cas où il existe un pôle double	60
c) convergence des coefficients d'excitation de deux pôles simples "encadrant" un pôle double	62
III.3 Détermination de la nature amont-aval des pôles simples	62
III.4 Calcul du champ monopolaire pour des fréquences ne donnant que des pôles simples	64

<u>CHAPITRE QUATRE : EQUIVALENCE DE LA RELATION DE DISPERSION DU MODELE MWB AVEC CELLE DU CAS CONTINU, UTILISATION CORRECTE DE LA RELATION DE CAUSALITE</u>	67
IV.1 Construction d'un "infini Water Bag" approxi- mant une maxwellienne "dérivant" à la vitesse $V_D$	67
IV.2 Equivalence de la fonction diélectrique du Water Bag avec celle du cas continu	68
IV.3 Calcul du champ respectant la condition d'équi- valence du modèle MWB avec celui du modèle continu	72
a) étude numérique du déplacement des pôles	72
b) variation de l'excitation pour des $\nu$ petits mais non infinitesimaux	80
 <u>CHAPITRE CINQ : RESULTATS PHYSIQUES THEORIQUES ET VERIFICATION EXPE RIMENTALE OBTENUE EN CAISSON</u>	 91
V.1 Interprétation qualitative du champ théorique monopolaire et dipolaire relatif à une distribution maxwellienne "en dérive"	91
V.2 Résultats expérimentaux	104
1) description du plasma	104
2) excitation des ondes électrostatiques	105
3) détection des ondes électrostatiques	105
a) méthode interférométrique	106
b) détection quadratique par analyseur de spectre	106
c) exploitation des résultats	108
4) diagramme de dispersion obtenu	109
 <u>CONCLUSION</u>	 115
<u>REFERENCES</u>	117
<u>ANNEXE 1 :</u>	119
a) programme FORMAC relatif à un modèle à 3 "bags" et les résultats algébriques	120
b) programme général de calcul du champ par un modèle à N "bags"	122
 <u>ANNEXE 2 : Ensemble de courbes de champs monopolaires puis dipolaires pour diverses valeurs de dérive et de fréquences</u>	 
a) excitation monopolaire	146
b) excitation dipolaire	181

## INTRODUCTION

Ce travail s'insère dans le thème d'un contrat D.R.M.E. intitulé "recherche de méthodes de diagnostic des plasmas hors d'équilibre par la propagation d'ondes électroniques longitudinales". Une direction de départ de cette recherche est l'étude des oscillations électrostatiques longitudinales d'un plasma en dérive, étude devant permettre d'effectuer par la suite celle du sillage créé par le déplacement d'un engin dans le plasma ionosphérique.

La détermination des paramètres physiques caractéristiques du plasma ionosphérique s'effectue souvent par sondage radio-fréquence, et de nombreux travaux tant théoriques qu'expérimentaux ont été menés par diverses équipes au C.R.P.E. (FEIX, STOREY, BEGHIN, HENRY) et à polytechnique (BUZZI...)

La tendance actuelle consiste à utiliser deux antennes distantes de quelques dizaines de longueurs de Debye dont l'impédance mutuelle dépendra des caractéristiques du milieu. Cela conduit à étudier tout particulièrement les ondes électrostatiques longitudinales dont la théorie, dans le cas maxwellien homogène est maintenant bien connue. Sont moins bien connus par contre les problèmes de plasmas homogènes non maxwelliens (HENRY & TREGUIER (1975) et (1976)), bien que des méthodes générales d'étude existent (BUZZI (1971)) et demandent simplement pour leur mise en oeuvre, la mesure expérimentale de la fonction de distribution. Sont encore moins bien connus les problèmes de plasmas inhomogènes (SYMON (1974) et TROTIGNON (1976)). Se pose finalement le problème inverse consistant à déduire une fonction de distribution électronique à partir d'une expérience de propagation d'onde. Le travail qui suit contribue à ce type de problème en montrant qu'un simple effet de dérive de plasma maxwellien homogène modifie de façon nette les branches de dispersion du milieu en donnant une signature typique de cet effet. Notons d'autre part qu'une telle étude trouve son application dans les expériences spatiales où il y a mouvement relatif du milieu par rapport aux sondes portées par une fusée ou un satellite.

Le travail théorique qui suit, et qui se propose d'étudier systématiquement l'effet d'un mouvement de dérive sur les oscillations longitudinales forcées d'un plasma de Vlasov, a fait l'objet conjointement, dans le cadre du contrat D.R.M.E., d'une étude expérimentale menée par HENRY et LAFAILLE, source de nombreuses et intéressantes discussions.

Le cadre de l'étude théorique sera le suivant :

La source excitatrice sera supposée plane infinie;

L'hypothèse Vlasov sera réaliste puisque le facteur de "grain" de l'ionosphère est de l'ordre de  $10^{-9}$ ;

Le traitement du problème sera linéaire, et la fréquence excitatrice sera prise suffisamment grande (de l'ordre de la fréquence plasma) pour ne pouvoir considérer que la population électronique. Le plasma dérivera de façon uniforme dans une direction perpendiculaire à la source. Se pose alors le problème du choix du traitement : Un traitement "plutôt" analytique des oscillations forcées présente une difficulté importante due au fait que la fonction diélectrique du milieu n'est pas analytique, or celle-ci figure au dénominateur de l'intégrant de la réponse spatiale du plasma qui est donnée sous forme de transformée de Fourier inverse. Le calcul de cette intégrale par une méthode de résidus nécessite donc une prolongation analytique de la forme intégrale de la fonction diélectrique. Un traitement à la manière de GOULD (1964) (évaluation purement numérique de l'intégrale de Fourier) ne nécessite pas la recherche des racines de l'équation de dispersion, mais est inapplicable au voisinage de la fréquence plasma du fait de résonances extrêmement pointues de l'intégrant. Un traitement à la manière de DERFLER & SIMONEN (1966) (développement de l'inverse de la fonction diélectrique en fractions partielles) implique une résolution numérique de l'équation de dispersion qui ne peut être que partielle en raison du nombre infini de racines de celle-ci (conséquence du théorème de PICARD), et pose alors un délicat problème de convergence. Finalement à une méthode HYBRIDE (BUZZI (1971)) (combinaison des deux méthodes précédentes), nous avons préféré traiter numériquement le problème dès le début

en choisissant de discrétiser la fonction de distribution électronique, et notre choix s'est porté sur le modèle "Multi Water Bag" (M.W.B.) qui présente des propriétés intéressantes parmi lesquelles l'analyticité de la fonction diélectrique, avec un nombre fini de racines bien localisées jouant collectivement le rôle de la coupure sur l'axe réel de la fonction diélectrique classique. De nombreux travaux (NOYER, NAVET & FEIX (1975), DE. PACKH (1962), BERK & ROBERTS (1970), BERTRAND (1972) et NAVET (1973)) ont montré l'intérêt du modèle.

Nous trouverons dans le chapitre 1 les hypothèses et la formulation du problème. Le chapitre 2 traitera la topologie des pôles du modèle, et mettra en évidence l'existence de branches de dispersion pouvant ne pas être monotones, et introduisant un fait nouveau par rapport au cas sans dérive : la possibilité d'existence de pôles simples réels ou complexes très proches, pouvant devenir double. Dans le chapitre 3, le calcul du champ sera effectué par une méthode de résidus et l'on montrera l'éventualité d'un intéressant problème d'alyasing dû à la discretisation. Le chapitre 4, en reprenant un article de BERK & BOOK (1969) étudie dans quelles conditions la fonction diélectrique du modèle M.W.B. est équivalente à celle du cas continu, et montrera que la relation de causalité doit être utilisée de façon plus sophistiquée : plus précisément on ne devra pas se borner à une étude et utilisation infinitésimale de celle-ci. Le chapitre 5 présentera les résultats physiques théoriques dus à l'effet de dérive, ainsi que les résultats expérimentaux obtenus en collaboration avec HENRY et LAFAILLE dans le caisson de simulation spatiale du C.R.P.E.. Une première annexe donnera le programme numérique calculant pour toute dérive, pour toute fréquence excitatrice de l'ordre de la fréquence plasma, et pour une distribution maxwellienne, le champ forcé amont-aval jusqu'à une distance de 75 longueurs de Debye, dans le cas d'une excitation monopolaire et dipolaire. (Ce programme a été conçu pour pouvoir être utilisé pour toute autre fonction de distribution stable par simple modification du calcul des "Bags").

Une deuxième et dernière annexe donnera un ensemble de courbes de champ monopolaire relatives à une distribution maxwellienne et à des vitesses de dérive comprises entre 0.33 et 4.83 fois la vitesse thermique, susceptibles d'intéresser les expérimentateurs ou d'aider à préciser quantitativement un effet de dérive au niveau du dépouillement d'expériences spatiales.

- La partie théorique de ce travail a été acceptée pour publications dans la revue Plasma Physics

- L'ensemble du travail fait l'objet d'un rapport D.R.M.E. et d'une note interne C.R.P.E.

- NOTATIONS -

e	charge } masse }	de l'électron
m		
$\epsilon_0$	constante diélectrique du vide	
K	constante de Boltzman	
T	température absolue des électrons	
$n_0$	densité = nombre d'électrons ou d'ions par unité de volume	
$\lambda_D$	longueur de Debye des électrons	
$\omega_p$	fréquence plasma des électrons	
$v_t$	vitesse thermique des électrons	
$Y(x)$	distribution d'Heaviside	
$\delta(o)$	distribution de Dirac	
$\Delta v$	pas d'échantillonnage en vitesse du multi Water Bag	
$\mathcal{P}_c$	partie principale au sens de Cauchy	
$R(\Phi, K)$	résidu de la fonction $\Phi$ au pôle K	
$\left(\frac{\partial E}{\partial K}\right)_{K_i}$	valeur de la dérive partielle de $E$ par rapport à la variable K au point $K = K_i$	
$\text{Sgn}(x)$	fonction signe de x qui vaut +1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$	

CHAPITRE I : Hypothèses et Formulation du problème

I.1. Les hypothèses :

La limite fluide d'un plasma peut être obtenue par l'expérience d'esprit de découpage de ROSENBLUTH (1960) dans laquelle chaque particule est divisée en deux, chaque produit de la division étant encore divisé en deux et ainsi de suite. Il y a conservation de la vitesse des particules, du rapport charge divisée par masse, du produit densité multipliée par charge et par conséquent des grandeurs caractéristiques du milieu : fréquence plasma  $\omega_p^2 = n_0 e^2 / \epsilon_0 m$  et longueur de Debye  $\lambda_D = v_T \omega_p^{-1}$ . L'individualité des particules est détruite et à la limite le facteur de "grain"  $g = (n_0 \lambda_D^3)^{-1}$  tend vers zéro. On peut alors remplacer les 6 N inconnues initiales (position et vitesse des N particules) par le continuum de la densité de particules  $f_j(\vec{r}, \vec{v}, t)$  au point  $(\vec{r}, \vec{v})$  de l'espace des phases, à l'instant t. (l'indice = 1 ou 2 est relatif aux ions ou électrons). Le fluide ainsi obtenu obéit à l'équation de "Liouville":

$$\frac{df_j}{dt} = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} f_j + \frac{e}{m} E \cdot \text{grad}_{\vec{v}} f_j = 0$$
 exprimant le fait que les fonctions de distribution  $f_j$  restent constantes le long de toute trajectoire dans l'espace des phases  $(\vec{r}, \vec{v})$ . C'est l'équation de Vlasov où rentrent en ligne de compte les interactions par l'intermédiaire du champ autocohérent donné par l'équation de Poisson

$$\text{div } \vec{E} = \sum_j \frac{e}{\epsilon_0} \int f_j(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}$$

A ce stade de modélisation nous faisons les hypothèses suivantes :

- les phénomènes électromagnétiques seront négligés et l'on ne considérera que les effets électrostatiques (les fréquences considérées seront suffisamment petites pour que les longueurs d'ondes électromagnétiques dépassent les dimensions des systèmes étudiés)

- les fréquences excitatrices  $\omega$  seront suffisamment grandes (de l'ordre de la fréquence plasma électronique  $\omega_p$ ) pour que les ions puissent être considérés comme un fond homogène immobile au sein du plasma assurant la neutralité électrique.

Le plasma sera supposé spatialement homogène et isotrope (sans champ magnétique extérieur) sa fonction de distribution électronique  $f(v)$  sera supposée stable et contiendra implicitement la vitesse de dérive  $v_0$  dans une direction perpendiculaire à la source supposée plane et infinie.

Nous ne nous intéresserons qu'aux oscillations de plasma longitudinales (se propageant parallèlement au champ électrique autocohérent).

Le problème sera supposé unidimensionnel (sources excitatrices planes infinies constituées par un système de grilles portant une densité de charges oscillantes  $\pm \sigma e^{i\omega t}$ ). Les grilles seront couplées électriquement au plasma, mais non mécaniquement c'est à dire en respectant la condition diamètre des fils très inférieurs à la taille des mailles. La condition supplémentaire taille des mailles très inférieure à la longueur de Debye permettra de négliger la gaine de polarisation dynamique à des distances supérieures à la longueur de Debye. Cette restriction unidimensionnelle ne saurait restreindre la généralité du problème tridimensionnel dans l'hypothèse d'un traitement linéaire où il y a pas couplage des divers modes.

Nous pouvons donc intégrer la fonction de distribution sur les composantes de  $\vec{\pi}$  et  $\vec{v}$  perpendiculaires au vecteur d'onde  $\vec{k}$  et nous obtenons le système

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) dv - \frac{e n_0}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

### I.2. Rappel sur la linéarisation du système Vlasov Poisson et sur le traitement de Landau

Nous supposerons des perturbations par rapport à l'équilibre suffisamment petites pour pouvoir linéariser ce système non linéaire en raison du terme  $E \partial f / \partial v$ . Ce traitement issu du fameux papier de Landau (1946) a été abondamment traité dans la littérature, et nous n'en rappellerons que les grandes lignes :

Supposons le plasma à l'équilibre. Si  $n_0$  est la densité du plasma nous avons une solution stationnaire

$f(x, v, t) = n_0 F_0(v)$  avec  $E_0 = 0$ ; (la fonction de distribution étant normalisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} F_0(v) dv = 1$ ). Supposons à l'instant initial une petite perturbation  $f_1(x, v, t=0)$  de la fonction de distribution. En écrivant  $f(x, v, t) = n_0 F_0(v) + f_1(x, v, t)$  dans (1), et en ne considérant que les termes du premier ordre, nous obtenons le système linéaire

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e n_0}{m} E_1(x, t) \frac{dF_0}{dv} = 0 \\ \frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, v, t) dv \end{cases}$$

Le problème consiste à chercher  $f_1(x, v, t)$  et  $E_1(x, t)$  en connaissant  $F_0(v)$  et  $f_1(x, v, t=0)$ . La méthode de LANDAU consiste à appliquer une double transformation de FOURIER sur  $x$  et de LAPLACE sur  $t$

$$f_1(k, v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, v, t) e^{ikx} dx \quad \text{et} \quad E_1(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x, t) e^{ikx} dx$$

$$f_1(k, v, s) = \int_0^{+\infty} f_1(k, v, t) e^{-st} dt \quad \text{et} \quad E_1(k, s) = \int_0^{+\infty} E_1(k, t) e^{-st} dt$$

avec  $k \in \mathbb{R}$  et  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 0$  ce qui conduit à

$$E_1(k, s) = - \frac{e}{\epsilon_0 k^2} \frac{1}{\epsilon(k, s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(k, v, t=0)}{v - s/ik} dv$$

avec

$$\epsilon(k, s) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_0/dv}{v - s/ik} dv$$

on en déduit en posant  $s = i(\omega - i\nu)$  ce qui implique  $\nu > 0$  que :

$$(3) \quad \epsilon(k, \omega) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \epsilon(k, s) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_0/dv}{v - (\omega - i\nu)/k} dv$$

Remarquons que l'intégrale  $\tilde{I}$  figurant dans (3) ne tend pas vers la même limite selon que  $-\nu/k$  tend vers  $0^+$  ou  $0^-$ ; en effet d'après les relations de PLEMELJ nous avons :

$$\lim_{-\frac{\nu}{k} \rightarrow 0^+} \tilde{I} = \frac{1}{2} \frac{dF_0}{dv} \left( \frac{\omega}{k} \right) + \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_0/dv}{v - \omega/k} dv$$

et

$$\lim_{-\frac{\nu}{k} \rightarrow 0^-} \tilde{I} = -\frac{1}{2} \frac{dF_0}{dv} \left( \frac{\omega}{k} \right) + \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_0/dv}{v - \omega/k} dv$$

ce qui conduit, vu que  $\nu > 0$ , à

$$(4) \quad \epsilon(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k|k|} i\pi \frac{dF_0}{d\nu} \left( \frac{\omega}{k} \right) - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_c^{\infty} \frac{dF_0/d\nu}{\nu - \omega/k} d\nu$$

Remarquons que  $\epsilon(k, \omega)$  est fondamentalement non analytique en raison du terme en  $|k|$ .

Dans le cas d'oscillations forcées, et pour une excitation monopolaire l'équation de Poisson nous donne

$$E(k, \omega) = \frac{i\sigma_\omega(k)}{\epsilon_0 k \epsilon(k, \omega)} \quad \text{avec} \quad \sigma_\omega(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \delta(x) e^{ikx} dx = \sigma$$

d'où

$$(5) \quad E_\omega(x) = \frac{i\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{k \epsilon(k, \omega)} dk$$

Une intégration par méthode de résidus de (5) oblige à prolonger analytiquement dans le plan des  $k$  complexes  $\epsilon(k, \omega)^{-1}$  qui correspond à deux fonctions entières ou méromorphes de  $k$  (si  $F_0(\nu)$  l'est en  $\nu$ ) selon le signe de  $k$  :

$$\epsilon(k, \omega)^{-1} = \epsilon^+(k, \omega)^{-1} \gamma(k) + \epsilon^-(k, \omega)^{-1} \gamma(-k)$$

avec  $\epsilon^\pm(k, \omega) = \int_{L^\pm} \frac{dF_0/d\nu}{\nu - \omega/k} d\nu$  où  $L^+$  et  $L^-$  sont les parcours de LANDAU englobant (ou n'englobant pas) la singularité  $\omega/k$ . Ce déplacement du parcours d'intégration selon le signe de  $k$  fait apparaître une ligne de branchement dans le plan des  $k$  et rend le problème plus difficile que celui de l'évolution par rapport aux conditions initiales où l'inversion concerne la transformée de LAPLACE et non celle de FOURIER, et où l'on peut éviter ce problème de ligne de branchement.

### I.3. Le modèle Multi Water Bag (M.W.B.) ou relation de dispersion discrétisée (avec figuration explicite de la dérive):

Nous sommes conduits à traiter numériquement la relation de dispersion c'est à dire à remplacer l'intégrale figurant dans l'expression de  $\epsilon$

$$\epsilon(k, s) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_0/d\nu}{\nu - s/ik} d\nu$$

par une somme discrète.

Rappelons que dans l'espace des phases, l'évolution d'un domaine limité par une courbe fermée où la densité de particules est initialement uniforme se fait, d'après Vlasov, en gardant cette densité constante, de sorte que le système évolue comme un fluide incompressible dans l'espace des phases. Pour suivre l'évolution du système il suffit de suivre l'évolution du contour ; cela a valu le nom pittoresque de "Water Bag" suggéré par DE PACKH (1962) au modèle dont la fonction de distribution est :

$$f(v) = \frac{n_0}{v_2 - v_1} [Y(v - v_1) - Y(v - v_2)] \quad . \text{ En généralisant}$$

à "plusieurs fluides" de densités différentes nous obtenons le modèle "Multi Water Bag" (M.W.B.) qui dans le cas d'un problème de dérive de valeur  $V_D$  sera caractérisé par la fonction de distribution suivante :

$$f(v) = \sum_{j=1}^N A_j [Y(v - v_D + a_j) - Y(v - v_D - a_j)]$$

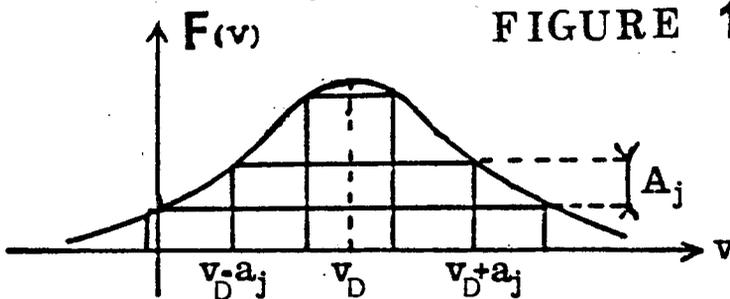


FIGURE 1

(Voir figure 1) où les termes  $a_j$  et  $A_j$  seront positifs et relatifs à une distribution monotone croissante de  $-\infty$  à  $v_D$  et monotone décroissante de  $v_D$  à  $+\infty$ . La condi-

tion  $\sum_{j=1}^N 2 a_j A_j = 1$  traduit la normalisation de la densité totale

Nous aurons  $df/dv = \sum_{j=1}^N A_j (\delta(v_D - a_j) - \delta(v_D + a_j))$

et par conséquent la relation (3) s'écrira

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{j=1}^N A_j (\delta(v_D - a_j) - \delta(v_D + a_j))}{v - (\omega - i\nu)/k} dv$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \sum_{j=1}^N A_j \left\{ \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \frac{1}{v_D - a_j - \frac{\omega - i\nu}{k}} - \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \frac{1}{v_D + a_j - \frac{\omega - i\nu}{k}} \right\}$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \sum_{j=1}^N \frac{2 A_j a_j}{(v_D - \omega/k)^2 - a_j^2}$$

et finalement

$$(6) \quad \epsilon(k, \omega) = 1 - \omega_p^2 \sum_{j=1}^N \frac{2 a_j A_j}{(\omega - k v_D)^2 - k^2 a_j^2}$$

Cette fonction diélectrique discrétisée est une fonction analytique de  $k$  ayant un nombre fini de racines et présente de nombreuses autres propriétés intéressantes (NOYER, NAVET, FEIX, (1975), BERTRAND (1972) et NAVET (1973)).

#### I.4. Normalisation des Variables

Nous utiliserons les variables normalisées suivantes :

$$\Omega = \omega / \omega_p \quad \text{avec } \omega = \text{fréquence excitatrice}$$
$$\omega_p = \text{fréquence plasma}$$

$$V_D = v_D / v_T \quad \text{avec } v_D = \text{vitesse de dérive du plasma dans une}$$

direction perpendiculaire au plan de  
la source

$$v_T = \text{vitesse thermique du plasma}$$

$$K = k \lambda_D \quad \text{avec } k = \text{nombre d'onde}$$
$$\lambda_D = \text{longueur de Debye}$$

$\alpha_j$  et  $\xi_j$  seront donnés par les relations  $a_j = \alpha_j v_T$  et  $A_j = \xi_j / v_T$  où  $a_j$  = vitesse des  $N$  Bags approximant la fonction de distribution électronique du plasma considéré sans vitesse de dérive et où  $A_j$  = hauteur relative des divers Bags (Voir figure 1).

$X = x / \lambda_D$  où  $x$  désigne la distance par rapport à la source. Les distances positives  $X > 0$  correspondront à l'aval de l'écoulement de plasma à travers la source, les distances  $X < 0$  à l'amont.

Le champ électrostatique  $E$  à la distance  $X$  sera donné par la relation

$$E(x) = \frac{i\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W(K) \frac{\exp(-i K X)}{\epsilon(K, \Omega, V_D)} dK \quad (7)$$

où  $W(K)$  est un facteur de pondération dépendant de la géométrie de la source (Voir figure 2) et valant :

$\frac{1}{K}$  pour une excitation monopolaire

$\frac{\Delta}{i}$  pour une excitation dipolaire

$K\Delta^2$  pour une excitation quadripolaire

où  $\Delta$  est la distance entre les grilles de la source portant une densité de charges oscillantes  $\pm \sigma \exp(i \Omega t)$

$\epsilon(K, \Omega, v_D)$  sera la fonction diélectrique normalisée du plasma valant pour le modèle M.W.B.

$$\epsilon(K, \Omega, v_D) = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{2 \alpha_j \xi_j}{(K v_D - \Omega)^2 - K^2 \alpha_j^2} \quad (8)$$

avec

$$\alpha_j \text{ et } \xi_j > 0 \text{ et } \sum_{j=1}^N 2 \alpha_j \xi_j = 1 \quad (9)$$

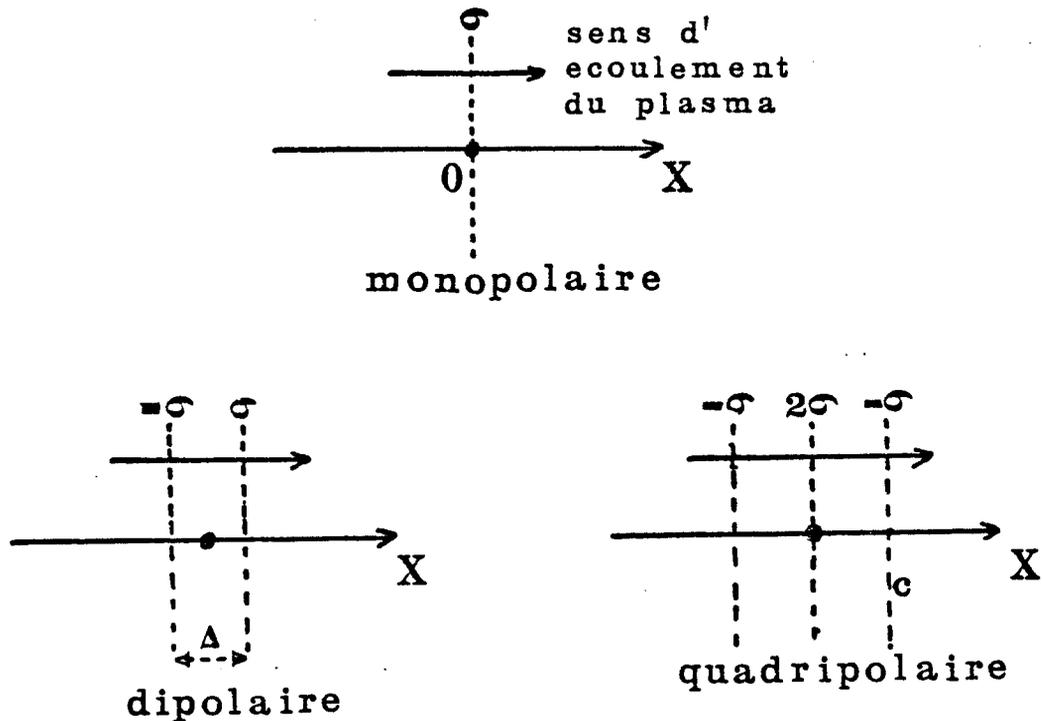


FIGURE 2

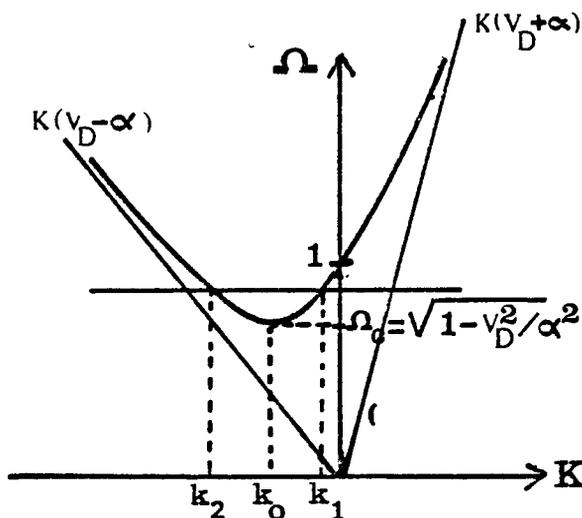
L'intégrale (7) du champ étant calculée par une méthode de résidus, il sera nécessaire, dans un premier temps, de connaître les divers pôles de l'intégrand c'est à dire les racines de l'équation de dispersion  $\mathcal{E}(K, \Omega, V_D) = 0$  pour un  $\Omega$  donné. Avant d'aborder le problème délicat de la topologie de ces pôles, il nous a semblé intéressant de considérer, puisqu'il donne la "physique du problème" au voisinage de la fréquence plasma, le modèle Hydrodynamique.

### I.5. Le Modèle Hydrodynamique

C'est le cas du modèle 1 Bag de vitesse  $\alpha$  telle que  $\alpha^2 = 3 V_T^2$ . Nous ne considérerons ce modèle que pour  $\Omega \neq 1$ . Sa fonction diélectrique est  $\mathcal{E}(K, \Omega, V_D) = 1 - \frac{1}{(\Omega - KV_D)^2 - K^2 \alpha^2}$ . Elle conduit à l'équation de dispersion :

$$\Omega = KV_D \pm \Omega_K \quad \text{avec} \quad \Omega_K = \sqrt{1 + K^2 \alpha^2}$$

a) cas où  $V_D < \alpha$



**FIGURE 3**

Pour  $\Omega = 1$  nous avons deux racines de  $\mathcal{E}$  :

$$K_1 = 0 \quad \text{et} \\ K_2 = \frac{-2V_D}{\alpha^2 - V_D^2}$$

telles que (Voir figure 3)

$$\left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial K} \right)_{K_1} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial K} \right)_{K_2} = -2V_D$$

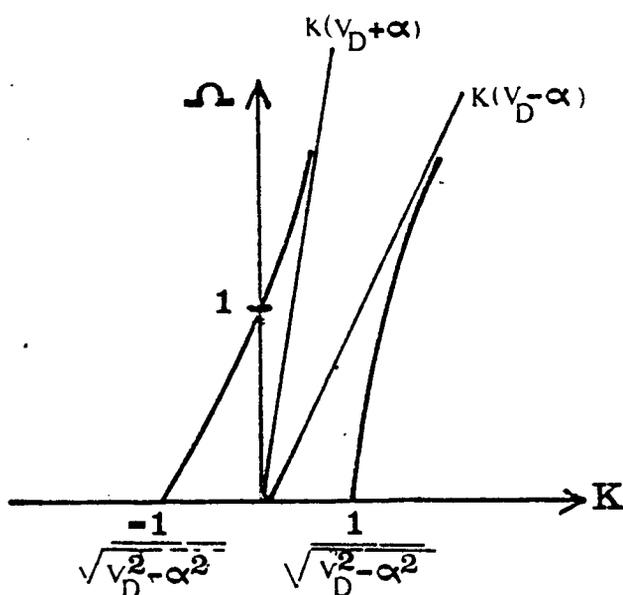
Le pôle  $K_1$  est un pôle "aval" car lorsqu'on applique la relation de causalité en rajoutant une petite partie imaginaire négative à la

fréquence, il se déplace d'une petite quantité imaginaire négative et contribue au calcul de l'intégrale du champ relatif aux distances  $X$  positives.

On démontre de la même façon que le pôle  $K_2$  est un pôle "amont".  
 Pour une excitation dipolaire et une fréquence  $\omega$  proche de 1, ces deux pôles auront des coefficients d'excitations  $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K}\right)_{K_1}^{-1}$  et  $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K}\right)_{K_2}^{-1}$  presque égaux en module.

Les champs amont et aval seront presque identiques.  
 Par contre, pour une excitation monopolaire, le pôle aval  $K_1$  sera favorisé par la forme en  $K^{-1}$   $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K}\right)^{-1}$ , des coefficients d'excitation (vu la petite valeur de  $K_1$ ). Le contraire, renforcement du pôle amont  $K_2$  se produira pour une excitation quadripolaire étant donné la forme en  $K$   $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K}\right)^{-1}$  des coefficients d'excitation.

b) cas où  $v_D > \alpha$



**FIGURE 4**

Les branches de dispersion ont l'allure donnée par la figure 4. Les 2 pôles seront réels et aval, ce qui implique que le champ amont se réduira au champ froid pour une excitation dipolaire ou quadripolaire. On remarquera que, pour les très fortes dérivées par rapport à la vitesse thermique, le plasma pourra être considéré comme froid et nous aurons une

propagation de type faisceau. En effet pour un plasma froid nous aurions l'équation de dispersion

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2 / (\omega - kv_D)^2 = 0$$

qui admet pour racines :

$$\omega = kv_D \pm \omega_p$$

CHAPITRE II : Topologie des pôles et branches de dispersion  
du modèle

Il s'agit de rechercher les racines en  $K$  de l'équation de dispersion

$$\mathcal{E}(K, \Omega, V_D) = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{2\alpha_j \xi_j}{(KV_D - \Omega)^2 - K^2 \alpha_j^2} = 0 \quad (8)$$

pour  $\Omega$  et  $V_D$  donnés. Remarquons tout d'abord que (8) est équivalente à une équation algébrique de degré  $2N$  ne se réduisant pas, comme dans le cas sans dérive à une équation de degré  $N$  en  $K^2$ , et dont il n'est pas question de déterminer l'expression des  $2N + 1$  coefficients, du moins, pour des valeurs de  $N$  assez grandes. Par conséquent, du point de vue numérique, il ne sera pas possible de localiser ou séparer les racines par des méthodes de suites de STURM. A titre indicatif, on trouvera dans l'annexe 1 un petit programme FORMAC calculant l'expression analytique des 6 coefficients relatifs à un modèle à 3 "Bags" et l'on constatera "l'ampleur" des résultats...

Néanmoins, comme nous allons le voir, la forme de l'équation (8) sera intéressante car elle va permettre la séparation de  $2N-3$  racines de  $\varepsilon$  qui de plus seront toujours réelles.

II.1. Quelques considérations relatives au  
graphe de  $\varepsilon(K)$  :

Les asymptotes de  $\varepsilon$  seront données par  $(KV_D - \Omega)^2 - K^2 \alpha_j^2 = 0$  soit

$$K_{Asy}^j = \frac{\Omega}{V_D \pm \alpha_j}$$

Une étude des branches infinies appartenant aux intervalles 1 et 2 (voir figure 5) permet d'affirmer en raison du changement de signe que nous avons au moins une racine réelle entre 2 asymptotes voisines dans ces intervalles soit au moins  $2N-3$  racines réelles dans les intervalles 1 et 2.

Nous pouvons remarquer d'autre part que :

1) pour les  $K < \frac{\Omega V_D}{V_D^2 - \alpha_1^2}$  (valeur très proche de  $\frac{\Omega}{V_D}$ )

appartenant à l'intervalle 2,  $\epsilon(K)$  est somme de fonctions décroissantes donc décroissante

2) de façon générale nous avons

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial K} = \frac{4}{K} \left\{ \frac{1 - \epsilon(K)}{2} - \Omega (-\Omega - KV_D) \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j \xi_j}{[(KV_D - \Omega)^2 - K^2 \alpha_j^2]^2} \right\}$$

ce qui implique pour les racines  $K_i$  supérieures à  $\Omega / V_D$

que  $\left( \frac{\partial \epsilon}{\partial K} \right)_{K_i}$  est positif

3) le minimum de  $\epsilon$  dans l'intervalle 2 est strictement positif (somme des termes strictement positifs).

Par conséquent nous avons exactement  $N + Q - 2$  racines réelles simples dans l'intervalle 2, si  $Q = \text{cardinal } \{i / \alpha_i < V_D\}$

Une étude du signe de la branche à asymptote verticale de l'intervalle 4, suivie de la remarque 2, et du fait que  $\lim_{K \rightarrow \infty} \epsilon(K) = 0$  montre que nous avons toujours une racine réelle simple dans l'intervalle 4.

On montre qu'une condition suffisante mais non nécessaire pour avoir deux racines réelles dans l'intervalle 3 est que  $\Omega > 1$  car  $\epsilon(K=0) = 1 - \frac{1}{\Omega^2}$  est alors strictement positif. Lorsque cette condition suffisante est réalisée toutes les racines sont alors réelles et localisées car leur nombre est  $1 + (N + Q - 2) + 2 + (N - Q - 1) = 2N$ .

S'il n'y a pas de racines réelles ou double dans l'intervalle 3, restent encore à trouver, en plus des  $N - Q - 1$  racines de l'intervalle 1, deux racines réelles ou complexes ou éventuellement une racine double. Pour préciser la situation nous allons regarder ce qui se passe lorsque l'on fait tendre la fréquence  $\Omega$  vers zéro :

à la limite  $\epsilon(\Omega=0) = 1 - \frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^N \frac{2 \alpha_j \xi_j}{V_D^2 - \alpha_j^2}$

L'équation de dispersion s'écrit :  $k^2 - \mathcal{D} = 0$

en posant 
$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^N \frac{2\alpha_j \xi_j}{V_D^2 - \alpha_j^2} \quad (10)$$

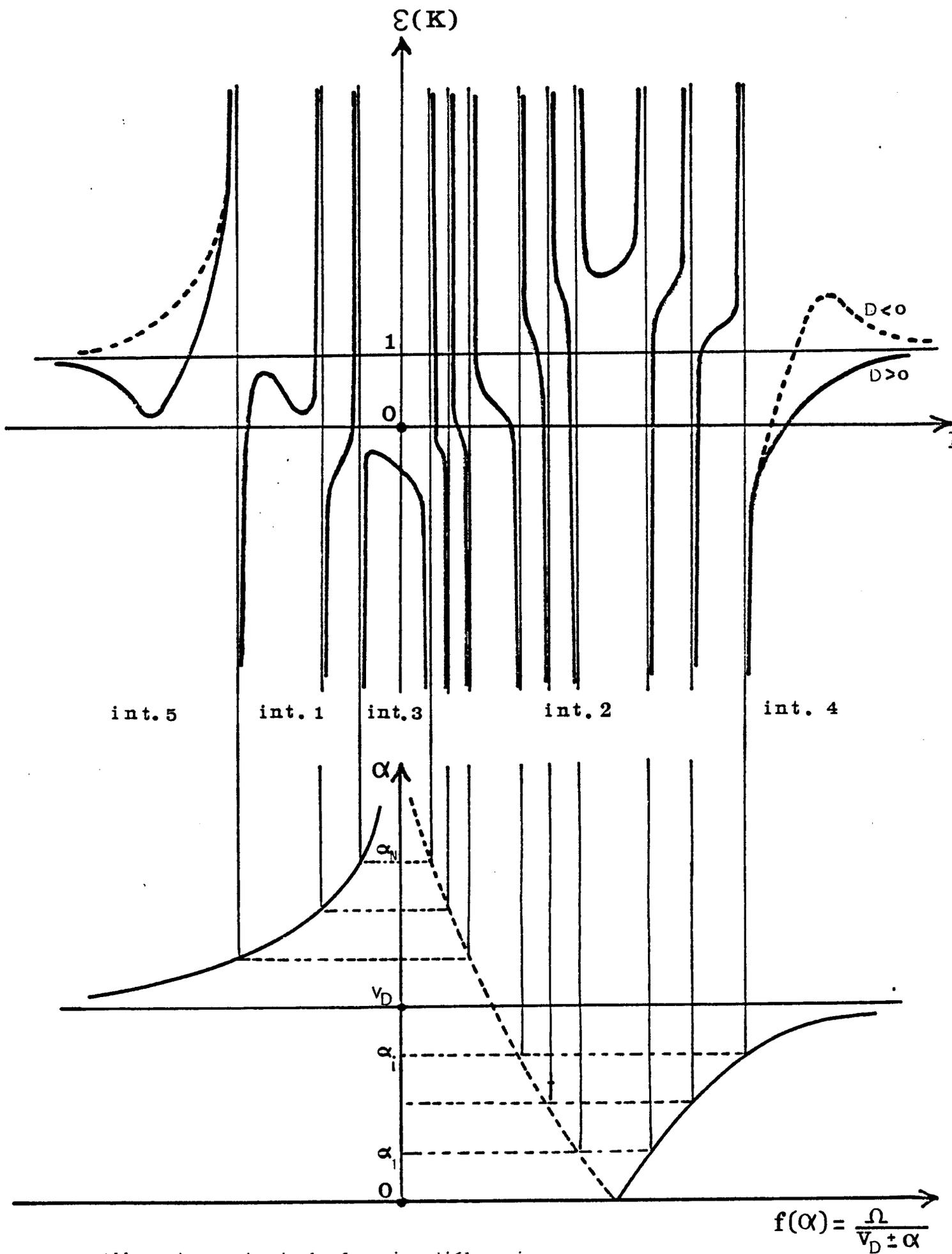
Cela signifie que lorsque  $\Omega$  tend vers zéro, nous avons  $2N - 2$  racines qui tendent vers l'origine, et deux autres qui tendent vers  $\pm i \sqrt{|\mathcal{D}|}$  ou  $\pm \sqrt{\mathcal{D}}$  selon le signe de  $\mathcal{D}$ .

- Ce terme  $\mathcal{D}$  change de signe chaque fois que  $V_D = \alpha_j$  il est presque toujours négatif lorsque  $V_D$  est petit et presque toujours positif lorsque  $V_D$  est grand.

- Remarquons que dans le cas où  $V_D = 0$  et pour une distribution maxwellienne  $\mathcal{D} = -\lambda_D^{-2}$ , et la limite (pour  $\Omega = 0$ )  $\pm \sqrt{|\mathcal{D}|}$  correspond aux pôles de DEBYE.

- Remarquons de même que lorsque  $V_D$  est très grand  $\mathcal{D} \neq V_D^{-2}$ , et la limite (pour  $\Omega = 0$ )  $\pm \sqrt{\mathcal{D}}$  correspond aux 2 pôles du mode faisceau  $\omega = k v_D \pm \omega_p$  du plasma froid.

- Lorsque  $\Omega = 0$ , si l'on fait varier la vitesse de dérive de part et d'autre de l'abscisse en vitesse  $\alpha_1$  du premier Bag, (donc si l'on considère des vitesses de dérives très faibles) le pôle de DEBYE se déplace sur l'axe imaginaire pur tant que  $V_D < \alpha_1$ , en s'éloignant vers l'infini plus  $V_D$  se rapproche de  $\alpha_1$  puis il réapparaît sur l'axe réel, dès que  $V_D > \alpha_1$ , en venant de l'infini et se rapproche très rapidement de l'origine (ce n'est plus un pôle de DEBYE), pour devenir à nouveau imaginaire pur (et retrouver à nouveau son appellation de pôle de DEBYE). Une étude numérique relative à de telles dérives très faibles, proches de  $\alpha_1$ , a suivi le déplacement dans le plan complexe de ce type de pôle pour des fréquences  $\Omega$  variant de 0 à  $0.5 \omega_p$  et a montré que le brusque changement de topologie de ce type de pôle est essentiellement dû à la discrétisation de la fonction de distribution, et que ce comportement conduisant pour  $\Omega = 0$  à une discontinuité du champ est tué par le fait que l'excitation de ce pôle "anormalement" réel devient très rapidement petite dès que  $\Omega$  n'est plus nul. L'effet du pôle de DEBYE ayant disparu par suite de l'apparition de ce pôle de modèle, doit donc se retrouver par mélange de phase dû aux autres pôles réels.



Allure du graphe de la fonction diélectrique

FIGURE 5

- Le même phénomène peut se constater pour des vitesses de dérive fortes; voisines des abscisses des Bags relatifs aux populations nettement suprathermiques ; on a alors des pôles qui sont pour  $\Omega = 0$  pratiquement toujours réels et dont l'incursion dans le plan complexe est très brève.

- Pour les dérives intermédiaires un tel comportement laisse prévoir la possibilité d'avoir des pôles alternativement réels, double ou complexes dans les intervalles 1, 3 et 5.

Ces considérations nous conduisent à un graphe de  $\varepsilon(k)$  ayant l'allure indiquée par la figure 5

## II.2. Recherche des racines de $\varepsilon(k)$ et branches de dispersion

### a) Principe

Etant donné la rapide variation des branches de  $\varepsilon(k)$ , les  $2N-3$  racines réelles localisées entre les asymptotes, ainsi que la racine réelle de l'intervalle 4, seront recherchées par une méthode de dichotomie accélérée, les deux racines restant étant localisées au moyen des fonctions symétriques des coefficients du polynôme numérateur de  $\varepsilon$ , puis raffinées par une méthode NEWTON-RAPHSON dans le plan complexe. Précisons cette méthode des fonctions symétriques :

si  $\dot{a}_j$  est le coefficient de la puissance  $K^j$  du polynôme numérateur de  $\varepsilon$ , la somme  $S_{2N}$  et le produit  $P_{2N}$  des  $2N$  racines cherchées seront donnés par

$$S_{2N} = - \frac{a'_{2N-1}}{a'_{2N}} \quad \text{et} \quad P_{2N} = (-1)^{2N} \frac{a'_0}{a'_{2N}}$$

avec

$$a'_0 = \Omega^{2N} (1 - 1/\Omega^2)$$

$$a'_{2N} = \prod_{j=1}^N (V_D^2 - \alpha_j^2)$$

$$a'_{2N-1} = -2 \Omega V_D \sum_{j=1}^N \prod_{i \neq j} (V_D^2 - \alpha_i^2)$$

La connaissance des  $2N-2$  racines toujours réelles permettra de localiser les deux dernières racines inconnues par résolution de l'équation

$$K^2 - S_2 K + P_2 = 0 \quad \text{avec} \quad S_2 = S_{2N} - S_{2N-2} \quad \text{et} \quad P_2 = P_{2N} / P_{2N-2}$$

Branches de dispersion d'un modèle à 3 "Bags" d'abscisses 2, 4, 6  $V_T$   
Pour une dérive de 0.1  $V_T$

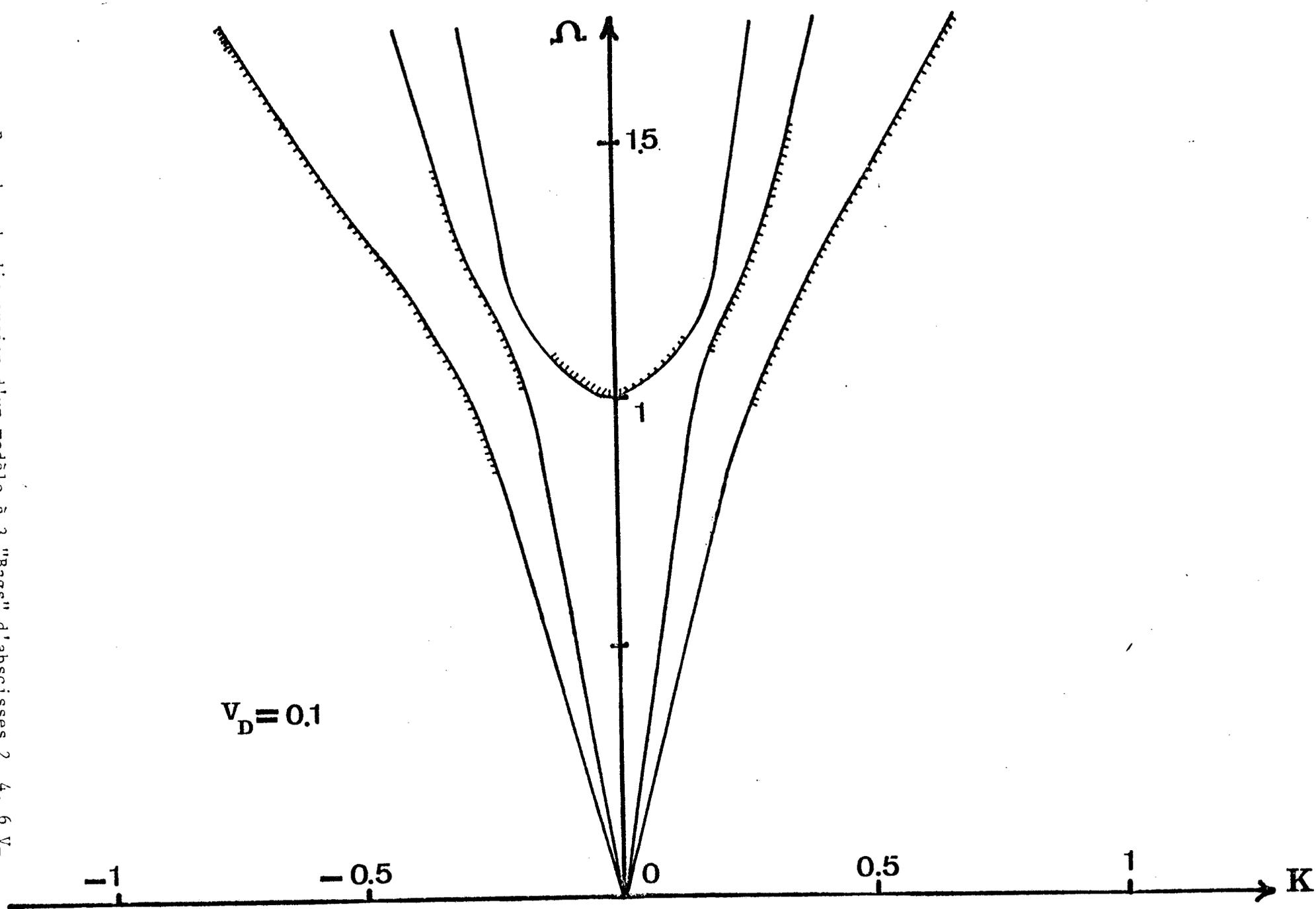


FIGURE 6

Branches de dispersion d'un modèle à 3 "Bags" d'abscisses 2, 4, 6  $V_T$   
Pour une dérive de 0.1  $V_T$

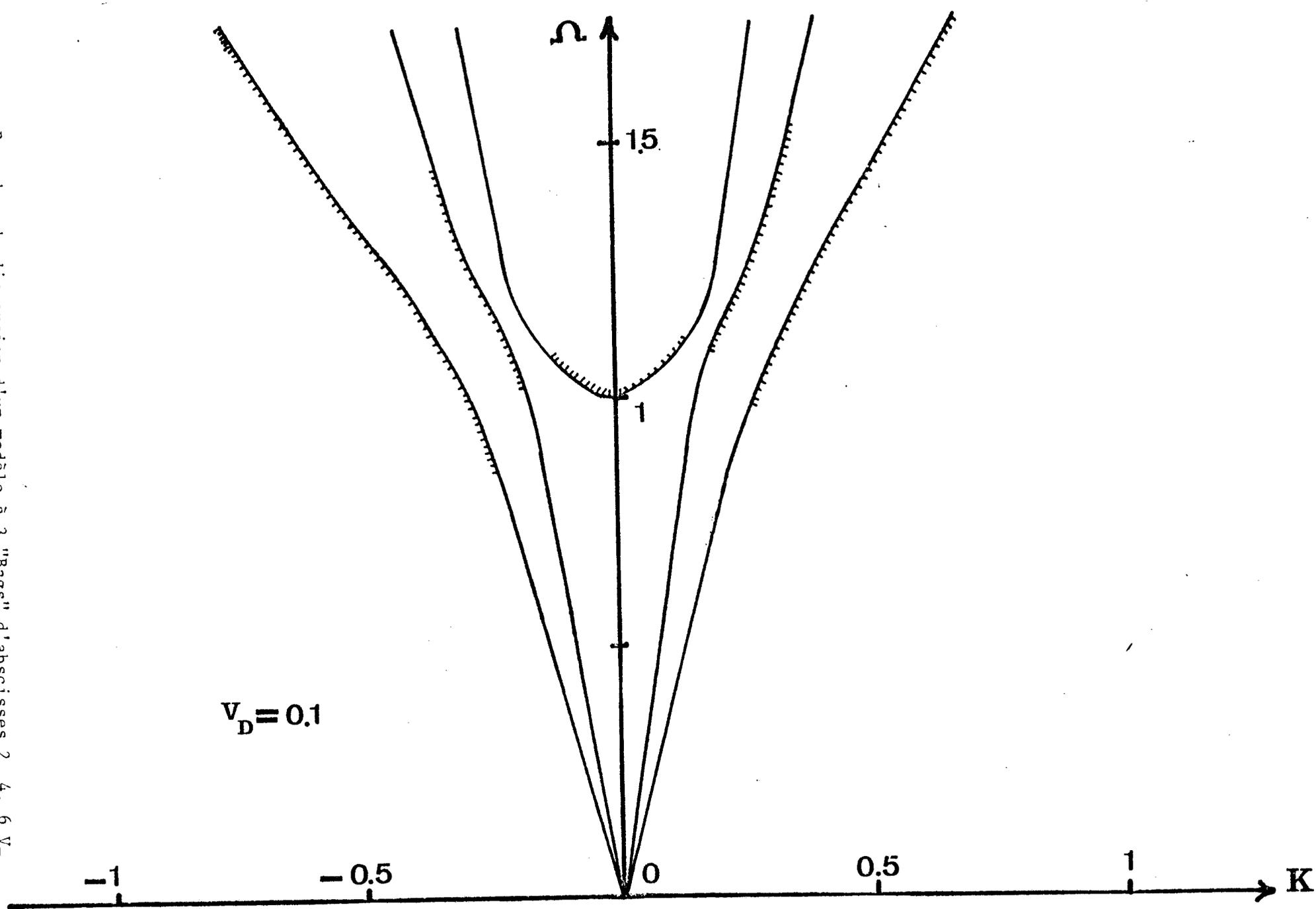


FIGURE 6

Branches de dispersion d'un modèle à 3 "Bags" d'abscisses 2, 4, 6  $V_T$   
Pour une dérive de 0.5  $V_T$

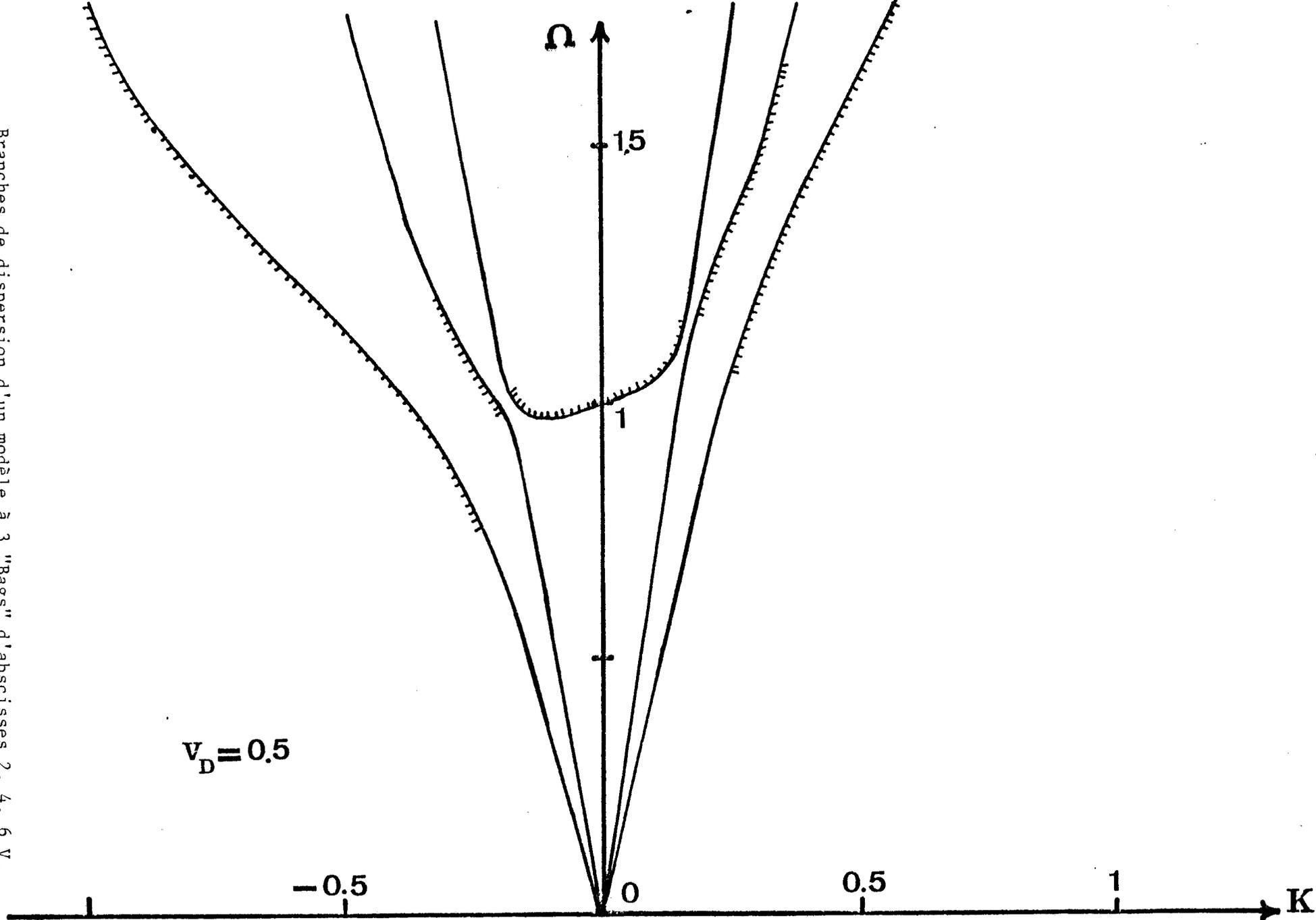


FIGURE 7

Branches de dispersion d'un modèle à 3 "Bags" d'abscisses 2, 4, 6  $V_T$   
Pour une dérive de 0.5  $V_T$

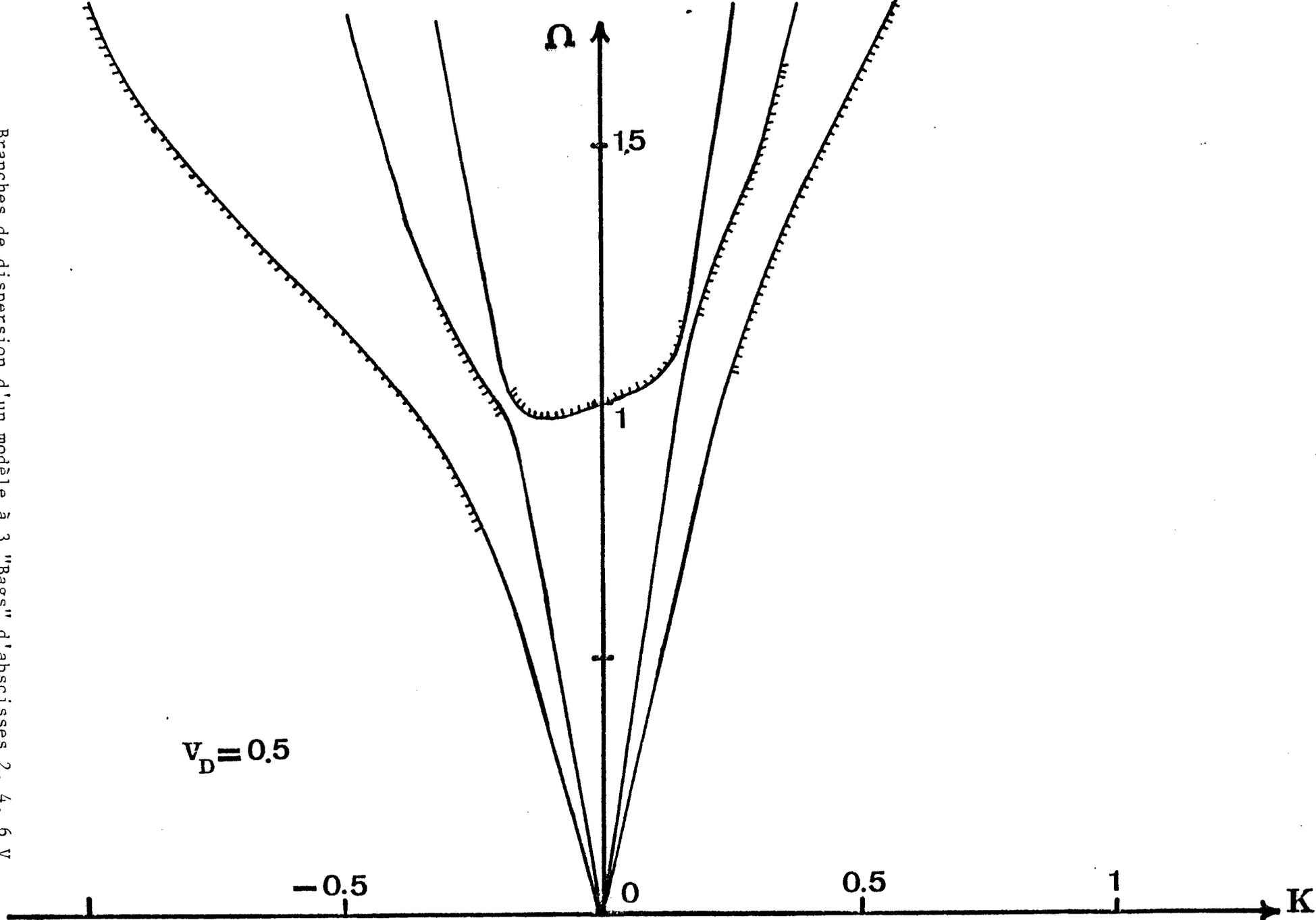
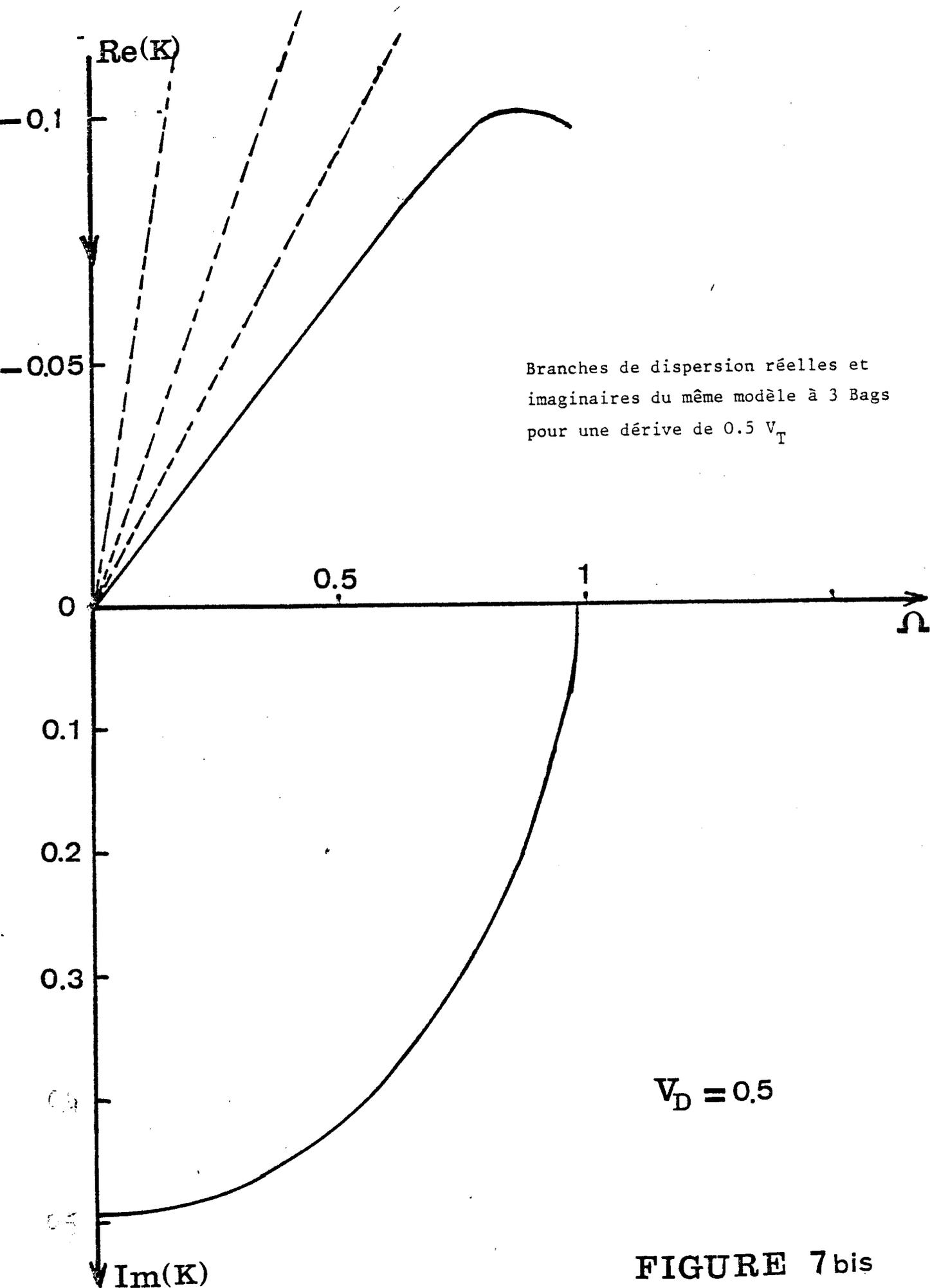


FIGURE 7



Branches de dispersion du même modèle  
à 3 Bags pour une dérive de 1.0  $V_T$

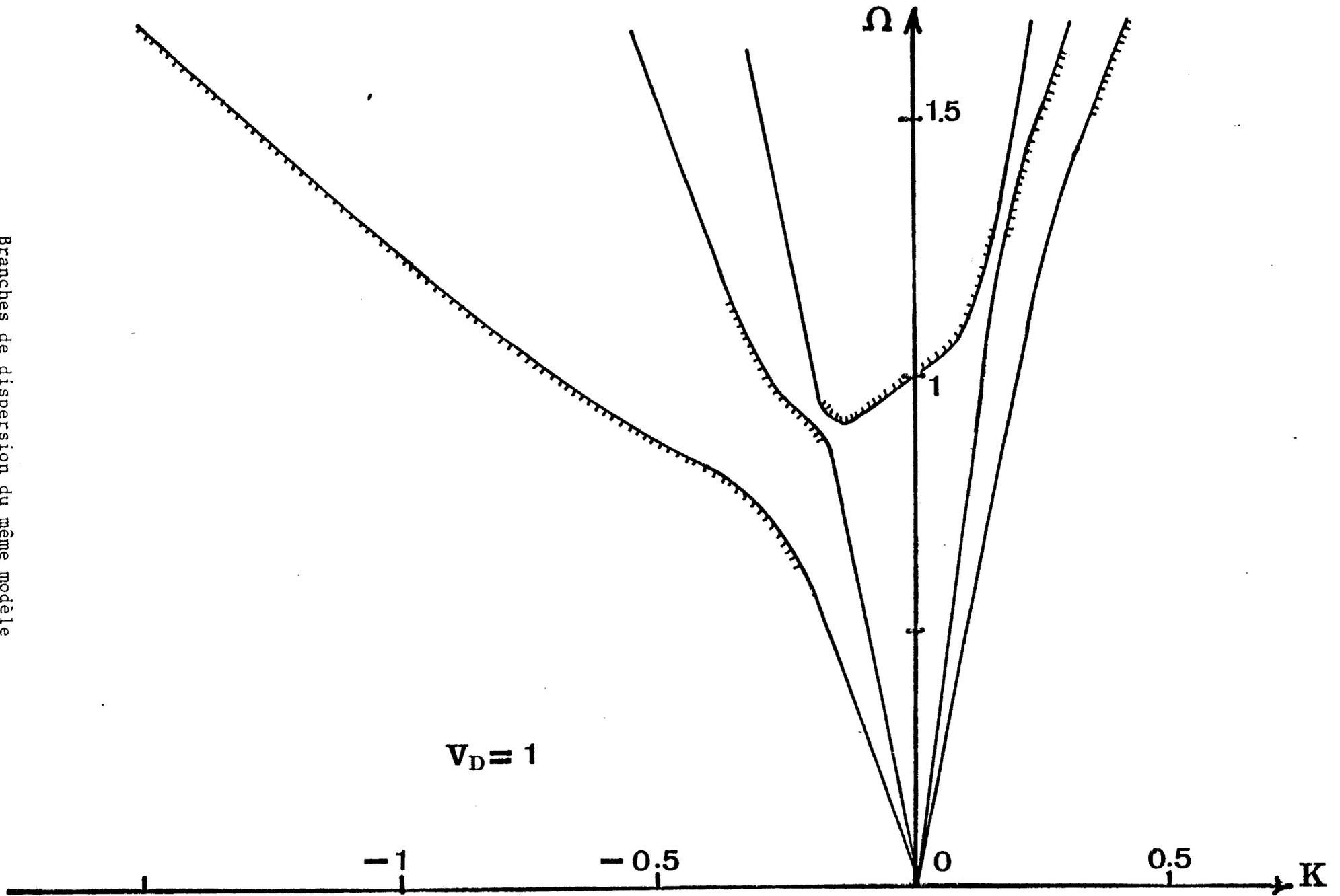


FIGURE 8

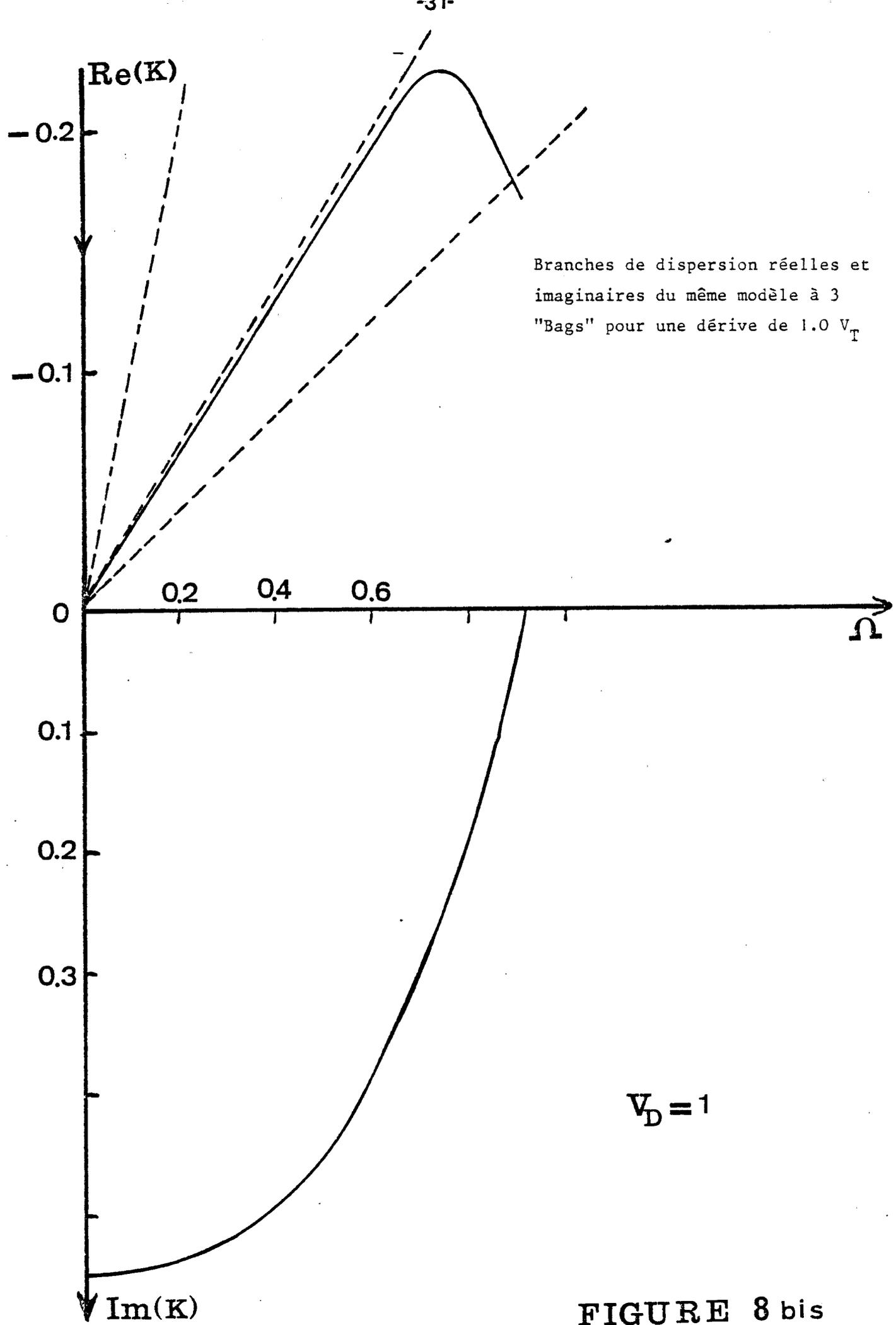


FIGURE 8 bis

Le calcul de  $P_2$  devra être fait en prenant soin d'associer chaque racine à l'asymptote voisine pour ne pas avoir de dépassements de mémoire. Nous aurons donc comme relations :

$$P_2 = \frac{\Omega^2}{V_D^2 - \alpha_N^2} \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right) \prod_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{\Omega}{(V_D - \alpha_j) \text{RAC}_1(j)} \times \frac{\Omega}{(V_D + \alpha_j) \text{RAC}_2(j)} \right]$$

$$S_2 = 2 \Omega V_D \sum_{j=1}^N \frac{1}{V_D^2 - \alpha_j^2} - \sum_{j=1}^{N-1} (\text{RAC}_1(j) + \text{RAC}_2(j))$$

ou  $\text{RAC}_1(j)$  et  $\text{RAC}_2(j)$  doubles racines proches des asymptotes  $\Omega / (V_D - \alpha_j)$  et  $\Omega / (V_D + \alpha_j)$ .

b) Etude des racines d'un modèle à 3 "Bags"

Il nous a paru intéressant de faire cette étude simple de façon à pouvoir aborder de façon plus précise celle plus délicate du modèle à 100 Bags. Connaissant une localisation des 4 racines toujours réelles, nous avons utilisé le langage algébrique FORMAC pour calculer de façon sûre et rapide la forme polynômiale du numérateur de  $\epsilon$ , bien adaptée à une recherche de racines (on trouvera la partie FORMAC programme en annexe 1). Les résultats relatifs au modèle 3 "Bags" d'abscisse en vitesse normalisée 2, 4 et 6 sont exprimés sous la forme parlante de branches de dispersion (les hachures sont relatives aux branches réelles dont l'excitation monopolaire est supérieure à un seuil de  $10^{-1}$ ).

Nous remarquons sur la figure 6 ( $V_D = 0.1$ ) que, pour une dérive faible par rapport à la vitesse thermique, les branches sont presque symétriques.

Lorsque la dérive augmente, figure 7 ( $V_D = 0.5$ ), et figure 8 ( $V_D = 1$ ), il y a dissymétrie de plus en plus accentuée de la branche de DEBYE- LANDAU (définie comme étant celle qui passe par le point ( $\Omega = 1, K = 0$ )) avec déplacement de son minimum vers les  $\Omega$  plus petits et vers les  $K$  plus négatifs. La partie gauche de la branche perd de plus en plus d'excitation, "au profit" de la partie droite. Les autres branches relatives aux valeurs de  $K$  positives subissent une rotation tendant à les comprimer vers la branche de DEBYE-LANDAU à pente positive, tandis que les branches à

Branches de dispersion du même  
modèle à 3 "bags" pour une dérive  
de  $1.5 V_T$

$V_D = 1.5$   
modèle à 3 "bags"

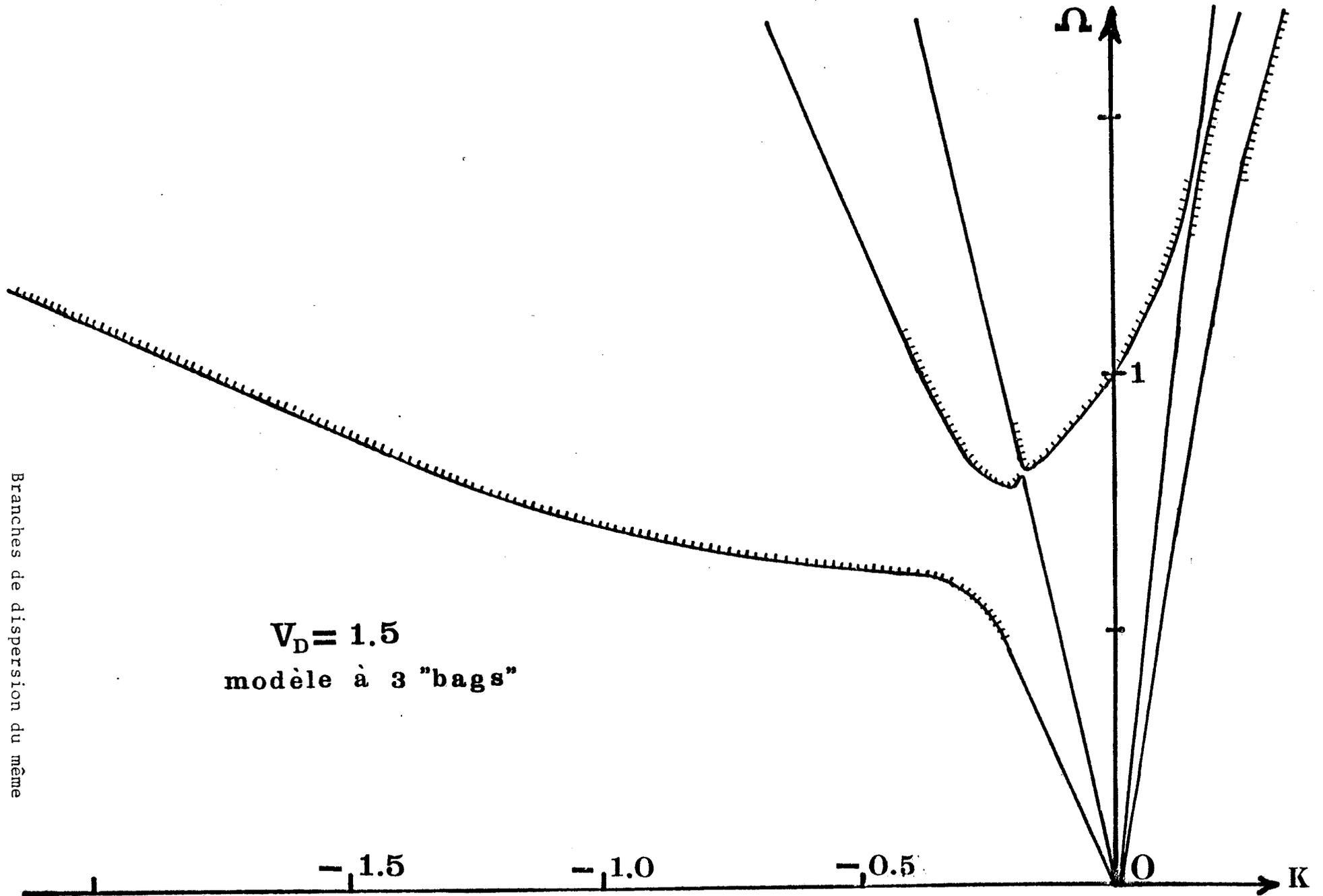
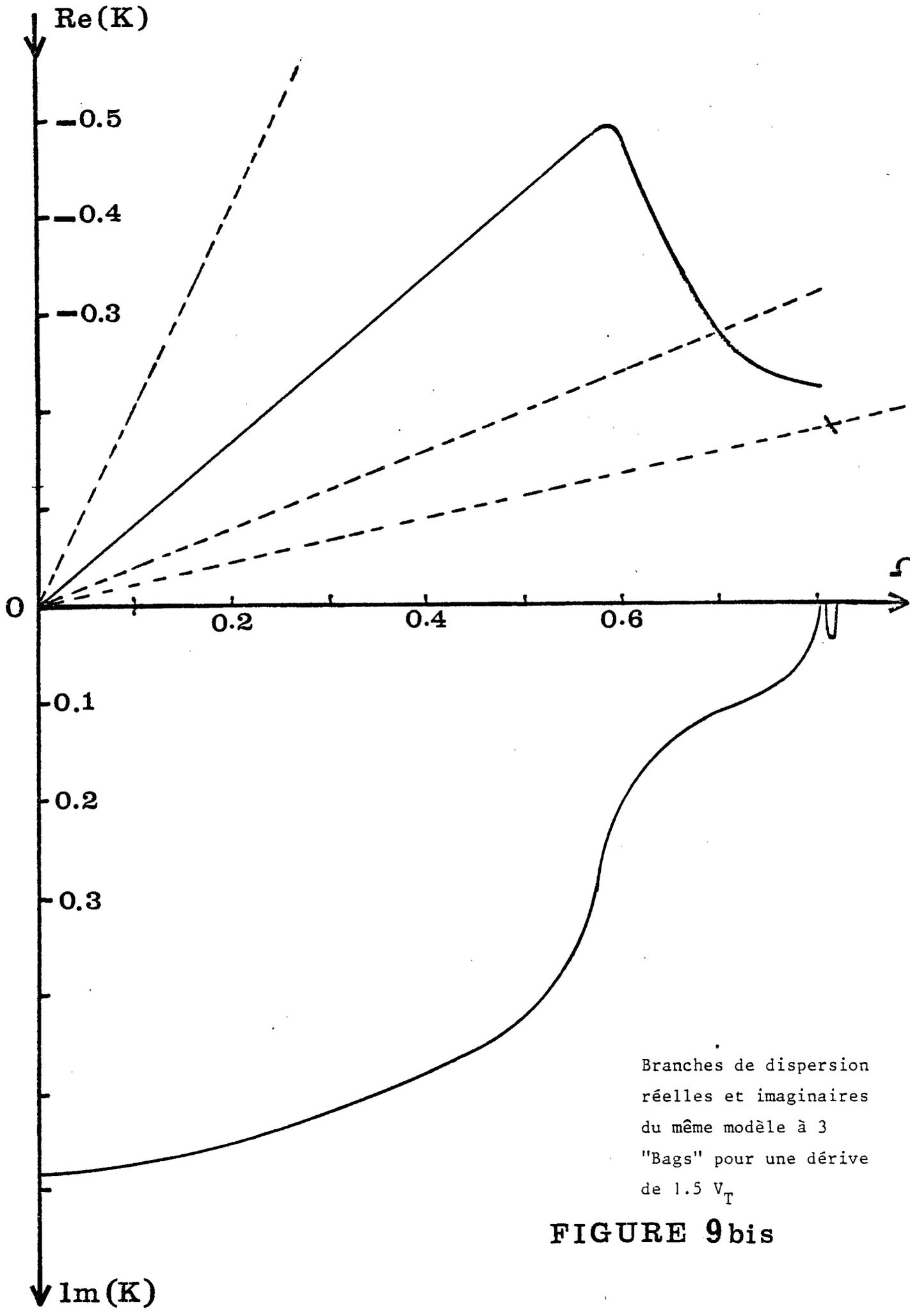
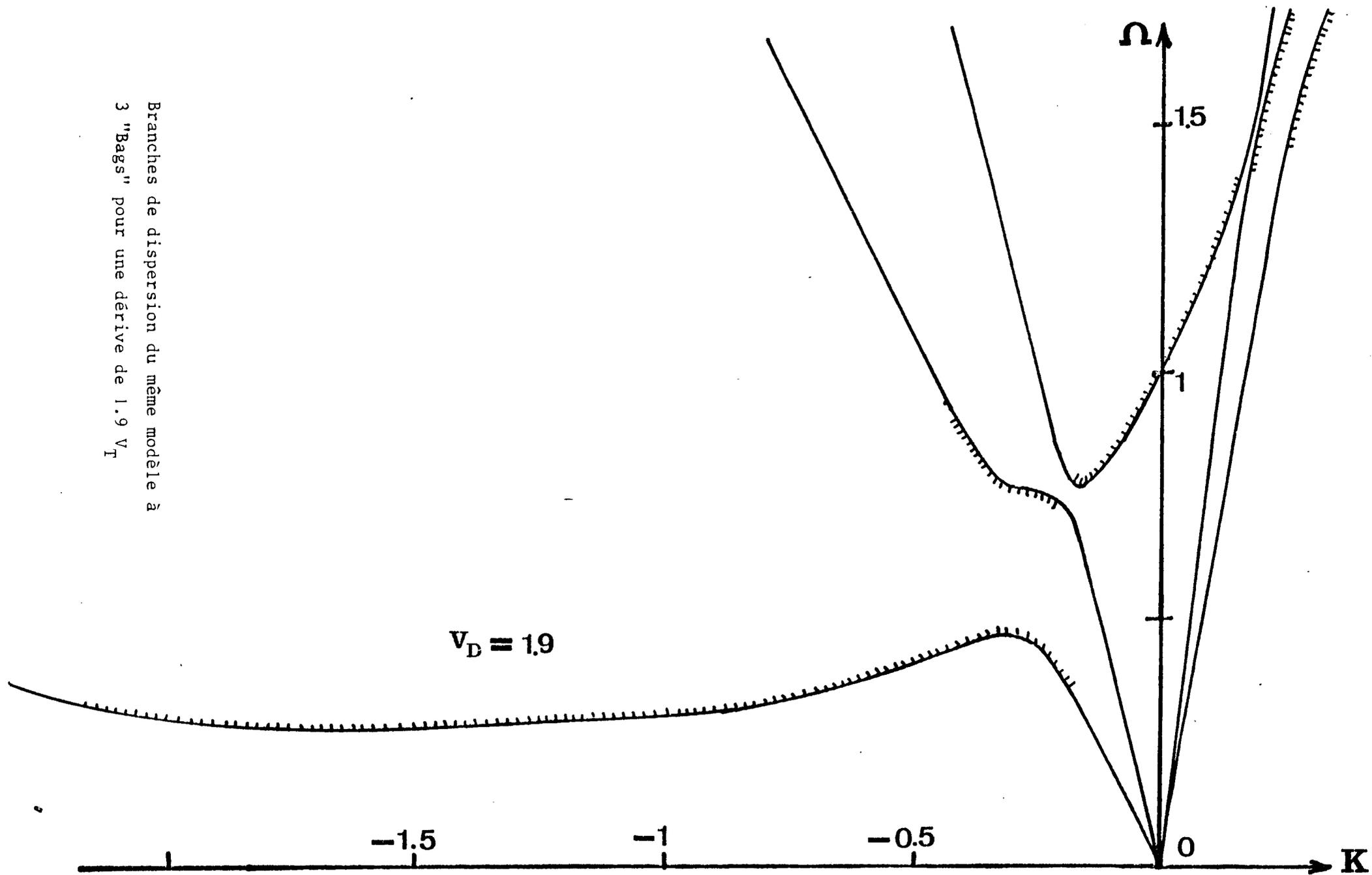


FIGURE 9



Branches de dispersion  
réelles et imaginaires  
du même modèle à 3  
"Bags" pour une dérive  
de  $1.5 V_T$

FIGURE 9bis



Branches de dispersion du même modèle à  
 3 "Bags" pour une dérive de  $1.9 V_T$

$V_D = 1.9$

FIGURE 10

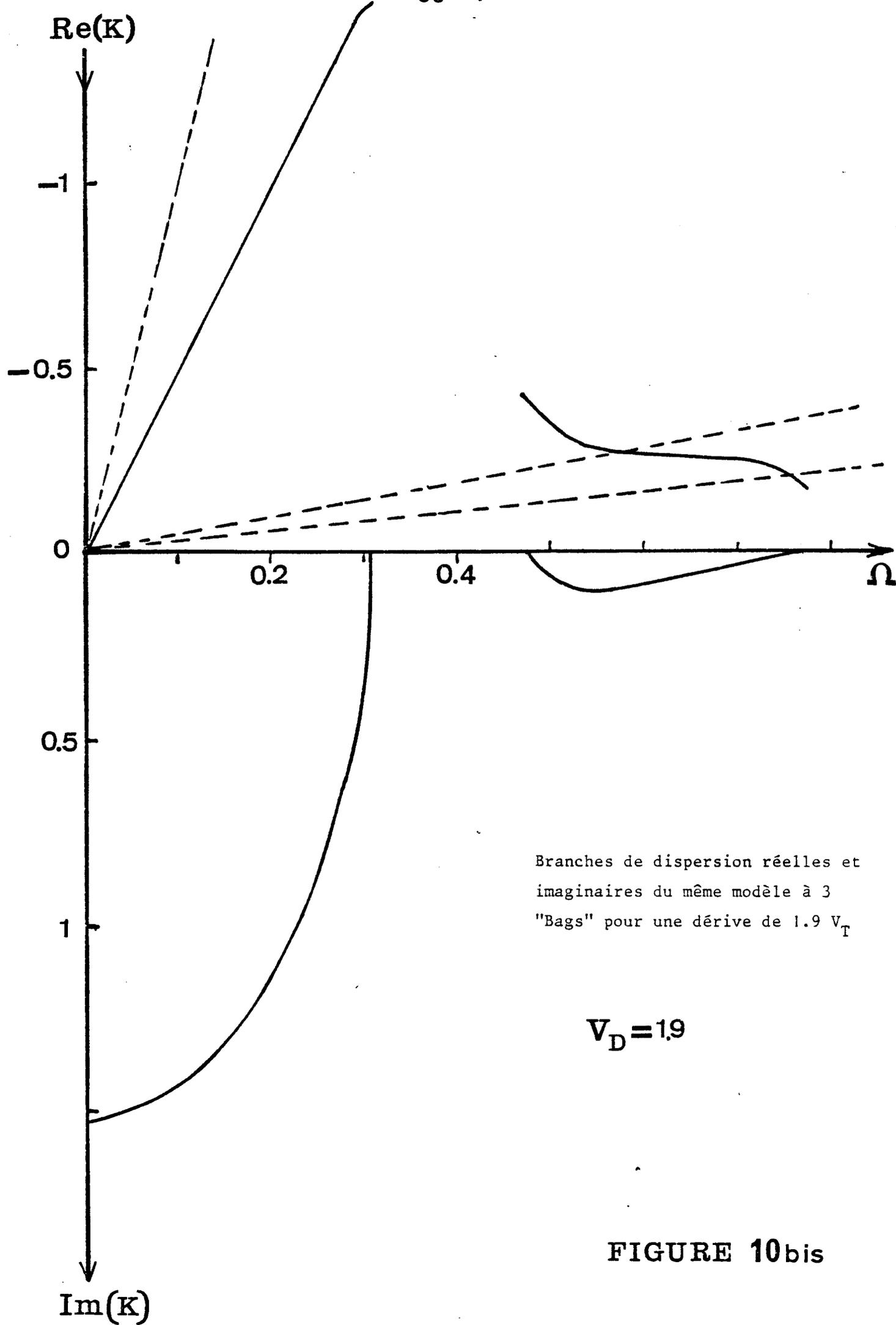


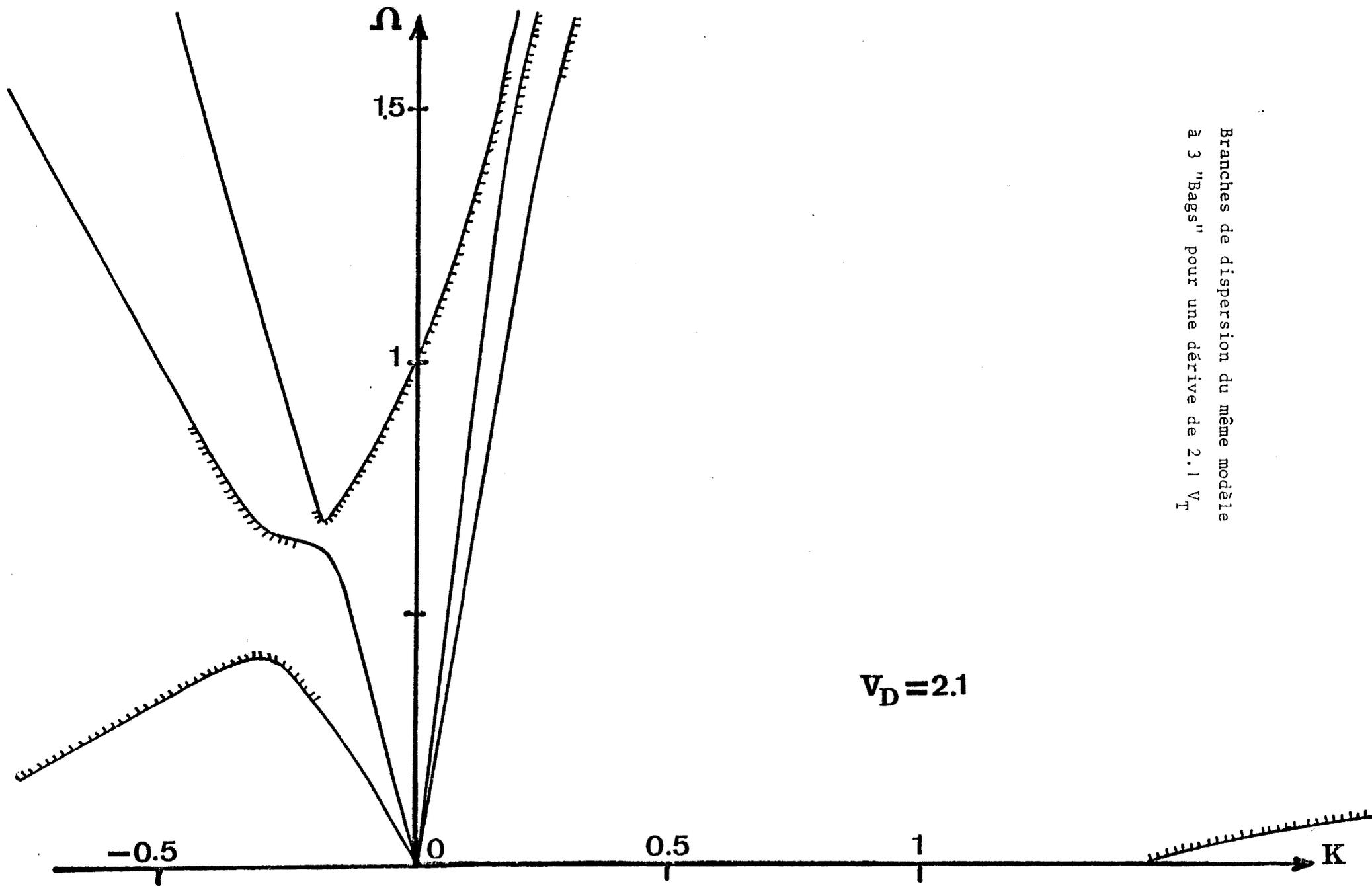
FIGURE 10bis

$K$  négatif subissent une "rotation" dans le même sens, tendant à les écarter de l'axe  $\Omega$ . Les figures 7 bis et 8 bis montrent le comportement de l'une des deux racines complexes conjuguées, pouvant être appelées par comparaison au cas sans dérive "racines de DEBYE", et qui apparaissent dans l'intervalle  $[0, \Omega'_p]$  avec  $\Omega'_p < 1$ . Ces deux racines s'écartent peu de l'axe  $K$  imaginaire et ont, à la limite  $\Omega$  tendant vers 0, le comportement étudié précédemment pour  $D < 0$ . Remarquons finalement, que mis à part les branches de DEBYE-LANDAU, toutes les autres sont strictement monotones.

- Lorsque la vitesse de dérive devient supérieure à la vitesse thermique comme pour la figure 9 où  $V_D = 1.5$ , nous constatons que globalement toutes les remarques du paragraphe précédent persistent, mais que de plus, et c'est là un fait nouveau, l'une des branches du demi plan  $K$  négatif, ne demeure plus strictement monotone, et présente un brusque "zig-zag" qui prolonge le minimum de la branche de DEBYE-LANDAU, et qui se traduit sur la figure 9 bis par une paire de racines complexes conjuguées à très brève incurssion dans le plan complexe.

- Les figures 10 et 10 bis ( $V_D = 1.9$ ) et 11 et 11 bis ( $V_D = 2.1$ ) sont relatives à une vitesse de dérive proche de l'abscisse en vitesse d'un "Bag" contenant un grand nombre de particules. La signature des branches de dispersion traduit le passage limite  $V_D = \alpha$  entre l'allure des figures 3 et 4. Les figures 10 bis et 11 montrent lorsqu'on fait tendre  $\Omega$  vers zéro, le comportement déjà étudié relatif au changement de signe du terme  $D$ .

- Les figures 12 ( $V_D = 2.5$ ), 13 ( $V_D = 3.5$ ) et 14 ( $V_D = 4.5$ ) montrent comment, lorsque la dérive augmente, on tend à avoir pour les très fortes dérives (voir figure 15 où  $V_D = 10$ ) une propagation de type faisceau de température négligeable : l'effet de dérive dissymétrise la branche de DEBYE-LANDAU en faisant glisser son minimum vers les  $K$  négatifs et les  $\Omega$  plus petits ; ce minimum est prolongé dans la même direction par le "zig-zag" de l'une des autres branches de dispersion ; les branches à pente négative perdent de plus en plus d'excitation ;



Branches de dispersion du même modèle  
 à 3 "Bags" pour une dérive de 2.1  $V_T$

FIGURE 11

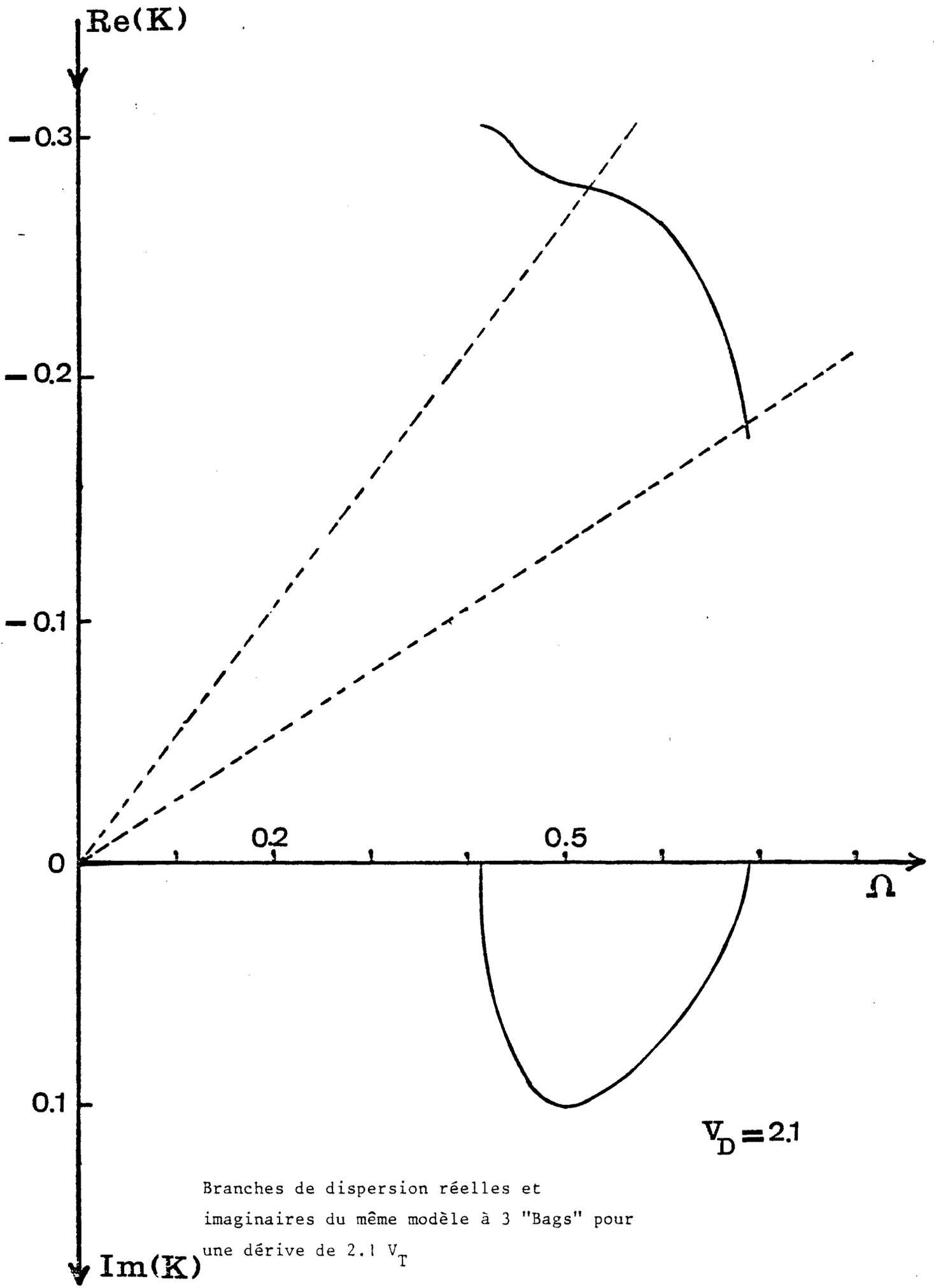


FIGURE 11bis

Branches de dispersion du même modèle  
à 3 " Bags" pour une dérive de 2.5  $V_T$

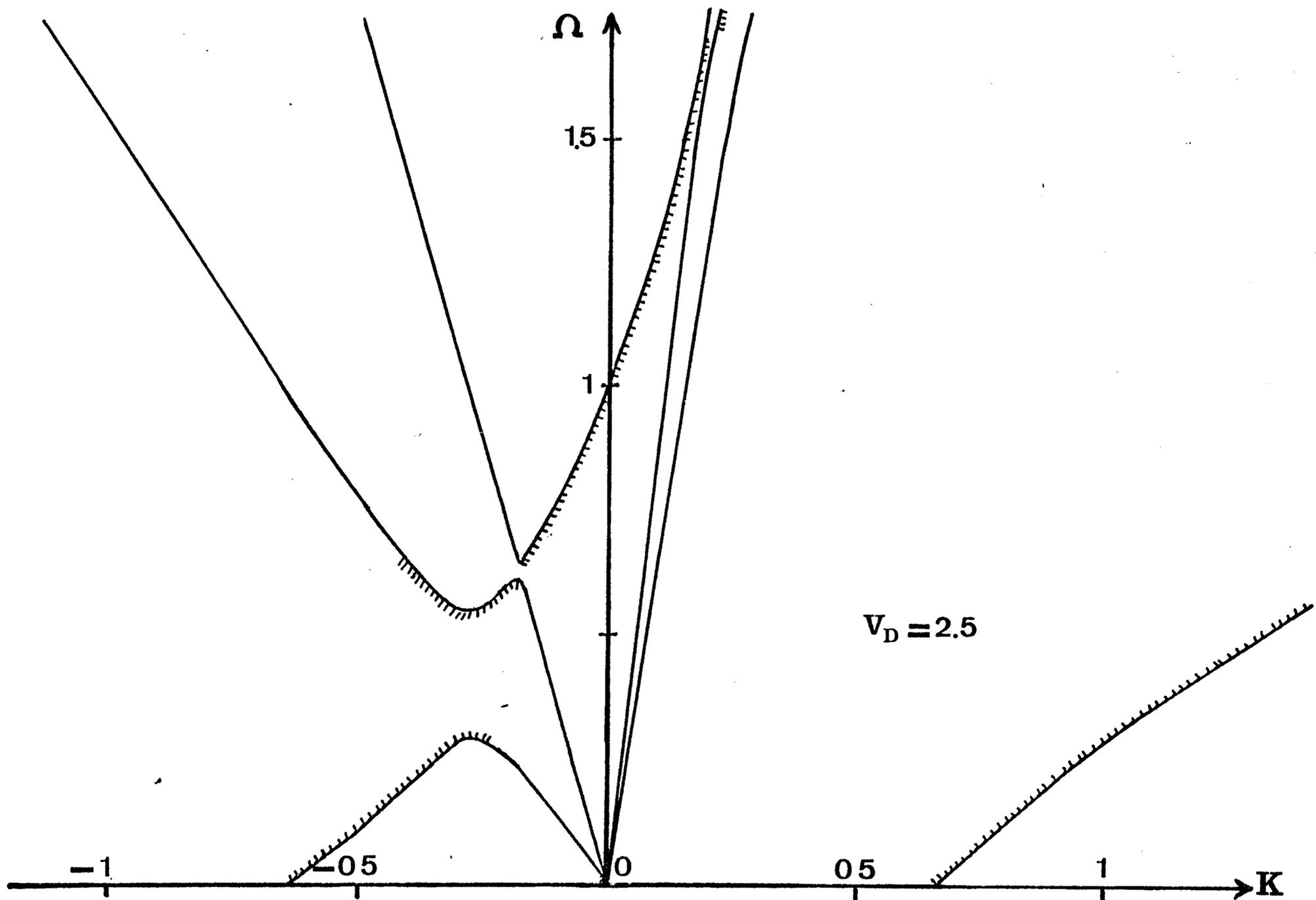


FIGURE 12

Branches de dispersion du même modèle  
à 3 "Bags" pour une dérive de 2.5  $V_T$

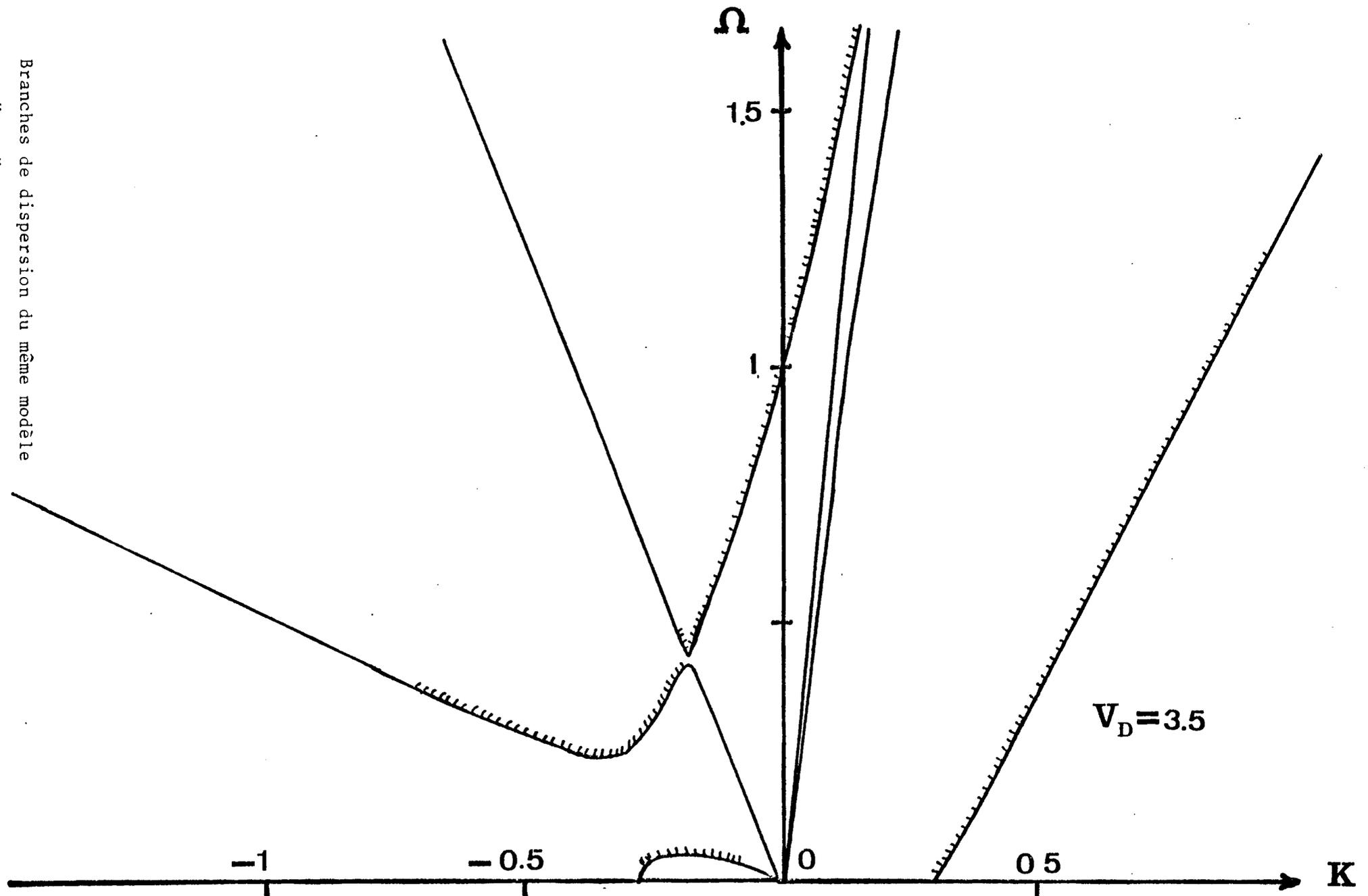
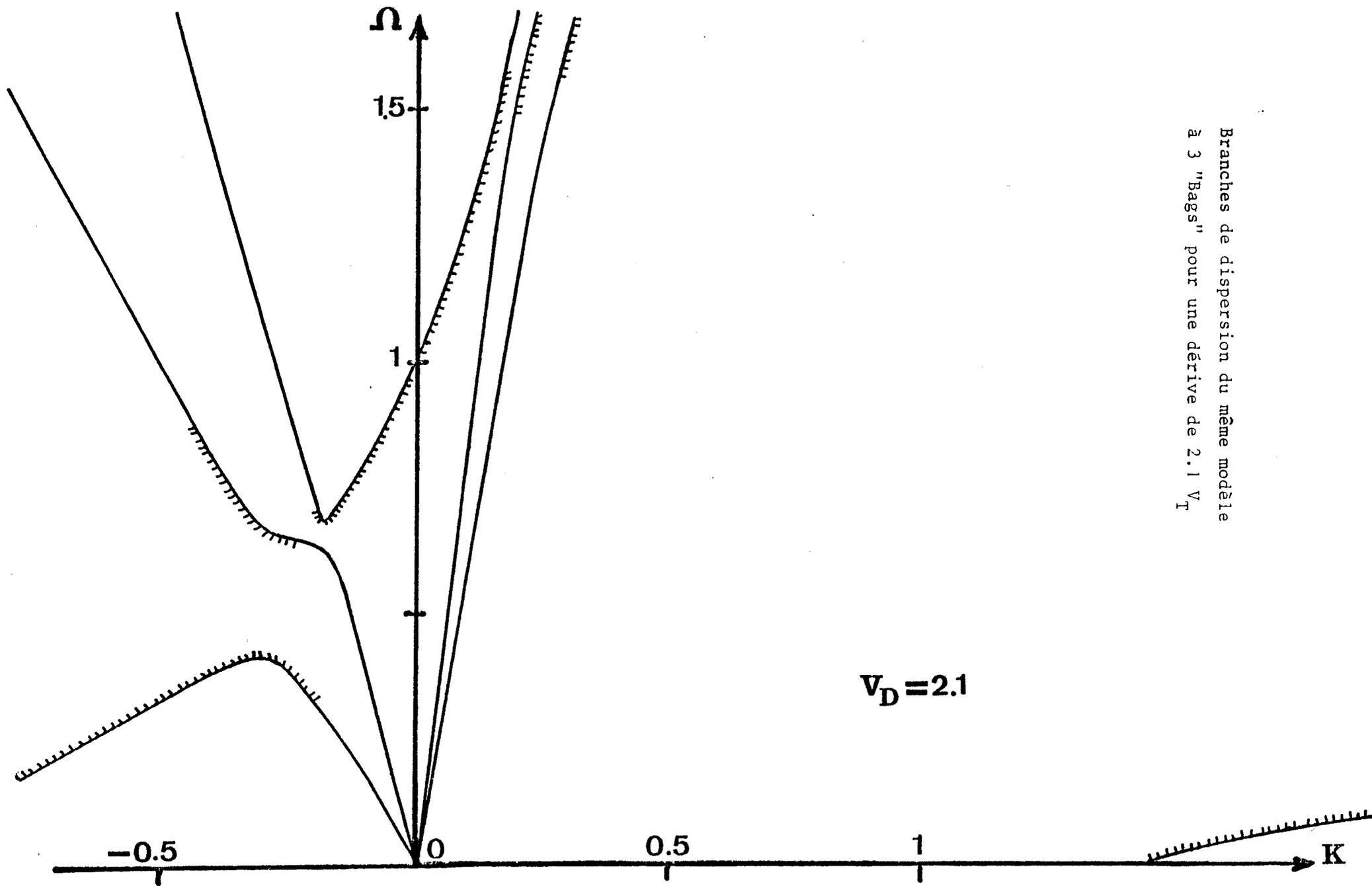


FIGURE 13



Branches de dispersion du même modèle  
 à 3 "Bags" pour une dérive de  $2.1 V_T$

FIGURE 11

Branches de dispersion du même modèle  
à 3 " Bags" pour une dérive de 2.5  $V_T$

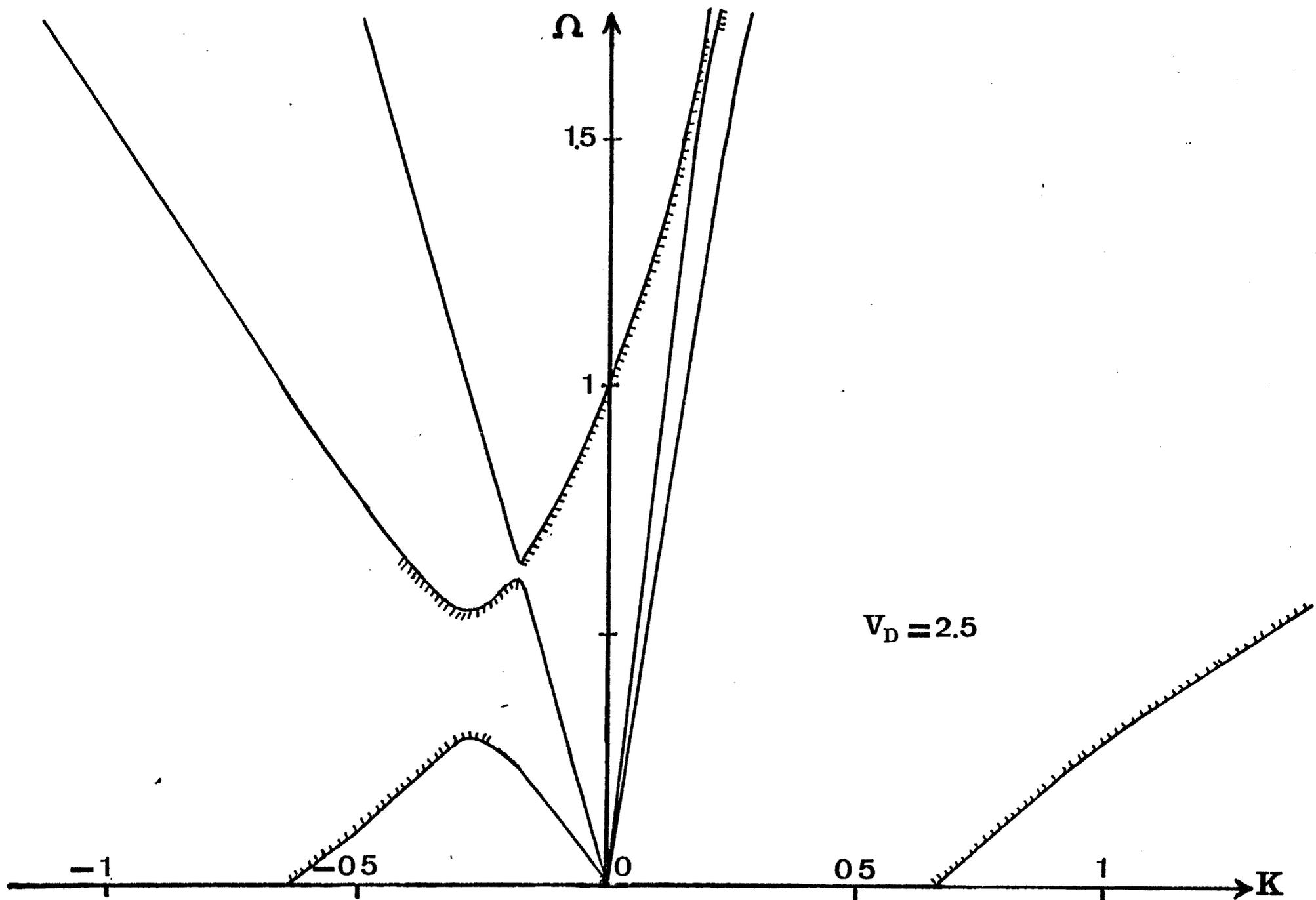


FIGURE 12

Branches de dispersion du même modèle  
à 3 "Bags" pour une dérive de 2.5 V<sub>T</sub>

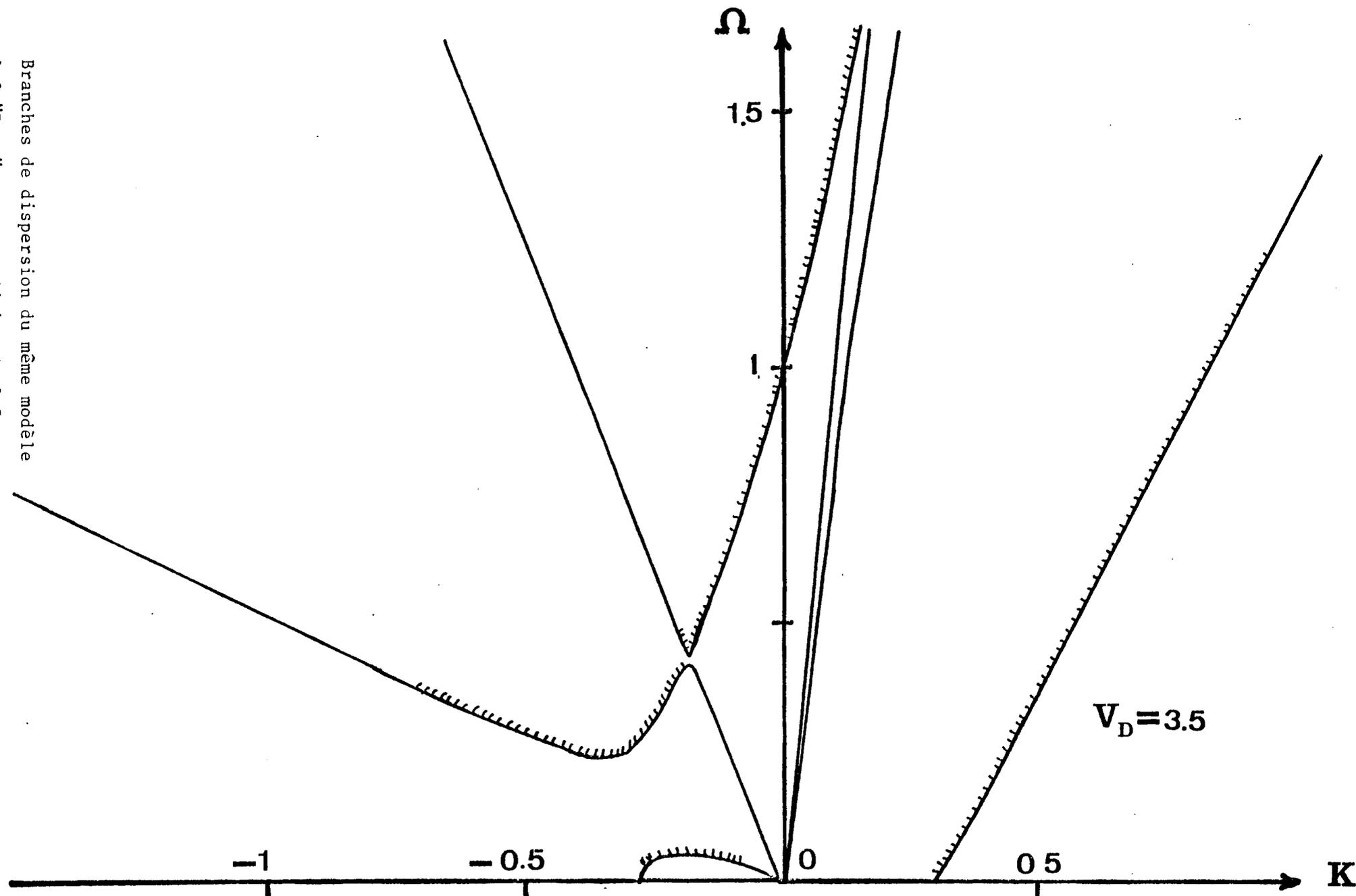
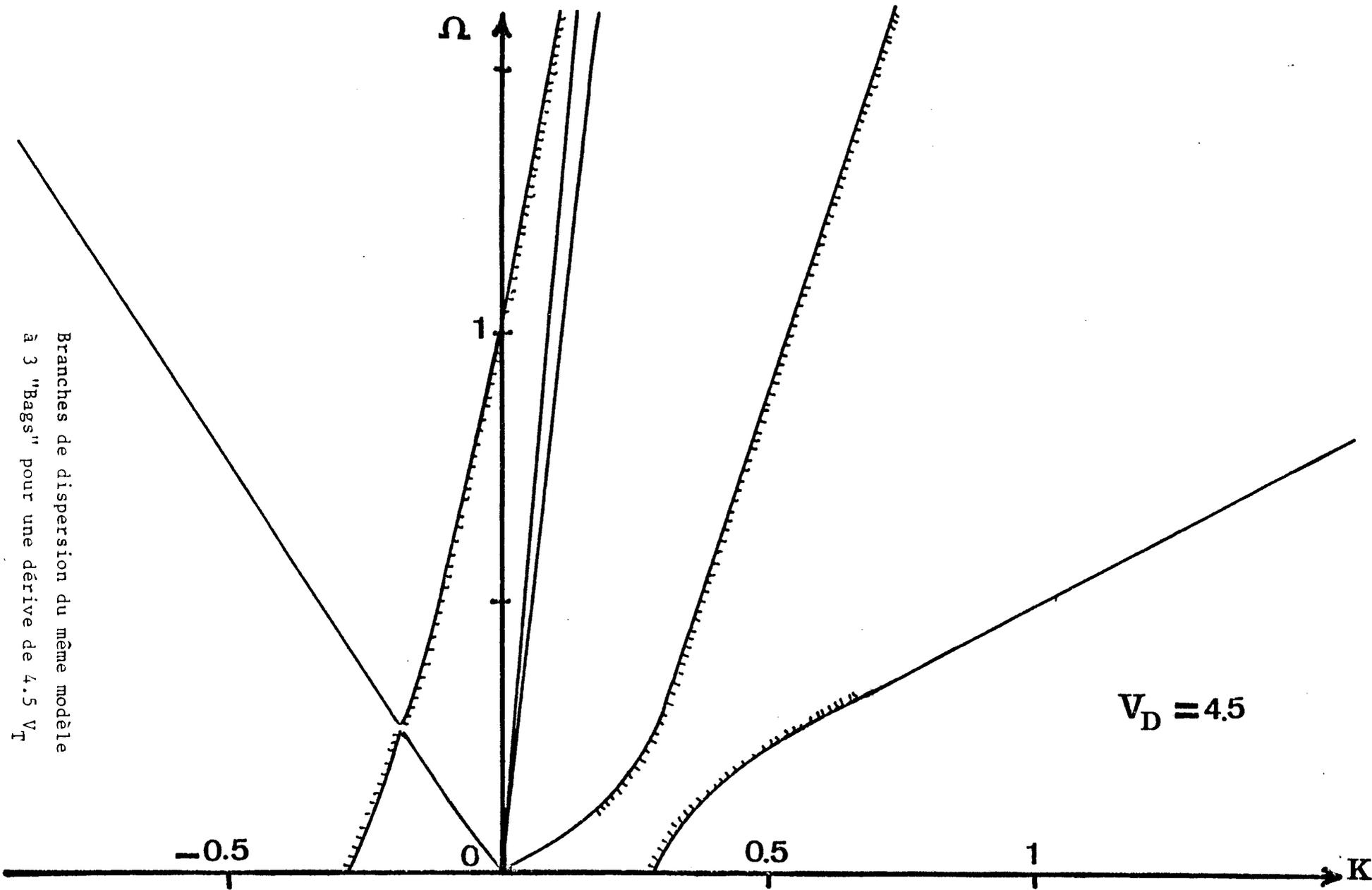
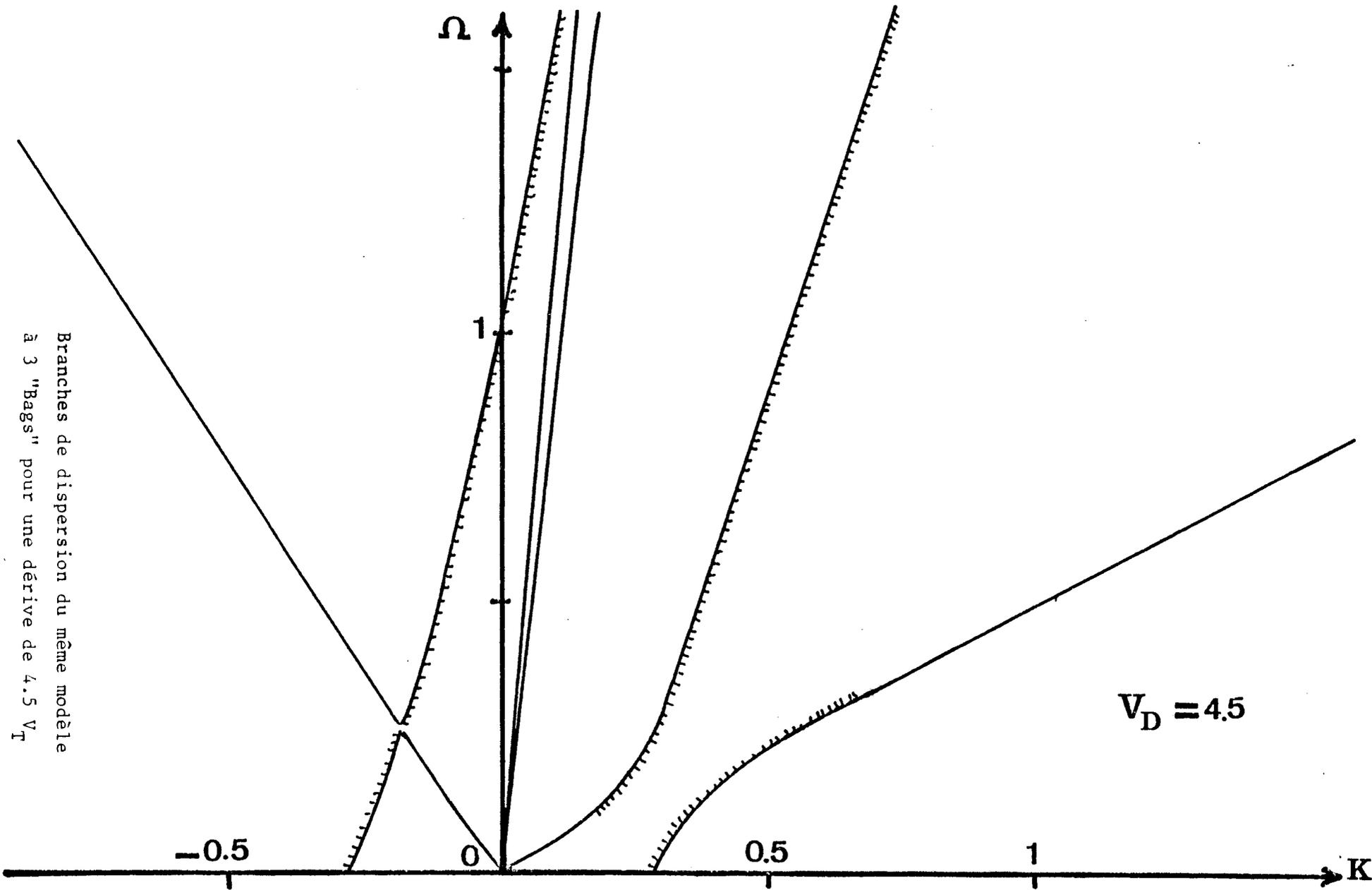


FIGURE 13



Branches de dispersion du même modèle  
 à 3 "Bags" pour une dérive de  $4.5 V_T$

FIGURE 14



Branches de dispersion du même modèle  
 à 3 "Bags" pour une dérive de  $4.5 V_T$

FIGURE 14

Branches de dispersion du même modèle à 3 "Bags"  
pour une dérive de 01  $V_T$

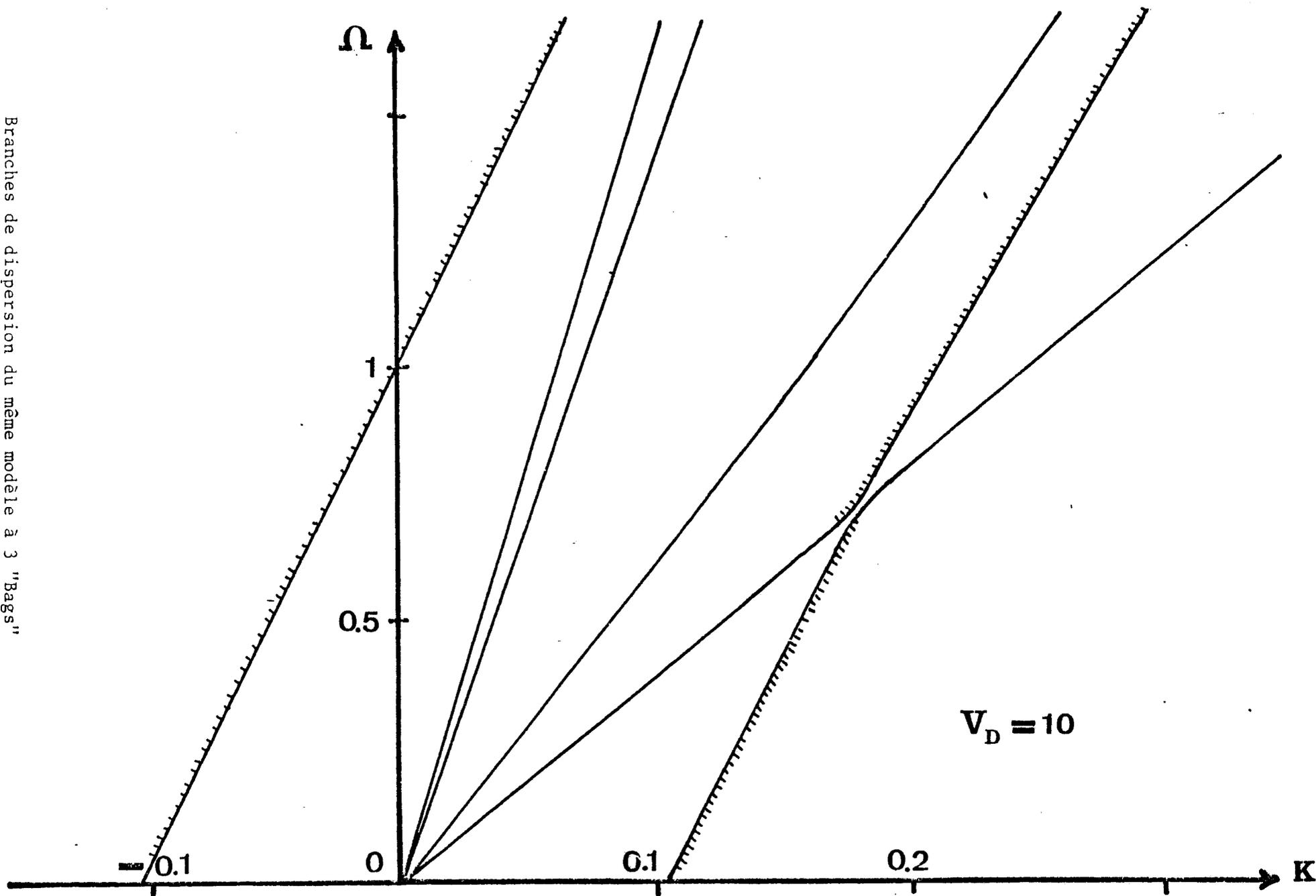


FIGURE 15

les branches à pente positive tendent à former l'une des branches du mode faisceau, l'autre étant donnée par la réapparition dans le demi plan  $k$  positif des branches du demi plan  $k$  négatif ayant disparu de ce demi plan par suite de leur "rotation".

c) Etude du cas d'un modèle à 100 Bags

L'étude numérique montre 2 comportements différents des branches de dispersion selon la valeur de la vitesse de dérive.

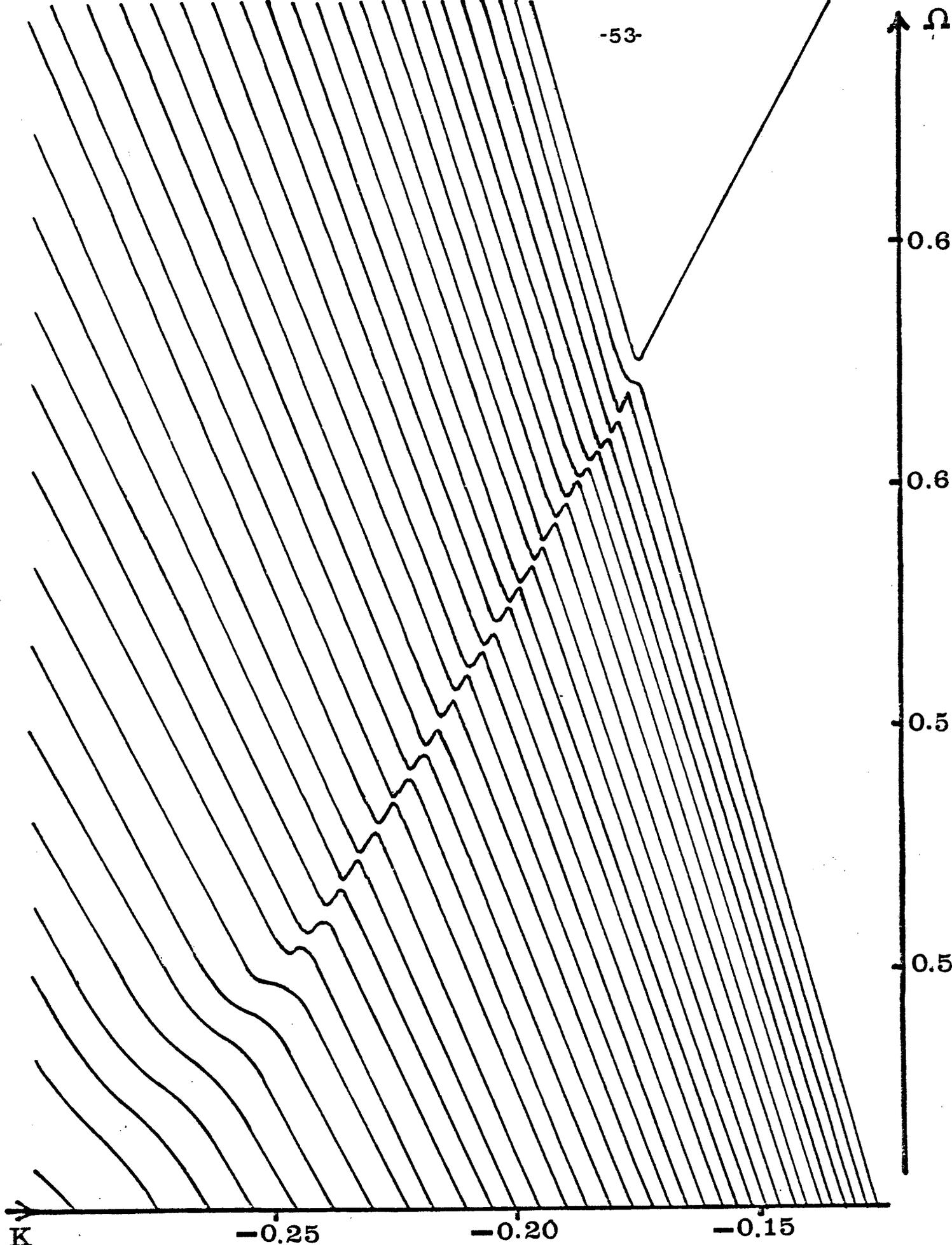
1) Cas où la vitesse de dérive est inférieure à la vitesse thermique

La branche de DEBYE-LANDAU se dissymétrise progressivement comme dans le cas du modèle à 3 "Bags", et le faisceau des autres branches subit une "rotation" non uniforme dans le plan  $(\Omega, K)$ , dans le sens direct, conduisant à une "compression" des branches  $K$  positif et à une "dilatation" des branches  $K$  négatif. Nous remarquerons tout particulièrement que toutes les branches formant le faisceau centré à l'origine sont strictement monotones.

2) Cas où la vitesse de dérive est supérieure à la vitesse thermique

De même que dans le cas du modèle à 3 Bags, certaines des branches du demi plan  $k$  négatif perdent leur propriété de monotonie et présentent des "zig-zag" au voisinage desquels il y a très brève incursion des pôles dans le plan complexe, cela permettant à l'excitation de se transmettre de branche en branche à travers les asymptotes pour tendre à former l'une des branches du mode faisceau. La figure 16 relative à un modèle à 100 Bags approximant une Maxwellienne, et à une dérive de 2.43 fois la vitesse thermique, montre cette partie intéressante des branches de dispersion et permet de constater l'importance de ce mode de transfert de l'excitation à travers le faisceau des asymptotes des branches de dispersion centré à l'origine.

Les autres branches du demi plan  $K$  positif ont un comportement analogue à celles du modèle à 3 "Bags" c'est à dire subissent une "rotation" dans le sens direct tendant à les comprimer le long de la branche de DEBYE-LANDAU, dissymétrisée à pente



$N=100$   $V_D=2.43$

Comportement local des branches de dispersion  
d'un modèle à 100 Bags approximant une  
maxwellienne

**FIGURE 16**

positive. Les branches du demi-plan  $k$  négatif qui disparaissent de ce demi-plan par suite de la rotation d $\hat{u}$ e à la dérive, réapparaissent dans le demi-plan  $k$  positif, pour former progressivement l'autre branche du mode faisceau.

CHAPITRE III : Calcul traditionnel du champ forcé

Introduction

Le chapitre précédent a montré l'existence de pôles simples, réels ou complexes et éventuellement celle d'un pôle double. Connaissant les pôles de l'intégrale (7) qui donne le champ, nous allons calculer celle-ci par une méthode de résidus. Etant donné l'existence d'une exponentielle  $\exp(-iKX)$  au numérateur de l'expression à intégrer, le contour d'intégration (Voir figure 17) sera fermé à l'infini par un demi-cercle dans le demi-plan des imaginaires négatifs (resp. positifs) pour les distances positives (resp. négatives). Le reste du contour consistera en l'axe réel pour une excitation dipolaire, et pour une excitation monopolaire, il faudra exclure l'origine par un demi-cercle de rayon tendant vers zéro, la contribution de ce pôle à l'intégrale donnant le champ froid.

Les pôles réels à considérer à l'intérieur des contours d'intégration "amont" (correspondant aux distances négatives) ou "aval" (correspondant aux distances positives) seront déterminés en fonction de leur déplacement produit par l'adjonction d'une valeur infinitésimale  $-i\nu$  à la fréquence avec  $\nu > 0$ , car comme nous l'avons vu au chapitre I, la variable  $s = i(\Omega - i\nu)$  intervenant dans la transformée de LAPLACE doit être telle que  $\Re(s) > 0$ .

III.1. Calcul des résidus des divers pôles  
et calcul formel du champ

- Soient  $\bar{\Phi}_M(K) = \frac{\exp(-iKX)}{K \varepsilon(K)}$  et  $\bar{\Phi}_D(K) = \frac{\exp(-iKX)}{\varepsilon(K)}$

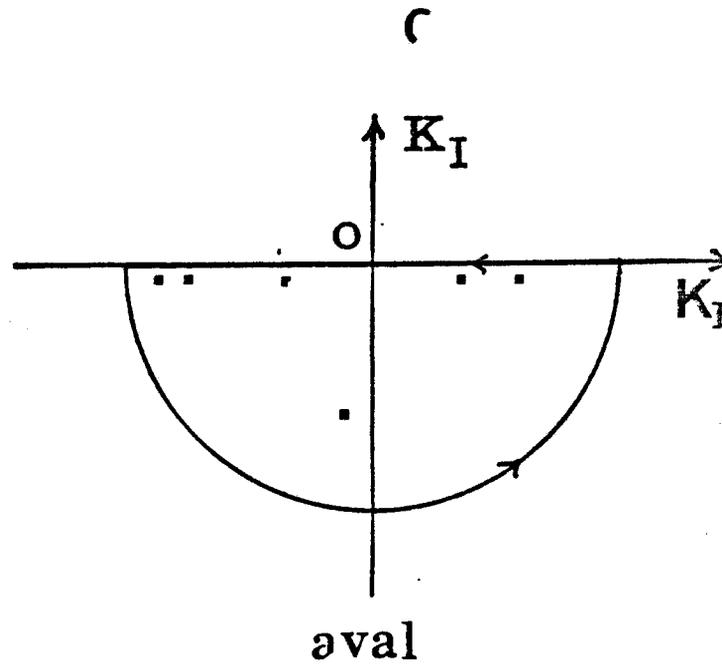
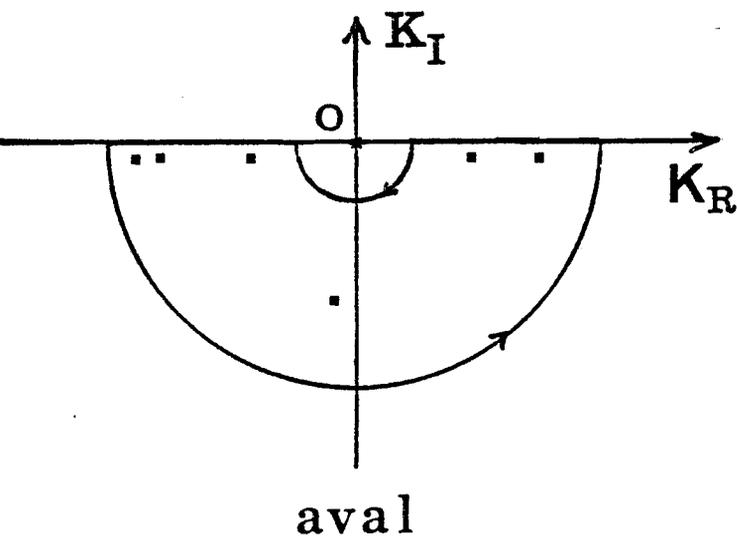
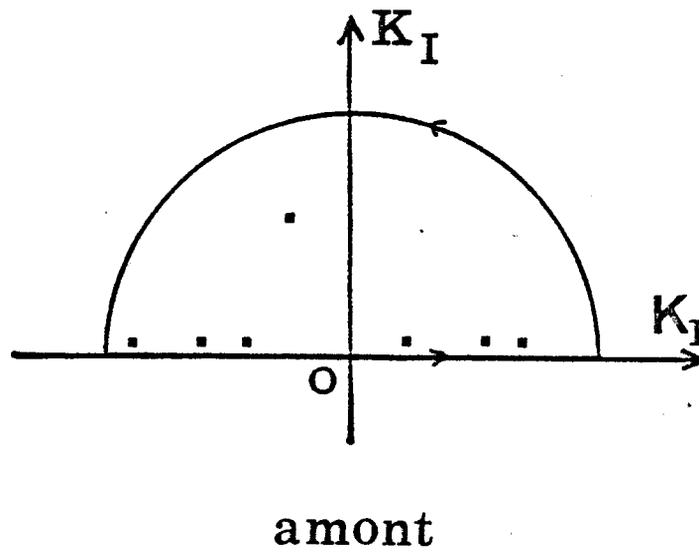
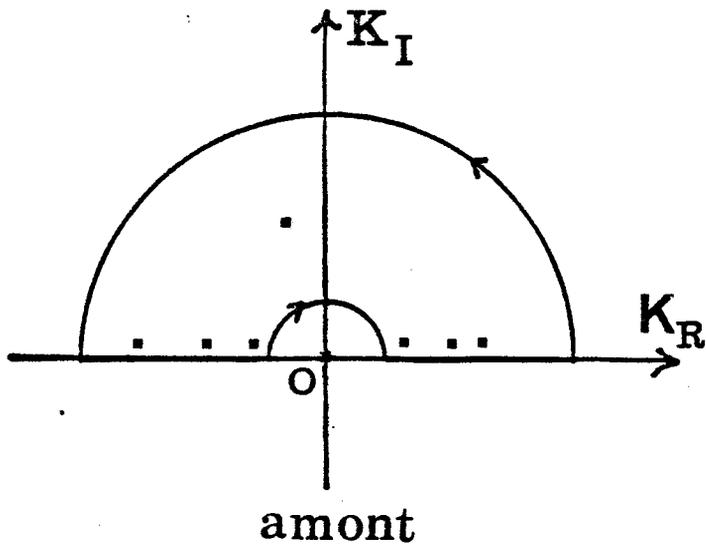
les expressions à intégrer dans les cas d'une excitation monopolaire ou dipolaire.

- Si  $K_i$  est pôle simple de  $\bar{\Phi}_M$  et de  $\bar{\Phi}_D$ , nous avons de façon évidente

$$\mathcal{R}_b[\bar{\Phi}_M, K_i] = \frac{\exp(-iK_i X)}{K_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K}\right)_{K_i}} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_b[\bar{\Phi}_D, K_i] = \frac{\exp(-iK_i X)}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K}\right)_{K_i}} \quad (11)$$

# MONOPOLAIRE

# DIPOLAIRE



### FIGURE 17

Contours d'intégration par méthode de Résidus

Pour la singularité à l'origine de  $\bar{\Phi}_M$  nous avons :

$$\mathcal{R}[\bar{\Phi}_M, 0] = \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right)^{-1} \quad (12)$$

- Si  $K_i$  est pôle double de  $\bar{\Phi}_M$  et  $\bar{\Phi}_D$  nous aurons

$$\mathcal{R}[\bar{\Phi}_M, K_i] = \lim_{K \rightarrow K_i} \frac{\partial}{\partial K} \left[ (K - K_i)^2 \frac{\exp(-i K X)}{K \varepsilon(K)} \right]$$

En posant  $\varepsilon(K) = (K - K_i)^2 \theta(K)$  avec

$$\theta(K) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial^n \varepsilon}{\partial K^n}\right)_{K_i} (K - K_i)^{n-2}}{n!}$$

On obtient

$$\theta(K_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2}\right)_{K_i} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial K}\right)_{K_i} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial K^3}\right)_{K_i}$$

d'où

$$\mathcal{R}[\bar{\Phi}_M, K_i] = \frac{-2 \exp(-i K_i X)}{K_i^2} \left\{ \frac{i X + K_i + 1}{\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2}\right)_{K_i}} + \frac{\left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial K^3}\right)_{K_i} K_i}{3 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2}\right)_{K_i}^2} \right\}$$

et

$$\mathcal{R}[\bar{\Phi}_D, K_i] = -2 \exp(-i K_i X) \left\{ \frac{i X}{\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2}\right)_{K_i}} + \frac{\left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial K^3}\right)_{K_i} K_i}{3 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2}\right)_{K_i}^2} \right\} \quad (13)$$

Remarquons que ces résidus contiennent une partie spatiale (fonction de la distance X). On pourrait penser que le cas d'un pôle double puisse être totalement ignoré du fait qu'il ne se présente que pour un ensemble de fréquences  $\Omega$  de mesure nulle. En fait, du point de vue numérique, si deux pôles simples sont suffisamment proches, on aura intérêt à les considérer comme étant un pôle double, ce qui permettra de traiter sans aucune difficulté numérique la convergence en partie principale (voir paragraphe suivant), des résidus relatifs à ces pôles simples, qui divergent séparément en raison du terme

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k}$  au dénominateur qui tend vers zéro, lorsque ces pôles simples se rapprochent pour donner un pôle double. Nous reviendrons d'ailleurs longuement sur ce problème qui implique la connaissance de la nature amont-aval des pôles de dispersion.

- Par passage à la limite des contours d'intégration on peut montrer en utilisant les lemmes de JORDAN, que la contribution de l'intégrale le long du demi-cercle tend vers zéro lorsque celui-ci s'éloigne à l'infini, et que dans le cas d'une excitation monopolaire, celle sur le petit demi-cercle entourant l'origine donne à la limite le champ froid  $1/2 (1 - 1/\Omega^2)$ . Nous obtenons finalement :

Pour une excitation monopolaire

$$E(X > 0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{2(1-1/\Omega^2)} + \sum_{\substack{\text{pôles aval} \\ k_i}} \mathcal{R}_0[\Phi_M, k_i] \right\} \quad (14)$$

$$E(X < 0) = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{2(1-1/\Omega^2)} + \sum_{\substack{\text{pôles amont} \\ k_i}} \mathcal{R}_0[\Phi_M, k_i] \right\}$$

Pour une excitation dipolaire

$$E(X > 0) = \frac{-i\sigma\Delta}{\varepsilon_0} \sum_{\substack{\text{pôles aval} \\ k_i}} \mathcal{R}_0[\Phi_D, k_i] \quad (15)$$

$$E(X < 0) = \frac{i\sigma\Delta}{\varepsilon_0} \sum_{\substack{\text{pôles amont} \\ k_i}} \mathcal{R}_0[\Phi_D, k_i]$$

### III.2. Discontinuité du champ à l'origine dans le cas d'une excitation monopolaire

#### a) Cas où tous les pôles sont simples (NOYER (1973))

Nous pouvons écrire

$$\Phi_M(k) = \frac{1}{k \varepsilon(k)} = \frac{1}{k \prod_{i=1}^{2N} (k - k_i)} = \frac{1}{(1 - 1/\Omega^2)k} + \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{k_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \right)_{k_i} (k - k_i)}$$

En multipliant par  $K$  et en faisant tendre  $K$  vers l'infini :

$$\frac{1}{\varepsilon(\infty)} = 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega^2}} + \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{K_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_i}} \quad (16)$$

D'autre part :

$$E(X=\sigma^+) - E(X=\sigma^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega^2}} + \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{K_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_i}} \right\} \quad (17)$$

La comparaison de (16) et (17) donne bien une discontinuité du champ de  $\sigma/\varepsilon_0$ .

b) Cas où il existe un pôle double  $K_0$

$$\Phi_M(K) \text{ s'écrit alors } \Phi_M(K) = \frac{1}{K (K-K_0)^2 \prod_{i=1}^{2N-2} (K-K_i)} \quad \text{soit}$$

$$\Phi_M(K) = \frac{\alpha'}{K} + \frac{\beta'}{(K-K_0)^2} + \frac{\gamma'}{K-K_0} + \sum_{i=1}^{2N-2} \frac{\delta_i'}{K-K_i} \quad (18)$$

avec

$$\alpha' = \left( K \Phi_M(K) \right)_{K=0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega^2}}$$

$$\beta' = \left( \frac{(K-K_0)^2}{K \varepsilon(K)} \right)_{K=K_0} = \frac{2}{K_0 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_0}}$$

$$\delta_i' = \left( \frac{K-K_i}{K \varepsilon(K)} \right)_{K_i} = \frac{1}{K_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_i}}$$

En multipliant (18) par K et en faisant tendre K vers l'infini :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega^2}} + \gamma' + \sum_{i=1}^{2N-2} \frac{1}{k_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \right)_{k_i}} = 1 \quad (19)$$

La discontinuité du champ à l'origine est donnée par

$$E(x=0^+) - E(x=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega^2}} + \sum_{i=1}^{2N-2} \frac{1}{k_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \right)_{k_i}} - \frac{2}{k_0^2} \left( \frac{1}{\left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} \right)_{k_0}} + \frac{\left( \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial k^3} \right)_{k_0} k_0}{3 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} \right)_{k_0}^2} \right) \right\}$$

Elle sera égale à  $\sigma/\varepsilon_0$  si l'on a

$$\gamma' = \frac{-2}{k_0^2} \left( \frac{1}{\left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} \right)_{k_0}} + \frac{\left( \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial k^3} \right)_{k_0} k_0}{3 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} \right)_{k_0}^2} \right) \quad (20)$$

on peut montrer qu'il en est bien ainsi en calculant  $\mathcal{R}(\Phi_M, K_0)$  comme étant le coefficient de  $(K - K_0)^{-1}$  dans le développement en série de LAURENT de  $\Phi_M$  écrit sous la forme :

$$\Phi_M(K) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(K - K_0)^j}{j!} (-iX)^j \exp(-iK_0 X) \right) \left( \frac{\alpha'}{K} + \frac{\beta'}{(K - K_0)^2} + \frac{\gamma'}{K - K_0} + \sum_{i=1}^{2N-2} \frac{\delta_i}{K - K_i} \right)$$

ce qui donne

$$\mathcal{R}[\Phi_M, K_0] = (-iX \beta' + \gamma') \exp(-iK_0 X) \quad (21)$$

Il suffit de faire  $X = 0$  dans (20) et d'utiliser la valeur de  $\beta'$  pour démontrer (19).

c) Convergence des coefficients d'excitation de deux pôles simples "encadrant" un pôle double

Si  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont deux fréquences proches donnant pour la première deux pôles simples  $K_1$  et  $K_2$  (réels ou complexes) et pour la seconde un pôle double  $K_0$ , nous pouvons écrire en vertu du paragraphe précédent :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega_1^2}} + \sum_{i=3}^{2N} \frac{1}{K_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_i, \Omega_1}} + \sum_{i=1,2} \frac{1}{K_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_i, \Omega_1}} =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\Omega_2^2}} + \sum_{j=3}^{2N} \frac{1}{K_j \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_j, \Omega_2}} + \frac{-2}{K_0^2} \left( \frac{1}{\left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2} \right)_{K_0, \Omega_2}} + \frac{\left( \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial K^3} \right)_{K_0, \Omega_2} K_0}{3 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2} \right)_{K_0, \Omega_2}^2} \right)$$

Lorsque  $\Omega_1$  tend vers  $\Omega_2$ , le terme  $\sum_{i=3}^{2N} \frac{1}{K_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_i, \Omega_1}}$  tend vers  $\sum_{j=3}^{2N} \frac{1}{K_j \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_j, \Omega_2}}$  par continuité, ce qui implique que

$$\lim_{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2} \frac{1}{K_1 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_1, \Omega_1}} + \frac{1}{K_2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)_{K_2, \Omega_1}} = \frac{-2}{K_0^2} \left( \frac{1}{\left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2} \right)_{K_0, \Omega_2}} + \frac{\left( \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial K^3} \right)_{K_0, \Omega_2} K_0}{3 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial K^2} \right)_{K_0, \Omega_2}^2} \right)$$

Cela signifie qu'il y a convergence en "partie principale" des 2 coefficients d'excitations des pôles simples  $K_1$  et  $K_2$  vers celui du pôle double  $K_0$ .

III.3. Détermination de la nature amont-aval de pôles simples

- C'est un problème, qui en principe, ne pose pas de difficultés : le signe de la partie imaginaire du pôle détermine sa nature (signe positif : pôle amont, négatif = aval). Si le pôle

considéré est réel, il suffit d'appliquer la relation de causalité : on se met en régime transitoire en prenant une fréquence  $\Omega$  complexe à petite partie imaginaire négative  $\Omega = \Omega_0 - i\nu$  avec  $\nu > 0$ . Cela conduit à déplacer les pôles de  $1/\varepsilon$  dans le plan complexe, en écartant les pôles initialement (pour  $\Omega = \Omega_0$ ) réels de l'axe réel, et le critère simple des pôles complexes peut alors s'appliquer. A priori il suffit de calculer ce déplacement pour une valeur infinitésimale du paramètre  $\nu$ .

- Soit, donc une fréquence réelle  $\Omega_0$  donnant un pôle  $K_0$  ;  $K_0 = K_0^r + iK_0^i$ . Modifions très légèrement la fréquence  $\Omega = \Omega_0 - i\nu$  avec  $\nu > 0$ . En première approximation le pôle  $K_0$  sera déplacé d'une petite valeur  $dK_0 = dK_0^r + i dK_0^i \neq \left(\frac{dK}{d\Omega}\right)_{\Omega_0} (-i\nu)$  soit  $dK_0 \neq \left(\frac{dK_0^r}{d\Omega} + i \frac{dK_0^i}{d\Omega}\right) (-i\nu)$  d'où

$$dK_0^r \neq \left(\frac{dK_0^i}{d\Omega}\right)_{\Omega_0} \nu \quad dK_0^i \neq -\left(\frac{dK_0^r}{d\Omega}\right)_{\Omega_0} \nu \quad (22)$$

Par conséquent :

Si le pôle  $K_0$  considéré est réel nous aurons :

$$dK_0^r \neq 0$$

$$dK_0^i \neq -\left(\frac{dK}{d\Omega}\right)_{\Omega_0} \nu \quad (23)$$

Cela signifie que le pôle se déplacera presque parallèlement à l'axe imaginaire, dans la direction positive si  $\frac{dK}{d\Omega}$  est négatif, (négative si  $\frac{dK}{d\Omega}$  est positif).

Si le pôle  $K_0$  est imaginaire pur, il se déplacera presque parallèlement à l'axe réel ;

Si  $K_0$  et  $K'_0$  sont deux pôles complexes conjugués, ils se déplaceront en première approximation dans le même sens parallèlement à l'axe imaginaire, et en sens opposés parallèlement à l'axe réel.

- Ces diverses remarques permettent donc de préciser la nature des divers pôles :

En différentiant  $\varepsilon(K, \Omega) = 0$  nous obtenons

$$\frac{dK}{d\Omega} = - \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \right)^{-1}$$

avec

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega} = 4 \sum_{\delta=1}^N \frac{\alpha_{\delta} \xi_{\delta} (\Omega - KV_D)}{[(KV_D - \Omega)^2 - K^2 \alpha_{\delta}^2]^2}$$

et

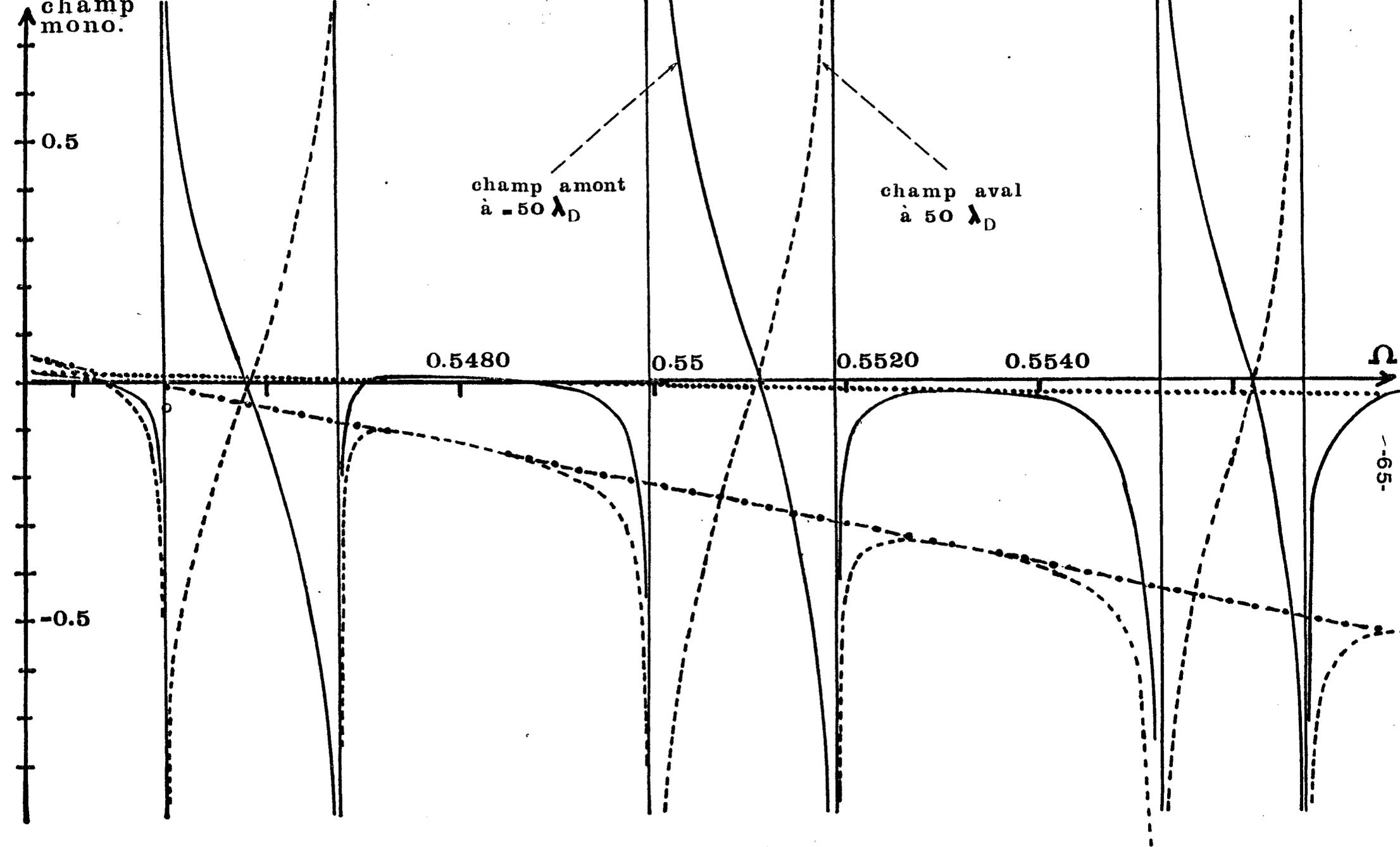
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial K} = \frac{4}{K} \left\{ \frac{1 - \varepsilon(K)}{2} - \Omega (\Omega - KV_D) \sum_{\delta=1}^N \frac{\alpha_{\delta} \xi_{\delta}}{[(KV_D - \Omega)^2 - K^2 \alpha_{\delta}^2]^2} \right\}$$

Cela montre que tous les pôles réels positifs et  $1/\varepsilon$  sont des pôles se déplaçant dans la direction des imaginaires négatifs (pôles aval) puisque, d'une part  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega}$  est du signe  $\Omega - KV_D$  et que d'autre part  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial K}$  est positif pour  $K > \frac{\Omega}{V_D}$  et négatif pour  $0 < \Omega < \frac{\Omega}{V_D}$ . Cela concorde avec le fait que les branches de dispersion du demi-plan  $K > 0$  sont monotones croissantes.

Les relations (23) nous permettent d'affirmer que les pôles appartenant à des branches de dispersion décroissantes  $\frac{dK}{d\Omega} < 0$  seront des pôles amont. Ainsi, au voisinage d'une fréquence donnant un pôle double, les 2 pôles simples réels ou complexes "encadrant" ce pôle double seront l'un de nature amont et l'autre de nature aval.

#### III.4. Calcul du champ monopolaire pour des fréquences ne donnant que des pôles simples

- Connaissant la nature des divers pôles, nous pouvons calculer le champ en utilisant les relations 11, 12 et 13. Pour une dérive de 2.43 fois la vitesse thermique, la figure 18 montre les valeurs des champs amont et aval à une distance fixe de 50 longueurs de DEBYE de la source, en fonction de la fréquence  $\Omega$  forcée.



$$V_D = 2.43 \quad N = 100$$

Discontinuités du champ (méthode traditionnelle) et lissage (emploi correct de la relation de causalité)

FIGURE 18

- Malheureusement le calcul donne des courbes de champ :

qui sont discontinues et tendent vers l'infini pour les fréquences donnant un pôle double. Cela est dû à la divergence des coefficients d'excitation des pôles simples au "voisinage" d'un pôle double,

qui présentent une structure en X dans les bandes de fréquence donnant des pôles complexes conjugués, (donc à excitations conjuguées). La variation très rapide du champ dans ces bandes de fréquence est due à la très forte partie imaginaire de l'excitation de ces pôles complexes.

- Ces effets "passe bande" sont liés à la discrétisation de la fonction de distribution car une modification du nombre de "Bags" va modifier le nombre de bandes de fréquences donnant cette structure en X du champ. (Cela a été vérifié pour la même vitesse de dérive, avec un modèle à 200 "Bags", et pour la même gamme de fréquence). Il faut comparer ces résultats avec ceux, sans problème, donnés par le même modèle dans le cas sans dérive (NOYER, NAVET, FEIX, 1975 et NAVET et BERTRAND, 1971). Le diagramme de la figure 16 fournit la réponse : pour reconstituer le pôle "faisceau rapide" qui devient une assez bonne approximation pour la valeur  $V_D = 2.43$ , le modèle utilise les branches "aval" ( $\frac{d\Omega}{dK} > 0$ ) des courbes de dispersion qui "bout à bout" redonnent le pôle faisceau. Malheureusement le passage d'une branche à l'autre se fait par annulation de  $\frac{d\Omega}{dK}$  au pôle double et par conséquent, avec divergence du coefficient d'excitation. Dans le cas sans dérive, la construction du pôle de Landau par différentes branches de dispersion se faisait sans difficulté. On retrouve d'ailleurs ce même processus pour les dérives faibles qui ne font pas apparaître ces "zig zag" de certaines branches de dispersion.

- Ce phénomène est donc le tribut que l'on doit payer pour avoir discrétisé la fonction de distribution dans le but d'obtenir une fonction diélectrique analytique approximant celle, non analytique du cas continu. Il faut donc étudier le problème de convergence de la relation de dispersion discrète vers celle du cas continu. Cela va faire l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV : Equivalence de la relation de dispersion du  
Modèle M.W.B. avec celle du cas continu -  
Utilisation correcte de la relation de causalité

IV.I. Construction d'un "infini W.B."  
approximant une maxwellienne dérivant  
à la vitesse  $V_D$

Soit  $F_C(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(V - V_D)^2}{2}\right)$  l'équation de la fonction de distribution. Nous pouvons supposer que  $F_C(V) = 0$  en dehors d'un intervalle  $[V_D - \zeta, V_D + \zeta]$ . Nous pouvons choisir un Multi Water Bag tel que

$$\xi_j = \left| \frac{dF_C}{dv}(v_D + j\Delta v) \right| \Delta v$$

où  $\Delta v$  est l'intervalle de discrétisation choisi positif.

La condition de normalisation  $\sum_j 2(j\Delta v) \xi_j = 1$  (24) sera vérifiée seulement si  $\Delta v$  tend vers 0 (propriété des sommes de DARBOUX), c'est à dire si  $N = \zeta / \Delta v$  tend vers l'infini. La fonction étagée correspondant à ce Multi Water Bag sera

$$F_{NST} = \sum_{j=1}^N \left| \frac{dF_C}{dv}(v_D + j\Delta v) \right| \Delta v \left( Y_{(v-v_D+j\Delta v)} - Y_{(v-v_D-j\Delta v)} \right)$$

Nous aurons

$$\frac{dF_{NST}}{dv} = \sum_{j=1}^N \left| \frac{dF_C}{dv}(v_D + j\Delta v) \right| \Delta v \left( \delta_{(v_D-j\Delta v)} - \delta_{(v_D+j\Delta v)} \right)$$

d'où 
$$\mathcal{E}_{NST}(K, \Omega) = 1 - \frac{1}{K^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{NST}(v)}{dv} \frac{1}{v - \Omega/K} dv =$$

et 
$$1 - \frac{\Delta v}{K^2} \sum_{j=1}^N \left| \frac{dF_C}{dv}(v_D + j\Delta v) \right| \left\{ \frac{1}{v_D - j\Delta v - \frac{\Omega}{K}} - \frac{1}{v_D + j\Delta v - \frac{\Omega}{K}} \right\}$$

$$\mathcal{E}_{NST} = 1 - \frac{\Delta v}{K^2} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\left| \frac{dF_C}{dv}(v_D + j\Delta v) \right|}{v_D - j\Delta v - \frac{\Omega}{K}} - \sum_{j=-1}^{-N} \frac{\left| \frac{dF_C}{dv}(v_D - j\Delta v) \right|}{v_D - j\Delta v - \frac{\Omega}{K}} \right\} \quad (25)$$

Comme  $F_c$  est symétrique par rapport à  $V_D$

$$\left| \frac{dF_c}{dv} (V_D - j\Delta v) \right| = \left| \frac{dF_c}{dv} (V_D + j\Delta v) \right| \quad (25)$$

en utilisant la propriété (26) dans la première somme de (25)  
et en remarquant que pour

$$j \in (1, 2, \dots, N) \quad V_D - j\Delta v < V_D \quad \text{donc} \quad \frac{dF_c}{dv} (V_D - j\Delta v) > 0$$

$$j \in (-N, \dots, -2, -1) \quad V_D - j\Delta v > V_D \quad \text{donc} \quad \frac{dF_c}{dv} (V_D - j\Delta v) < 0$$

nous pouvons écrire

$$\mathcal{E}_{NST} = 1 - \frac{1}{K^2} \Delta v \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\frac{dF_c}{dv} (V_D - j\Delta v)}{V_D - j\Delta v - \Omega/K} + \sum_{j=-1}^{-N} \frac{\frac{dF_c}{dv} (V_D - j\Delta v)}{V_D - j\Delta v - \Omega/K} \right\}$$

et comme  $\frac{dF_c}{dv} (V_D) = 0$

$$\mathcal{E}_{NST} = 1 - \frac{1}{K^2} \Delta v \sum_{j=-N}^N \frac{\frac{dF_c}{dv} (V_D + j\Delta v)}{V_D + j\Delta v - \Omega/K} \quad (27)$$

avec la condition de normalisation (24) qui implique

$$\Delta v \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

#### IV.2. Equivalence de $\mathcal{E}_{NST}$ avec le $\mathcal{E}$ du cas continu

$\mathcal{E}_{NST}$  peut être interprété selon la méthode de BERK et BOOK (1969) comme étant la somme des résidus de la fonction

$$\Psi(v) = \cot \pi \left( \frac{v - V_D}{\Delta v} \right) \frac{\frac{dF_c}{dv} (v)}{v - \Omega/K}$$

qui a ses pôles aux points  $v_j = j\Delta v + v_D$  ( $j \in \mathbb{Z}$ )

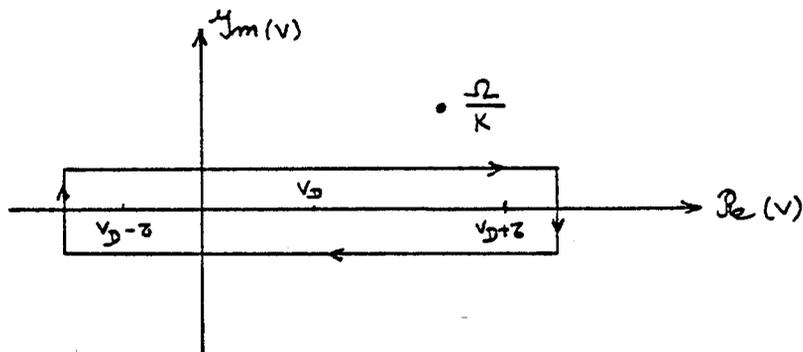
En effet :

$$\mathcal{R}_0[\Psi, v_j] = \frac{\frac{dF_c}{dv}(j\Delta v + v_D)}{\left(j\Delta v + v_D - \frac{\Omega}{K}\right) \frac{\pi}{\Delta v}}$$

Cela permet d'écrire

$$\varepsilon_{NST} = 1 - \frac{1}{K^2} \frac{i}{2} \int_{C^-} \cot q\left(\pi \frac{v-v_D}{\Delta v}\right) \frac{\frac{dF_c}{dv}(v)}{v - \Omega/K} dv \quad (28)$$

où  $C^-$  est le contour suivant



(28) peut encore s'écrire

$$\varepsilon_{NST} = 1 - \frac{i}{2K^2} \left\{ \int_{C^-} \cot q\left(\pi \frac{v-v_D}{\Delta v}\right) \frac{\frac{dF_c}{dv}(v) - \frac{dF_c}{dv}\left(\frac{\Omega}{K}\right)}{v - \Omega/K} dv + \int_{C^-} \cot q\left(\pi \frac{v-v_D}{\Delta v}\right) \frac{\frac{dF_c}{dv}\left(\frac{\Omega}{K}\right)}{v - \frac{\Omega}{K}} dv \right\}$$

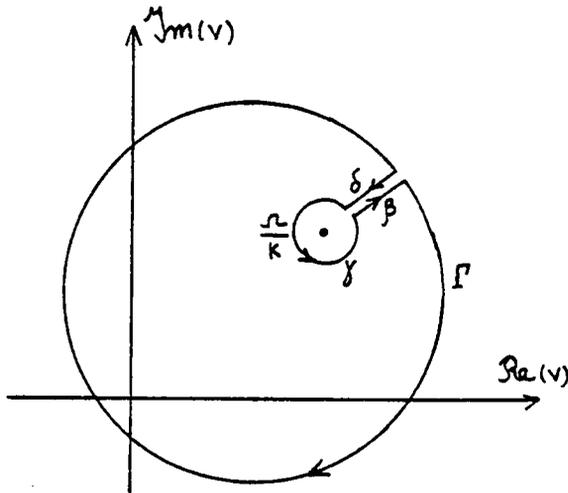
La première intégrale n'a plus de singularité au point  $\Omega/K$

Déformons légèrement le contour  $C^-$  en prenant les chemins horizontaux pas trop éloignés de l'axe réel de façon à avoir  $\frac{dF_c}{dv}(v) \neq \frac{dF_c}{dv}(\text{Re}(v))$ , mais suffisamment pour avoir  $\text{Im}(v) \gg \Delta v$ , ce qui est possible puisque d'après (24) on doit avoir  $\Delta v$  tendant vers zéro. Alors  $\cot q\left(\pi \frac{v-v_D}{\Delta v}\right) \neq i \text{sgn}(\text{Im}(v))$ .

Si  $\text{Im}\left(\frac{\Omega}{K}\right) \neq 0$  la première intégrale s'écrira  $-2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dF_c}{dv}(v) - \frac{dF_c}{dv}\left(\frac{\Omega}{K}\right)}{v - \Omega/K} dv$

Sinon elle vaudra 
$$- 2i \mathcal{P}_c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_c(v)}{v - \Omega/K} dv$$

En ce qui concerne la deuxième intégrale, nous pouvons déformer le contour de la façon suivante :



L'intégrale s'annule sur  $\Gamma$  à l'infini car

$$\cotg \pi \frac{v - v_D}{\Delta v} \neq -i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(v))$$

ainsi que sur  $\delta \cup \beta$

Il reste la valeur sur  $\gamma$  qui vaut

$$2i\pi \cotg \pi \frac{(\frac{\Omega}{K} - v_D)}{\Delta v} \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega}{K} \right)$$

En définitive

- Si  $\operatorname{Im} \left( \frac{\Omega}{K} \right) \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{NST} = & 1 - \frac{1}{K^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dF_c}{dv}(v) - \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega}{K} \right)}{v - \Omega/K} dv + \\ & \frac{\pi}{K^2} \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega}{K} \right) \cotg \left( \pi \frac{\Omega/K - v_D}{\Delta v} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

- Si  $\operatorname{Im} \left( \frac{\Omega}{K} \right) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{NST} = & 1 - \frac{1}{K^2} \mathcal{P}_c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dF_c}{dv}(v)}{v - \Omega/K} dv + \\ & \frac{\pi}{K^2} \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega}{K} \right) \cotg \left( \pi \frac{\Omega/K - v_D}{\Delta v} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Pour respecter la condition de normalisation (23) faisons tendre  $\Delta v$  vers zéro :

$$\cotg \frac{\pi \left( \frac{\Omega}{K} - \nu_D \right)}{\Delta v} \xrightarrow{\Delta v \rightarrow 0} -i \operatorname{sgn} \left( \Im \left( \frac{\Omega}{K} - \nu_D \right) \right) = -i \operatorname{sgn} \left( \Im \frac{\Omega}{K} \right)$$

donc si  $\Im \left( \frac{\Omega}{K} \right) \neq 0$

$$\varepsilon_{\infty ST} = 1 - \frac{1}{K^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dF_c}{dv}(v) - \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega}{K} \right)}{v - \Omega/K} dv - \frac{i\pi}{K^2} \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega}{K} \right) \operatorname{sgn} \left( \Im \frac{\Omega}{K} \right)$$

En posant comme dans le chapitre I  $\Omega = \Omega' - i\nu'$  avec  $\Omega'$  réel et  $\nu'$  réel positif tendant vers zéro on obtient

$$\varepsilon_{\infty ST}(\Omega', K) = 1 - \frac{1}{K^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dF_c}{dv}(v)}{v - \Omega'/K} dv - \frac{i\pi}{K^2} \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega'}{K} \right) \operatorname{sgn}(-K)$$

qui peut encore s'écrire

$$\varepsilon_{\infty ST}(\Omega', K) = 1 - \frac{1}{K^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dF_c}{dv}(v)}{v - \Omega'/K} dv + i \frac{\pi}{K|K|} \frac{dF_c}{dv} \left( \frac{\Omega'}{K} \right) \quad (31)$$

On retrouve bien la relation (4) du chapitre I. En conséquence la fonction diélectrique du Multi Water Bag  $\varepsilon_{NST}$  s'écrit en fonction des termes  $\varepsilon_R$  et  $\varepsilon_I$  lentement variables :

$$\varepsilon_{NST} = \varepsilon_R + \varepsilon_I \cotg \left( \pi \frac{\Omega/K - \nu_D}{\Delta v} \right)$$

Elle tend vers celle du cas continu que si le nombre N de Bags tend vers l'infini et si  $\nu$  tend vers zéro, et cela dans cet ordre. Ne pouvant prendre en vue d'un calcul numérique un nombre N infini, il faudra, pour que  $\varepsilon_{NST}$  soit équivalente à la fonction  $\varepsilon$  du cas continu, atténuer les oscillations fortes du terme très irrégulier  $\cotg \frac{\pi (\Omega/K - \nu_D)}{\Delta v}$  en respectant la condition

$$\Im \left( \frac{\Omega}{K} - \nu_D \right) = \Im \left( \frac{\Omega}{K} \right) \gg \Delta v \quad (32)$$

Nous pouvons penser que c'est le non respect de cette condition qui justifie l'impossibilité de considérer le champ obtenu dans le chapitre précédent, comme pouvant être relatif à la distribution maxwellienne, bien qu'il soit relatif à une fonction de distribution étagée approximant de très près la distribution maxwellienne.

#### IV.3. Calcul du champ respectant la condition d'équivalence du modèle MWB avec celui du cas continu

L'examen des courbes de champ de la figure 18 fait ressortir essentiellement une divergence du champ chaque fois que nous avons un pôle double. D'autre part les coefficients d'excitation de deux pôles simples, "proches" d'un pôle double, divergent, mais convergent en partie principale, et l'étude infinitésimale de la relation de causalité les a fait considérer comme étant l'un amont, l'autre aval. Nous avons donc regardé si le respect de la condition  $\nu \gg KAV$  ne modifie pas le déplacement donné par l'étude infinitésimale de façon à rendre ces pôles de même nature et par conséquent à supprimer la divergence du champ.

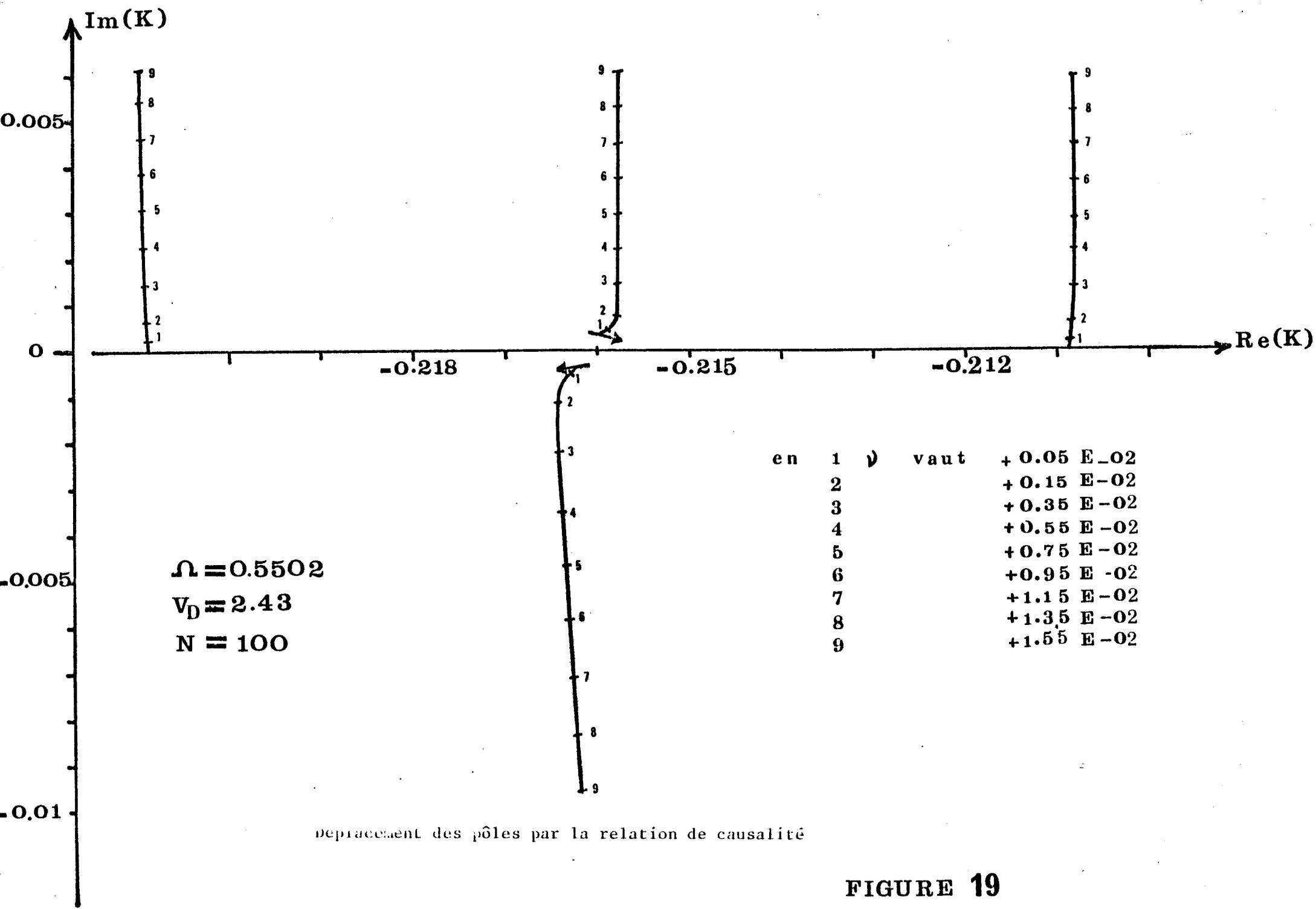
##### a) Etude Numérique du déplacement des pôles

Nous devons donc considérer des valeurs de  $\nu$  supérieures à un certain  $\nu_0$  critique de façon à respecter la condition  $\text{Im} \left( \frac{\Omega}{K} \right) \gg \Delta V$ . Nous ne pourrions accorder foi à l'étude infinitésimale que dans la mesure où le déplacement infinitésimal qu'elle donne reste insensible à une légère modification de la fréquence de départ  $\Omega_0$  réelle considérée.

Nous avons donc suivi numériquement le déplacement des pôles pour des valeurs de  $\nu$  croissantes respectant l'inégalité (32) par une méthode NEWTON-RAPHSON couplée éventuellement à une méthode de VARD. Nous avons obtenu fondamentalement deux types de déplacement :

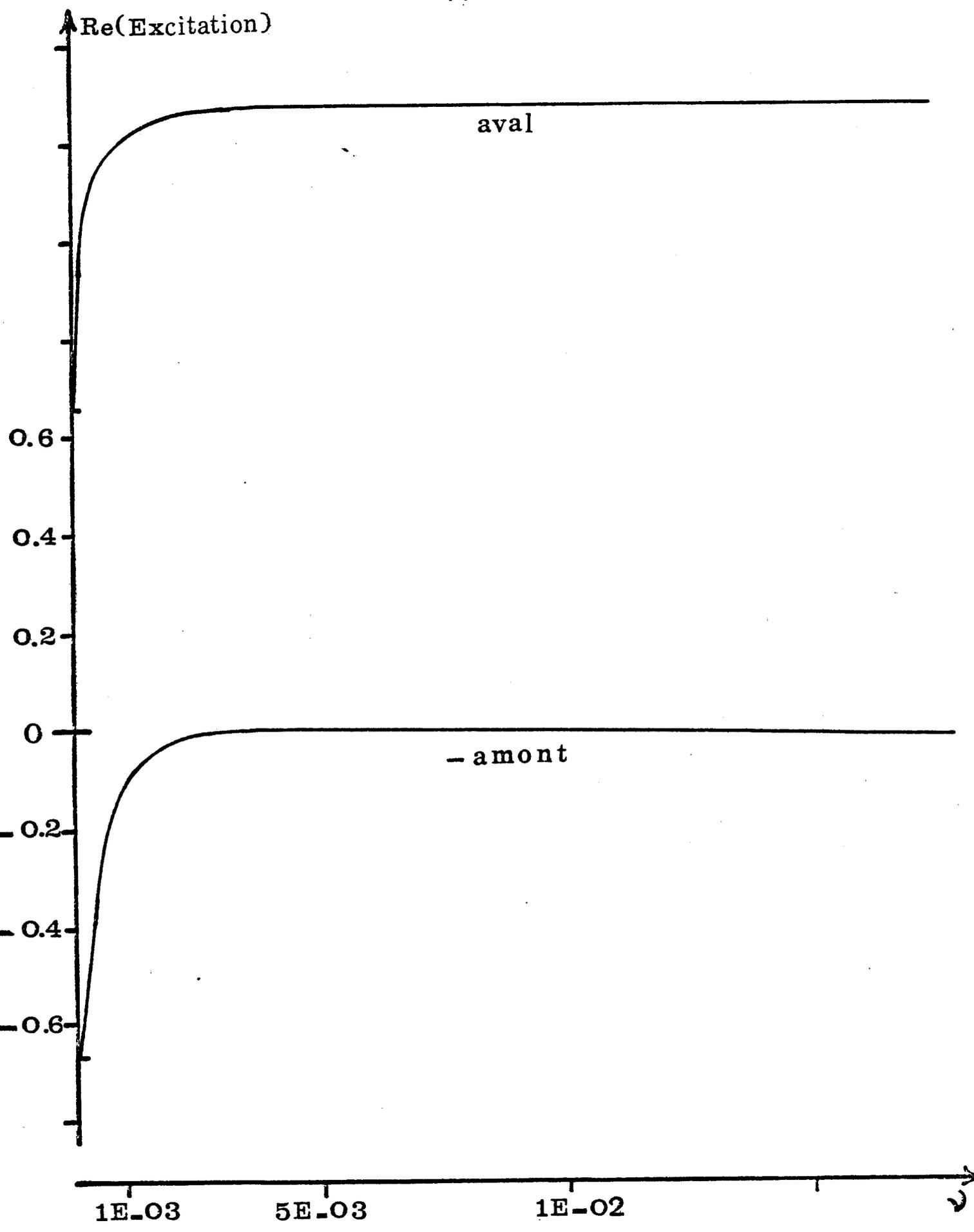
I) L'étude numérique confirme la direction du déplacement prévu par l'étude infinitésimale lorsque les pôles appartiennent à des branches de dispersion réelles à pente variant lentement avec la fréquence, ou pour les pôles complexes dont les parties réelle et imaginaire appartiennent à des branches de dispersion réelle et imaginaire à pente variant aussi lentement avec la fréquence ; De tels pôles sont tels que les termes  $\frac{dK_0^r}{d\Omega}$  et  $\frac{dK_0^i}{d\Omega}$  sont à variation lente en  $\Omega$  et par conséquent le déplacement reste stable en direction. Nous constatons par exemple sur la figure 19 relative à un pôle de Debye (à comportement similaire à celui de la figure 7 bis) que son déplacement se poursuit pratiquement, pour des valeurs de  $\nu$  qui ne sont plus infinitésimales, dans la même direction que celui donné par l'étude infinitésimale qui prévoit un déplacement presque parallèle à l'axe réel puisque  $\frac{dK_0^r}{d\Omega} \neq 0$  implique  $dK_0^i \neq 0$ . Il en est de même pour les pôles réels appartenant à des branches de dispersion à pente variant lentement avec la fréquence (voir la figure 20 où le déplacement infinitésimal prévu est parallèle à l'axe imaginaire). De tels pôles sont réellement physiques ; Remarquons que lorsqu'ils sont complexes, ils sont à grande incursion dans le plan complexe.

II) Par contre, l'étude numérique n'est pas en accord avec l'extrapolation des résultats infinitésimaux pour les pôles réels ou complexes proches dans l'espace  $(\Omega, K)$  des pôles doubles. La figure 20 montre le déplacement des deux pôles initialement complexes conjugués (pour  $\nu = 0$ ), pour diverses valeurs de  $\nu$  : le pôle à partie imaginaire positive remontent vers le haut après la très brève descente prévue par l'étude infinitésimale, tandis que le pôle initialement conjugué va vers le bas. Le même phénomène se produit lorsqu'on considère deux pôles initialement (pour  $\nu = 0$ ) réels (voir figure 21). Une explication du comportement de ces pôles provient du fait qu'ils ne gardent tous deux leur nature réelle ou complexe que dans un petit intervalle de fréquence  $[\Omega_0 - \Delta\Omega, \Omega_0 + \Delta\Omega]$ , et que pour un pôle initialement complexe (à très brève incursion dans le plan complexe), le terme  $\frac{dK_0^i}{d\Omega}$  varie très rapidement dans cet intervalle.



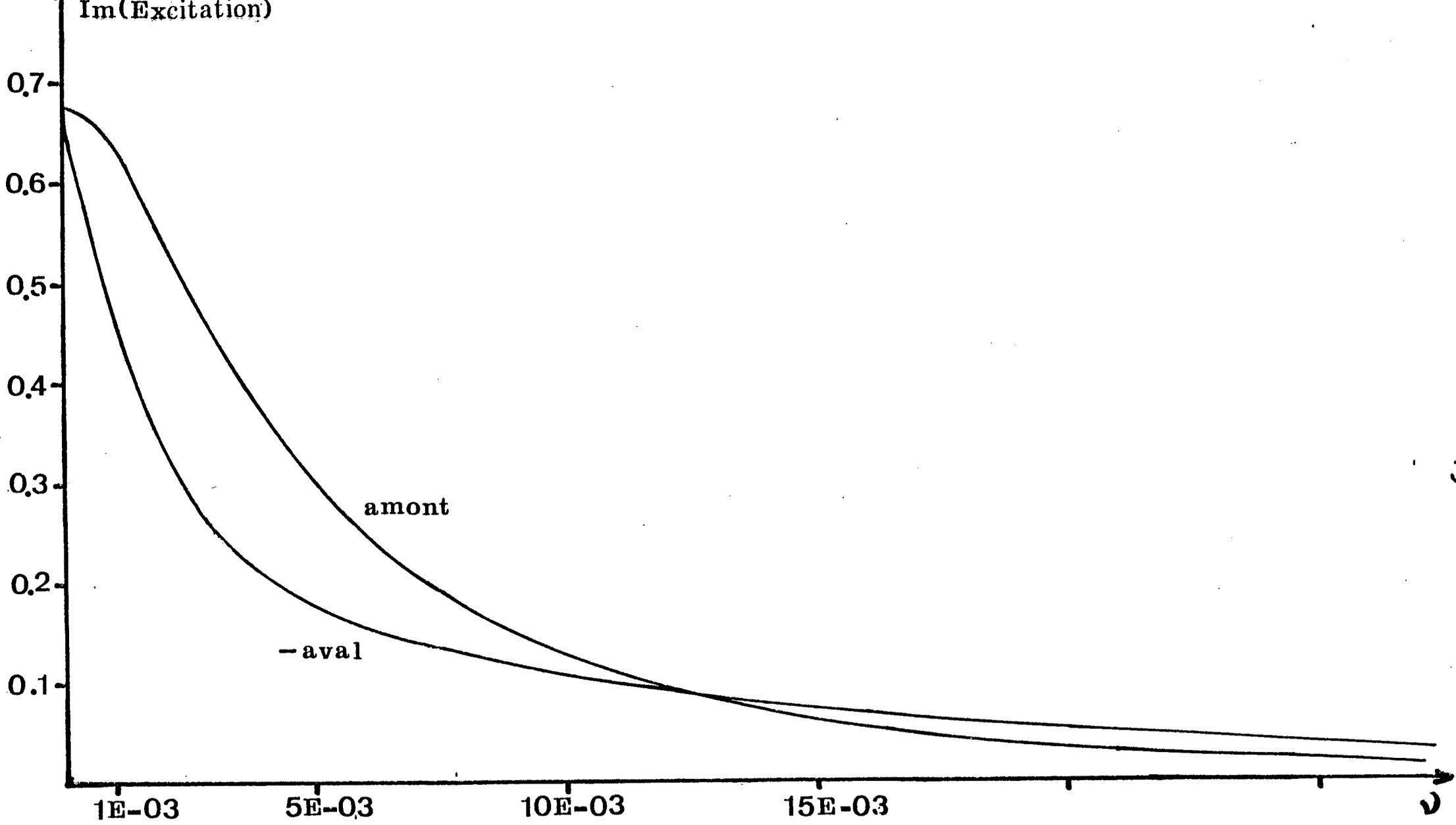
deplacement des pôles par la relation de causalité

FIGURE 19



Variation de l'excitation en fonction de la relation de causalité

FIGURE 19bis



Variation l'excitation en fonction de la relation de causalité

FIGURE 19ter

La première des relations (23) donnerait ainsi un déplacement réel qui serait très sensible à la fréquence de départ  $\Omega_0$  réelle considérée. De même pour un pôle initialement réel, le terme  $dK_0^r/d\Omega$  varierait aussi rapidement en donnant un déplacement imaginaire instable par rapport à  $\Omega_0$ . Ces résultats peuvent paraître décevants : nous nous attendions à voir le pôle amont (à partie imaginaire positive pour des  $\nu$  infinitésimaux ou nuls) franchir l'axe réel et devenir ainsi un pôle aval faisant converger les excitations en partie principale, et supprimant les divergences du champ au voisinage des fréquences donnant des pôles doubles. La solution est finalement donnée par l'étude de la variation des coefficients d'excitation.

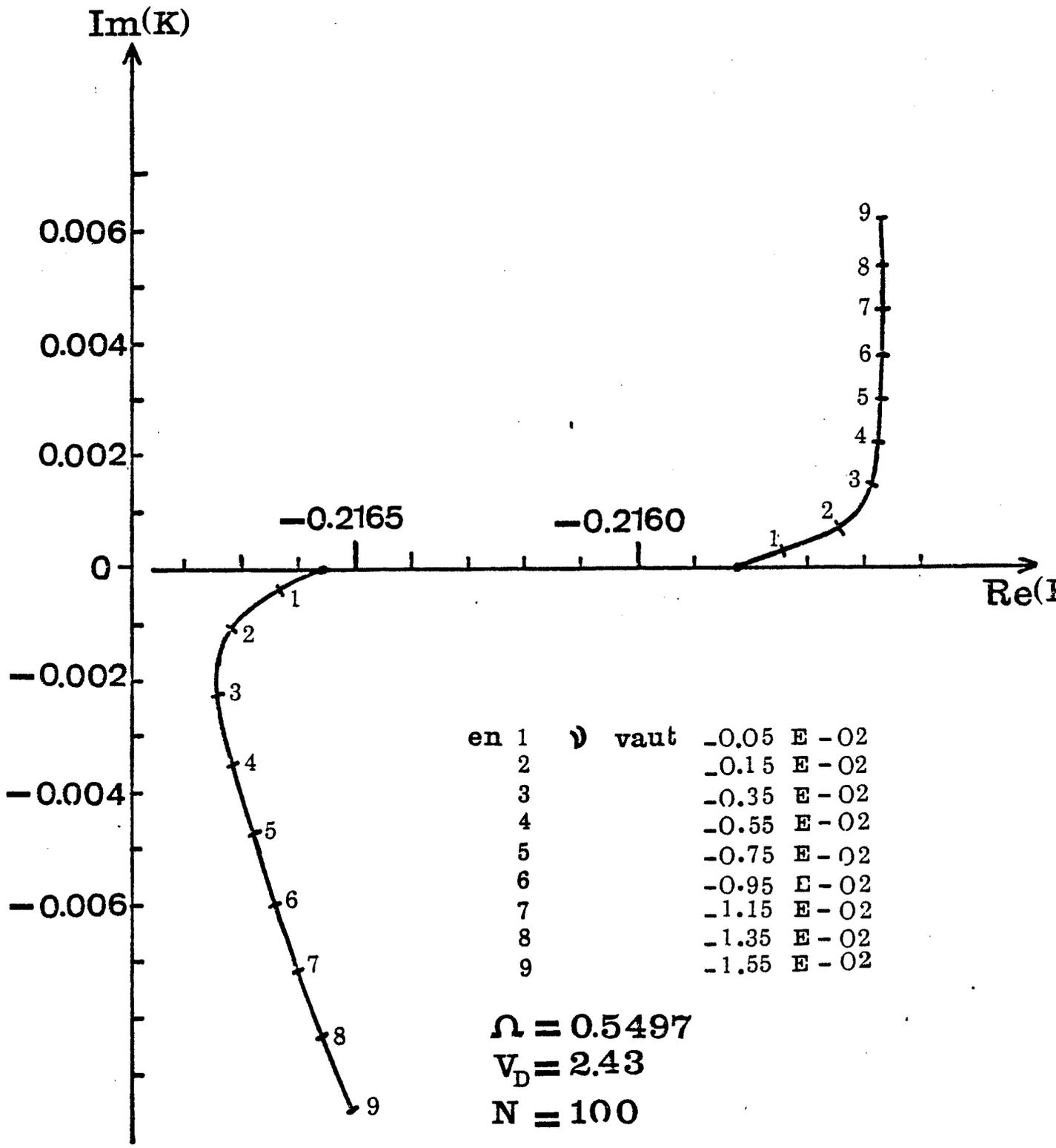
b) Variation de l'excitation pour des  $\nu$  petits mais non infinitésimaux

En différentiant  $\mathcal{E}$  nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial K} = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Omega} \left( \frac{dK}{d\Omega} \right)^{-1}$$

le terme  $\frac{dK}{d\Omega}$  qui varie très rapidement dans le cas de pôles de modèle, va intervenir, non seulement dans le déplacement de ces pôles, mais aussi dans la variation de leur coefficient d'excitation. L'étude numérique montre que, de même que nous avons observé deux types de déplacement de pôles, nous avons deux types de variation de l'excitation :

I) L'excitation reste stable par passage de valeurs de  $\nu$  infinitésimales à des valeurs non infinitésimales : ce cas correspond aux pôles appartenant à des branches de dispersion réelles (ou réelles et imaginaires) à pente variant lentement avec la fréquence (cela faisant que  $\frac{dK_0^r}{d\Omega}$  et  $\frac{dK_0^i}{d\Omega}$  varient peu, donc  $\frac{dK}{d\Omega}$  aussi et par conséquent l'excitation aussi). Nous constatons ce comportement sur la figure 19 bis relative aux conditions de la figure 19.



Déplacement des pôles par la relation de causalité

FIGURE 20

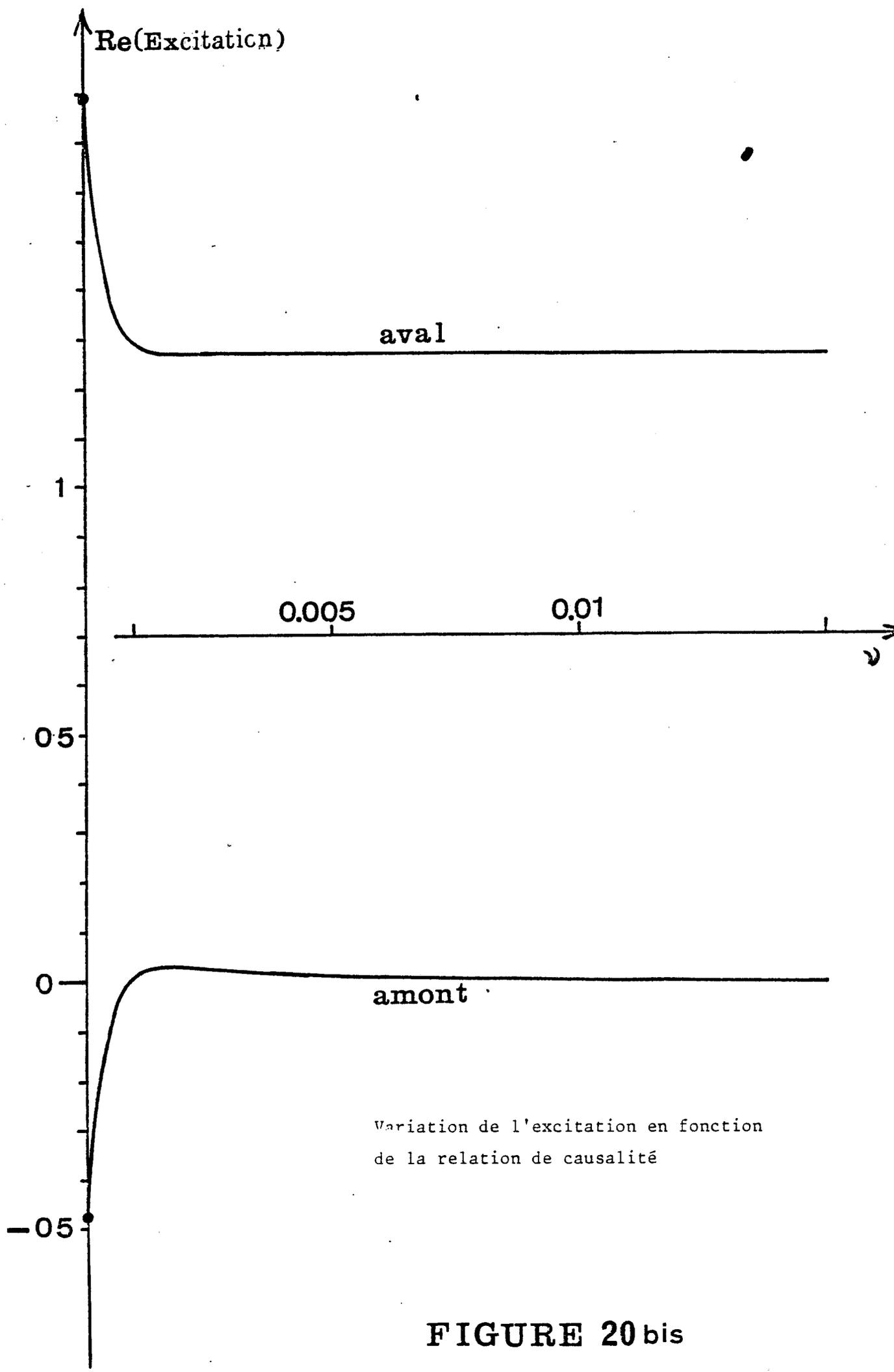


FIGURE 20 bis

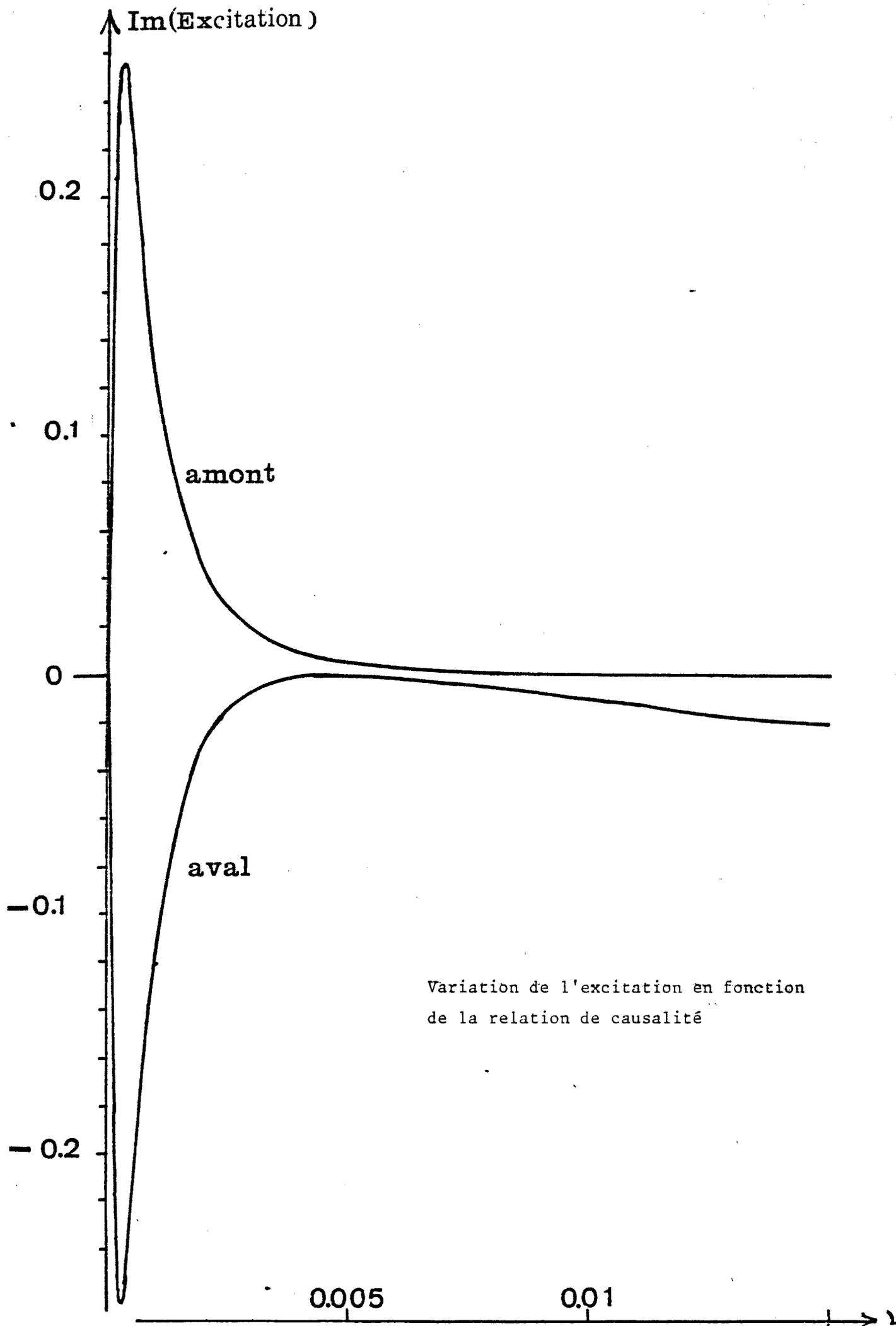


FIGURE 20

II) Si l'on considère par contre des racines simples réelles ou complexes correspondant à une fréquence proche d'une fréquence donnant un pôle double, et "encadrant" un pôle double, le comportement de leurs excitations est fondamentalement différent : les termes  $\frac{dk_0^1}{d\omega}$  et  $\frac{dk_0^2}{d\omega}$  varient rapidement, et nous n'aurons stabilité des excitations que pour les valeurs de  $\nu$  non infinitésimales, supérieures à un certain  $\nu_0$  critique. Nous avons tracé sur les figures 20 bis et 20 ter la variation des parties réelles et imaginaires des coefficients d'excitation monopolaire des deux pôles conjugués dont le déplacement est celui de la figure 20. Nous constatons que le pôle se déplaçant vers les imaginaires positifs (pôle amont) perd son excitation jusqu'à annulation de celle-ci, tandis que le pôle se déplaçant vers les imaginaires négatifs (pôle aval) voit la partie imaginaire de son excitation s'annuler, tandis que sa partie réelle se renforce d'une quantité égale (à la variation près des excitations des autres pôles non concernés), à celle qu'a perdue le pôle amont. Nous constatons (figures 21 bis et 21 ter) le même phénomène pour les pôles initialement réels dont le comportement a été étudié à la figure 21.

- En définitive ce type de pôle amont ne contribue pas au champ amont puisque son excitation s'annule, et ce type de pôle aval contribue au champ aval par une excitation égale à la somme des excitations amont-aval calculées pour une fréquence  $\omega_0$  purement réelle.

- Pour ce type de pôles, le calcul du champ doit être fait avec des excitations calculées pour  $\nu \neq 0$  tel que  $\text{Im} \left( \frac{\omega}{K} \right) \gg \Delta V$  ou plus simplement avec des excitations relatives à une fréquence réelle, à condition de considérer ces pôles amont comme étant en fait des pôles aval. Cette façon de raisonner permet de résoudre le problème de la nature du pôle double, comme étant un pôle aval. On pourra d'ailleurs, d'un point de vue numérique, remplacer deux pôles simples très proches (réels ou complexes) par le pôle double correspondant, ce qui évitera la possibilité d'"overflow" des coefficients d'excitation.

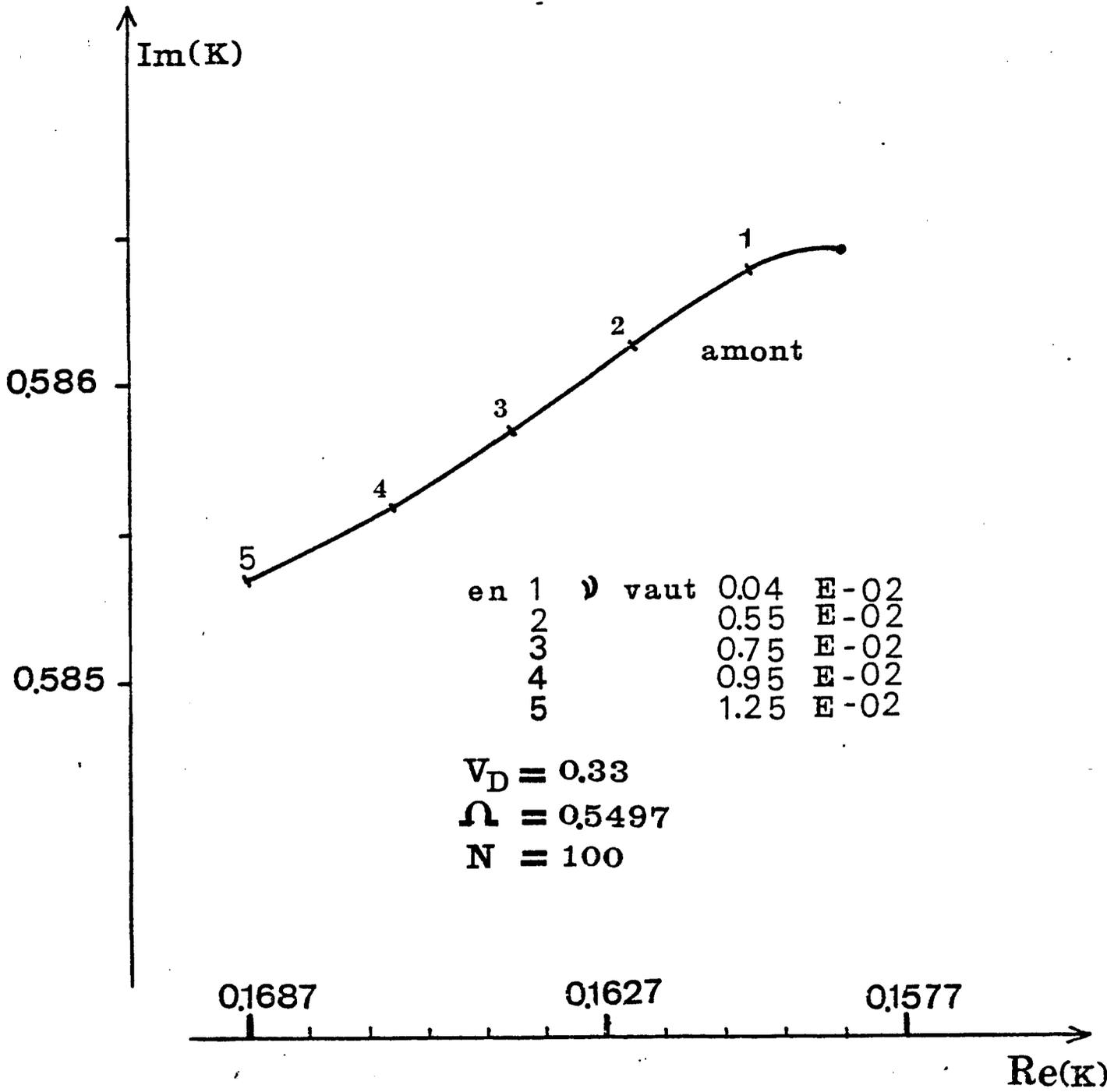
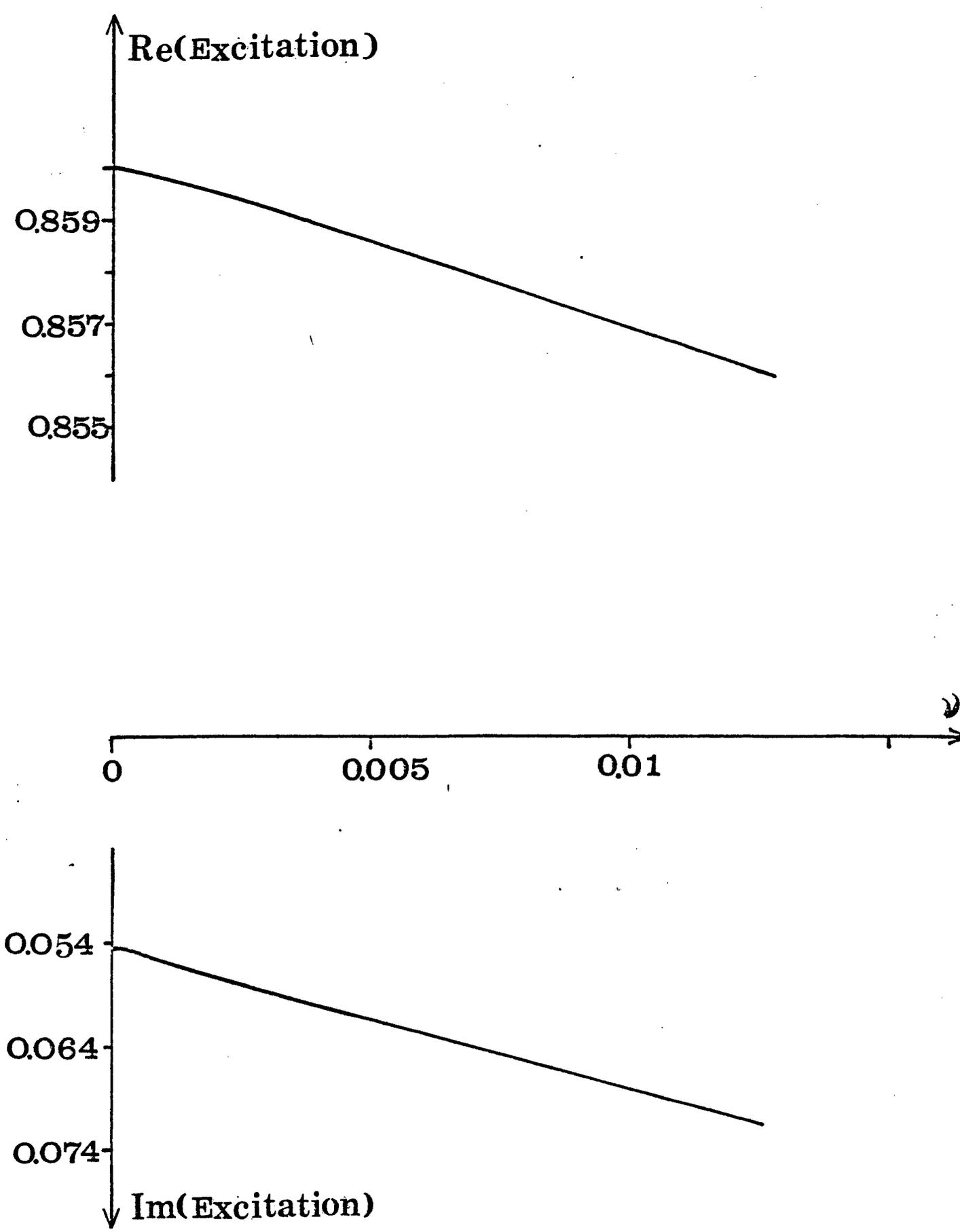


FIGURE 21

Déplacement d'un pôle de "DEBYE" par la relation de causalité



Variation de l'excitation d'un pôle de "DEBYE" en fonction de la relation de causalité

**FIGURE 21bis**

- On constate d'autre part sur les figures 20 et 21 bis, 20 et 21 ter qu'au delà d'un certain  $\nu_0$  critique les coefficients d'excitation se stabilisent à une valeur devant être considérée comme celle relative à N tendant vers l'infini et  $\nu$  tendant vers zéro. C'est un résultat déjà rencontré dans les études de modèles numériques en plasma (GRANT, FEIX, (1967), et NAVET, BERTRAND (1971))

- Cette interprétation nouvelle lisse de façon évidente (voir figure 18 ) les champs, d'autre part la prise en compte du pôle double, comme pôle aval d'excitation finie, et d'autre part, supprime la structure en X du champ dans les bandes de fréquence donnant des pôles complexes conjugués, puisque les excitations conjuguées, devenant de même nature, s'ajoutent avec destruction de leurs fortes parties imaginaires. Il s'agit là d'un phénomène connu dans les études de propagation dans les structures périodiques (où c'est un véritable effet physique). Ici le phénomène est un parasite du modèle lié à la discrétisation, comme en analyse numérique sous le nom d'alyasing". Le phénomène n'est évidemment pas un phénomène physique du cas continu, puisque ces "bandes passantes de fréquence" peuvent être déplacées par modification de la discrétisation de la fonction de distribution électronique.

CHAPITRE V : "Résultats Physiques Théoriques et Vérification  
Expérimentale obtenue en caisson"

Le premier paragraphe de ce chapitre va interpréter du point de vue physique le comportement plutôt qualitatif du champ théorique relatif à une distribution maxwellienne approximée par le modèle M.W.B., en fonction des paramètres dérive et fréquence. Il se réfèrera à quatre planches (numérotées 22, 23, 24 et 25) présentant l'avantage de permettre des comparaisons aisées. Le programme numérique commenté est donné intégralement dans l'annexe 1. Une deuxième annexe présentera un ensemble plus complet de courbes de champ théorique (permettant des interprétations plus quantitatives) dont ont été tirées les branches de dispersion du cas continu de la figure 26. Un deuxième paragraphe présentera des résultats expérimentaux obtenus dans le cadre du contrat D.R.M.E. par HENRY et LAFAILLE au moyen du caisson de simulation spatiale du laboratoire C.R.P.E.

V.1. Interprétation qualitative du champ  
théorique monopolaire et dipolaire  
relatif à une distribution Maxwellienne  
en dérive

a) Pour une vitesse de dérive nulle nous retrouvons les résultats classiques obtenus notamment par NAVET (1973). Les branches de dispersion sont symétriques. Pour les fréquences supérieures à la fréquence plasma, tous les pôles sont réels et vont par paires de pôles symétriques par rapport à l'origine, l'excitation se répartissant entre ces divers pôles, et donnant un amortissement par mélange de phase. Pour les fréquences inférieures à la fréquence plasma, une paire de pôles deviennent imaginaires purs conjugués et sont prédominants du point de vue excitation, donnant à courte distance un effet d'écran, le champ se réduisant au champ froid à longuedistance, pour une excitation monopolaire. Pour les fréquences légèrement supérieures à la fréquence plasma, les pôles de Debye Landau devenus réels sont pratiquement les seuls excités et donnent des ondes "amont, aval" très peu amorties.

b) Pour les vitesses de dérive bien inférieures à la vitesse thermique la dissymétrie des branches de dispersion s'accroît avec les dérives croissantes, le minimum de la branche de DEBYE LANDAU se déplace vers les  $K$  négatifs et les  $\Omega$  de plus en plus petits, la dissymétrie étant de plus provoquée par une "rotation" non uniforme dans le plan  $(\Omega, K)$  de l'ensemble des branches de dispersion, dans le sens direct.

La propagation du champ s'effectue pour des fréquences forcées allant en dessous de la fréquence plasma jusqu'à une fréquence de coupure  $\Omega_c$  correspondant dans ce domaine de vitesses de dérive, à la fréquence plasma modifiée par effet DOPPLER selon la relation  $\Omega_c \approx \sqrt{1 - \frac{v_D^2}{c^2}}$ . En effet dans l'hypothèse où  $\frac{k}{\omega} (v + v_D) \ll 1$  on peut écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon(k, \omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF/dv}{\omega - k(v+v_D)} dv \neq \\ &1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF}{dv} \left\{ 1 + \frac{k(v+v_D)}{\omega} + \frac{k^2(v+v_D)^2}{\omega^2} + \frac{k^3(v+v_D)^3}{\omega^3} \right\} dv \end{aligned}$$

Toutes les intégrales de la forme  $\int \frac{dF}{dv}$  et  $\int \frac{dF}{dv} v^2 dv$  s'annulent et il reste les termes  $\int \frac{dF}{dv} v dv = 1$  et  $\int \frac{dF}{dv} v^3 dv = -3 v_T^2$  puisque  $\int F v^2 dv = v_T^2$  donc

$$\varepsilon(k, \omega) \neq 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ 1 + \frac{2k v_D}{\omega} + \frac{3k^2 v_D^2}{\omega^2} + \frac{3k^2 v_T^2}{\omega^2} \right]$$

l'équation de dispersion  $\varepsilon(k, \omega) = 0$  conduit à :

$$k^2 (-3\omega_p^2) (v_D^2 + v_T^2) + k (-2\omega_p \omega v_D) + \omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2) = 0$$

et par conséquent

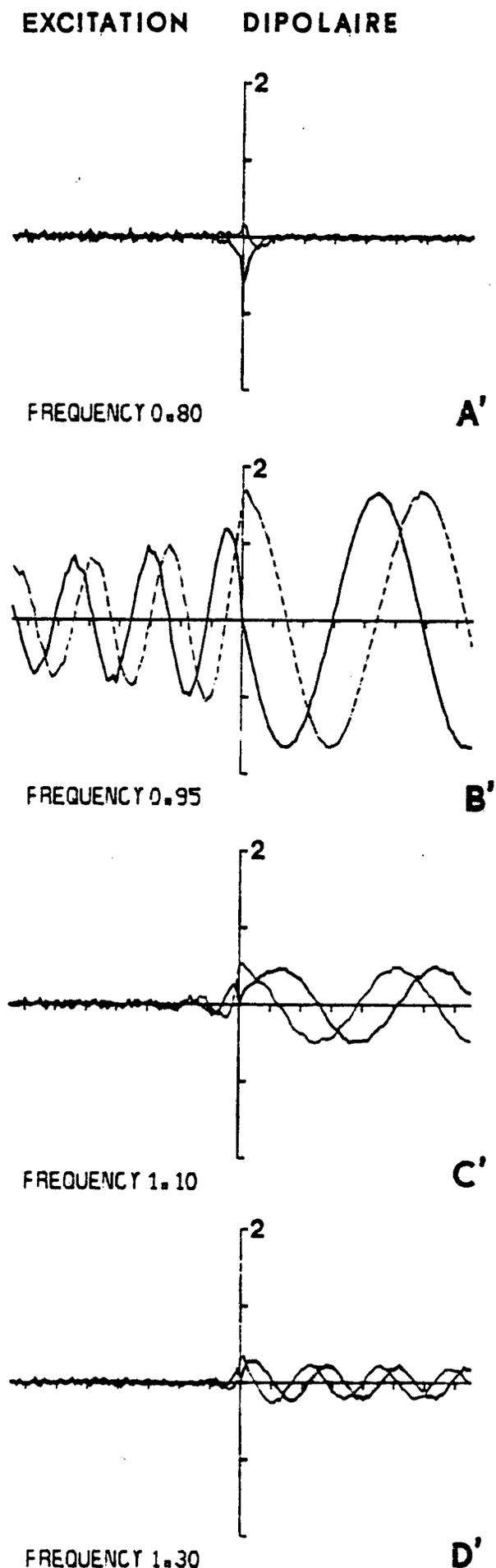
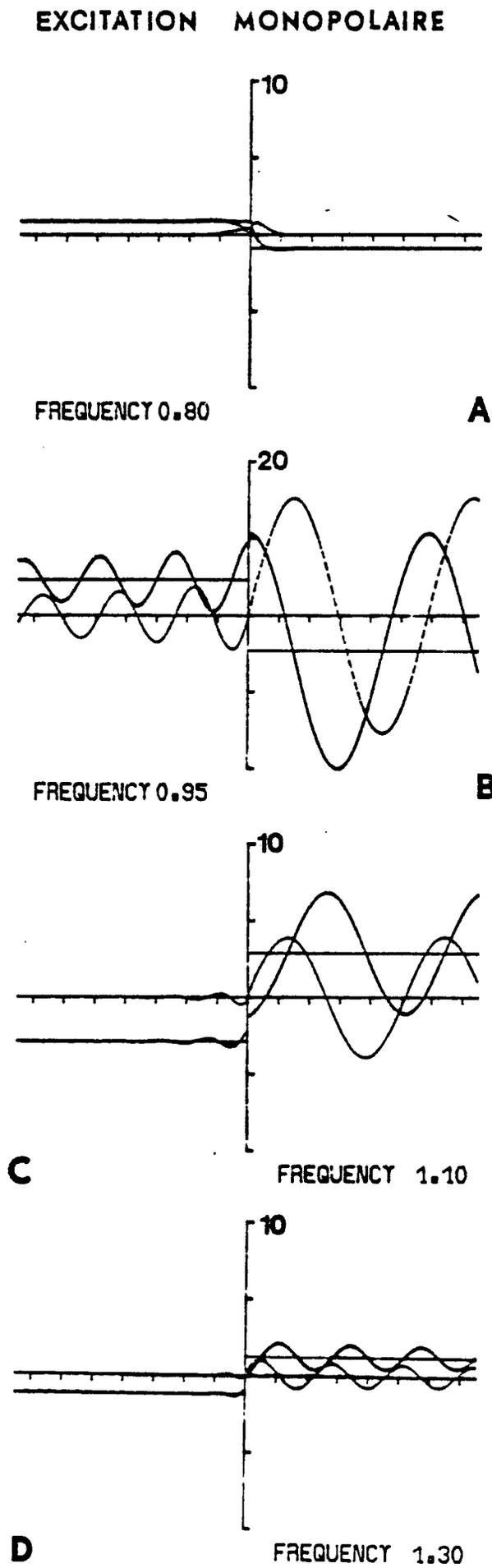
La fréquence  $\Omega_c$  cherchée correspond à l'annulation du discriminant de cette équation du second degré en  $k$  soit :

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 (8v_D^2 + 12v_T^2)}{12(v_D^2 + v_T^2)}, \text{ soit en variable normalisée}$$

$$\Omega^2 = \frac{8v_D^2 + 12}{12(v_D^2 + 1)} = 1 - \frac{v_D^2}{3(v_D^2 + 1)} \approx 1 - \frac{v_D^2}{3}$$

Le champ monopolaire (voir figures 22 C et 22 D) est dissymétrique avec une longueur d'onde plus grande (resp. plus petite) vers l'aval (resp. vers l'amont) et un amortissement plus fort (resp. plus faible) vers l'amont (resp. vers l'aval) ; En dessous de la fréquence de coupure  $\Omega_c$  nous observons (figure 22 A) un effet d'écran dissymétrique dû à une paire de pôles complexes conjugués à toute petite partie réelle, avec excitation prédominante en partie imaginaire. Au fur et à mesure que la fréquence se rapproche de la fréquence plasma  $\omega_p$ , nous constatons pour une excitation monopolaire, un champ de moins en moins amorti, à amplitude et longueur d'onde croissantes, fortement dissymétrique en amplitude, (grande dans la direction aval et faible dans la direction amont) (voir figure 22 B), cela étant dû à la prédominance citée au chapitre I, du pôle aval de la branche de DEBYE-LANDAU sur le pôle amont. Ce phénomène est comme prévu moins sensible pour une excitation dipolaire (voir figure 22 B'). Nous pouvons remarquer finalement sur les figures 22 qu'il y a un déphasage à l'origine se traduisant par un champ imaginaire non nul à l'origine (conséquence de l'existence de pôles de DEBYE à toute petite partie réelle).

c) Pour les dérives voisines de la vitesse thermique, le comportement du champ aval reste globalement inchangé, avec propagation au dessus de la fréquence de coupure  $\Omega_c$  qui décroît avec les dérives augmentant : la limite de propagation au-dessus de la fréquence plasma se déplace vers les fréquences de plus en plus grandes lorsque la dérive augmente ; ainsi pour une dérive de 1.23 fois la vitesse thermique on a une propagation sensiblement non amortie jusqu'à la fréquence  $\omega = 1.6\omega_p$  et cette propagation reste décelable au-dessus de  $2\omega_p$ .

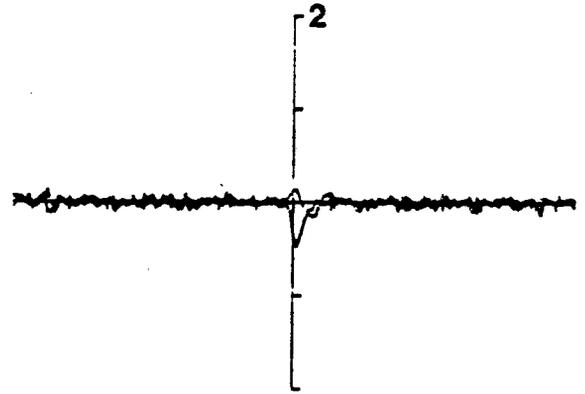
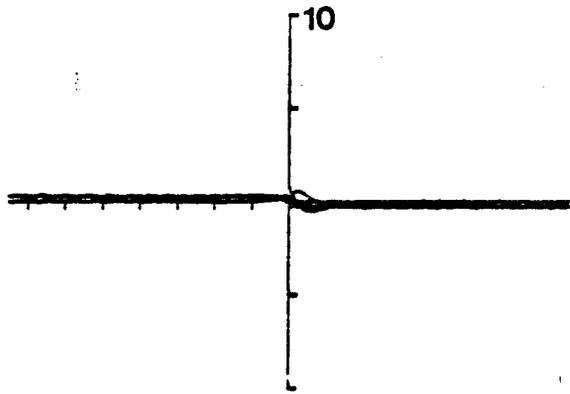


**FIGURE 22**

**V - 0.63**

EXCITATION MONOPOLAIRE

EXCITATION DIPOLAIRE

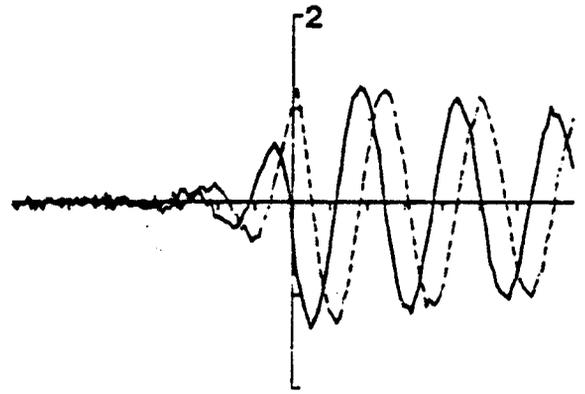
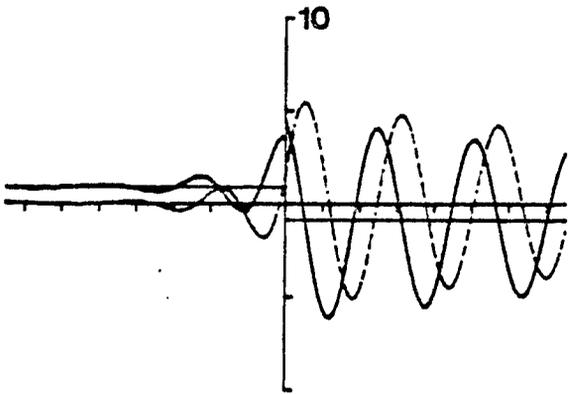


FREQUENCY 0.60

A

FREQUENCY 0.60

A'

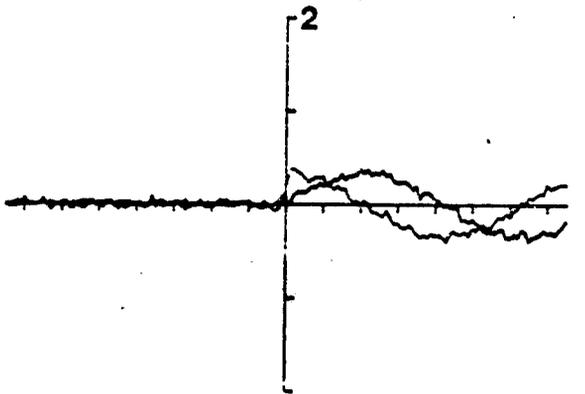
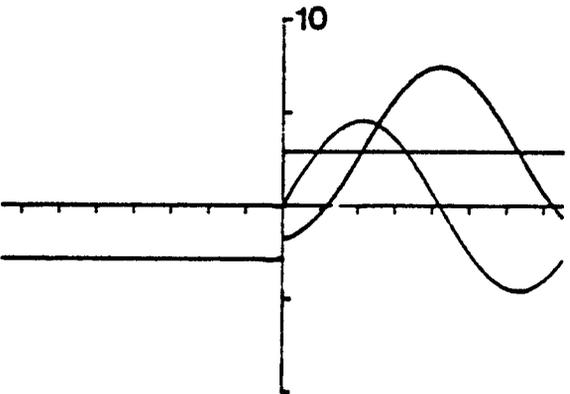


FREQUENCY 0.80

B

FREQUENCY 0.80

B'

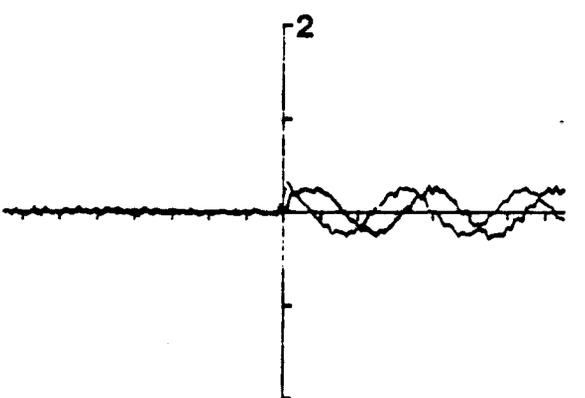
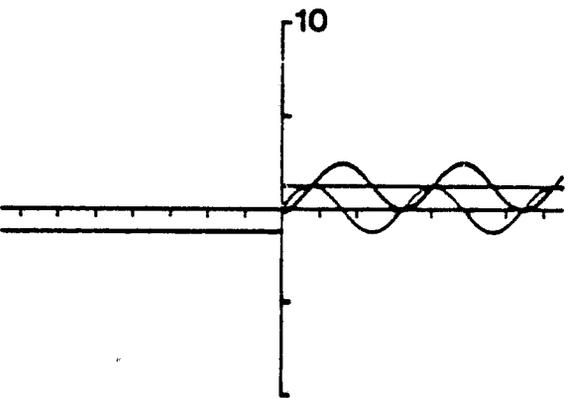


C

FREQUENCY 1.10

FREQUENCY 1.10

C'



D

FREQUENCY 1.30

FREQUENCY 1.30

D'

FIGURE 23  $V_D = 1.23$

En ce qui concerne le champ amont, il n'y a propagation que dans une bande de fréquence de plus en plus étroite au voisinage supérieur de la fréquence de coupure  $\Omega_c$  (voir figure 23 B), le champ étant de plus en plus rapidement amorti au fur et à mesure que la dérive augmente, et se réduisant rapidement au champ froid (voir figure 23 C et 23 D).

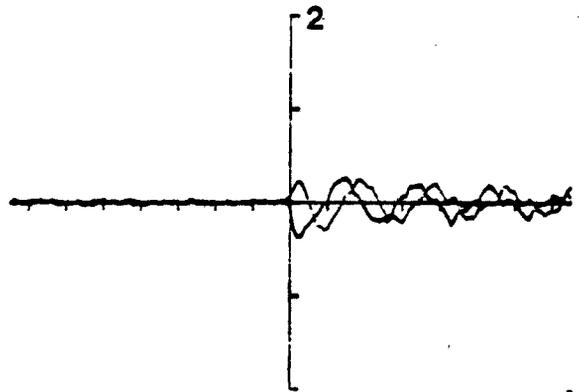
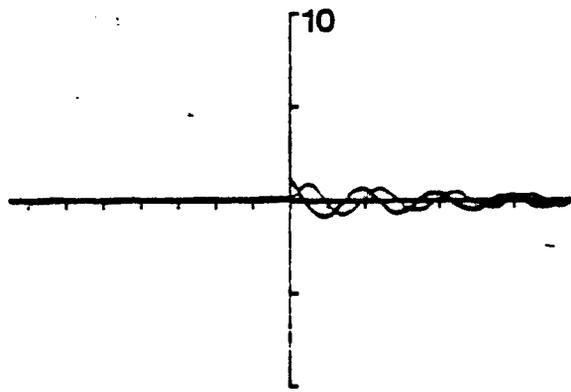
d) Pour les dérives supérieures à la vitesse thermique il n'y a plus de propagation amont, seule la propagation aval subsiste dans une bande de fréquence de plus en plus large de part et d'autre de la fréquence plasma (voir figures 24 A, B, C, D) pour tendre, à la limite des très fortes dérives (voir figures 25 A, B, C, D) vers une propagation de type faisceau de température négligeable.

e) La figure 26 tracée à partir d'un ensemble plus important (voir annexe 2) de courbes de champ données par le modèle à 100 "Bags" montre le comportement de la branche de dispersion déduite qui peut être considérée comme étant celle du cas maxwellien. On notera :

- la rotation progressive, non uniforme des deux branches amont-aval,
- le glissement du minimum (point de jonction des deux branches) correspondant à la fréquence de coupure  $\Omega_c$ , vers les fréquences plus petites et vers les K plus négatifs,
- l'allongement de la branche aval,
- le raccourcissement de la branche amont,
- la tendance progressive vers une propagation de type faisceau pour les très fortes dérives.

EXCITATION MONOPOLAIRE

EXCITATION DIPOLAIRE

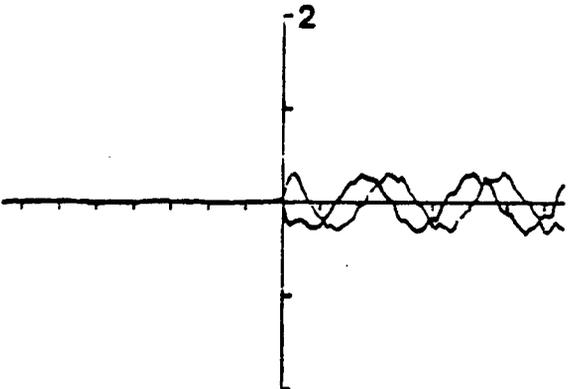
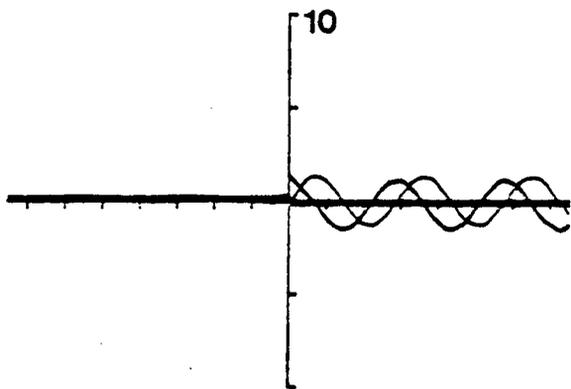


FREQUENCY 0.40

A

FREQUENCY 0.40

A'

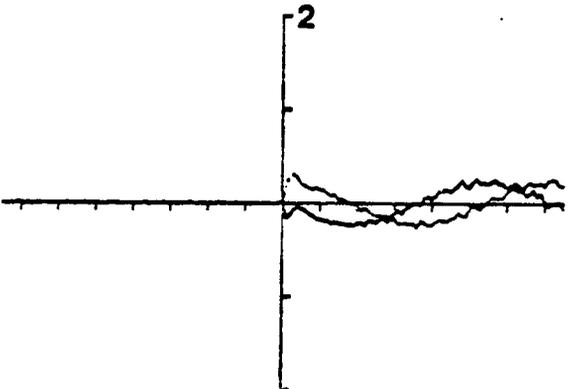
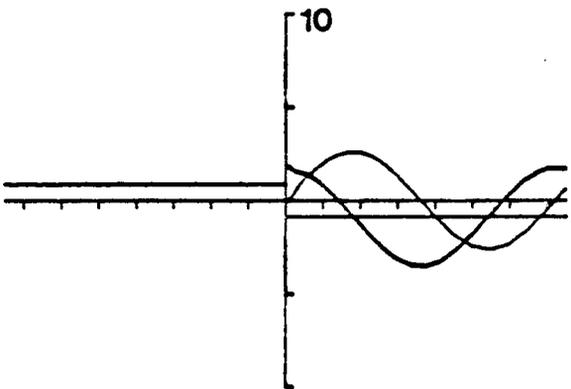


FREQUENCY 0.55

B

FREQUENCY 0.55

B'

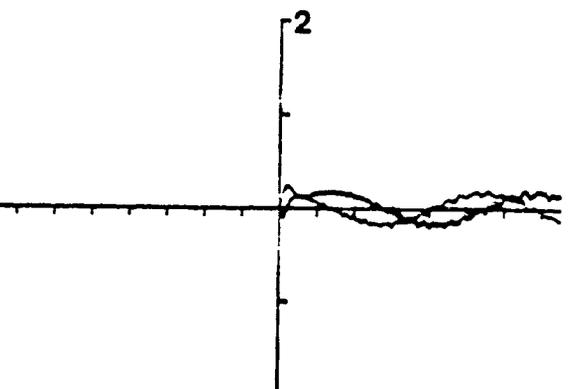
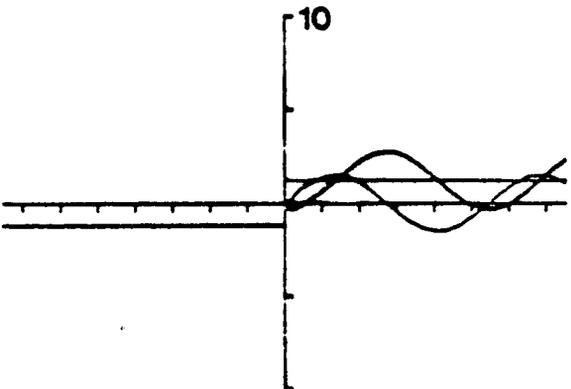


FREQUENCY 0.80

C

FREQUENCY 0.80

C'



D

FREQUENCY 1.30

FREQUENCY 1.30

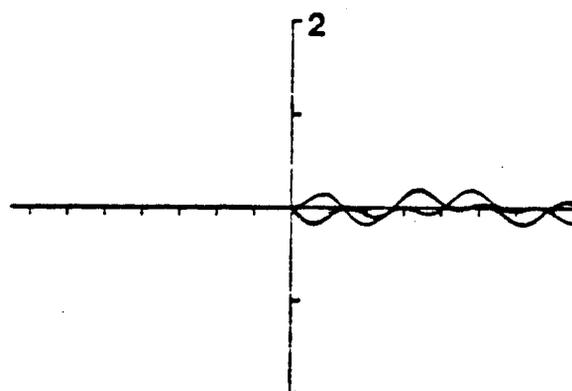
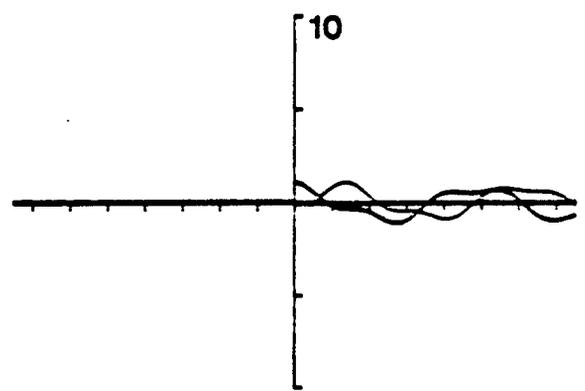
D'

FIGURE 24

$V_D = 2.43$

EXCITATION MONOPOLAIRE

EXCITATION DIPOLAIRE

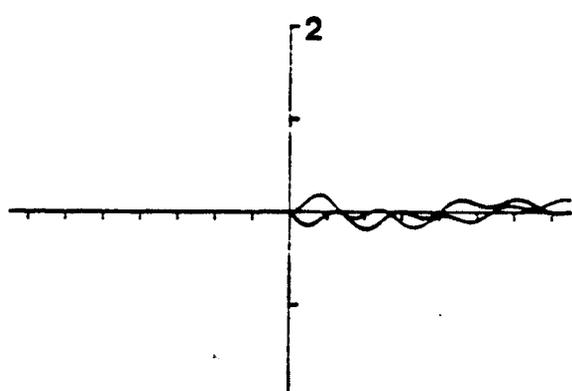
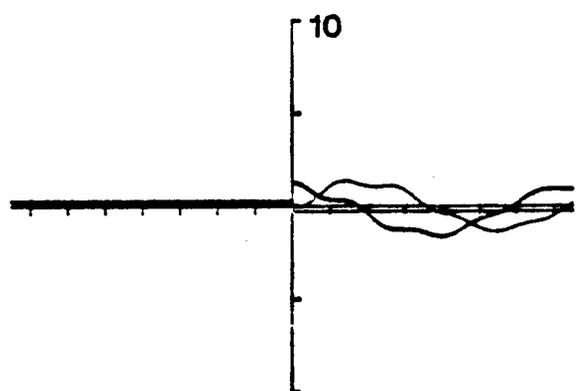


FREQUENCY 0.40

FREQUENCY 0.40

A

A'

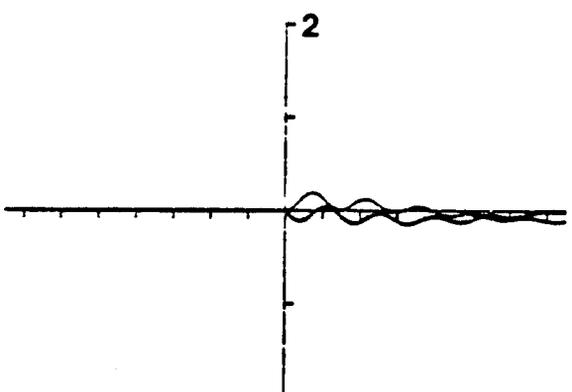
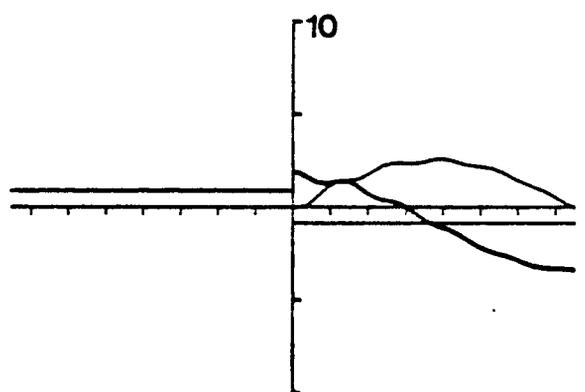


FREQUENCY 0.60

FREQUENCY 0.60

B

B'

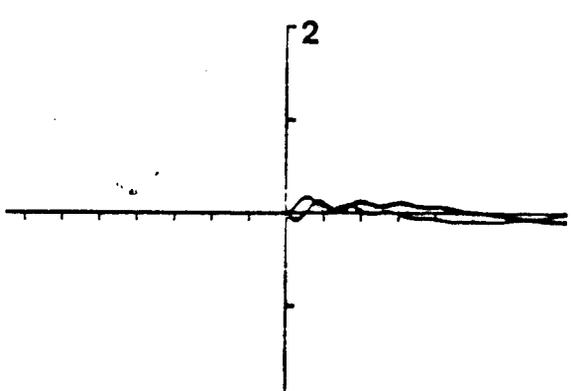
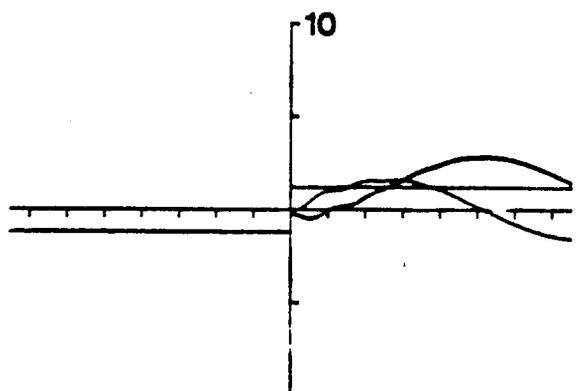


FREQUENCY 0.80

FREQUENCY 0.80

C

C'



FREQUENCY 1.30

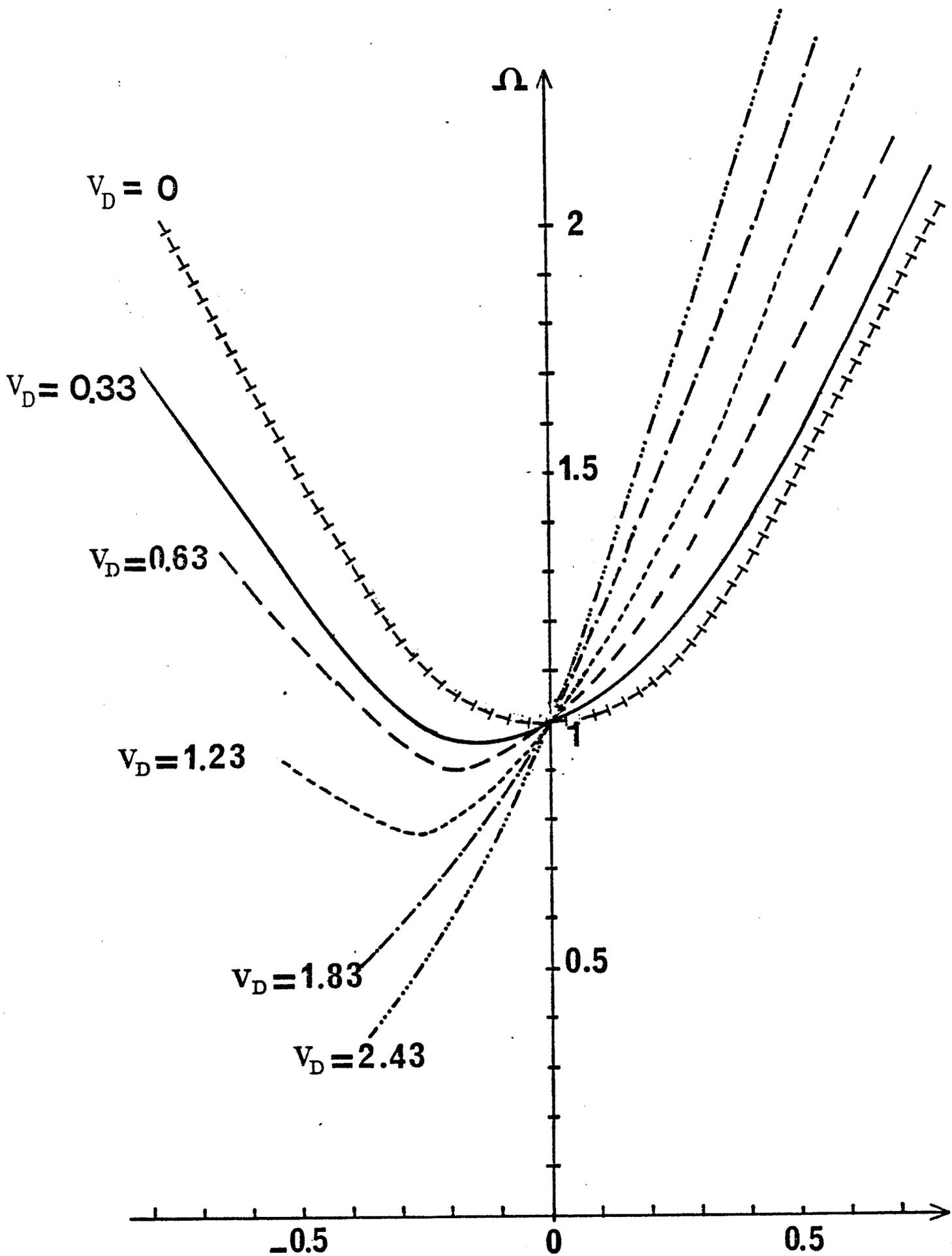
FREQUENCY 1.30

D

D'

FIGURE 25

$V_D = 4.83$



Branches théoriques de dispersion de la maxwellienne pour diverses valeurs de la dérive

FIGURE 26

On remarquera d'autre part sur les figures 22 , 23 et 24 que les courbes de champ données par le modèle à 100 "Bags" dans le cas d'une excitation dipolaire sont davantage "bruitées" que pour une excitation monopolaire, cela étant dû d'une part à l'augmentation d'échelle provoquée par le fait que les champs réels ne sont plus translatés d'une valeur égale en module au champ froid, et d'autre part au fait que les coefficients d'excitation répercutent davantage la discrétisation du spectre (cela devenant (voir figures 25 ) moins sensible pour les très fortes dérives où tous les pôles étant de type aval, la discrétisation revient à être plus fine).

## V.2. Résultats expérimentaux

### 1) Description du Plasma

Les expériences ont été réalisées dans la chambre de simulation spatiale dont les caractéristiques sont les suivantes : (ARNAL 1976) :

- Volume du caisson environ  $5,5 \text{ m}^3$  (3 m de longueur \* 1,5 m de diamètre).

- Un pompage mécanique (pompe primaire plus pompe turbomoléculaire) associé à un pompage cryogénique (Azote liquide et Hélium liquide) permet d'obtenir une pression résiduelle de  $10^{-8}$  Torr dans l'enceinte.

- La source à plasma (source KAUFMAN) injecte les ions dans le plasma avec une vitesse d'environ 10 Km/s. Les ions sont neutralisés par un filament chaud émettant des électrons, et si l'on admet que les électrons sont entraînés par les ions, on doit avoir un plasma dont la vitesse de dérive globale est de l'ordre du dixième de la vitesse thermique.

- Le gaz utilisé est de l'argon à une pression de  $10^{-4} - 10^{-5}$  Torr.

- L'utilisation d'un champ magnétique multipolaire de confinement (garnissage des parois avec de petits aimants) permet d'améliorer notablement l'homogénéité et d'obtenir un gradient de fréquence plasma  $\frac{\Delta\omega_p}{\omega_p} < 0,1$  par mètre de déplacement axial.

- Le plasma obtenu a les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} 2 < \omega_p < 10 \text{ MHz} \\ 500 < T_e < 1500^\circ\text{K} & \text{ soit } 40 \text{ à } 130 \text{ eV} \\ 1 < \lambda_D < 10 \text{ mm} \end{aligned}$$

### 2) Excitation des ondes électrostatiques

Plusieurs impératifs contradictoires devaient être surmontés en ce qui concerne l'excitation des ondes électrostatiques : utiliser une antenne ayant le meilleur coefficient de couplage possible avec le plasma, qui soit de dimension restreinte afin de minimiser les effets d'image, compte tenu de la nature métallique de la paroi. Le choix s'est porté après divers essais sur une antenne mise au point pour les expériences spatiales : un anneau circulaire de 1 mm de largeur et de 45 mm de diamètre. Le même type d'antenne a été utilisé à la réception.

### 3) Détection des ondes électrostatiques

Si l'on porte l'antenne d'émission à un potentiel oscillant en  $\cos \omega t$  on s'attend à voir se propager une onde

$$A(x) \cos \omega t + B(x) \cos (\omega t - kx + \varphi_0)$$

Le premier terme est le terme froid, le second correspond à l'onde électrostatique longitudinale d'amplitude  $B(x) e^{-k^2 x} = \hat{B}(x)$  et de phase  $\varphi_0 - k^r x$  où  $\varphi_0$  est la phase à l'origine en général non nulle (à cause des effets de gaine par exemple). L'intérêt de l'expérience étant d'étudier la dépendance spatiale de l'onde, on récupère le signal avec une antenne réceptrice mobile ; Deux méthodes de traitement du signal sont possibles :

a) Méthode interférométrique : elle consiste à faire battre l'onde reçue avec l'onde émise déphasée de  $\theta$  ce qui donne un signal de la forme

$$A(x) \cos \theta + A(x) \cos(2\omega t + \theta) + \hat{B}(x) \cos(\varphi_0 - \theta - k^r x) + \hat{B}(x) \cos(2\omega t + \varphi_0 + \theta - k^r x)$$

Les deuxième et dernier termes oscillant à la fréquence  $2\omega$  peuvent être éliminés au moyen d'un filtre, et pour se débarrasser du terme froid il suffit de modifier la phase  $\theta$  à l'aide d'un déphaseur de telle façon que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Il reste alors le signal  $s = \hat{B}(x) \sin(\varphi_0 - k^r x) = \text{Im}(A + \hat{B} \exp i(\varphi_0 - k^r x))$  (voir figure 27). N'existant pas de déphaseur continuellement variable de  $0$  à  $\pm 90^\circ$  couvrant la gamme de  $2$  à  $10$  MHz, le problème a pu être résolu en transposant les fréquences de  $300$  MHz dans les deux branches de l'interféromètre et en utilisant une ligne à retard variable à air.

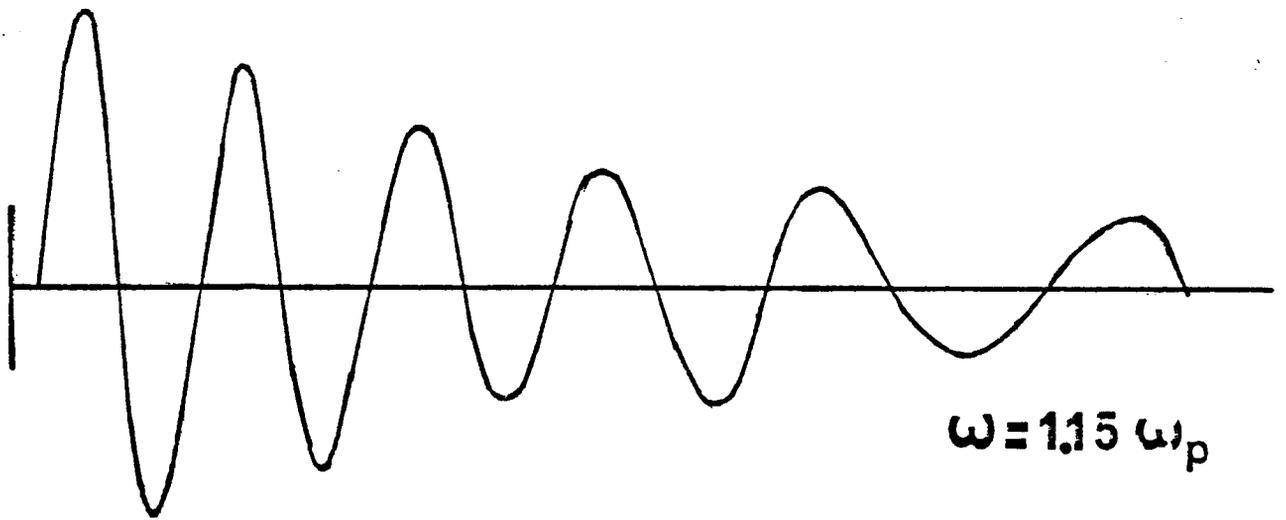
b) Détection quadratique par Analyseur de Spectre

L'analyseur comporte d'abord comme un détecteur quadratique

$$j^2 = \left[ A(x) \cos \omega t + \hat{B}(x) \cos(\omega t - k^r x + \varphi_0) \right]^2$$

puis il mesure la valeur efficace du signal détecté

$$\begin{aligned} \bar{j} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \int_0^T j^2 dt \right)^{1/2} = \left( \frac{A(x)^2}{2} + \frac{\hat{B}(x)^2}{2} + A(x)\hat{B}(x) \cos(\varphi_0 - k^r x) \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| A(x) + \hat{B}(x) \exp i(\varphi_0 - k^r x) \right| \end{aligned}$$



Détection expérimentale par une méthode  
interferométrique

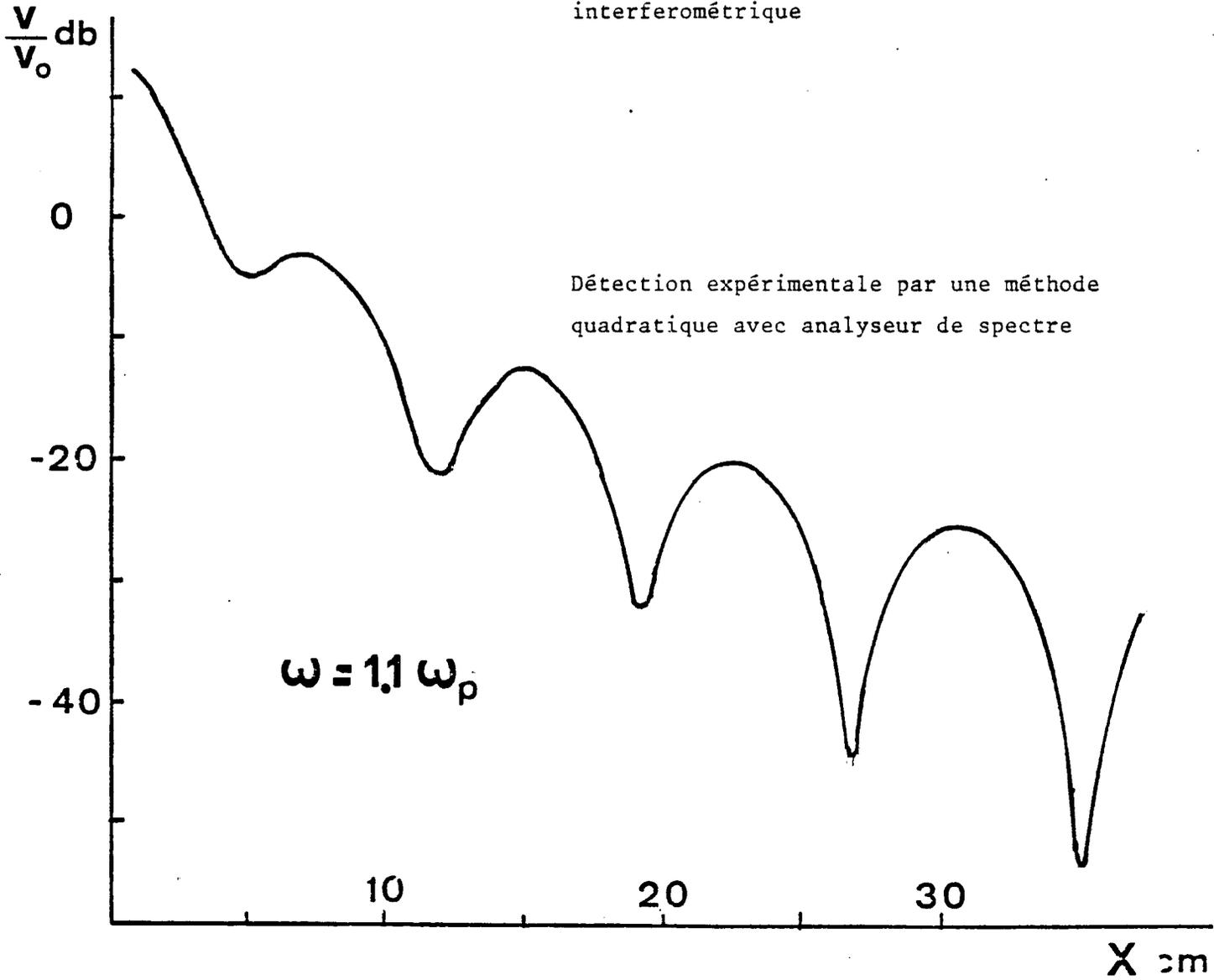


FIGURE 27

Dans ce type de détection, la visualisation de l'onde électrostatique détectée ne peut se faire que grâce à la présence du terme froid sinon nous n'aurions que  $\bar{s} = \hat{B}(\alpha)/\sqrt{2}$  (terme correspondant à l'atténuation de l'onde). Compte tenu de la grande variation de l'amplitude on visualise celle-ci sous forme logarithmique lui donnant une allure redressée avec un pic correspondant à  $\varphi_0 - k^2 x = (2n + 1)\pi$  (voir figure 27).

c) Exploitation des résultats

Il est nécessaire de tenir compte de la présence d'un gradient de densité du plasma. On peut concevoir en effet que la densité aval soit plus faible que la densité amont, cela introduisant une variation spatiale de la longueur d'onde se traduisant par une dissymétrie opposée à celle d'ue à l'effet de dérive. Travaillant avec une fréquence voisine de la fréquence plasma on peut utiliser l'équation de BOHM et GROSS

$$\omega^2 - \omega_p^2 = 3 k^2 v_T^2 = 3 k^2 \lambda_D^2 \omega_p^2$$

qui donne par différentiation :

$$\frac{d\omega_p}{\omega_p} = - \frac{3 k^2 \lambda_D^2}{1 + 3 k^2 \lambda_D^2} \frac{dk}{k}$$

Cette relation lie de façon approchée la variation locale du nombre d'onde k à la variation de la fréquence plasma (proportionnelle à la racine de la densité).

Etant donné le caractère limité de la géométrie de l'excitateur utilisé, et étant donné les effets d'influence mutuelle entre les antennes émettrice et réceptrice, on a été amenés à approximer la dépendance géométrique des termes d'amortissement froid et chaud par des expressions  $A(\alpha) = A_0 x^{-\alpha}$  et  $\hat{B}(\alpha) = \hat{B}_0 x^{\beta}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres supplémentaires qu'il faudra ajuster pour la zone de propagation étudiée.

L'exploitation numérique a consisté à ajuster le signal enregistré numérisé avec la forme analytique suivante :

$$\bar{S}(x) = \text{Log} | E(x) |$$

$$E(x) = \frac{A_0}{x^\alpha} + \frac{B_0}{x^\beta} e^{-k^i x} \exp i [\varphi_0 + (k_0 + k'^n x) x]$$

c'est à dire à optimiser les divers paramètres suivants :

$k_0$  = nombre d'onde du terme chaud à l'origine

$k'^n$  = coefficient de la variation linéaire du nombre d'onde du terme chaud

$k^i$  = amortissement LANDAU

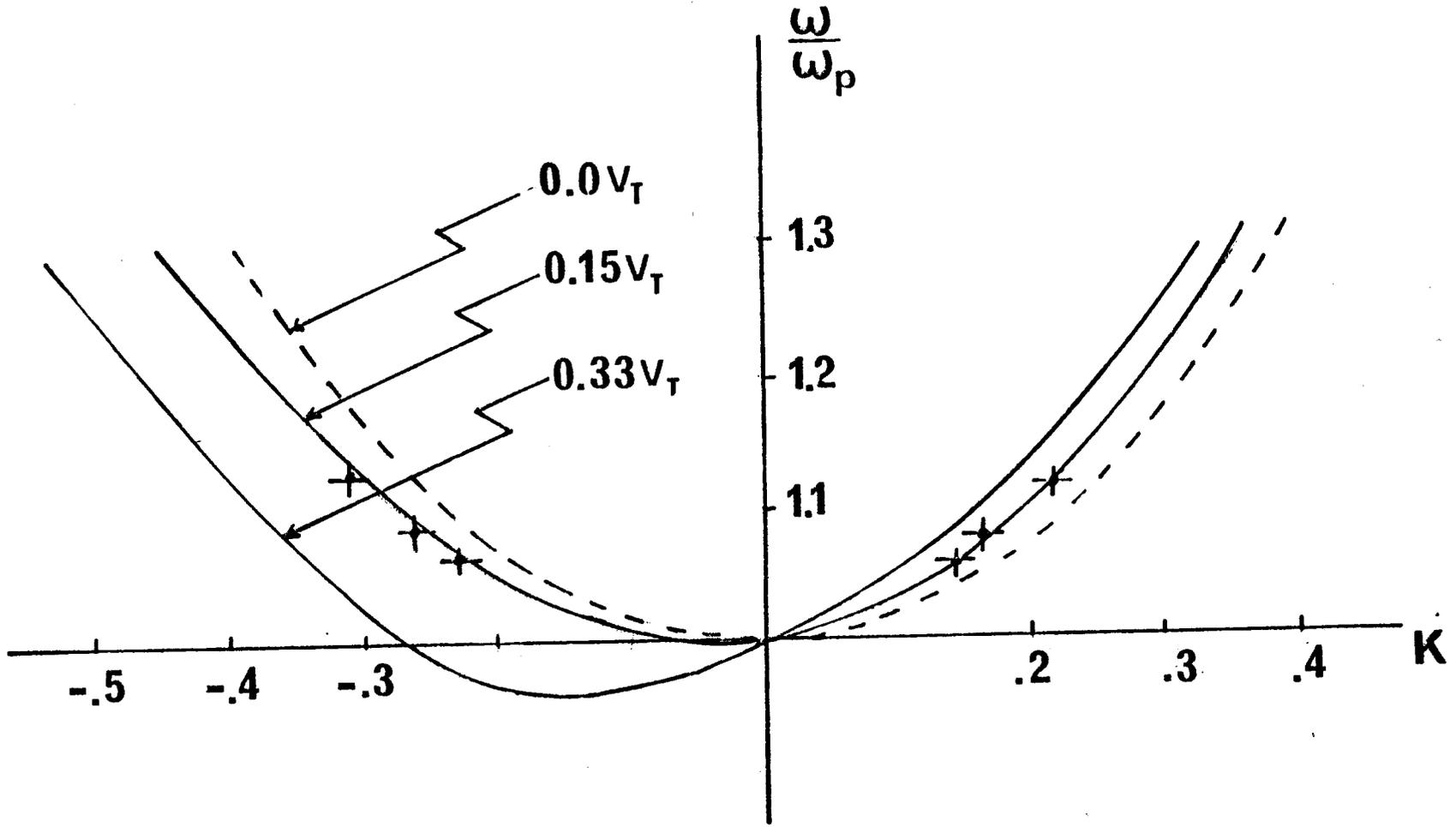
$\varphi_0$  = phase à l'origine

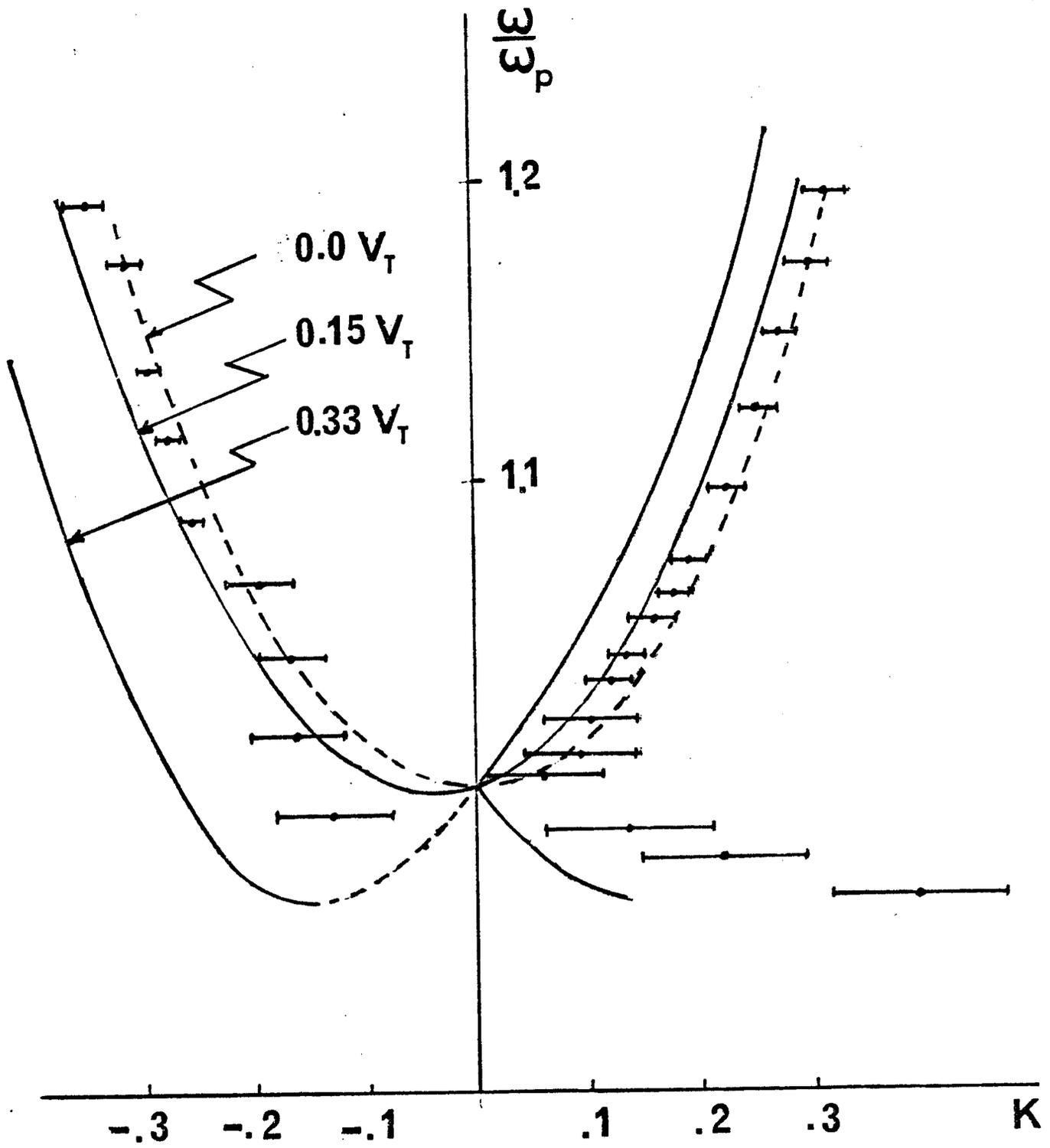
$\alpha$  et  $\beta$  = atténuations géométriques moyennes des termes froid et chaud

$A_0$  et  $B_0$  = amplitude des termes froid et chaud à l'origine

#### 4) Diagramme de dispersion obtenu

Deux séries de mesures ont été effectuées, et travaillant au voisinage de la fréquence plasma nous nous sommes surtout intéressés aux longueurs d'ondes des oscillations électrostatiques détectées. Nous avons tracé deux diagrammes de dispersions corrigés après optimisation des paramètres. La figure 28 montre le diagramme de dispersion correspondant à la première série de mesures. Bien que le nombre de points expérimentaux soit peu important, on remarque nettement l'effet de dissymétrie prévu par la théorie. Cette dissymétrie correspond à une vitesse de dérive d'environ 0,15 fois la vitesse thermique. La deuxième série de mesures plus complète correspond au diagramme de la figure 29. Pour les fréquences comprises entre  $\omega_p$  et  $1.1 \omega_p$  on observe encore la dissymétrie due à une dérive d'environ 0.1 à 0.15 fois la vitesse thermique.





Resultats théoriques et expérimentaux

FIGURE 29

Par contre pour les fréquences entre  $1.1$  et  $1.2\omega_p$ , la dissymétrie bien qu'existante correspond à une dérive plus faible ( $0.05 V_T$ ). Ce phénomène inattendu pourrait être dû à une distribution de vitesse non maxwellienne, mais il est difficile de trancher vu le nombre important de paramètres pouvant modifier le comportement des ondes électrostatiques longitudinales. Par ailleurs, en-dessous de la fréquence plasma la propagation aval détectée correspond à une dérive de  $0.3 V_T$  environ. On peut encore se demander si cette déformation du diagramme de dispersion n'est pas due à une distribution de vitesse non maxwellienne. Une étude en cours va probablement montrer que la branche théorique prévue est déformée par couplage avec un mode relatif à une population électronique monocinétique supplémentaire de grande vitesse par rapport à la vitesse thermique.

### CONCLUSION

Nous venons donc de traiter un problème d'oscillations forcées de plasma chaud non collisionnel en utilisant l'outil simple du calcul de résidus bien adapté à la forme "Fraction rationnelle" de la fonction diélectrique discretisée. Une telle façon de procéder est actuellement bien classique.

En conclusion de ce travail nous tenons à souligner certains faits nouveaux relatifs, non à la philosophie de la physique du modèle dont l'intérêt n'est plus à justifier, mais en rapport avec son aspect numérique :

Notons tout d'abord la possibilité de rapide alternance de pôles simples réels, double, ou complexes conjugués. Evidemment le calcul de ces pôles et de leurs excitations sera d'autant plus délicat que ces pôles seront peu séparés, et à la limite, l'excitation d'un pôle double demandera un traitement particulier.

Finalement, la condition de convergence du modèle discretisé vers le modèle continu revêt ici toute son importance ; en effet la discrétisation peut introduire des pôles de modèle dont les déplacements en fonction de la relation de causalité, et dont les excitations ne se stabilisent que lorsque cette condition de convergence est respectée. De tels phénomènes pourraient être typiques de la discrétisation des fonctions de distribution fortement non symétriques ou à variation rapide. Il serait sans doute intéressant d'utiliser le programme de calcul pour des distributions électroniques non maxwelliennes avec dérive (le paramètre de dérive permettrait sans doute d'accentuer les effets dus à d'éventuels gradients dans l'espace des vitesses de telles fonctions de distribution). Ce type de travail devrait probablement permettre de dégrossir le problème inverse en dévoilant des signatures particulières de diagrammes de dispersion.

Signalons la possibilité de résoudre numériquement ( en utilisant le même modèle M.W.B. ) le cas plus réaliste d'oscillations forcées d'un plasma en dérive , créées par une source ponctuelle : le champ est alors donné par l'intégrale triple suivante

$$E(\vec{X}) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i k_{\parallel} x_{\parallel}} e^{-i k_{\perp} x_{\perp} \cos \theta}}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) \varepsilon(k_{\parallel}, k_{\perp}, \Omega, \nu_D)} d\theta dk_{\parallel} dk_{\perp}$$

avec  $k_{\parallel}$  et  $x_{\parallel}$  projection des vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{X}$  sur la direction de la dérive, et  $k_{\perp}$  et  $x_{\perp}$  projections des mêmes vecteurs sur le plan perpendiculaire à la direction de dérive et contenant la source .

Cette intégrale peut s'écrire

$$E(\vec{X}) = \int_0^{\infty} J_0(k_{\perp} x_{\perp}) k_{\perp} \mathcal{J}(k_{\perp} x_{\parallel}) dk_{\perp}$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce et où

$$\mathcal{J}(k_{\perp}, x_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i k_{\parallel} x_{\parallel}}}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) \left[ 1 - \sum_{j=1}^N \frac{2\alpha_j \xi_j}{(\Omega - k_{\parallel} \nu_D)^2 - (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) \alpha_j^2} \right]} dk_{\parallel}$$

Remarquons que  $\mathcal{J}(k_{\perp})$  ressemble à l'intégrale du champ du travail précédent . En raison de la séparation des composantes de  $\vec{k}$  , nous pouvons envisager la méthode de calcul suivante:

- a) calculer comme précédemment l'intégrale  $\mathcal{J}(k_{\perp})$  pour diverses valeurs de  $k_{\perp}$  , en suivant les pôles par continuité ;
- b) constituer une table de ces valeurs ;
- c) interpoler sur cette table de façon à calculer  $E(\vec{X})$  par une méthode de Filon par exemple .

REFERENCES

- ARNAL Y., Communication au Congrès National de Physique des Plasmas,  
6-10 Décembre 1976, PARIS
- BERK H.L. and D.L. BOOK, Phys. Fluids, 12, 649, 1969
- BERK H.L. and K.V. ROBERTS, Methods in Computational Physics, Vol 9,  
p. 87, Academic Press, 1970
- BUZZI J.M., "Calcul numérique de la transformée de Fourier",  
Rapport P.M.I. 492, 1971
- BUZZI J.M., J. Phys., 32 C(5B), 102, 1971
- BUZZI J.M., Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay, 1974
- BERTRAND P., Thèse de Doctorat d'Etat, Nancy 1, 1972
- DE PACKH D.C., J. Electron. Contr., 13, 417, 1962
- DERFLER H., Proceedings of the 7th International Conference on Phenomena  
in Ionized Gases, Perovich B. and Toshich D. Eds,  
Vol II, p. 282, Gradevinska Knjiga, Beograd, Yugoslavia,  
1966
- GOULD R.W., Phys. Rev., 136 A, 991, 1964
- GRANT F.C. and M.R. FEIX, Phys. Fluids, 10, 696, 1967
- TREGUIER J.P. and D. HENRY, J. Plasma Phys., 13 (2), 193, 1975
- TREGUIER J.P. and D. HENRY, J. Plasma Phys., 15 (2), 447, 1976
- LANDAU L., J. Phys. USSR, 10, 25, 1946
- NAVET M. and P. BERTRAND, Phys. Let., A34, 117, 1971
- NAVET M., Thèse de 3ème Cycle, Orléans, 1973

NOYER M.L., M. NAVET and M.R. FEIX, J. Plasma Phys., 13 (1), 63, 1971

SIMONEN T.C., SUIPR Report N° 100, Stanford University, Stanford,  
(California), 1966

SYMON K.R., PLP 573 (1974) et 577 Reports of University of Wisconsin  
on Plasma Studies

ROSENBLUTH M.N. and N. ROSTOKER, Phys. Fluids, 3 (1), 1960

TROTIGNON J.G., Thèse 3ème Cycle, Orléans, 1976

ANNEXE 1

- a) Programme FORMAC relatif à un modèle à  
3 bags.

Les résultats algébriques.

- b) Programme général de calcul du champ par  
un modèle à N bags.

Ces programmes sont relatifs à un calculateur

I.B.M. 370/168 OS MVT

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
WB3: PROC OPTICNS(MAIN);
FORMAC_OPTIONS;
OPTSET(EXPND);
DCL LARG(3) DEC FLOAT(9);
DCL(HAUT(3)) DEC FLOAT(9);
DCL(X,M) DEC FLOAT(9);
GET EDIT ((LARG(K1) DO K1=1 TO 3))
(COLUMN(1),3(E(15,8),X(1)));
DCL(COEF(0:6)) DEC FLOAT(9);
GET EDIT ((HAUT(K1) DO K1=1 TO 3))
(COLUMN(1),3(E(15,8),X(1)));
GET EDIT (X,M) (2(COLUMN(1),E(15,8)));
DCL L BIN FIXED;
```

```
/* DEVELOPPEMENT FORMAC DE EPSILON */
```

```
LET(PROD=1;SOM=0);
DO J=1 TO 3;
LET(TERM=KF**2*(MF**2-LARGF("J")**2)-KF*2*XF*MF+XF**2);
LET(SOM=SOM*TERM+2*HAUTF("J")*LARGF("J")*PRGD);
LET(PROD=PROD*TERM);LET(E=PROD-SOM);
IF J=3 THEN DO ;DO L=2*J TO 1 BY -1 ;
LET(D("L")=COEFF(E,KF**"L"));
LET(E=E-D("L")*KF**"L");
PUT EDIT ('COEFFICIENT DE LA PUISSANCE ',L)
(SKIP(3),COLUMN(5),A(28),X(2),F(1));
PRINT_OUT (D("L"));
END;L=0;
PUT EDIT ('COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 0 ')
(SKIP(3),COLUMN(5),A(32));
LET (D("L")=E);PRINT_OUT (D("L"));
END;END;
```

```
/* CALCUL DES VALEURS NUMERIQUES DES COEFFICIENTS */
```

```
DO L=6 TO 0 BY -1; LET (Z=EVAL(D("L"),MF,"M",XF,"X",LARGF(1),
"LARG(1)",LARGF(2),"LARG(2)",LARGF(3),"LARG(3)",HAUTF(1),"HAUT(1)",
HAUTF(2),"HAUT(2)",HAUTF(3),"HAUT(3)"));
COEF(L)=ARITH(Z);
PUT EDIT ('COEFFICIENT DE LA PUISSANCE ',L,COEF(L))
(SKIP(3),COLUMN(5),A(28),X(2),F(1),X(5),E(15,8));
END;
END WB3 ;
```

COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 6

$$D(6) = MF^2 LARGF(3)^2 LARGF(2)^2 - LARGF(1)^2 LARGF(3)^2 LARGF(2)^2 + LARGF(1)^2 MF^2 LARGF(2)^2 - MF^4 LARGF(2)^2 + LARGF(1)^2 MF^2 LARGF(3)^2 - MF^4 LARGF(3)^2 - LARGF(1)^2 MF^4 + MF^6$$

COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 5

$$D(5) = -2 XF LARGF(1)^2 MF LARGF(2)^2 - 2 XF MF LARGF(3)^2 LARGF(2)^2 + 4 XF MF^3 LARGF(2)^2 - 2 XF LARGF(1)^2 MF LARGF(3)^2 + 4 XF MF^3 LARGF(3)^2 + 4 XF LARGF(1)^2 MF^3 - 6 XF MF^5$$

COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 4

$$D(4) = 2 MF^2 LARGF(3)^2 HAUTF(2) LARGF(2) - 2 LARGF(1)^2 LARGF(3)^2 HAUTF(2) LARGF(2) + 2 LARGF(1)^2 MF^2 HAUTF(2) LARGF(2) - 2 MF^4 HAUTF(2) LARGF(2) + 2 LARGF(1)^2 MF^2 HAUTF(3) LARGF(3) - 2 MF^4 HAUTF(3) LARGF(3) + 2 MF^2 HAUTF(3) LARGF(3) - 2 MF^4 HAUTF(3) LARGF(3) + 2 MF^2 HAUTF(3) LARGF(3) - 2 LARGF(1)^2 HAUTF(3) LARGF(3) LARGF(2)^2 - 2 HAUTF(1) LARGF(1) LARGF(3)^2 LARGF(2)^2 + XF^2 LARGF(3)^2 LARGF(2)^2 + 2 HAUTF(1) LARGF(1) MF^2 LARGF(2)^2 - 6 XF^2 MF^2 LARGF(2)^2 + XF^2 LARGF(1)^2 LARGF(2)^2 + 2 HAUTF(1) LARGF(1) MF^2 LARGF(3)^2 - 6 XF^2 MF^2 LARGF(3)^2 + XF^2 LARGF(1)^2 LARGF(3)^2 - 6 XF^2 LARGF(1)^2 MF^2 - 2 HAUTF(1) LARGF(1) MF^4 + 15 XF^2 MF^4$$

COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 3

$$D(3) = -4 XF LARGF(1)^2 MF HAUTF(2) LARGF(2) - 4 XF MF LARGF(3)^2 HAUTF(2) LARGF(2) + 8 XF MF^3 HAUTF(2) LARGF(2) - 4 XF LARGF(1)^2 MF HAUTF(3) LARGF(3) + 3 XF MF^3 HAUTF(3) LARGF(3) + 4 XF^3 LARGF(1)^2 MF - 4 XF MF HAUTF(3) LARGF(3) LARGF(2)^2 - 4 HAUTF(1) XF LARGF(1) MF LARGF(2)^2 + 4 XF^3 MF LARGF(2)^2 - 4 HAUTF(1) XF LARGF(1) MF LARGF(3)^2 + 4 XF^3 MF LARGF(3)^2 + 8 HAUTF(1) XF LARGF(1) MF^3 - 20 XF^3 MF^3$$

COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 2

$$D(2) = 2 XF^2 LARGF(3)^2 HAUTF(2) LARGF(2) - 12 XF^2 MF^2 HAUTF(2) LARGF(2) + 2 XF^2 LARGF(1)^2 HAUTF(2) LARGF(2) - 12 XF^2 MF^2 HAUTF(3) LARGF(3) + 2 XF^2 LARGF(1)^2 HAUTF(3) LARGF(3) + 2 XF^2 HAUTF(3) LARGF(3) LARGF(2)^2 + 2 HAUTF(1) XF^2 LARGF(1) LARGF(2)^2 - XF^4 LARGF(2)^2 + 2 HAUTF(1) XF^2 LARGF(1) LARGF(3)^2 - XF^4 LARGF(3)^2 - 12 HAUTF(1) XF^2 LARGF(1) MF^2 + 15 XF^4 MF^2 - XF^4 LARGF(1)^2$$

COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 1

$$D(1) = 8 XF^3 MF HAUTF(2) LARGF(2) + 8 XF^3 MF HAUTF(3) LARGF(3) + 8 HAUTF(1) XF^3 LARGF(1) MF - 6 XF^5 MF$$

COEFFICIENT DE LA PUISSANCE 0

$$D(0) = -2 XF^4 HAUTF(2) LARGF(2) - 2 XF^4 HAUTF(3) LARGF(3) - 2 HAUTF(1) XF^4 LARGF(1) + XF^6$$



```
/*=====*/
/* LECTURE DE LA DISTANCE 'DMNM' EN DESSOUS DE LAQUELLE CN REMPLACERA
DEUX RACINES SIMPLES VOISINES PAR LA RACINE DOUBLE CORRESPONDANTE */
GET EDIT (DMNM)(COLUMN(40),E(17,10)) ;
/*=====*/
/* LECTURE DE LA VITESSE DE COUPURE 'LONGU' DE LA FONCTION DE
REPARTITION ELECTRONIQUE GAUSSIEUNE */
/* LECTURE DU PAS DE DISTANCE 'PAS' DE CALCUL DU CHAMP */
GET EDIT(LONGU,PAS) (2(COLUMN(3),E(17,10))) ;
DO I11=-75 TO 75 ;
    R(I11)=I11*PAS ;
END ;
/*=====*/
/* LECTURE DU NOMBRE 'N' DE BAGS APPROXIMANT LA GAUSSIEUNE */
GET EDIT (N) (COLUMN(5),F(5)) ;
/*=====*/
/* LECTURE DU NOMBRE 'N2' DE DERIVES ETUDIEES */
GET EDIT (N2) (COLUMN(5),F(5)) ;
/*=====*/
/* LECTURE DU NOMBRE 'N3' DE FREQUENCES ETUDIEES PAR DERIVE */
GET EDIT (N3) (COLUMN(5),F(5)) ;
/*=====*/
/* CALCUL DES N BAGS EQUIDISTANTS D'ABSCISSE ALPHA ET DE HAUTEUR
KSI APPROXIMANT UNE GAUSSIEUNE TRONQUEE A LONGU */
L=LONGU/N ;
    ALPHA(1)=L;F=ERF(ALPHA(1)/SQRT(2));AP=(1/(2*ALPHA(1)))*F;
DO I10=2 TO N ;
    ALPHA(I10)=I10*L;G=ERF(ALPHA(I10)/SQRT(2));AQ=(1/(2*L))*(G-F);F=G;
    KSI(I10-1)=AP-AQ;AP=AQ;
END;KSI(N)=AP;
/*=====*/
/* CALCUL DES ASYMPTOTES 'ASY' DE LA FONCTION DIELECTRIQUE
SEPARANT LES RACINES */
DO I8=1 TO N2;
/*=====*/
/* LECTURE DE LA DERIVE DONNEE PAR LA RELATION M=(K+0.5)*PAS */
GET EDIT (K) (COLUMN(7),F(5));M=(K*L)+(L/2) ;
DO I9=1 TO N3;
/*=====*/
/* LECTURE DE LA FREQUENCE X ETUDIEE */
GET EDIT (X)(COLUMN(1),E(17,10));TF=1-1/(X*X);
TRFD=1/(2.0*TF) ;
PUT EDIT('DERIVE',M,'FREQUENCE',X,'CHAMP FROID',TRFD)
(SKIP(3),COLUMN(1),A(6),X(3),E(17,10),X(5),A(9),E(17,10),
X(5),A(11),E(17,10)) ;
PUT EDIT ('RACINE','TYPE','EXITATION MONOPOLAIRE',
'EXITATION DIPOLAIRE')(SKIP(3),COLUMN(17),A(6),X(12),
A(4),X(10),A(21),X(16),A(19)) ;
/*
PUT FILE (RACHEL) EDIT (X,TRFD)(2(E(13,6))) ;
PUT FILE (DICHEL) EDIT (X,TRDIP)(2(E(13,6))) ;
*/
DO J=1 TO K;
    ASY(2*N-K+J)=FC(ALPHA(J));ASY(2*N-K+1-J)=FD(ALPHA(J));
END;
DO J=(K+1) TO N;
    ASY(2*N-K+1-J)=FD(ALPHA(J));ASY(J-K)=FC(ALPHA(J));
END;
VERIF=CPLX(1/TF,0) ;
```

```
/*=====*/
/* CALCUL DES 2*N-2 RACINES 'RAC' LOCALISEES ENTRE LES
ASYMPTOTES AU MOYEN DE LA PROCEDURE LOCAL ET DES EXITATIONS
MONOPOLAIRES 'XIT' ET DIPOLAIRES 'XIS' CORRESPONDANTES
ET DES TYPES 'DEP' AU MOYEN DE LA PROCEDURE 'DEPLAC' */
DO I7=1 TO (N-K-1);
  PT=1;
  RAC(I7)=LOCAL(PT,ASY(I7+1),ASY(I7));
  RC=REAL(RAC(I7));
  DEP(I7)=DEPLAC(RC);
DP=DEP(I7) ;
  XIT(I7)=-1/(RAC(I7)*CEJP(RAC(I7))) ;XI=XIT(I7) ;VERIF=VERIF+XI ;
  XIS(I7)=XIT(I7)*RAC(I7) ;
  XS=XIS(I7) ;
  PUT EDIT ('RCINE',RC,DP,XI,XS)
  (COLUMN(10),A(5),X(3),E(17,10),X(3),F(5),X(3),
  C(E(17,10),E(17,10)),X(3),C(E(17,10),E(17,10)))) ;
  END;
DO I7=(N-K+1) TO (2*N-K-1);
  PT=2;
  RAC(I7)=LOCAL(PT,ASY(I7+1),ASY(I7));DEP(I7)=+1;
  RC=REAL(RAC(I7));
DP=DEP(I7) ;
  XIT(I7)=-1/(RAC(I7)*CEJP(RAC(I7))) ;XI=XIT(I7) ;VERIF=VERIF+XI ;
  XIS(I7)=XIT(I7)*RAC(I7) ;
  XS=XIS(I7) ;
  PUT EDIT ('RDINE',RC,DP,XI,XS)
  (COLUMN(10),A(5),X(3),E(17,10),X(3),F(5),X(3),
  C(E(17,10),E(17,10)),X(3),C(E(17,10),E(17,10)))) ;
  END;
DO I7 =(2*N-K+1) TO (2*N-1);
  PT=3;
  RAC(I7)=LOCAL(PT,ASY(I7+1),ASY(I7));DEP(I7)=+1;
  RC=REAL(RAC(I7));
DP=DEP(I7) ;
  XIT(I7)=-1/(RAC(I7)*CEJP(RAC(I7))) ;XI=XIT(I7) ;VERIF=VERIF+XI ;
  XIS(I7)=XIT(I7)*RAC(I7) ;
  XS=XIS(I7) ;
  PUT EDIT ('REINE',RC,DP,XI,XS)
  (COLUMN(10),A(5),X(3),E(17,10),X(3),F(5),X(3),
  C(E(17,10),E(17,10)),X(3),C(E(17,10),E(17,10)))) ;
  END ;
  IF (K=0) THEN DO ; GO TO ETIQ3 ; END ;
  ELSE DO ;
    VAL=-1 ;
    DO I6=1 TO 100 WHILE (VAL<0);
      ABZ=ASY(2*N)+I6;VAL=1-TEJ(ABZ);
    END;
    IF (I6=2) THEN DO ;
      PT=5;
      RAC(2*N)=LOCAL(PT,ABZ,ASY(2*N)) ;
      GO TO ETIQ4 ;
    END ;
    ELSE DO ;
      PT=4;
      RAC(2*N)=LOCAL(PT,ABZ,ABZ-1) ;
      END ;
      ETIQ4 : DEP(2*N)=+1 ;
    RC=REAL(RAC(2*N)) ;
    DP=DEP(2*N) ;
    XIT(I7)=-1/(RAC(I7)*CEJP(RAC(I7))) ;XI=XIT(I7) ;VERIF=VERIF+XI ;
    XIS(I7)=XIT(I7)*RAC(I7) ;
    XS=XIS(I7) ;
    PUT EDIT ('RFINE',RC,DP,XI,XS)
    (COLUMN(10),A(5),X(3),E(17,10),X(3),F(5),X(3),
    C(E(17,10),E(17,10)),X(3),C(E(17,10),E(17,10)))) ;
```

```
/*-----*/
/* CALCUL DES DEUX RACINES RESTANT ET DE LEUR TYPE PAR DEPLACEMENT
INFINITESIMAL AU MOYEN DES PROCEDURES 'FOSYM' ET 'DEPLAC' */
ETIQ3 : CALL FOSYM;
      IF (IMAG(RAC(N-K))=0) THEN DO;
          IF (REAL(RAC(N-K))>0) THEN DO;
              DEP(N-K)=+1;GO TO ETIQ2;
          END;
          ELSE DO;
RC=REAL(RAC(N-K));
          DEP(N-K)=DEPLAC(RC);
GO TO ETIQ2;
          END;
      ETIQ2: ;
          IF (REAL(RAC(2*N-K))>0) THEN DO;
              DEP(2*N-K)=+1;GO TO ETIQ1;
          END;
          ELSE DO;
RC=REAL(RAC(2*N-K));
              DEP(2*N-K)=DEPLAC(RC);
              GO TO ETIQ1;
          END;
      END;
      ELSE DO;
          IF (IMAG(RAC(N-K))>0) THEN DO;
              DEP(N-K)=-2;DEP(2*N-K)=+2;GO TO ETIQ1;
          END;
          ELSE DO;
              DEP(N-K)=+2;DEP(2*N-K)=-2;GO TO ETIQ1;
          END;
      END;
      ETIQ1: ;

ANNE=0;
XIT(N-K)=-1/(RAC(N-K)*CEJP(RAC(N-K))) ;
XIS(N-K)=XIT(N-K)*RAC(N-K) ;
VERIF=VERIF+XIT(N-K) ;
XIT(2*N-K)=-1/(RAC(2*N-K)*CEJP(RAC(2*N-K))) ;
XIS(2*N-K)=XIT(2*N-K)*RAC(2*N-K) ;
VERIF=VERIF+XIT(2*N-K) ;
PUT EDIT(RAC(N-K),DEP(N-K),XIT(N-K),XIS(N-K))
(COLUMN(1),C(E(17,10),E(17,10)),X(3),F(5),X(3),C(E(17,10),E(17,10)),
X(3),C(E(17,10),E(17,10))) ;
PUT EDIT(RAC(2*N-K),DEP(2*N-K),XIT(2*N-K),XIS(2*N-K))
(COLUMN(1),C(E(17,10),E(17,10)),X(3),F(5),X(3),C(E(17,10),E(17,10)),
X(3),C(E(17,10),E(17,10))) ;
PUT EDIT ('VERIF EXITATION MONCPOLAIRE',VERIF)
(COLUMN(12),A(27),X(3),C(E(17,10),E(17,10))) ;
PUT EDIT('VALEURS NON CORRIGÉES REELLES')(COLUMN(2),A(29));
/* POUR VOIR SI LES TYPES SONT BONS */
ANNE=1 ; GO TO LABL2 ;
```

```
/*-----*/
/* CALCUL DU CHAMP MONOPOLAIRE - LE CHAMP FROID ET DU CHAMP DIPOLAIRE
EN FONCTION DE LA DISTANCE 'RT' DE LA SOURCE, DE LA FACON SUIVANTE:
SEULS LES POLES DE TYPE NEGATIF (RESP POSITIF) INTERVIENNENT POUR
LES DISTANCES NEGATIVES (RESP POSITIVES) */
LABL1: BCR,BCI=0 ;
ZCR,ZCI=0.0 ;
PUT EDIT('DISTANCE','CHAMP MOND REEL','CHAMP MOND IMAG',
'CHAMP DIPO REEL','CHAMP DIPO IMAG')
(COLUMN(12),A(8),X(8),4(A(15),X(5))) ;
DO I5=-75 TO 75 ;
RT=R(I5);
IF(RT>0) THEN DO ;
CHDP=CPLX(0.0,0.0) ;
CHAMP=CPLX(1/(2.0*TF),0) ;
DO I4=1 TO (2*N) ;
IF((DEP(I4)=1)!(DEP(I4)=2)) THEN DO ;
TM=RAC(I4);VR1=RT*IMAG(TM);
VR2=-RT*REAL(TM) ;VR=CPLX(VR1,VR2) ;
CHAMP=CHAMP+EXP(VR)*XIT(I4) ;
CHDP=CHDP-EXP(VR)*XIS(I4) ;
END ;
IF(DEP(I4)=3) THEN DO ;
TM=RAC(I4) ;ABEL=REAL(TM) ;
VR2=-RT*ABEL ;VR=CPLX(0,VR2) ;
CHAMP=CHAMP-(EXP(VR))*((VR/CPLX(TEJS(ABEL)*
ABEL*ABEL,0))-XIT(I4)) ;
CHDP=CHDP+1.0*EXP(VR)*CPLX(LEER,RT*LEEI) ;
END ;
END ;
CHDPRE=-IMAG(CHDP) ;CHDPI=REAL(CHDP) ;
CHAMPR=REAL(CHAMP) ;CHAMPR=CHAMPR-TRFD ;
CHAMPI=IMAG(CHAMP) ;GO TO ETIQ5 ;
END ;
```

```
IF(RT=0) THEN DO ;
  CHAMP=CPLX(-1/(2.0*TF),0) ;
CHDP=CPLX(0.0,0.0) ;
  DO I4=1 TO (2*N) ;
IF((DEP(I4)=-1):(DEP(I4)=-2)) THEN DO ;
  CHAMP=CHAMP-XIT(I4) ;CHDP=CHDP+XIS(I4) ; END ;
IF(DEP(I4)=-3) THEN DO ;
  CHAMP=CHAMP-XIT(I4) ;CHDP=CHDP-1.0*CPLX(LEER,0.0) ; END ;
  END ;
  CHAMPR=REAL(CHAMP) ;CHAMPR=CHAMPR+TRFD ;
  CHAMPI=IMAG(CHAMP) ;
  CHDPRE=-IMAG(CHDP) ;CHDPIM=REAL(CHDP) ;
/*
  PUT FILE (RACHEL) EDIT(CHAMPR,CHAMPI)(2(E(13,6))) ;
  PUT FILE (DICHEL) EDIT(CHDPRE,CHDPIM)(2(E(13,6))) ;
*/
PUT EDIT(RT,CHAMPR,CHAMPI,CHDPRE,CHDPIM)
(COLUMN(10),5(E(13,6),X(7))) ;
  TCR=ABS(CHAMPR) ;TCI=ABS(CHAMPI) ;
  QCR=ABS(CHDPRE) ;QCI=ABS(CHDPIM) ;
  IF(BCR<TCR) THEN BCR=TCR ;
  IF(BCI<TCI) THEN BCI=TCI ;
IF(ZCR<QCR) THEN ZCR=QCR ;
  IF(ZCI<QCI) THEN ZCI=QCI ;
  CHAMP=CPLX(1.0/(2.0*TF),0) ;
CHDP=CPLX(0.0,0.0) ;
  DO I4=1 TO (2*N) ;
IF((DEP(I4)=1):(DEP(I4)=2)) THEN DO ;
  CHAMP=CHAMP+XIT(I4) ;CHDP=CHDP-XIS(I4) ; END ;
IF(DEP(I4)=3) THEN DO ;
  CHAMP=CHAMP+XIT(I4) ;CHDP=CHDP+1.0*CPLX(LEER,0.0) ; END ;
  END ;
  CHAMPR=REAL(CHAMP) ;CHAMPR=CHAMPR-TRFD ;
  CHAMPI=IMAG(CHAMP) ;
  CHDPRE=-IMAG(CHDP) ;CHDPIM=REAL(CHDP) ;
  GO TO ETIQ5 ;
END ;
```

```

ELSE DO ;
  CHAMP=CPLX(-1.0/(2.0*TF),0) ;
CHDP=CPLX(0.0,0.0) ;
DO I4=1 TO (2*N) ;
  IF((DEP(I4)=-1):(DEP(I4)=-2)) THEN DO ;
    TM=RAC(I4) ; VR1=RT*IMAG(TM) ;
    VR2=-RT*REAL(TM) ; VR=CPLX(VR1,VR2) ;
    CHAMP=CHAMP-EXP(VR)*XIT(I4) ;
  CHDP=CHDP+EXP(VR)*XIS(I4) ;
  END ;
  IF(DEP(I4)=-3) THEN DO ;
    TM=RAC(I4) ; ABEL=REAL(TM) ;
    VR2=-RT*ABEL ; VR=CPLX(0,VR2) ;
    CHAMP=CHAMP+(EXP(VR))*((VR/CPLX(TEJS(ABEL)*
    ABEL*ABEL,0))-XIT(I4)) ;
  CHDP=CHDP-1.0*EXP(VR)*CPLX(LEER,RT*LEEI) ;
  END ;
  END ;
  CHAMPR=REAL(CHAMP) ; CHAMPR=CHAMPR+TRFD ;
  CHAMPI=IMAG(CHAMP) ;
  CHDPRE=-IMAG(CHDP) ; CHDPIM=REAL(CHDP) ;
  END ;
ETIQ5:
/*
  PUT FILE (RACHEL) EDIT(CHAMPR,CHAMPI)(2(E(13,6)));
  PUT FILE (DICHEL) EDIT(CHDPRE,CHDPIM)(2(E(13,6))) ;
*/
PUT EDIT(RT,CHAMPR,CHAMPI,CHDPRE,CHDPIM)
(COLUMN(10),5(E(13,6),X(7)));
  TCR=ABS(CHAMPR) ; TCI=ABS(CHAMPI) ;
QCR=ABS(CHDPRE) ; QCI=ABS(CHDPIM) ;
  IF(BCR<TCR) THEN BCR=TCR ;
  IF(BCI<TCI) THEN BCI=TCI ;
IF(ZCR<QCR) THEN ZCR=QCR ;
  IF(ZCI<QCI) THEN ZCI=QCI ;
  END ;
/*=====*/
/* LES VARIABLES BCR,BCI,ZCR,ZCI DONNENT LE MODULE MAXIMUM DES
CHAMPS REEL ET IMAGINAIRE MONOPOLAIRE ET DIPOLAIRE EN VUE
D'UN TRACAGE DE COURBE */
PUT EDIT('BCR=',BCR,'BCI=',BCI,'ZCR=',ZCR,'ZCI=',ZCI)
(COLUMN(12),4(A(4),E(17,10),X(5)));
  ANNE=ANNE+1 ;
  IF(ANNE=2) THEN DO ;
    IF (SMOOTH1=1.0) THEN DO ;
      GO TO LABL3 ;
    END ;
  GO TO LABL4 ;
  END ;
ELSE DO ;
  GO TO LABL3 ;
  END ;

```

```
/*=====*/
/* CETTE PARTIE TRAITE LE TYPE DES POLES VOISINS EN FREQUENCE
DES POLES DOUBLES ON DEPLACE LES POLES PAR UNE RELATION DE CAUSALITE
ET ON ETUDIE LES VARIATIONS DE LEUR EXITATION AU MOYEN DE LA
PROCEDURE DPREL QUI DONNE LEUR TYPE */
LABL2:
  POINT=0 ;
/*=====*/
/* SI ON A DEUX POLES COMPLEXES D'INDICE 'POINT' ET 'VICT'
ON LES DEPLACE DE FACON A AVOIR LEUR TYPE DEP(POINT) ET DEP(VICT)
ON REGULARISERA LEUR EXITATION DIVERGENTE ,LORSQUE LEUR PARTIE IMAGI
NAIRE EST TRES PETITE (<<DMNM) PAR UN DEPLACEMENT PETIT DE LA FRE-
QUENCE QUI DONNERA UN POLE DOUBLE , QU'ON RECHERCHERA PAR LA
PROCEDURE 'RAF' ET POUR LEQUEL ON CALCULERA LA PSEUDO EXITATION
POUR POUVOIR CALCULER LE CHAMP */
  IF((DEP(N-K)=+2):(DEP(N-K)=-2)) THEN DO ;
    POINT=N-K; VICT=2*N-K ;
    RRVICT=ABS(REAL(XIT(VICT)))/10.0 ;
    IIVICT=ABS(IMAG(XIT(VICT)))/10.0 ;
    SSVICT=2.0*ABS(REAL(XIT(VICT)))/10.0 ;
    TOTQ=RAC(POINT) ; TATA=RAC(VICT) ;
    DEP(POINT)=DPREL(TOTQ) ; DEP(VICT)=DPREL(TATA) ;
    IF((DEP(POINT)=10):(DEP(VICT)=10)) THEN GO TO LABL3;
    PUT EDIT(RAC(POINT),DEP(POINT),RAC(VICT),DEP(VICT))
      (2(COLUMN(12),C(E(17,10),E(17,10)),X(3),F(5)));
    IF(2.0*ABS(IMAG(RAC(N-K)))<DMNM) THEN DO ;
      BERTHE=REAL(RAC(N-K)) ;
      SMOOTH1=2.0 ; SMOOTH2=2.0 ;
      CPT=7 ; GO TO LABL4 ;
    END ;
    ELSE DO ;
      PUT EDIT ('LISSAGE NON UTILE')(COLUMN(12),A(17)) ;
      SMOOTH1=1.0 ; SMOOTH2=1.0 ;
      GO TO LABL1 ;
    END ;
  END ;
END ;
```

```
/*=====*/
/* S'IL N'Y A PAS DE RACINE COMPLEXE ON RECHERCHERA EVENTUELLEMENT
(L'INDICE 'TOUR'SERA ALORS NON NUL) , DEUX RACINES CONSECUTIVES
D'INDICE 'POINT' ET 'VICT' POUR LES QUELLES ON A INVERSION DE TYPE
SI L'EXITAYION DE LA DOWNSTREAM EST << A CELLE DE L'UPSTREAM
ON IRA CALCULER LE CHAMP , SINON ON OPERERA CCMME DANS LE CAS
DE DEUX RACINES COMPLEXES */
IF(DEP(N-K)=+1) THEN DO ;
  POINT=N-K; ANTPT=2*N-K ; GO TO LABL8 ;
END ;
IF(DEP(2*N-K)=+1) THEN DO ;
  POINT=2*N-K; ANTPT=N-K; GO TO LABL8 ;
END ;
ELSE DO ;
  DO TOUR=1 TO N-K-1 ;
  IF DEP(TOUR)=+1 THEN POINT=TOUR ;
  END ;
END ;
IF (POINT=0) THEN DO ;
  PUT EDIT ('LISSAGE NON UTILE')(COLUMN(12),A(17)) ;
  SMOOTH1=1.0 ;SMOOTH2=1.0 ;
  GO TO LABL1 ;
  END ;
LABL8:
  ALESIA=REAL(RAC(POINT)) ;
  GERGO=ABS(ALESIA-REAL(RAC(1)));
  FERNAN=2 ;
LABL5:
  VERCIN=ABS(ALESIA-REAL(RAC(FERNAN)));
  IF(VERCIN<GERGO)THEN DO ;
  IF(VERCIN=0) THEN FERNAN=FERNAN+1 ;
  ELSE DO ;
  GERGO=VERCIN ;
  FERNAN=FERNAN+1 ;
  END ;
  IF(FERNAN=N-K) THEN DO ;
LABL9:IF(GERGO<ABS(ALESIA-REAL(RAC(ANTPT)))) THEN DO ;
  CPT=6 ;VICT=FERNAN-1 ;
  LABL7:;
  IF(ABS(REAL(XIT(POINT)))>20.0*ABS(REAL(XIT(VICT)))) THEN DO ;
  ANNE=3 ;
  PUT EDIT('LES TYPES DE POLE SONT BONS')(COLUMN(2),A(27));
```

```
GO TO LABL1 ;
  END ;
RRVICT=ABS(REAL(XIT(VICT)))/10.0 ;
IIPQIN=+1E-01 ; IIVICT=+1E-01 ;
RRPQIN=ABS(REAL(XIT(POINT)+XIT(VICT)))/10.0 ;
TOTQ=RAC(POINT) ; TATA=RAC(VICT) ;
DEP(POINT)=DPREL(TOTQ) ; DEP(VICT)=DPREL(TATA) ;
IF((DEP(POINT)=10)!(DEP(VICT)=10)) THEN GO TO LABL3 ;
PUT EDIT(RAC(POINT),DEP(POINT),RAC(VICT),DEP(VICT))
  (2(COLUMN(12),C(E(17,10),E(17,10)),X(3),F(5))) ;
  IF(ABS(RAC(VICT)-ALESIA)<DMNM) THEN DO ;
  BERTHE=REAL((RAC(POINT)+RAC(VICT))/2.0) ;
  SMOOTH1=2.0 ; SMOOTH2=2.0 ;
GO TO LABL4 ;
  END ;
  ELSE DO ;
  PUT EDIT('LISSAGE NON UTILE')(COLUMN(12),A(17)) ;
  SMOOTH1=1.0 ; SMOOTH2=1.0 ;
  GO TO LABL1 ;
  END ;
  END ;
  ELSE DO ;
  CPT=5 ; VICT=ANTPT ; GO TO LABL7 ;
  END ;
  END ;
  ELSE DO ;
  GO TO LABL5 ;
  END ;
  END ;
  ELSE DO ;
  IF ((POINT=N-K)!(POINT=2*N-K)) THEN DO ;
  GO TO LABL9 ;
  END ;
  ELSE DO ;
  CESAR=ABS(ALESIA-REAL(RAC(N-K))) ;
  AGRIP=ABS(ALESIA-REAL(RAC(2*N-K))) ;
  IF(GERGO<CESAR) THEN DO ;
  IF(GERGO<AGRIP) THEN DO ;
  VICT=FERNAN-1 ;
  CPT=4 ; GO TO LABL7 ;
  END ;
  ELSE DO ;
  VICT=2*N-K ; CPT=3 ; GO TO LABL7 ;
  END ;
  END ;
  ELSE DO ;
  IF(CESAR<AGRIP) THEN DO ;
  VICT=N-K ; CPT=2 ; GO TO LABL7 ;
  END ;
  ELSE DO ;
  VICT=2*N-K ; CPT=1 ; GO TO LABL7 ;
  END ;
  END ;
  END ;
  END ;
  END ;
```

```
LABL4 :
IF (ABS (TEJP (BERTHE)) < E-9) THEN RAC (POINT) = CPLX (BERTHE, 0) ;
ELSE DO ;
RAC (POINT) = CPLX (RAFF (BERTHE), 0) ;
END ;
RAC (VICT) = RAC (POINT) ;
PUT EDIT ('LISSAGE UTILE VOICI LES MODIFICATIONS') (COLUMN (2), A (37)) ;
VERIF = VERIF - XIT (POINT) - XIT (VICT) ;
GO TO LA (CPT) ;
LA (1) :
PUT EDIT ('REPLACER LES RACINES', POINT, 'ET 2*N-K PAR', REAL (RAC (POINT
))) (COLUMN (12), A (21), X (2), F (4), X (2), A (12), X (2), E (17, 10)) ;
GO TO LABL10 ;
LA (2) :
PUT EDIT ('REPLACER LES RACINES', POINT, 'ET N-K PAR', REAL (RAC (POINT
))) (COLUMN (12), A (21), X (2), F (4), X (2), A (10), X (2), E (17, 10)) ;
GO TO LABL10 ;
LA (3) :
GO TO LA (1) ;
LA (4) :
PUT EDIT ('REPLACER LES RACINES', POINT, 'ET', VICT, 'PAR', REAL (RAC (POINT
))) (COLUMN (12), A (21), X (2), F (4), X (2), A (3), X (2), F (4), X (2),
A (3), X (2), E (17, 10)) ;
GO TO LABL10 ;
LA (5) :
PUT EDIT ('REPLACER LES RACINES 2*N-K ET N-K PAR', REAL (RAC (POINT
))) (COLUMN (12), A (38), X (2), E (17, 10)) ;
GO TO LABL10 ;
LA (6) :
PUT EDIT ('REPLACER LES RACINES', POINT, 'ET', VICT, 'PAR', REAL (RAC (
POINT))) (COLUMN (12), A (21), X (2), F (4), X (2), A (2), X (2), F (4),
X (2), A (3), X (2), E (17, 10)) ;
GO TO LABL10 ;
LA (7) :
PUT EDIT ('REPLACER LES DEUX RACINES COMPLEXES PAR', REAL (RAC (
POINT))) (COLUMN (12), A (41), X (2), E (17, 10)) ;
LABL10 :
DEP (POINT) = SIGN (DEP (POINT)) * 3 ;
DEP (VICT) = SIGN (DEP (VICT)) * 3 ;
NAPO = REAL (RAC (POINT)) ; MARIA = -TEJS (NAPO) ;
HENRI = TEJT (NAPO) ;
LEON = (1.0 / (NAPO ** 2)) * ((-1.0 / MARIA) + (HENRI * NAPO / (3.0 * (MARIA ** 2)))) ;
LEER = -HENRI / (3.0 * MARIA * MARIA) ; LEEI = 1.0 / MARIA ;
XIT (POINT), XIT (VICT) = CPLX (LEON, 0) ;
VERIF = VERIF + XIT (VICT) + XIT (POINT) ;
PUT EDIT (RAC (POINT), DEP (POINT), RAC (VICT), DEP (VICT))
(2 (COLUMN (12), C (E (17, 10), E (17, 10)), X (3), F (5))) ;
PUT EDIT ('PSEUDO EXITATION DU POLE DOUBLE', 2 * XIT (POINT))
(COLUMN (12), A (31), X (2), C (E (17, 10), E (17, 10))) ;
PUT EDIT ('VERIF EXITATION', VERIF)
(COLUMN (12), A (15), X (3), C (E (17, 10), E (17, 10))) ;
ANNE = 2 ;
GO TO LABL1 ;
LABL3 : ;
END ;
END ;
```



```

/*****
/* PROCEDURE DE CALCUL DE EPSILON FONCTION DU NOMBRE D'ONDE 'KP' REEL
AVEC TRAITEMENT DES OVERFLOWS PAR LA SUBROUTINE 'TRAITEMENT1' */
TEJ:PROC(KP) RETURNS (DEC FLOAT(10)) ;
  DCL(CALCUL1) DEC FLOAT(10) ;
  DCL(INDEX,REPERE)CPLX BIN FIXED;
  DCL(KP,S,S1,NUM,DEN,TERM,U,W) DEC FLOAT(10);
  DCL(MQ,I,NA,SG) BIN FIXED;
  ON OVERFLOW BEGIN ;
    CALL TRAITEMENT1 ;
    GO TO LABL6 ;
  END ;
  S=0;MQ=50;S1=0;REPERE=CPLX(0,0);
  DO I=1 TO N;
    NUM=2*ALPHA(I)*KSI(I);
    DEN=(KP*M-X)**2-KP*KP*ALPHA(I)**2;
    S1=S1+(NUM/DEN) ;
  END ;
  CALCUL1=S1 ;
  TRAITEMENT1 : PROC ;
    S1=0 ;
    DO I=1 TO N ;
      NUM=2*ALPHA(I)*KSI(I);
      DEN=(KP*M-X)**2-KP*KP*ALPHA(I)**2;
      TERM=LOG10(NUM)-LOG10(ABS(DEN));
      NA=FLOOR(TERM);
      IF (NA>50)THEN DO;
        INDEX=CPLX(1,0);
        IF (NA>MQ) THEN DO;
          MQ=NA;U=TERM-MQ;S=SIGN(DEN)*10**U;GO TO ETIQ6;
        END;
      ELSE DO;
        IF (NA<MQ) THEN DO;
          GO TO ETIQ6;
        END;
      ELSE DO;
        U=TERM-NA;W=SIGN(DEN)*10**U;S=S+W;GO TO ETIQ6;
      END;
    END;
  END;
  END;
  ELSE DO;
    IF (NA<-40) THEN DO;
      INDEX=CPLX(0,1);SG=SIGN(DEN);
      S1=S1+SG*10**(-39);GO TO ETIQ6;
    END;
  ELSE DO;
    INDEX=CPLX(0,0);S1=S1+NUM/DEN;GO TO ETIQ6;
  END;
  END;
  ETIQ6: REPERE=REPERE+INDEX;
END;
IF (REAL(REPERE)=0) THEN DO;
  CALCUL1=S1 ;
END;
ELSE DO;
  CALCUL1=S*10**50 ;
END;
  END TRAITEMENT1 ;
  LABL6 : RETURN(CALCUL1) ;
END TEJ;
```

```
/*
/* *****
/* CALCUL DE LA DERIVEE PREMIERE PAR RAPPORT A KP REEL DE EPSILON
AVEC TRAITEMENT DES OVERFLOWS PAR LA SUBROUTINE 'TRAITEMENT2' */
TEJP:PROC(KP) RETURNS (DEC FLOAT(10)) ;
  DCL(REPERE,INDEX) CPLX BIN FIXED;
  DCL(S,S1,NUM,DEN,TERM,U,W,KP) DEC FLOAT(10) ;
  DCL(MO,I,NA,SG) BIN FIXED;
DCL(CALCUL2) DEC FLOAT(10) ;
  ON OVERFLOW BEGIN ;
    CALL TRAITEMENT2 ;
    GO TO LABL11 ;
  END ;
S=0;S1=0;MO=50;REPERE=CPLX(0,0);
DO I=1 TO N;
  NUM=KP*(M*M-ALPHA(I)**2)-X*M;
  DEN=(KP*M-X)**2-KP*KP*ALPHA(I)**2;
  S1=S1-(4*NUM*ALPHA(I)*KSI(I)/(DEN*DEN)) ;
END ;
  CALCUL2=S1 ;
TRAITEMENT2 : PROC ;
  S1=0 ;
DO I=1 TO N ;
  NUM=KP*(M*M-ALPHA(I)**2)-X*M;
  DEN=(KP*M-X)**2-KP*KP*ALPHA(I)**2;
  TERM=LOG10(ABS(NUM))+LOG10(ALPHA(I))+LOG10(KSI(I))
    -2*LOG10(ABS(DEN));NA=FLOOR(TERM);
  IF(NA>50) THEN DO;
    INDEX=CPLX(0,0);
    IF (NA>MO) THEN DO;
      MO=NA;U=TERM-MO;S=-4*SIGN(NUM)*10**U;GO TO ETIQ7;
    END;
    ELSE DO;
      IF (NA<MO) THEN DO;
        GO TO ETIQ7;
      END;
    ELSE DO;
      U=TERM-NA;W=-4*SIGN(NUM)*10**U;
      S=S+W;GO TO ETIQ7;
    END;
  END;
END;
  ELSE DO;
    IF (NA<-40) THEN DO ;
      INDEX=CPLX(0,1);SG=SIGN(NUM);
      S1=S1-4*SG*10**-39 ; GO TO ETIQ7 ;
    END ;
    ELSE DO ;
      INDEX=CPLX(0,0);S1=S1-(4*NUM*ALPHA(I)*KSI(I)/
        (DEN*DEN));GO TO ETIQ7;
    END;
  END;
  ETIQ7: REPERE=REPERE+INDEX;
END;
IF (REAL(REPERE)=0) THEN DO;
  CALCUL2=S1 ;
END;
ELSE DO;
  CALCUL2=S*10**50 ;
END;
  END TRAITEMENT2 ;
  LABL11: RETURN(CALCUL2) ;
END TEJP;
```

```

/*****
/* CALCUL DE LA DERIVEE SECONDE PAR RAPPORT A KP REEL DE EPSILON */
TEJS:PROC(KP) RETURNS(DEC FLOAT(10)) ;
  DCL(KP) DEC FLOAT(10) ;
  DCL(S1,NUM,TERM,DEN) DEC FLOAT(10) ;
DCL(I) BIN FIXED ;
S1=0 ;
DO I=1 TO N ;
NUM=KP*(M*M-ALPHA(I)*ALPHA(I))-X*M ;
DEN=(KP*M-X)**2-KP*KP*ALPHA(I)*ALPHA(I) ;
TERM=(3.0*NUM*NUM+X*X*ALPHA(I)*ALPHA(I))/(DEN**3) ;
S1=S1+4.0*ALPHA(I)*KSI(I)*TERM ;
END ;
  RETURN(S1) ;
END TEJS ;
/*****
/* CALCUL DE LA DERIVEE TROISIEME PAR RAPPORT A KP REEL DE EPSILON */
TEJT:PROC(KP) RETURNS(DEC FLOAT(10)) ;
  DCL(KP) DEC FLOAT(10) ;
  DCL(S1,NUM,TERM,DEN) DEC FLOAT(10) ;
DCL(I) BIN FIXED ;
S1=0 ;
DO I=1 TO N ;
NUM=KP*(M*M-ALPHA(I)*ALPHA(I))-X*M ;
DEN=(KP*M-X)**2-KP*KP*ALPHA(I)*ALPHA(I) ;
TERM=(NUM**3+NUM*X*X*ALPHA(I)*ALPHA(I))/(DEN**4) ;
S1=S1-48.0*ALPHA(I)*KSI(I)*TERM ;
END ;
  RETURN(S1) ;
END TEJT ;
/*****
/* CALCUL DE EPSILON FONCTION DU NOMBRE D'ONDE COMPLEXE Z */
CEJ:PROC(Z) RETURNS(CPLX DEC FLOAT(10)) ;
DCL (Z,S1,NUM,DEN) CPLX DEC FLOAT(10) ;
  DCL(I) BIN FIXED ;
S1=CPLX(0,0) ;
DO I=1 TO N ;
NUM=CPLX(Z*ALPHA(I)*KSI(I),0) ;
DEN=(Z*M-X)**2-Z*Z*ALPHA(I)**2 ;
  S1=S1+NUM/DEN ;
END ;
  RETURN(S1) ;
END CEJ ;

```

```

/*****
/* CALCUL DE LA DERIVEE PREMIERE PAR RAPPORT A Z DE EPSILON AVEC
TRAITEMENT DES OVERFLOWS PAR LA SUBROUTINE 'TRAITEMENT3' */
CEJP:PROC(Z) RETURNS(CPLX DEC FLOAT(10)) ;
DCL(S1) CPLX DEC FLOAT(10) ;
DCL(REPERER,REPEREI,INDEXR,INDEXI) CPLX BIN FIXED;
DCL(MOR,MCI,I,NR,NI,SG) BIN FIXED;
DCL(S1R,S1I,SR,SI,PROD,TERMR,TERMI,MDU,MDV,MDW,MDY,MDZ,U,W)
DEC FLOAT(10);
DCL(Z,NUM,DEN,RESULTAT) CPLX DEC FLOAT(10);
ON OVERFLOW BEGIN ;
CALL TRAITEMENT3 ;
GO TO LABL12 ;
END ;
MOR=50;MCI=50;SR=0;SI=0;S1R=0;S1I=0;
REPERER=CPLX(0,0);REPEREI=CPLX(0,0);
S1=CPLX(0,0) ;
DO I=1 TO N;
PROD=ALPHA(I)*KSI(I);
NUM=Z*(M*M-ALPHA(I)**2)-X*M;
DEN=(Z*M-X)**2-Z*Z*ALPHA(I)**2;
S1=S1-4*NUM*PRD/(DEN*DEN) ;
END ;
RESULTAT=S1 ;
TRAITEMENT3 : PROC ;
DO I=1 TO N ;
NUM=Z*(M*M-ALPHA(I)**2)-X*M;
PROD=ALPHA(I)*KSI(I);
DEN=(Z*M-X)**2-Z*Z*ALPHA(I)**2;
MDU=REAL(DEN)**2-IMAG(DEN)**2;
MDV=2*REAL(DEN)*IMAG(DEN);
MDW=PRD/(MDU**2+MDV**2);
MDY=REAL(NUM)*MDU+IMAG(NUM)*MDV;
MDZ=IMAG(NUM)*MDU-REAL(NUM)*MDV;
TERMR=LOG10(ABS(MDW))+LOG10(ABS(MDY));
TERMI=LOG10(ABS(MDW))+LOG10(ABS(MDZ));
NR=FLOOR(TERM);NI=FLOOR(TERMI);
IF(NR>50)THEN DO;
INDEXR=CPLX(1,0);
IF (NR>MOR) THEN DO;
MOR=NR;U=TERMR-MOR;SR=-4*SIGN(MDY)*10**U;
GO TO ETIQ8;
END;
ELSE DO;
IF (NR<MOR) THEN DO;
GO TO ETIQ8;
END;
ELSE DO;
U=TERMR-NR;W=-4*SIGN(MDY)*10**U;
SR=SR+W;GO TO ETIQ8;
END;
END;
END;
END;

```

```
ELSE DO;
  IF (NR<-40) THEN DO;
    INDEXR=CPLX(0,1);SG=SIGN(MDY);
    SIR=SIR-4*SG*10**39;GO TO ETIQ8;
  END;
  ELSE DO;
    INDEXR=CPLX(0,0);SIR=SIR-4*MDW*MDY;GO TO ETIQ8;
  END;
END;
ETIQ8: REPERER=REPERER+INDEXR ;
IF (NI>50) THEN DO;
  INDEXI=CPLX(1,0);
  IF (NI>MOI) THEN DO;
    MOI=NI;U=TERMI-MOI;SI=-4*SIGN(MDZ)*10**U;
    GO TO ETIQ9;
  END;
  ELSE DO;
    IF (NI<MOI) THEN DO;
      GO TO ETIQ9;
    END;
    ELSE DO;
      U=TERMI-NI;W=-4*SIGN(MDZ)*10**U;
      SI=SI+W;GO TO ETIQ9;
    END;
  END;
END;
ELSE DO;
  IF (NI<-40) THEN DO;
    INDEXI=CPLX(0,1);SG= SIGN(MDZ);
    SII=SII-4*SG*10**39;GO TO ETIQ9;
  END;
  ELSE DO;
    INDEXI=CPLX(0,0);SII=SII-4*MDW*MDZ;GO TO ETIQ9;
  END;
END;
ETIQ9: REPEREI=REPEREI+INDEXI;
END;
IF (REAL(REPERER)=0) THEN DO;
  IF (REAL(REPEREI)=0) THEN DO;
    RESULTAT=CPLX(SIR,SII);
  END;
  ELSE DO;
    RESULTAT=CPLX(SIR,SI*10**50);
  END;
END;
ELSE DO;
  IF (REAL(REPEREI)=0) THEN DO;
    RESULTAT=CPLX(SR*10**50,SII);
  END;
  ELSE DO;
    RESULTAT=CPLX(SR*10**50,SI*10**50);
  END;
END;
END;
END TRAITEMENT3 ;
LABL12: RETURN(RESULTAT) ;
END CEJP;
```

```
/*
/* *****
/* PROCEDURE DE CALCUL D'UNE RACINE REELLE DE EPSILON ,LOCALISEE
/* ENTRE LES ABSCISSES 'GAU' ET 'DRD' ,L'ALLURE DE LA COURBE EPSILON
/* ETANT DECRITE PAR UN PARAMETRE 'EN' . CETTE PROCEDURE CHERCHE LA
/* RACINE PAR UNE SOUS PROCEDURE DE DICHOTOMIE ACCELEREE 'DICH0',SI LA
/* RACINE N'EST PAS PROCHE DES ASYMPOTES,APRES AVOIR RAFFINE ,OU FAIT
/* RAFFINER (SINON) LA LOCALISATION PAR UNE SOUS PROCEDURE 'SPROC' */
LOCAL:PROC(EN,GAV,DRV) RETURNS (CPLX DEC FLOAT(10)) ;
    DCL(ST,ESUL,GAV,DRV) DEC FLGAT(10) ;
    DCL (DICH0) ENTRY(DEC FLOAT(10),DEC FLOAT(10)) RETURNS(DEC
        FLOAT(10));
    DCL(EN,I,I17)BIN FIXED;
    DCL(ESP,ECA,VALE,MEM,KP,GAU,DRD,RST,DPRT,ECR,VALR) DEC FLOAT(10);
    DCL(RESUL) CPLX DEC FLOAT(10);
    GAU=GAV;DRD=DRV;
    IF ((EN=1):(EN=3):(EN=5)) THEN DO ;
        ESP=GAU-DRD;ECA=ESP/6;VALE=1-TEJ(GAU-ECA);I=2;
        ETIQ10: MEM=VALE;KP=GAU-I*ECA;VALE=1-TEJ(KP);
            IF (MEM#VALE<=0) THEN DO;
                ESUL=DICH0(KP+ECA,KP) ;
                RESUL=CPLX(ESUL,0) ;
                GO TO ETIQ12 ;
                END;
            ELSE DO;
                I=I+1;
                IF (I<=5) THEN DO;
                    GO TO ETIQ10;
                END;
            ELSE DO;
                IF (VALE>0) THEN DO;
                    GAU=DRD+ECA;DPRT=GAU;ECR=-ECA;VALR=VALE ;
                    CALL SPRJC;
                ST=RST+ECA/(2*I17) ;
                ESUL=DICH0(ST,RST) ;
                RESUL=CPLX(ESUL,0) ;
                    GO TO ETIQ12;
                END;
            ELSE DO;
                DRD=GAU-ECA;DPRT=DRD;ECR=ECA;VALR=VALE ;
                CALL SPROC;
                ST=RST-ECA/(2*I17) ;
                ESUL=DICH0(RST,ST) ;
                RESUL=CPLX(ESUL,0) ;
                    GO TO ETIQ12;
                END;
            END;
        END;
    END;
END;
```

```
ELSE DO;
  IF (EN=4) THEN DO;
    ESUL=DICHO(GAU,DRQ) ;
    RESUL=CPLX(ESUL,0) ;
    GO TO ETIQ12 ;
  END;
  ELSE DO;
    ESP=GAU-DRQ;ECA=ESP/6;VALE=1-TEJ(GAU-ECA);I=2;
    ETIQ11: MEM=VALE;KP=GAU-I*ECA;VALE=1-TEJ(KP);
    IF (MEM*VALE<=0)THEN DO;
      ESUL=DICHO(KP+ECA,KP) ;
      RESUL=CPLX(ESUL,0) ;
      GO TO ETIQ12 ;
    END;
    ELSE DO;
      I=I+1;
      IF(I<=5) THEN DO;
        GO TO ETIQ11;
      END;
    ELSE DO;
      IF (VALE>0) THEN DO;
        DRQ=GAU-ECA;DPRT=DRQ;ECR=ECA;VALR=VALE ;
        CALL SPROC;
      ST=RST-ECA/(2**I17) ;
      ESUL=DICHO(RST,ST) ;
      RESUL=CPLX(ESUL,0) ;
      GO TO ETIQ12;
    END;
    ELSE DO;
      GAU=DRQ+ECA;DPRT=GAU;ECR=-ECA;VALR=VALE ;
      CALL SPROC;
      ST=RST+ECA/(2**I17) ;
      ESUL=DICHO(ST,RST) ;
      RESUL=CPLX(ESUL,0) ;
    END;
  END;
END;
END;
END;
ETIQ12: RETURN(RESUL);
/*****/
SPROC: PROC;
  DCL(K1,TRME,MEM1)DEC FLOAT(10);DCL(I13) BIN FIXED;
  K1=DPRT;TRME=+1;
  DO I13=1 TO 1000 WHILE (TRME>0) ;
    MEM1=VALR;K1=K1+ECR/(2**I13);VALR=1-TEJ(K1);
    TRME=MEM1*VALR;
  END;
  RST=K1;I17=I13-1 ;
END SPROC;
/*****/
DICHO:PROC(BPV,AP1) RETURNS (DEC FLOAT(10)) ;
DCL(D1,A,KP,AP1,SGM,S,BP,BPV) DEC FLOAT(10);DCL(I2,I1)BIN FIXED;
BP=BPV ;
D1=(BP-AP1)/5;A=1-TEJ(BP);KP=AP1;
DO I2=1 TO 100 WHILE (D1>10**-13) ;
  SGM=-1;
  DO I1=1 TO 6 WHILE (SGM<0);
    S=1-TEJ(KP);SGM=A*S;KP=KP+D1;
  END;
  KP=KP-D1;BP=KP;A=S;KP=BP-D1;D1=D1/5;
END;
RETURN((KP+BP)/2);
END DICHO;
END LOCAL;
```

```
/******  
/* PROCEDURE DE DEPLACEMENT INFINITESIMAL DES RACINES D'ABSCISSE  
NEGATIVE PAR ADJONCTION D'UNE PARTIE IMAGINAIRE NEGATIVE  
INFINITESIMALE A LA FREQUENCE 'X' , CE QUI REVIENT A ETUDIER LE  
SIGNE DE LA DERIVEE PREMIERE DE EPSILON PAR RAPPORT AU NOMBRE  
D'ONDE REEL ,APRES AVOIR CALCULE LA DIFFERENTIELLE TOTALE DE EPSILON*/  
DEPLAC:PROC(KR) RETURNS (BIN FIXED) ;  
    DCL(TEST,KR) DEC FLOAT(10);DCL(DE) BIN FIXED;  
    TEST=-TEJP(KR);IF (TEST>0) THEN DE=-1;ELSE DE=+1;  
    RETURN(DE);  
END DEPLAC;  
/******  
/*PROCEDURE DE CALCUL DES DEUX DERNIERES RACINES DE EPSILON,  
LA LOCALISATION SE FAISANT AU MOYEN DES FONCTIONS SYMETRIQUES DES  
COEFFICIENTS DU POLYNOME NUMERATEUR DE EPSILON , ET LA RECHERCHE  
PRECISE , PAR UNE METHODE DE WARD 'RECCO' OU DE NEWTON  
RAPHSON 'RECRE' */  
FOSYM:PRJC;  
DCL (RECCO) ENTRY (CPLX DEC FLOAT(10),DEC FLOAT(10),DEC FLOAT(10),  
DEC FLOAT(10),BIN FIXED) RETURNS (CPLX DEC FLOAT(10)) ;  
DCL (RTAT) CPLX DEC FLOAT(10) ;  
DCL (HS1,HM1,DM1) DEC FLOAT(10) ;  
DCL (N21) BIN FIXED ;  
DCL(RECRE) ENTRY(DEC FLOAT(10),DEC FLOAT(10)) RETURNS(DEC FLOAT(10));  
DCL(RAC1,RAC2,DM2) DEC FLOAT(10) ;  
DCL(S1,P1,S2,P2,P,S,DEL) DEC FLOAT(10);  
DCL(J5) BIN FIXED;  
S1=0;P1=1;S2=0;P2=1;  
DO J5=1 TO K;  
    S1=S1+((2*X*M)/(M*M-ALPHA(J5)**2))-REAL(RAC(2*N-K-J5))  
    -REAL(RAC(2*N-K+J5)) ;  
    P1=P1*(ASY(2*N-K+J5)/REAL(RAC(2*N-K+J5)))  
    *(ASY(2*N-K+1-J5)/REAL(RAC(2*N-K-J5)));  
END;  
DO J5=(K+1) TO (N-1);  
    S2=S2+((2*X*M)/(M*M-ALPHA(J5)**2))  
    -REAL(RAC(2*N-K-J5))-REAL(RAC(J5-K)) ;  
    P2=P2*(ASY(2*N-K+1-J5)/REAL(RAC(2*N-K-J5)))  
    *(ASY(J5-K)/REAL(RAC(J5-K))) ;  
END;  
P=ASY(N-K)*ASY(N-K+1)*TF*P1*P2 ;  
S=(2*X*M)/(M*M-ALPHA(N)**2)+S1+S2;DEL=S*S-4*P;  
IF (DEL>=0) THEN DO;  
RAC1=(S+SQRT(DEL))/2 ;  
RAC2=(S-SQRT(DEL))/2 ;  
DM2=1E-13 ;  
RAC(N-K)=CPLX(RECRE(RAC1,DM2),0);RAC(2*N-K)=CPLX(RECRE(RAC2,DM2),0);  
END;  
ELSE DO;  
RTAT=CPLX(S/2,SQRT(-DEL)/2) ;  
HS1=MIN(ABS(REAL(RTAT)),ABS(IMAG(RTAT)))/100 ;  
HM1=HS1/(1E+04) ;  
DM1=1E-13 ; N21=100;  
RAC(N-K) =RECCO(RTAT,HS1,HM1,DM1,N21) ;  
RAC(2*N-K)=CONJG(RAC(N-K)) ;  
END;
```

```
/*
RECCO : PROC(ZO,HS,HM,DM,ITER) RETURNS(CPLX DEC FLOAT(10)) ;
DCL(ZO,Z(3),CW,A,V,U(7)) CPLX DEC FLOAT(10) ;
DCL(W(3),HS,HM,DM,WO,H,HH) DEC FLOAT(10) ;
DCL(LL(3)) LABEL ;
DCL(ITER,N,K,I,NR) BIN FIXED ;
N=0 ; H=HS ;
  U(1)=COMPLEX(1EO,0EO);U(2)=COMPLEX(.8660254EO,5.E-1);
  U(3)=COMPLEX(0.E0,1.E0);U(4)=COMPLEX(.9659258EO,.258819EO);
  U(5)=COMPLEX(.7071068EO,.7071068EO);U(6)=COMPLEX(.258819EO,
    .9659258EO);U(7)=COMPLEX(-.258819EO,.9659258EO);
CW=1.0-CEJ(ZO) ;
  WO=ABS(REAL(CW))+ABS(IMAG(CW));
  IF (WO<DM) THEN DO ;PUT SKIP LIST ('S1'); RETURN(ZO); END ;
  K=1;I=0;V=COMPLEX(-1EO,0EO);
  L3:A=COMPLEX(-.5EO,.866EO);
  L4:Z(1)=ZO+H*V*A;
CW=1.0-CEJ(Z(1)) ;
  W(1)=ABS(REAL(CW))+ABS(IMAG(CW));
  Z(2)=ZO+H*V;
CW=1.0-CEJ(Z(2)) ;
  W(2)=ABS(REAL(CW))+ABS(IMAG(CW));
  Z(3)=ZO+H*CONJG(A)*V;
CW=1.0-CEJ(Z(3)) ;
  W(3)=ABS(REAL(CW))+ABS(IMAG(CW));
  IF (N=ITER) THEN DO;PUT SKIP LIST('TO MUCH ITERATIONS');
RETURN(ZO) ; END ;
  N=N+1;
  IF (W(1)>W(3)) THEN DO;
    IF (W(2)>W(3)) THEN NR=3;ELSE NR=2;END;
    ELSE DO;IF(W(1)<W(2)) THEN NR=1;ELSE NR=2;END;
  IF (WO<W(NR)) THEN GOTO L1;
  K,I=1;A=COMPLEX(.707EO,.707EO);V=(Z(NR)-ZO)/ABS(Z(NR)-ZO);
  WO=W(NR);ZO=Z(NR);HH=.1*ABS(Z(NR));
  IF (HH<H) THEN H=HH;
  IF (WO>DM) THEN GO TO L4 ;
ELSE DO ;PUT SKIP LIST ('S2') ; RETURN(ZO) ; END ;
L1 :GOTO LL(K);
LL(1):K=2;H=H*.25;
  IF (H>HM) THEN GO TO L3 ;
ELSE DO ;PUT SKIP LIST ('S3') ; RETURN(ZO) ; END ;
LL(2):K=3;H=H*.4;
LL(3):I=I+1;IF (I>7) THEN GOTO L2;
  V=U(I);GOTO L3;
L2 :H=H*.25;
IF(H<=HM) THEN DO ;PUT SKIP LIST('S4') ;RETURN(ZO) ; END ;
  I=1;GOTO LL(3);
END RECCO ;
/*
RECRE:PROC(ZC,CM) RETURNS(DEC FLOAT(10)) ;
DCL(ZO,DM,BUT,DYS,DYST) DEC FLOAT(10) ;
DCL(I) BIN FIXED ;
BUT=ZO ;DYST=1.0 ;
DO I=1 TO 20 WHILE(DYST>DM) ;
  DYS=(1-TEJ(BUT))/(-TEJP(BUT)) ;
  DYST=ABS(BUT) ; BUT=BUT-DYS ;
END ;
RETURN(BUT) ;
END RECRE;
END FOSYM;
```

```
/******  
/*PROCEDURE DE CALCUL FIN DE LA RACINE DOUBLE PAR ANNULLATION DE LA  
DERIVEE PREMIERE DE EPSILON FONCTION DU NOMBRE D'ONDE */  
RAFF: PROC(BERT) RETURNS(DEC FLOAT(10)) ;  
  DCL(YANG) BIN FIXED ;  
  DCL(BERT,LAO,TSEU,YIN) DEC FLOAT(10);  
  LAO=BERT ; TSEU=1.0 ;  
  DO YANG=1 TO 50 WHILE (TSEU>E-6) ;  
  YIN=TEJP(LAO) ; TSEU=ABS(YIN) ;  
  LAO=LAO-YIN/TEJS(LAO) ;  
  END ;  
  RETURN(LAO) ;  
END RAFF ;  
/******  
/* CETTE PROCEDURE INCREMENTE D'UNE PETITE PARTIE IMAGINAIRE NEGATIVE  
(RELATION DE CAUSALITE) LA FREQUENCE VOISINE DE CELLE DONNANT UN  
POLE DOUBLE ,PUIS CHERCHE LA RACINE DEPLACEE PAR UNE METHODE NEWTON  
RAPHSON DANS LE PLAN COMPLEXE,PUIS CALCULE L'EXITATION COMPLEXE  
CORRESPONDANTE ,PUIS REGARDE SI SA PARTIE IMAGINAIRE TEND A S'AN-  
-NULER , ET SI SA PARTIE REELLE TEND A S'ANNULER OU A EGALER  
LA SOMME DES EXITATIONS DES DEUX RACINES CONSIDEREES LORSQUE LA  
FREQUENCE EST PUREMENT REELLE , EN FONCTION DE QUOI ELLE ATTRIBUE  
UN TYPE +1,OU -1, OU +2 OU -2 OU +3 OU -3 */  
DPREL:PROC(RAM) RETURNS(BIN FIXED) ;  
  DCL(NU) DEC FLOAT(10) ;  
  DCL(K2,I8,I9,I5) BIN FIXED ;  
  DCL(SENS) BIN FIXED ;  
  DCL(T2,PROD3,NUM3,DEN3 ) CPLX DEC FLOAT(10) ;  
  DCL(EXI,RAM) CPLX DEC FLOAT(10) ;  
  DCL(Z,XC,S1,NUM,DEN,U6, PROD1,NUM1,DEN1,T1,V6,W6)  
  CPLX DEC FLOAT(10) ;  
  NU=0.5*ABS(REAL(RAM))*(L/160) ;  
  Z=RAM ;  
  XC=CPLX(X,-1E-06);  
  DO K2=1 TO 500 WHILE(IMAG(XC)>-3E-03) ;  
  XC=CPLX(X,-K2*NU) ;  
  LB1: ;  
  S1=CPLX(0.0,0.0) ;  
  DO I8=1 TO N ;  
  NUM=CPLX(2*ALPHA(I8)*KSI(I8),0.0) ;  
  DEN=(Z*M-XC)**2-Z*Z*ALPHA(I8)**2 ;  
  S1=S1+NUM/DEN ;  
  END ;  
  U6=CPLX(1.0,0.0)-S1;  
  T1=CPLX(0.0,0.0) ;  
  DO I9=1 TO N ;  
  PROD1=CPLX(ALPHA(I9)*KSI(I9),0.0) ;  
  NUM1=Z*CPLX(M*M-ALPHA(I9)**2,0.0)-XC*CPLX(M,0.0) ;  
  DEN1=(Z*CPLX(M,0.0)-XC)**2-Z*Z*CPLX(ALPHA(I9)**2,0.0) ;  
  T1=T1-4*NUM1*PROD1/(DEN1*DEN1) ;  
  END ;V6=-T1 ;  
  IF(ABS(SQRT(REAL(V6)**2+IMAG(V6)**2))<1E-20)THEN DO ;  
  PUT EDIT('EPSPRIM TROP PETIT')  
(COLUMN(10),A(18)) ;SENS=10 ;  
  RETURN(SENS) ;  
  GO TO LB3 ;  
  END ;  
  W6=U6/V6 ;  
  Z=Z-W6 ;  
  IF(ABS(SQRT(REAL(W6)**2+IMAG(W6)**2))<1E-12)THEN DO ;  
  GO TO LB2 ;  
  END ;  
  ELSE GO TO LB1 ;
```

```
LB2:;
  NU=-REAL(Z)*(L/160)*0.1 ;
  END ;
  PUT EDIT(XC)(SKIP(3),COLUMN(10),C(E(17,10),E(17,10))) ;
  T2=CPLX(0.0,0.0) ;
  DO I5=1 TO N ;
  PROD3=CPLX(ALPHA(I5)*KSI(I5),0.0) ;
  NUM3=Z*CPLX(M*M-ALPHA(I5)**2,0.0)-XC*CPLX(M,0.0) ;
  DEN3=(Z*CPLX(M,0.0)-XC)**2-Z*Z*CPLX(ALPHA(I5)**2,0.0) ;
  T2=T2-4*NUM3*PROD3/(DEN3*DEN3) ;
  END ;
  EXI=CPLX(-1.0,0.0)/(Z*T2) ;
  PUT EDIT(Z,U6,EXI)(COLUMN(1),3(C(E(17,10),E(17,10)),X(5))) ;
  IF(IMAG(RAM)>0) THEN DO ;
  IF((ABS(REAL(EXI))<RRVICT)&(ABS(IMAG(EXI))<IIVICT)) THEN SENS=+2;
  ELSE DO ;
  PUT SKIP LIST ('DANGER') ;
  IF(IMAG(Z)<0.0) THEN SENS=+2 ;
  ELSE SENS=-2 ;
  END;END;
  IF(IMAG(RAM)<0) THEN DO ;
  IF((ABS(IMAG(EXI))<IIVICT)&(ABS(ABS(REAL(EXI))
-2.0*ABS(REAL(XIT(PCINT))))<SSVICT)) THEN SENS=+2 ;
  ELSE DO ;
  PUT SKIP LIST ('DANGER') ;
  IF(IMAG(Z)>0.0) THEN SENS=-2 ;
  ELSE SENS =+2 ;
  END ;END;
  IF(IMAG(RAM)=0) THEN DO ;
  IF(IMAG(Z)>IMAG(RAM)) THEN DO ;
  IF((ABS(REAL(EXI))<RRVICT)&(ABS(IMAG(EXI))<IIVICT))
  THEN SENS=+1 ;
  ELSE DO ;
  PUT SKIP LIST('DANGER'); SENS=-1 ;END ;
  END ;
  ELSE DO ;
  IF(IMAG(Z)<IMAG(RAM)) THEN DO ;
  IF(IMAG(Z)<IMAG(RAM)) THEN DO ;
  IF((ABS(IMAG(EXI))<IIP0IN)&(ABS(ABS(REAL(EXI))-ABS(REAL(XIT(P0INT)
+XIT(VICT))))<RRP0IN)) THEN SENS=+1 ;
  ELSE DO ;
  PUT SKIP LIST('DANGER') ;SENS =+1 ; END ;
  END ;END ;END ;
  RETURN(SENS) ;
LB3:;
  END DPREL ;
  END MWB;
```

ANNEXE 2

Courbes de champ théoriques données par un modèle à 100 Bags équidistants approximant une distribution maxwellienne coupée à 6 fois la vitesse thermique.

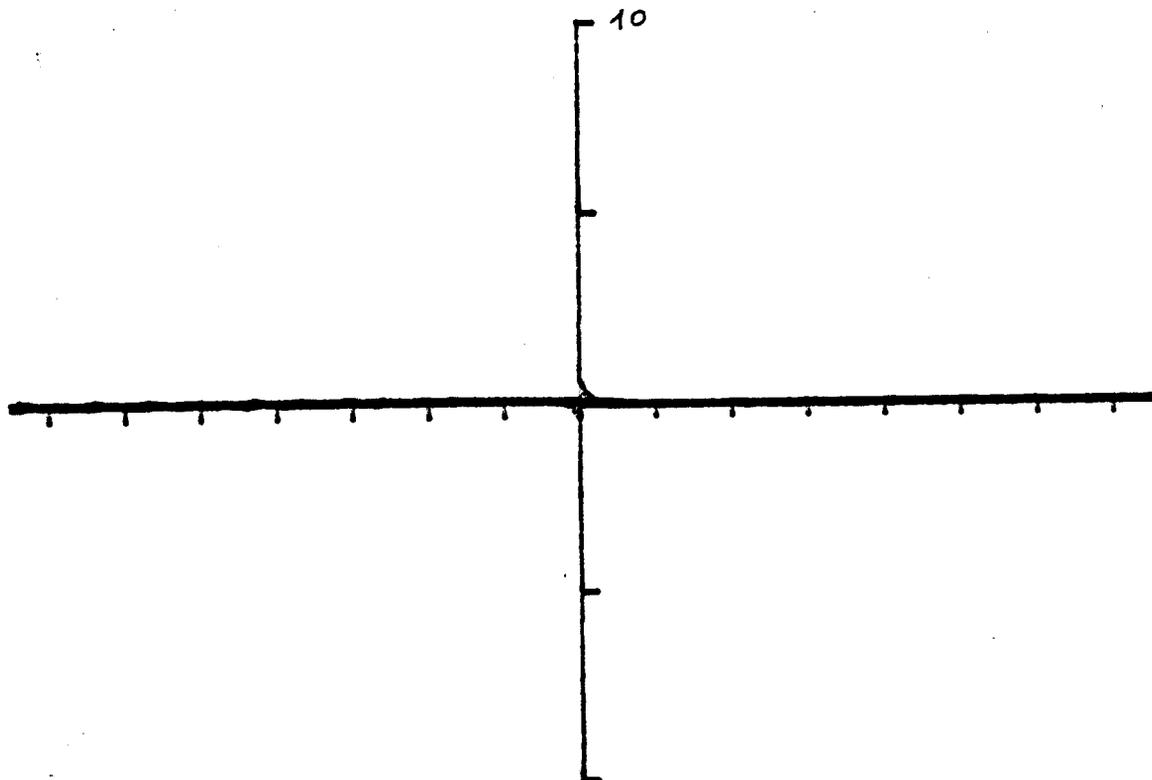
a) Champ monopolaire : Pages 120 à 154

b) Champ dipolaire : Pages 155 à 186

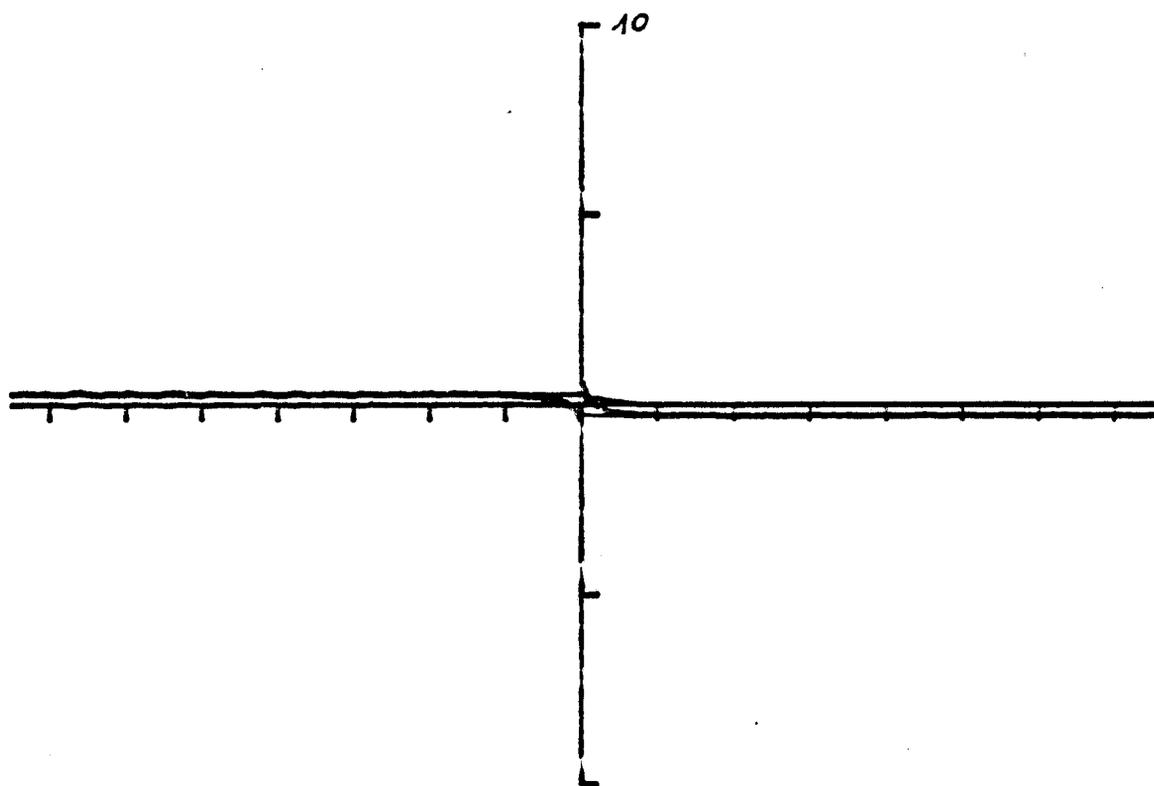
Chaque graduation en abscisse représente

10 longueurs de Debye.

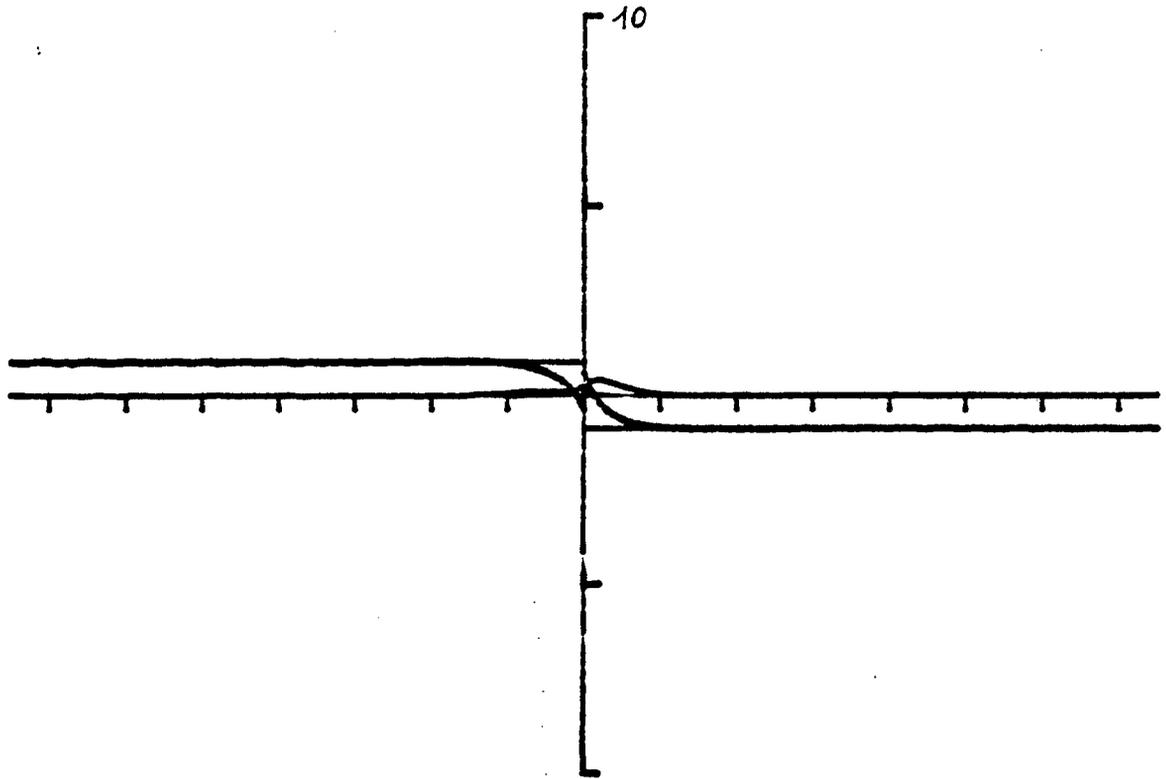
Les courbes de champ réel sont en trait plein et fort, celles du champ imaginaire en trait fin ou pointillé.



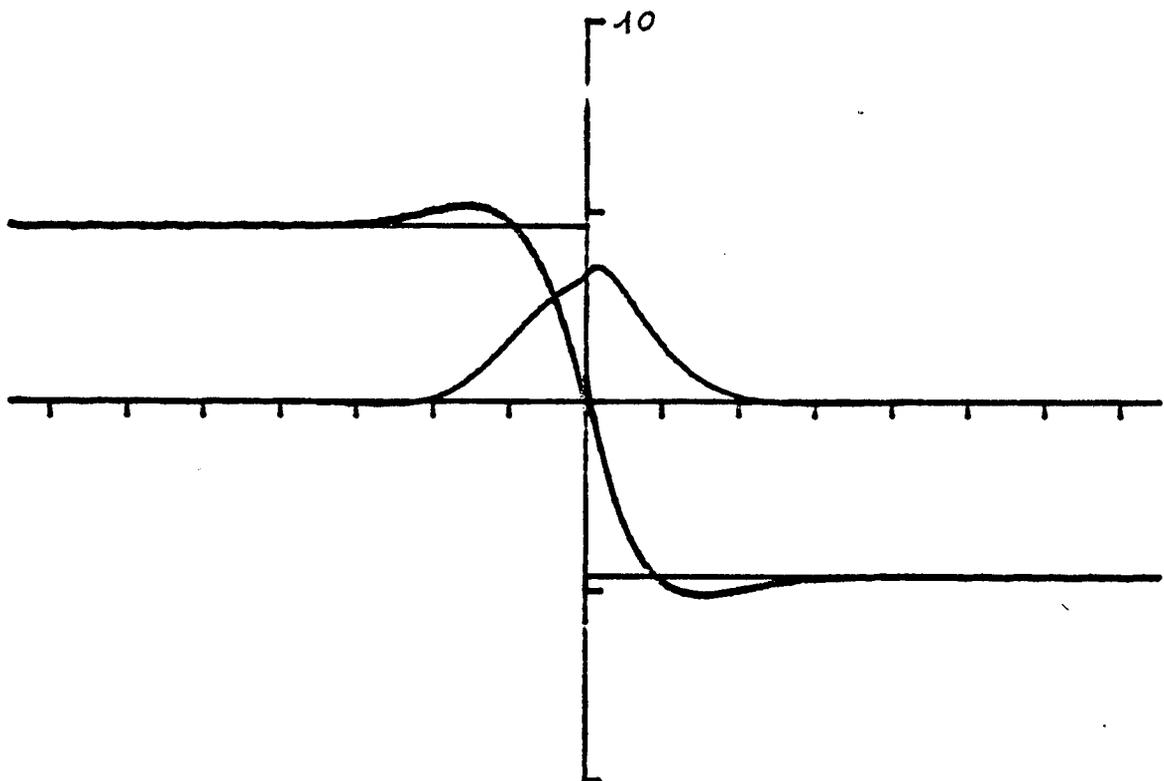
FREQUENCY 0.40



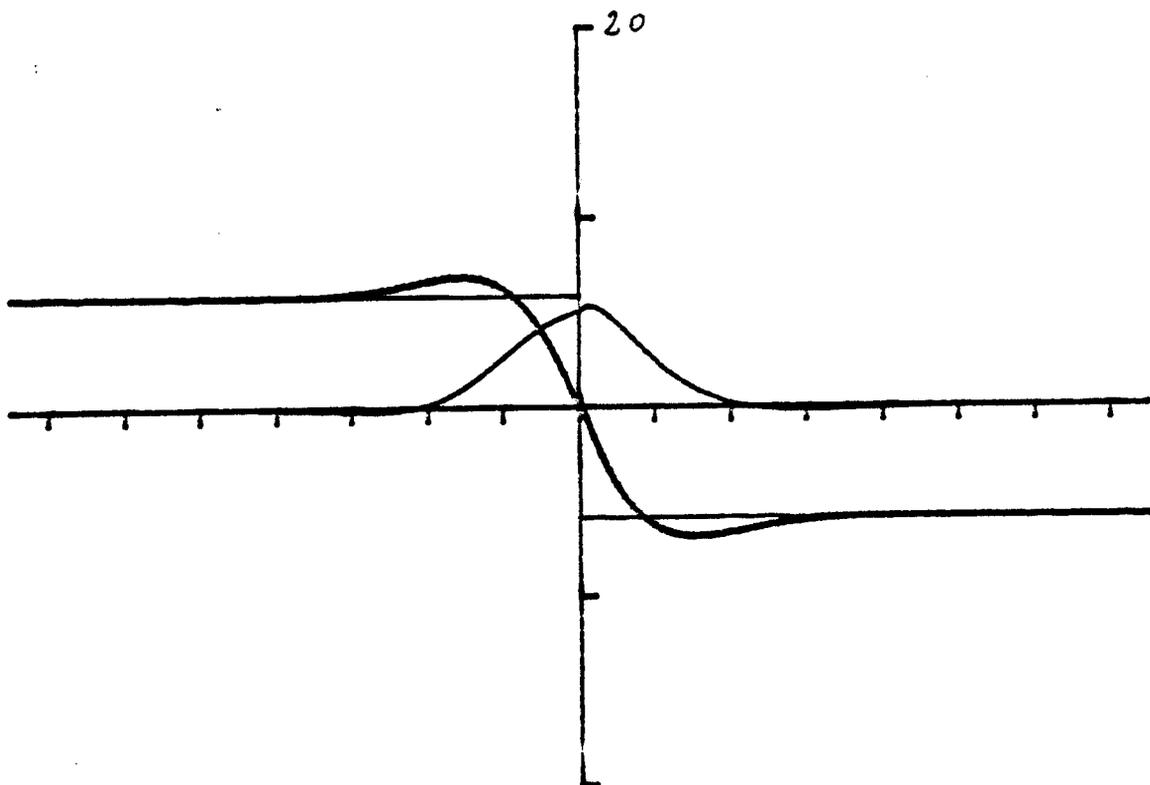
FREQUENCY 0.60



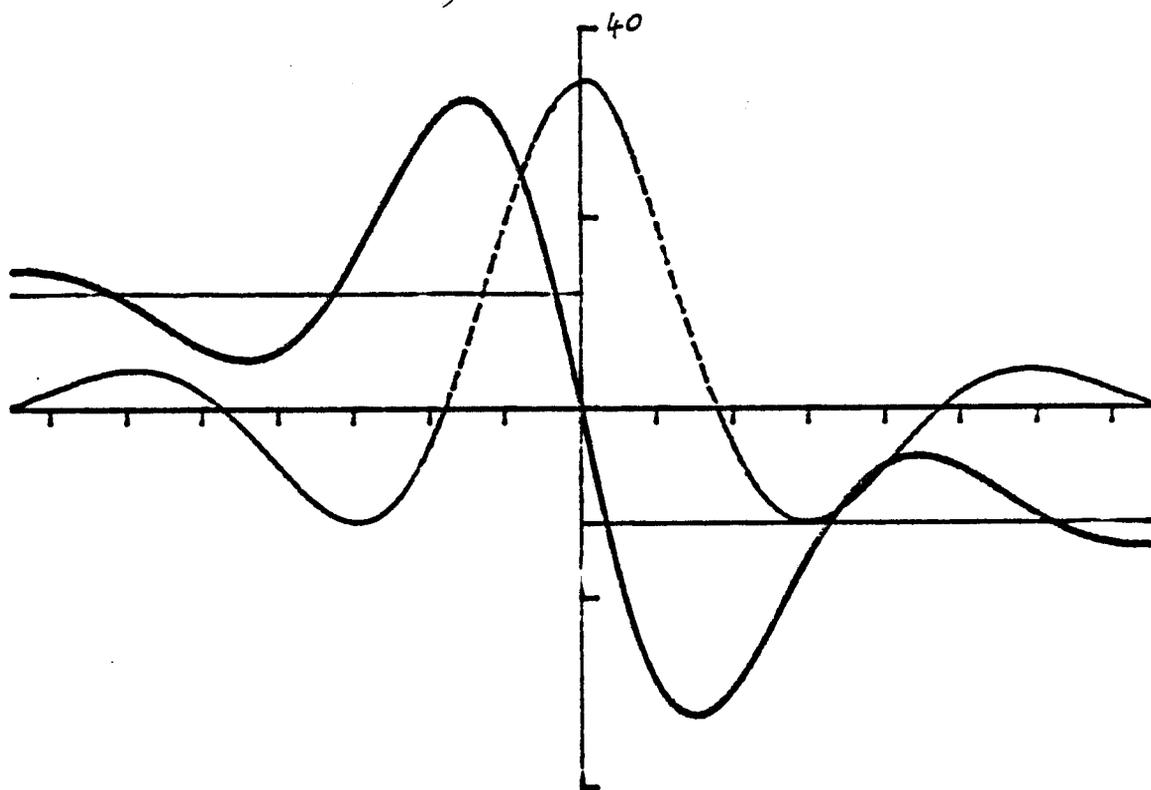
FREQUENCY 0.80



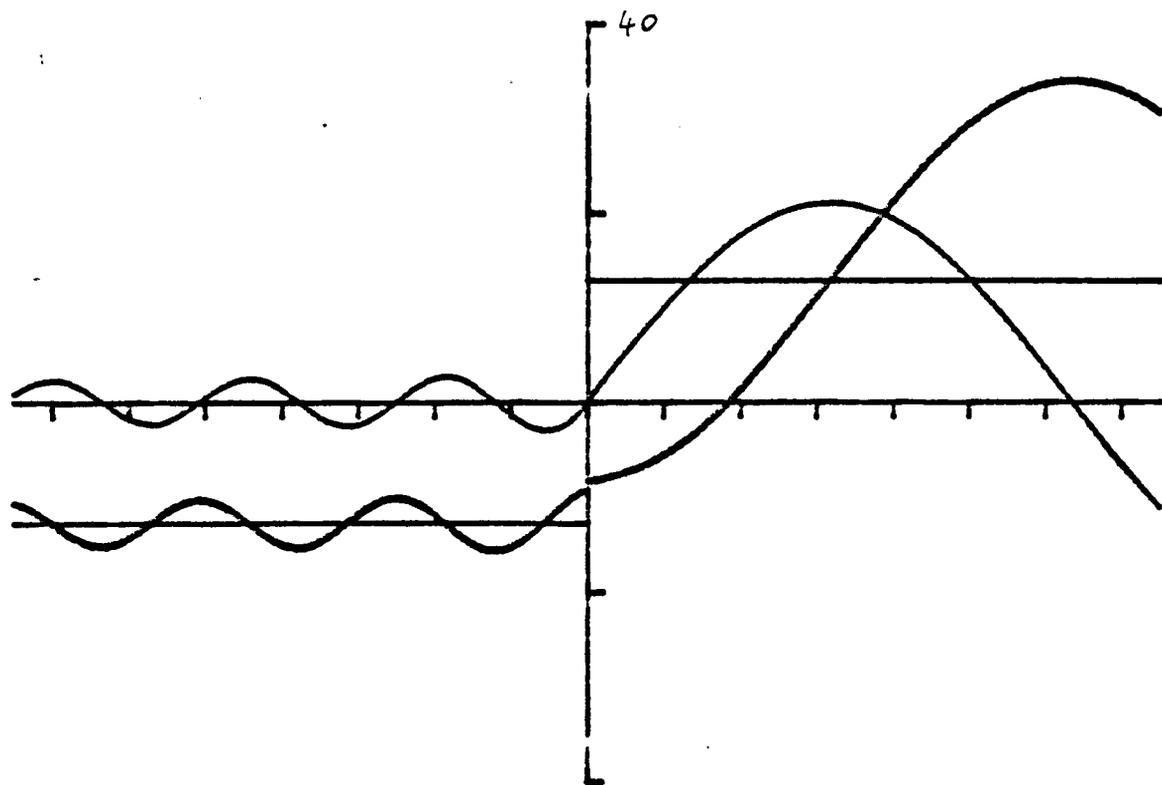
FREQUENCY 0.95



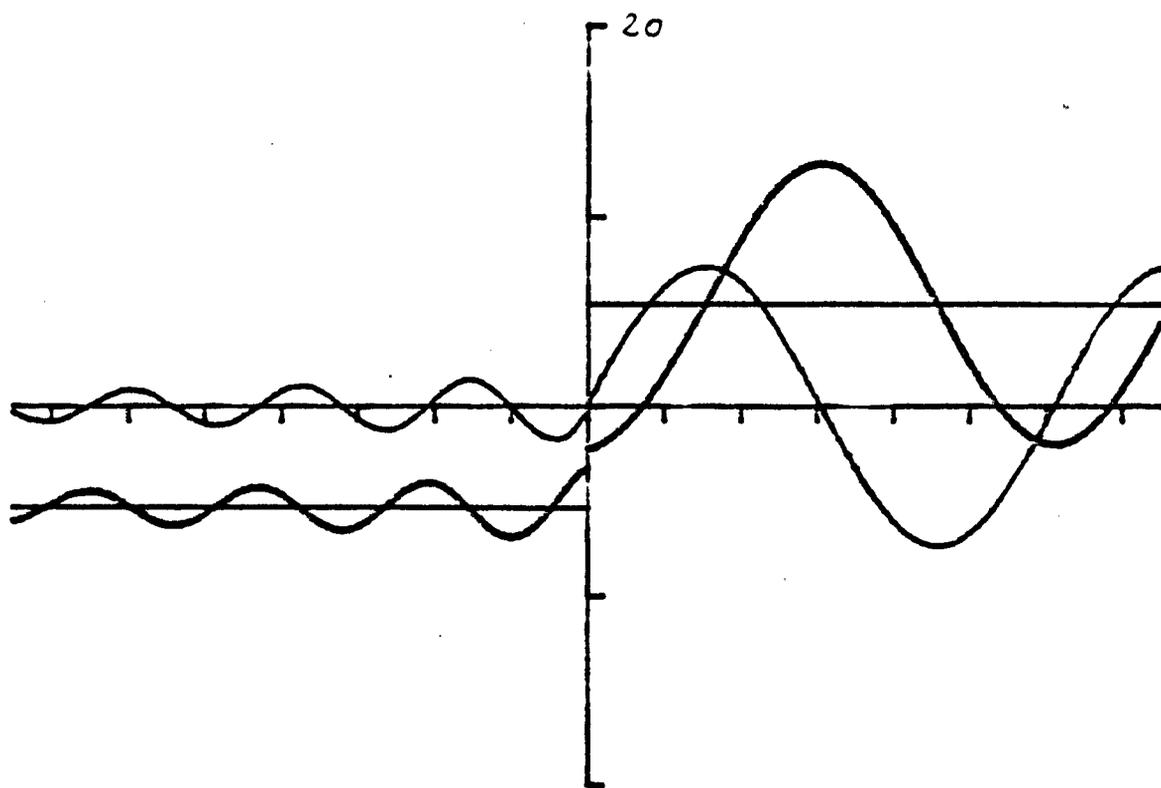
FREQUENCY 0.96



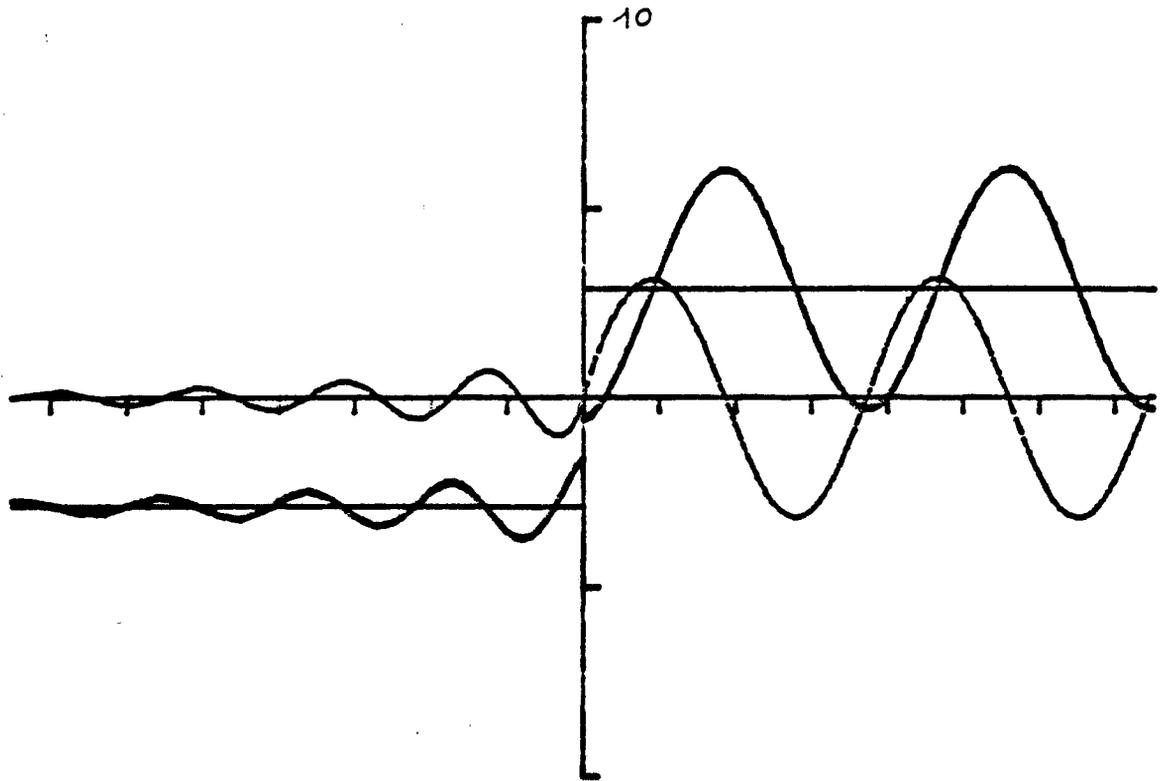
FREQUENCY 0.98



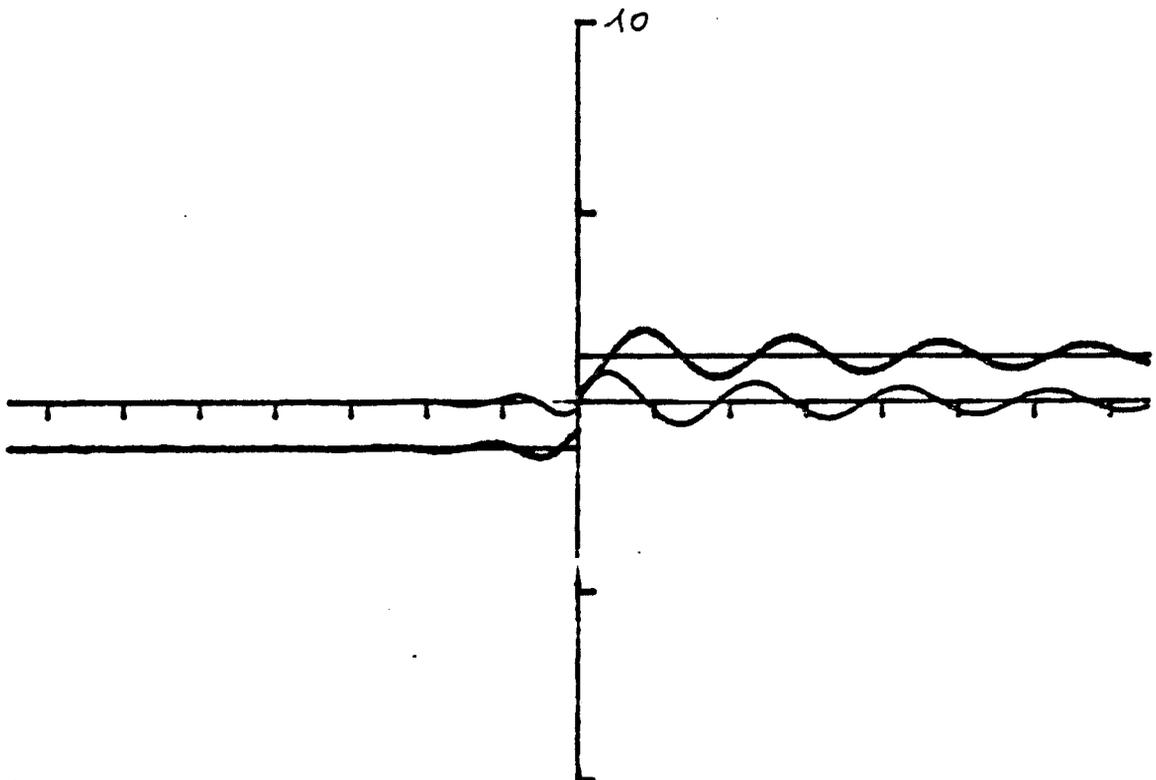
FREQUENCY 1.02



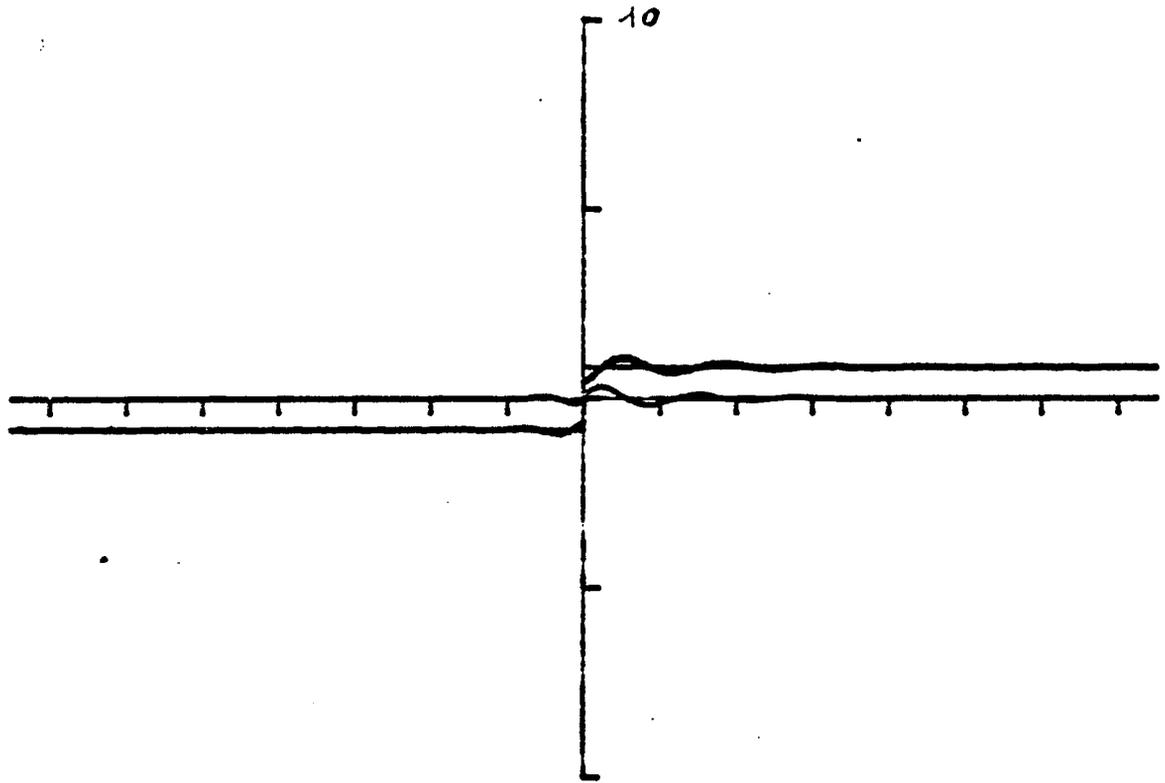
FREQUENCY 1.05



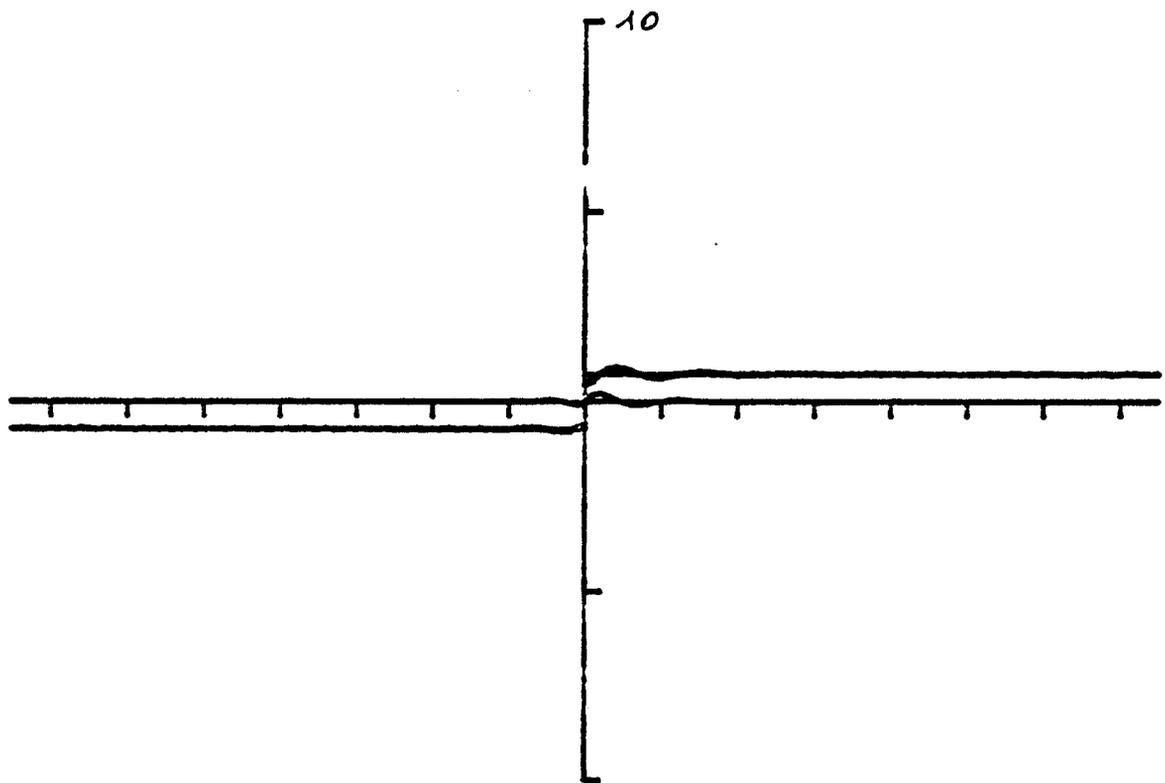
FREQUENCY 1.10



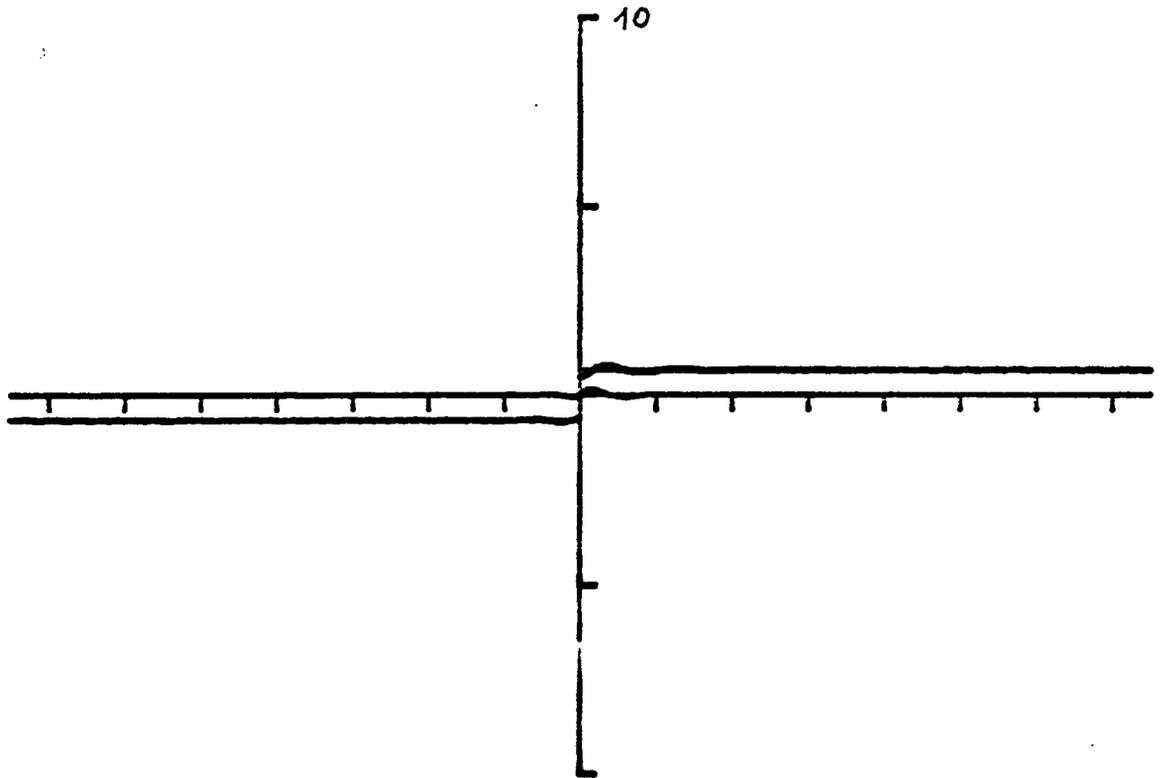
FREQUENCY 1.30



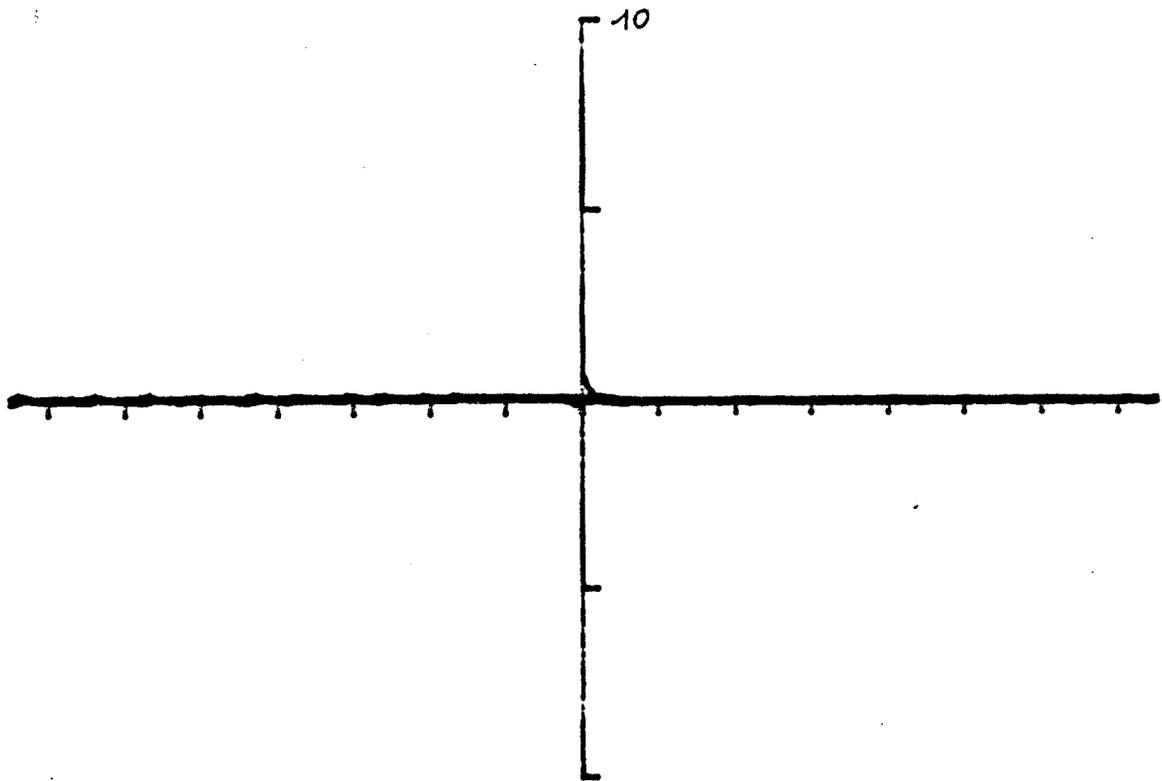
FREQUENCY 1.60



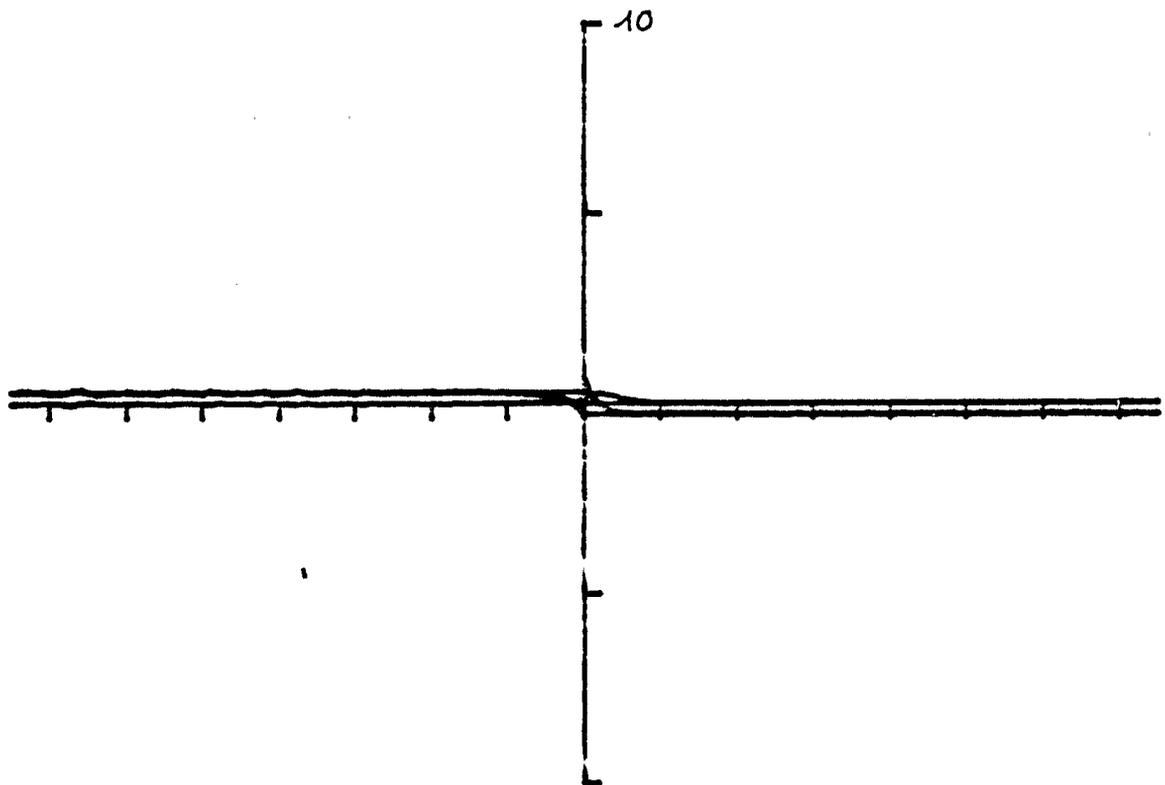
FREQUENCY 1.80



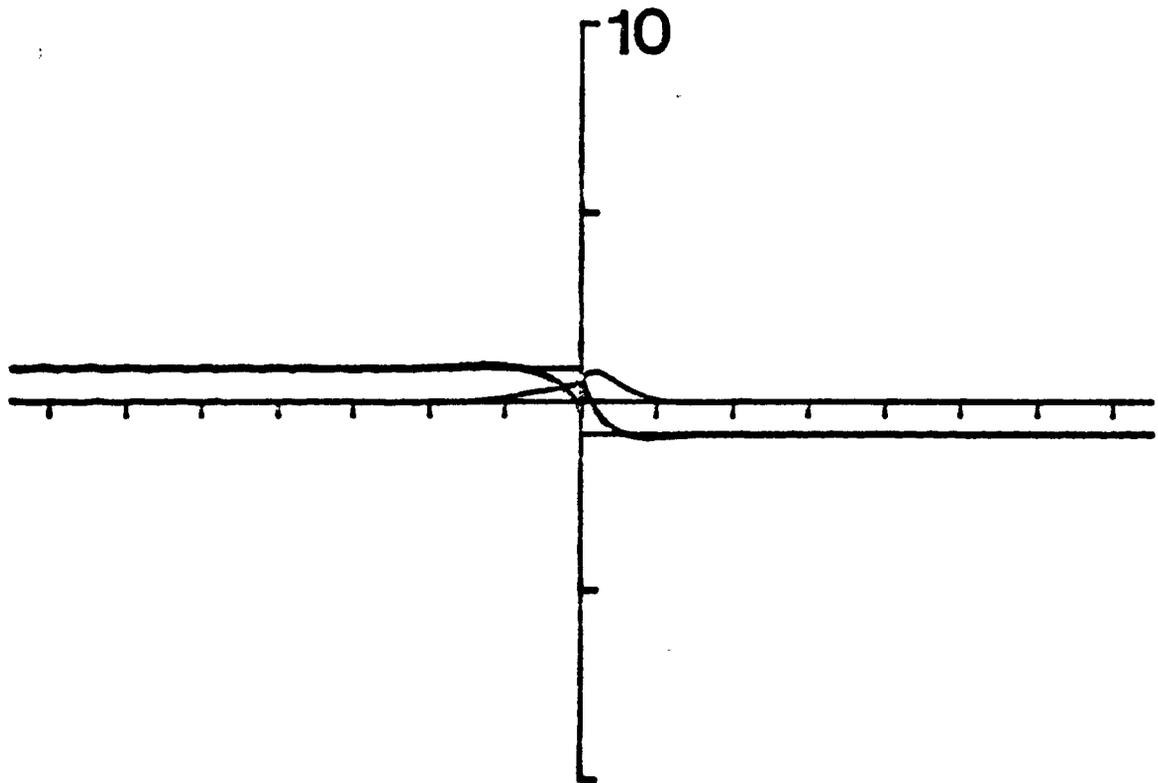
FREQUENCY 2.00



FREQUENCY 0.40

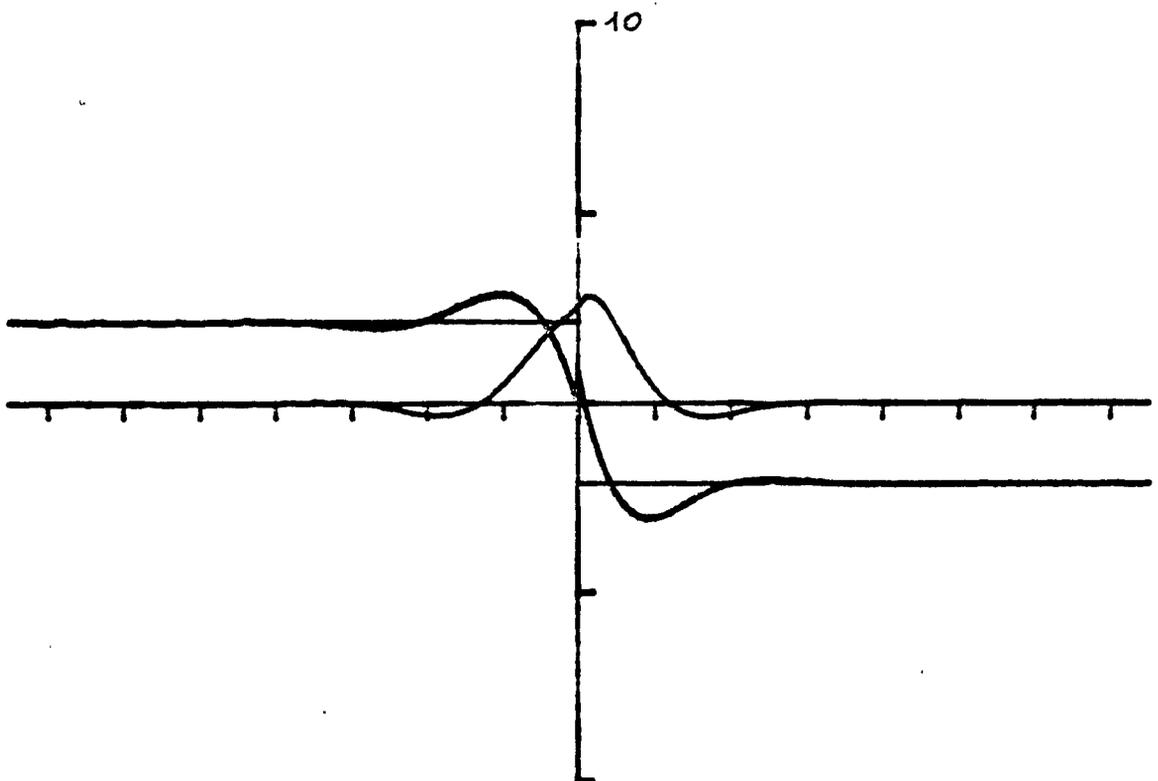


FREQUENCY 0.60

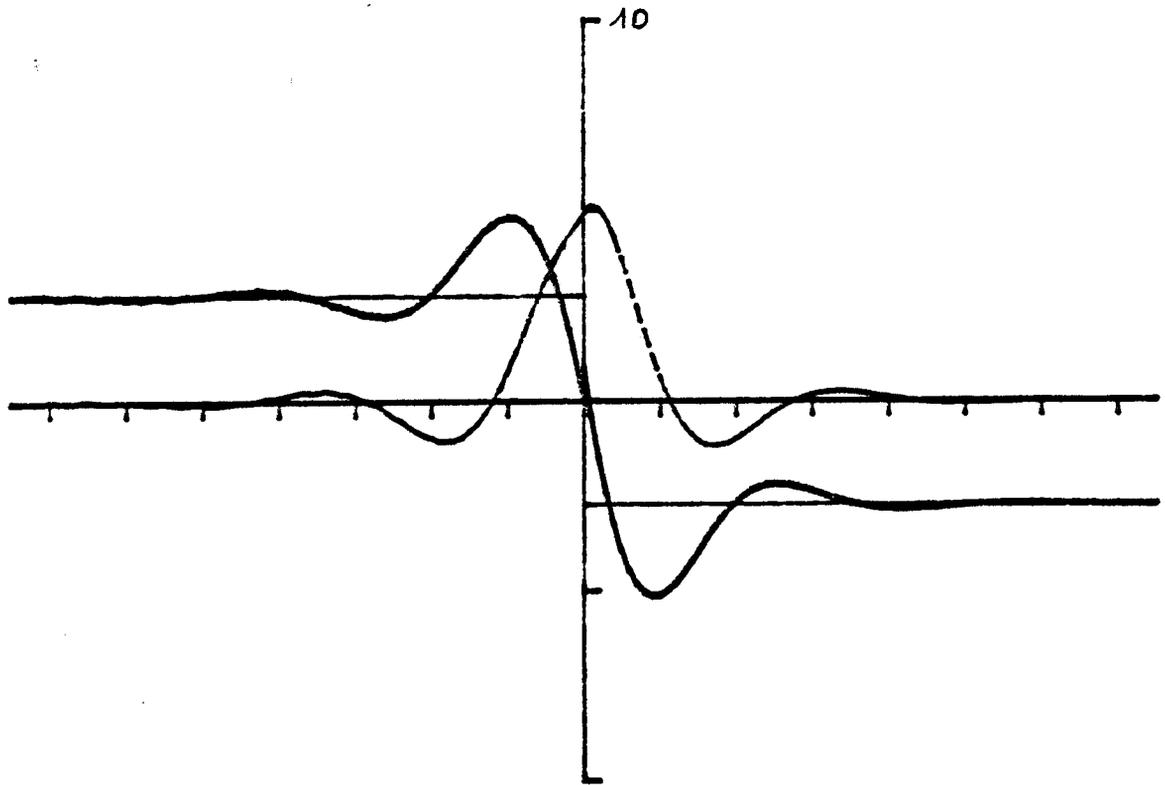


FREQUENCY 0.80

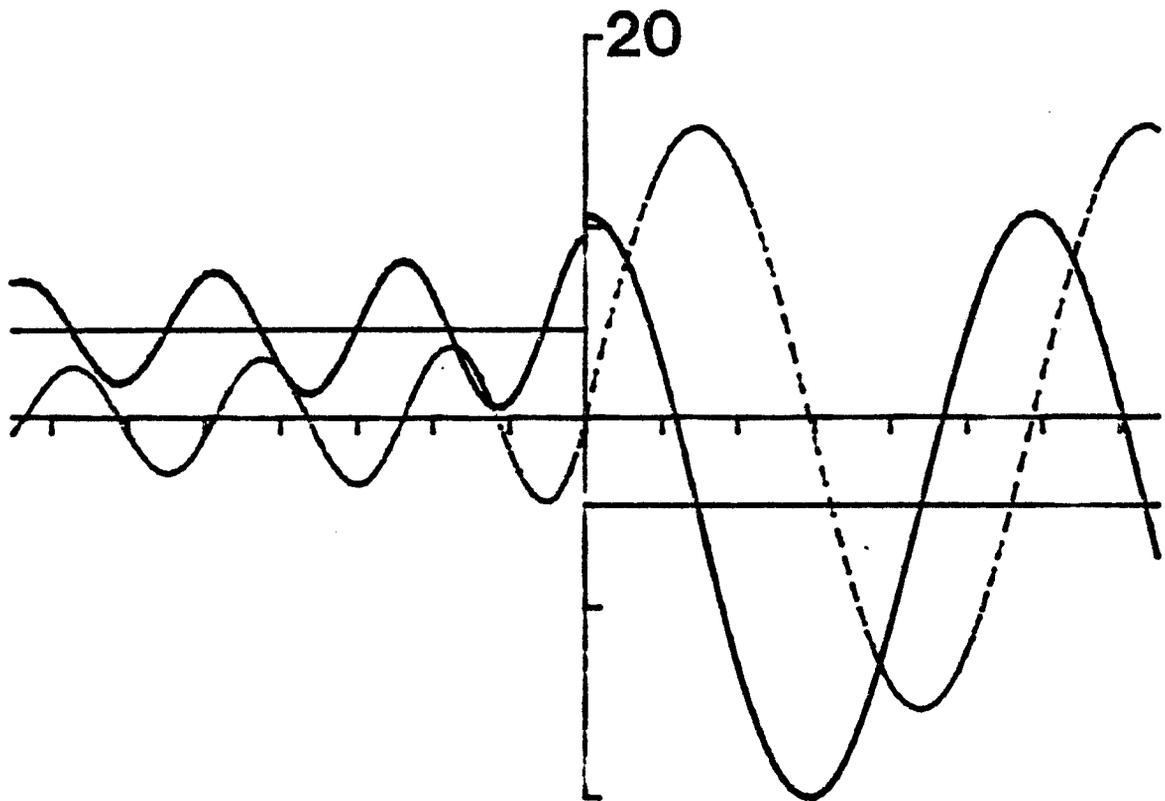
**A**



FREQUENCY 0.90

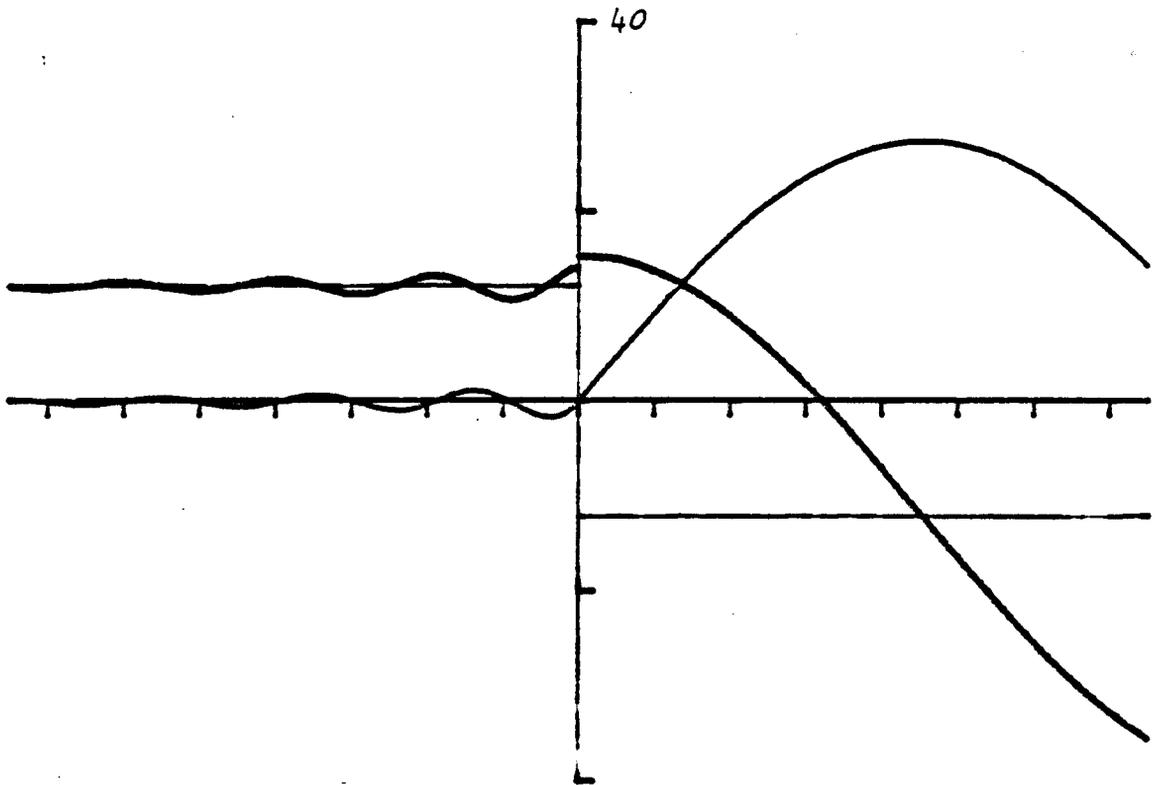


FREQUENCY 0.92

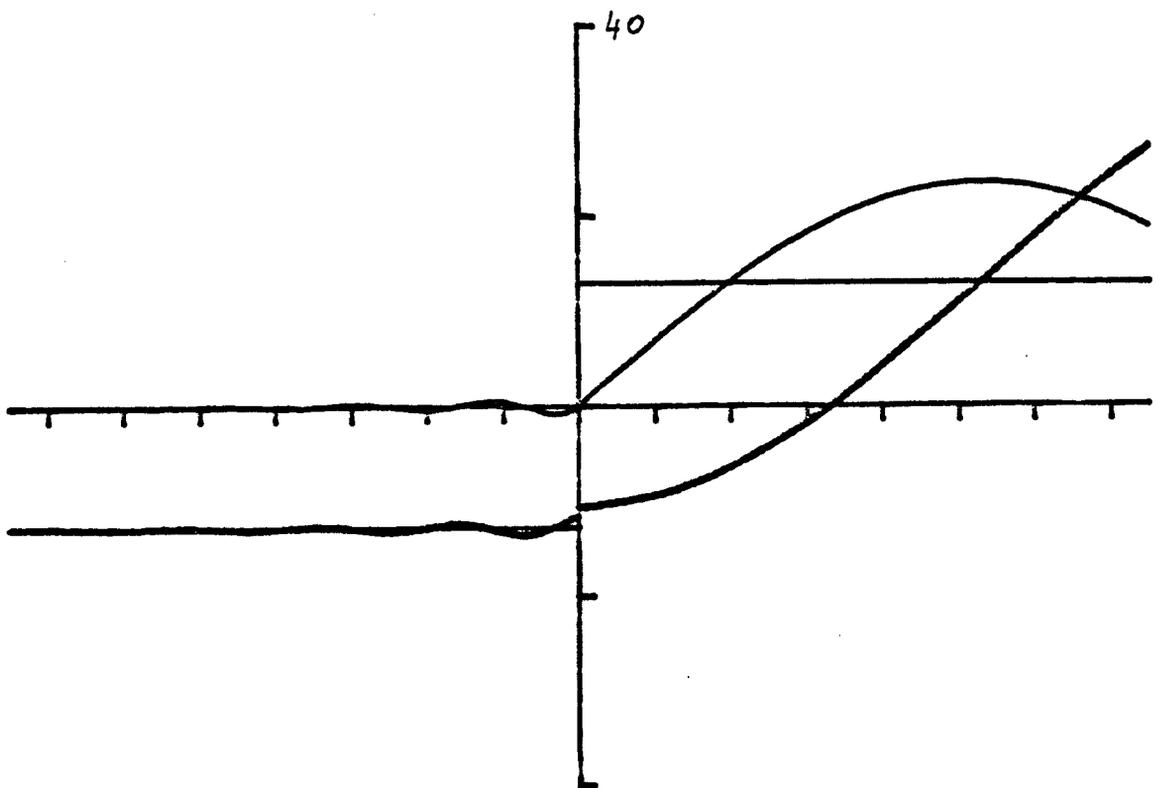


FREQUENCY 0.95

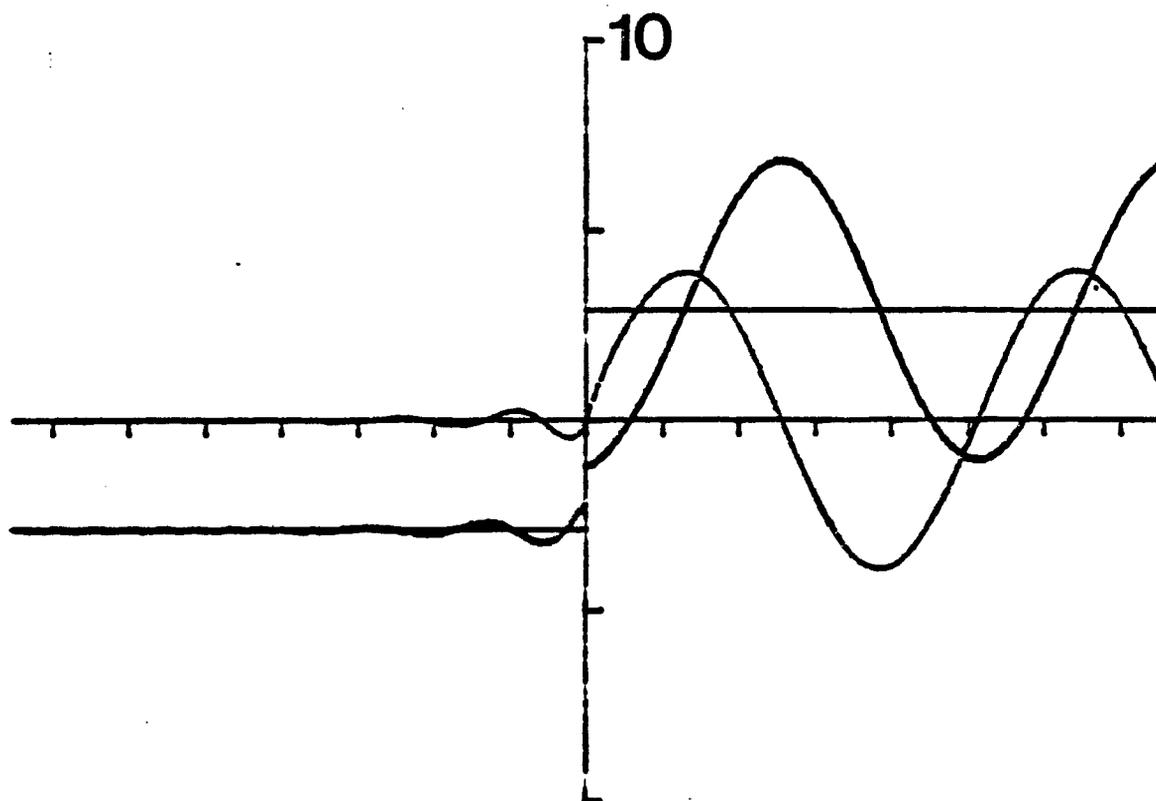
**B**



FREQUENCY 0.98

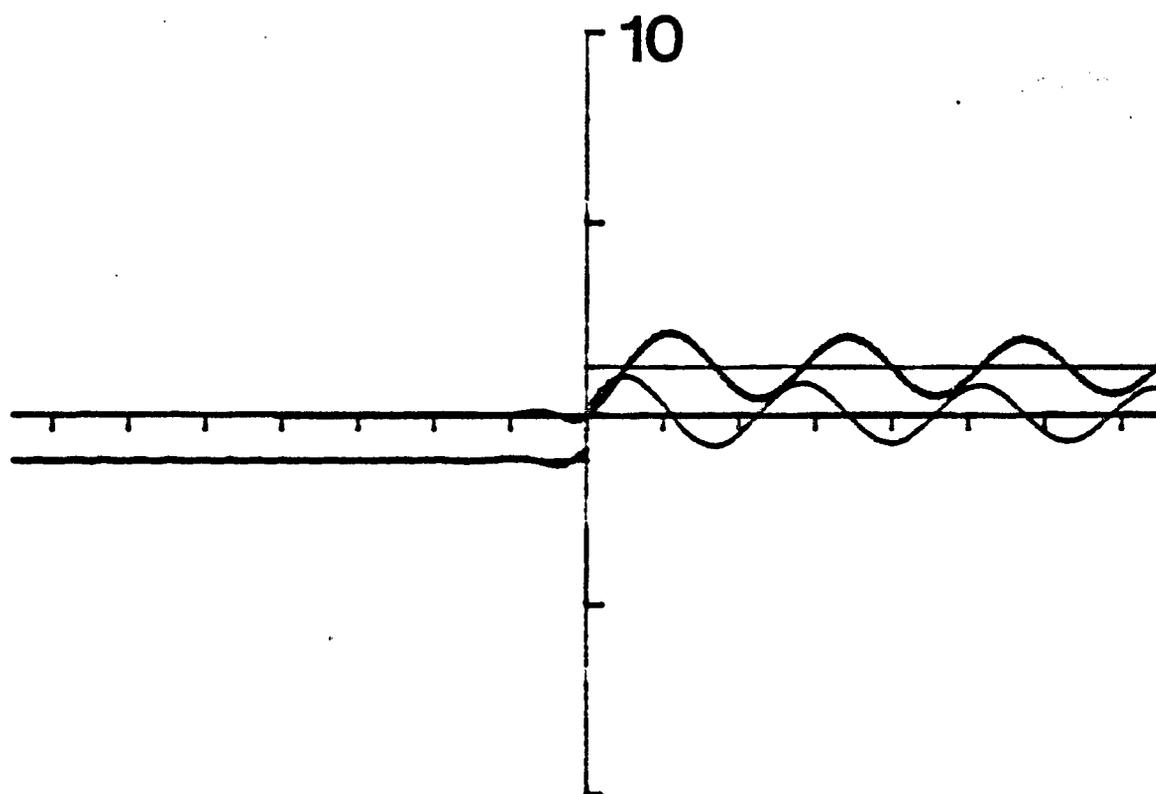


FREQUENCY 1.02



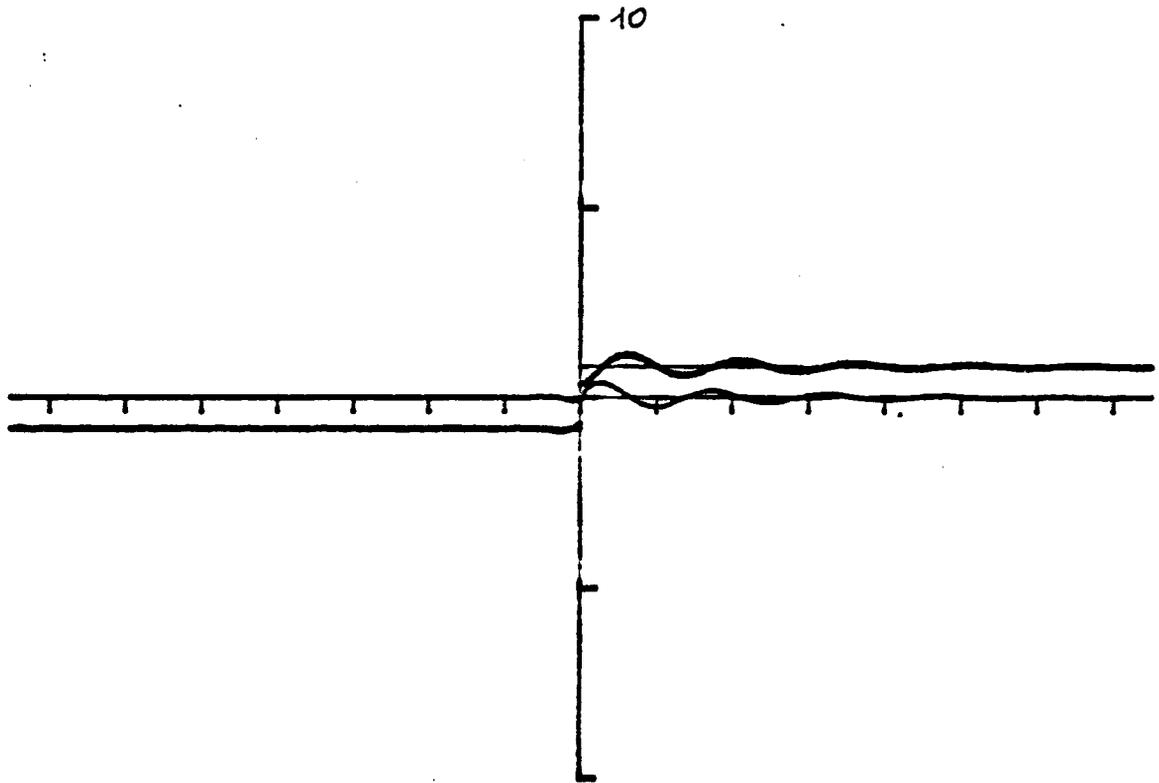
C

FREQUENCY 1.10

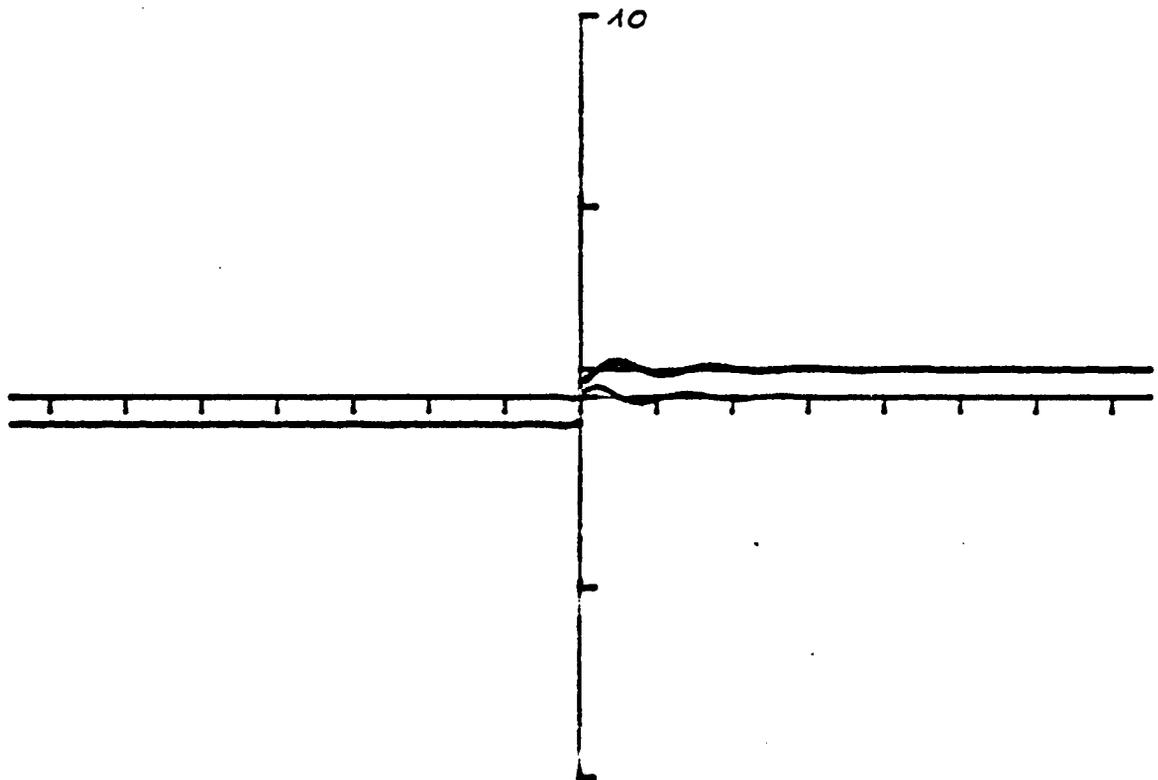


D

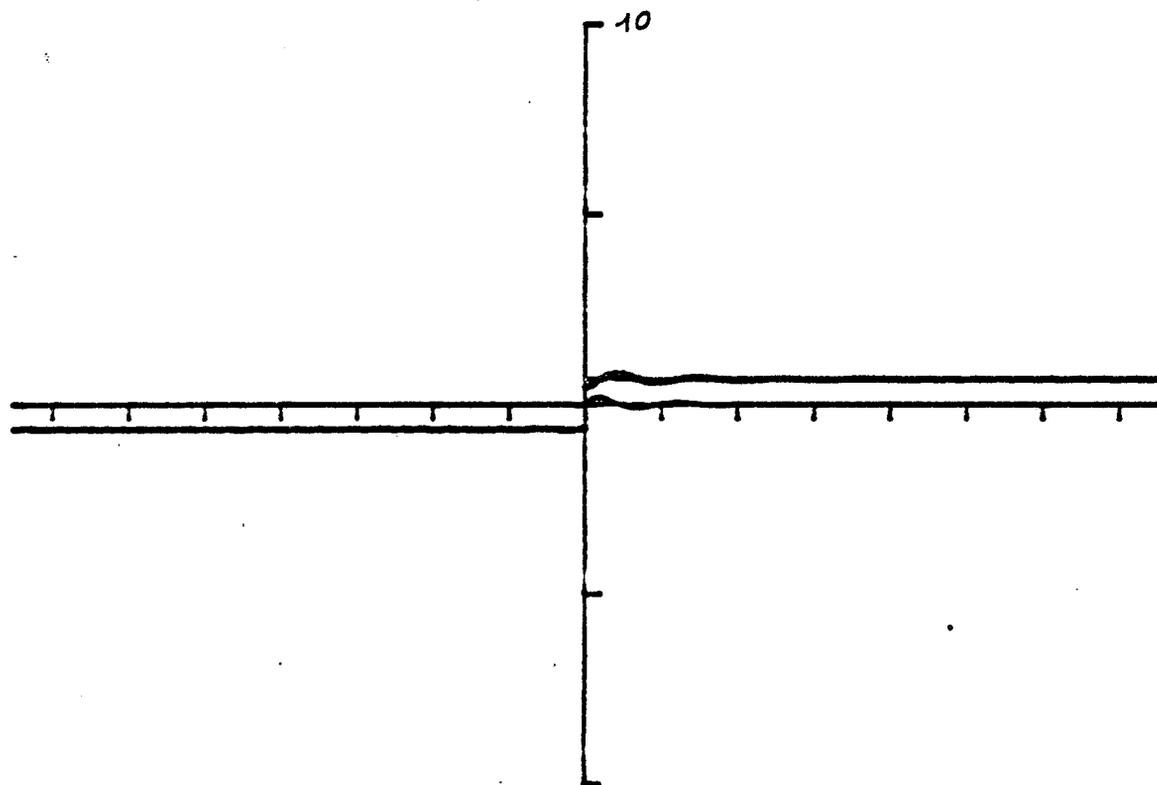
FREQUENCY 1.30



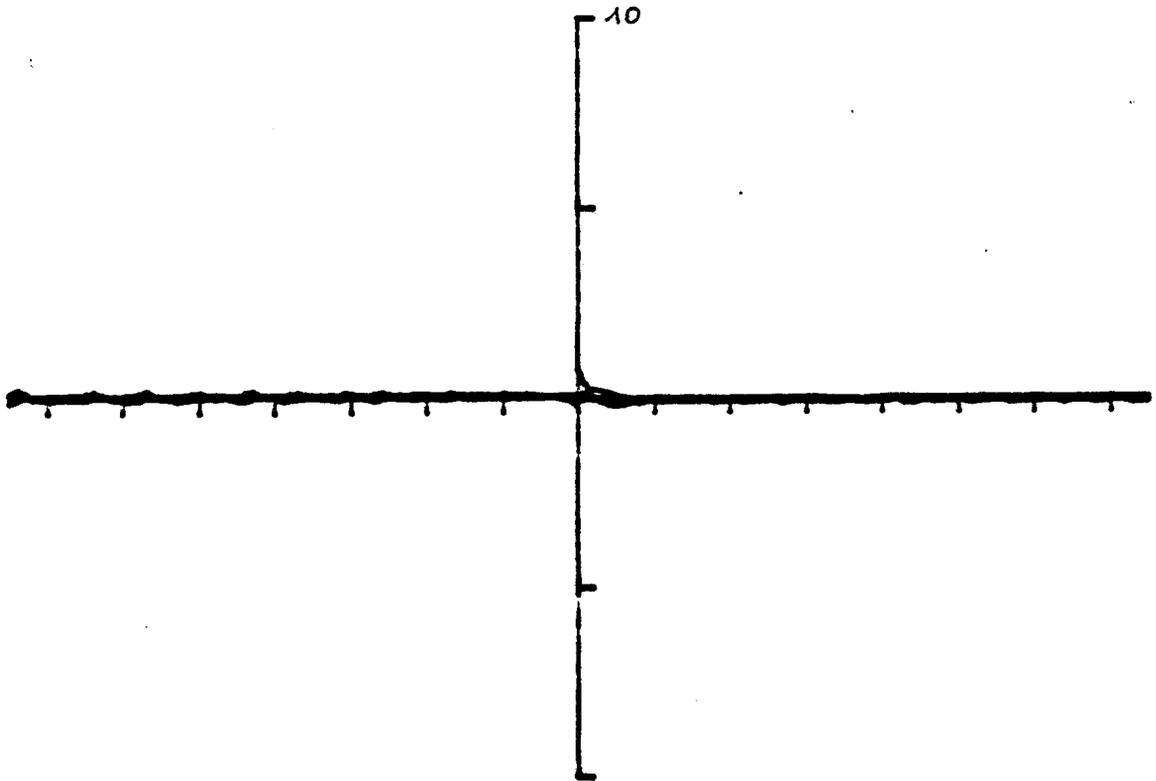
FREQUENCY 1.60



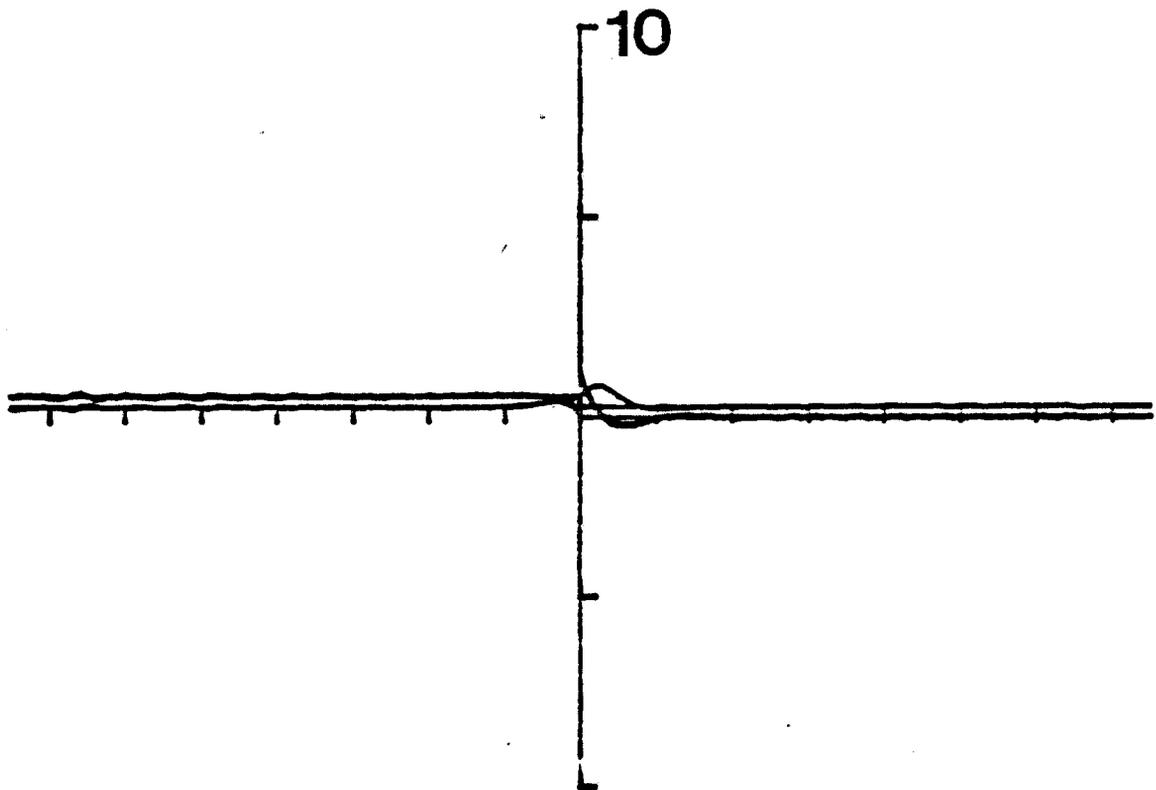
FREQUENCY 1.80



FREQUENCY 2.00

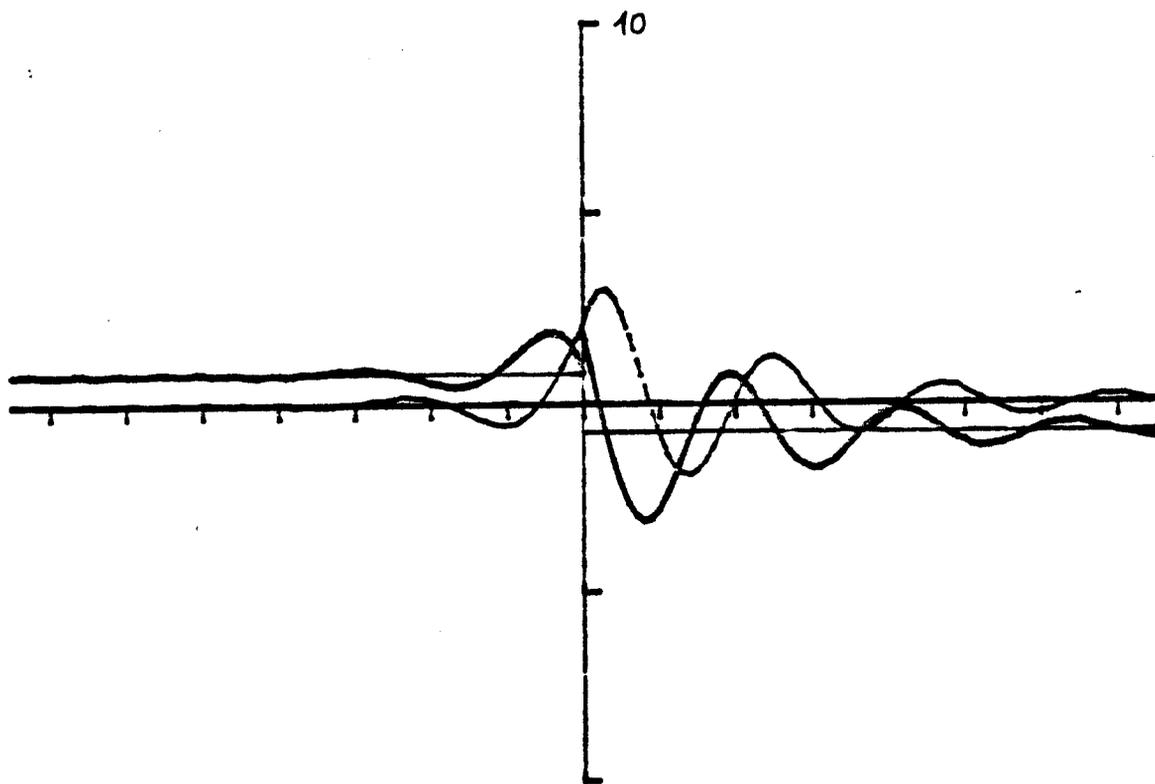


FREQUENCY 0.40

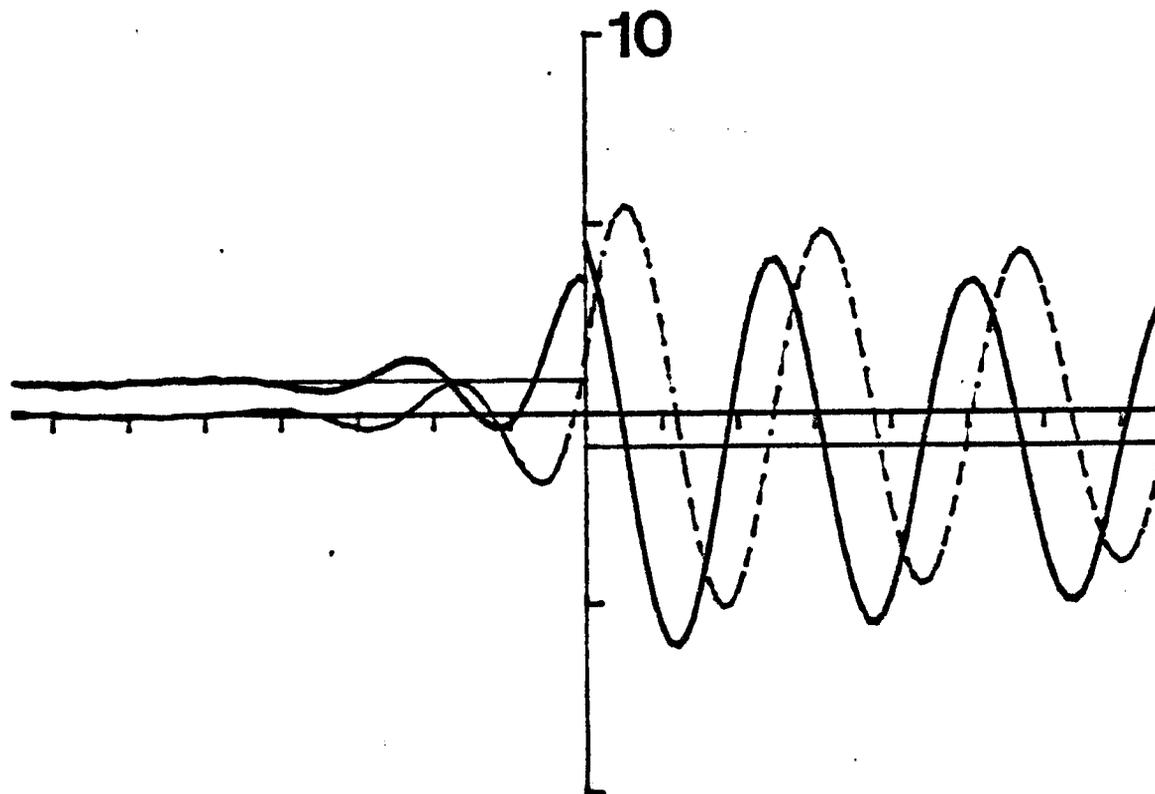


FREQUENCY 0.60

**A**

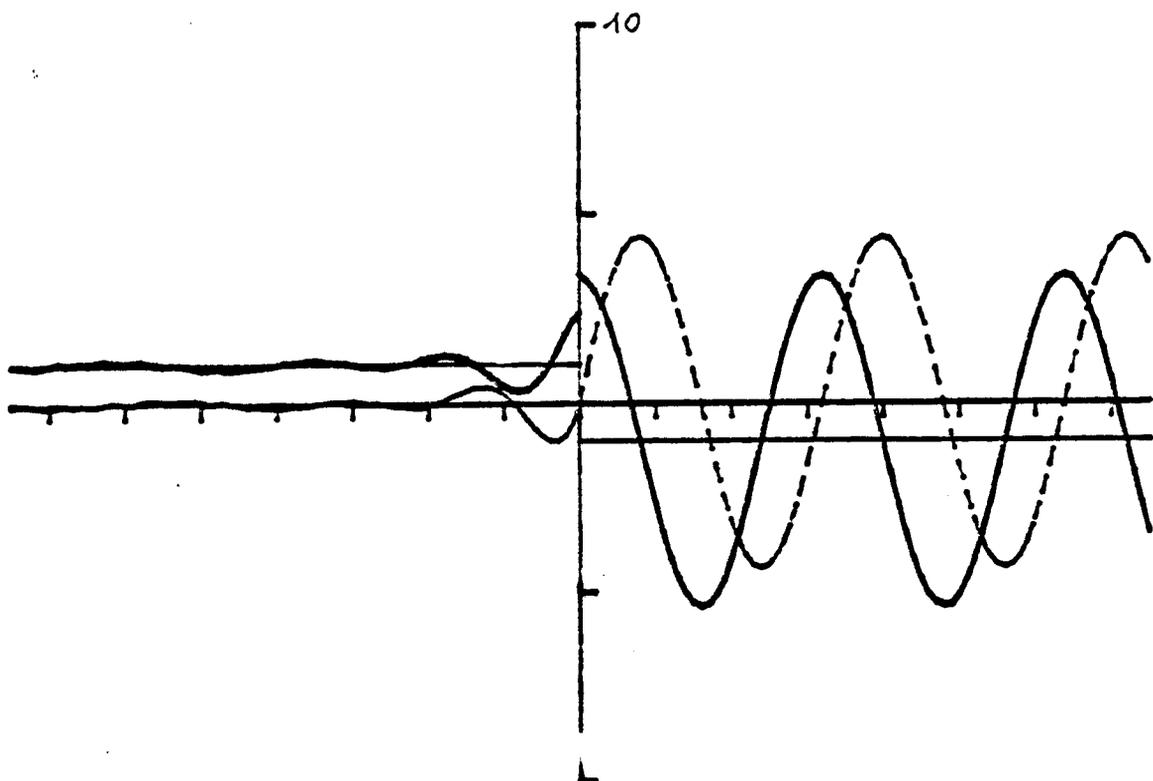


FREQUENCY 0.78

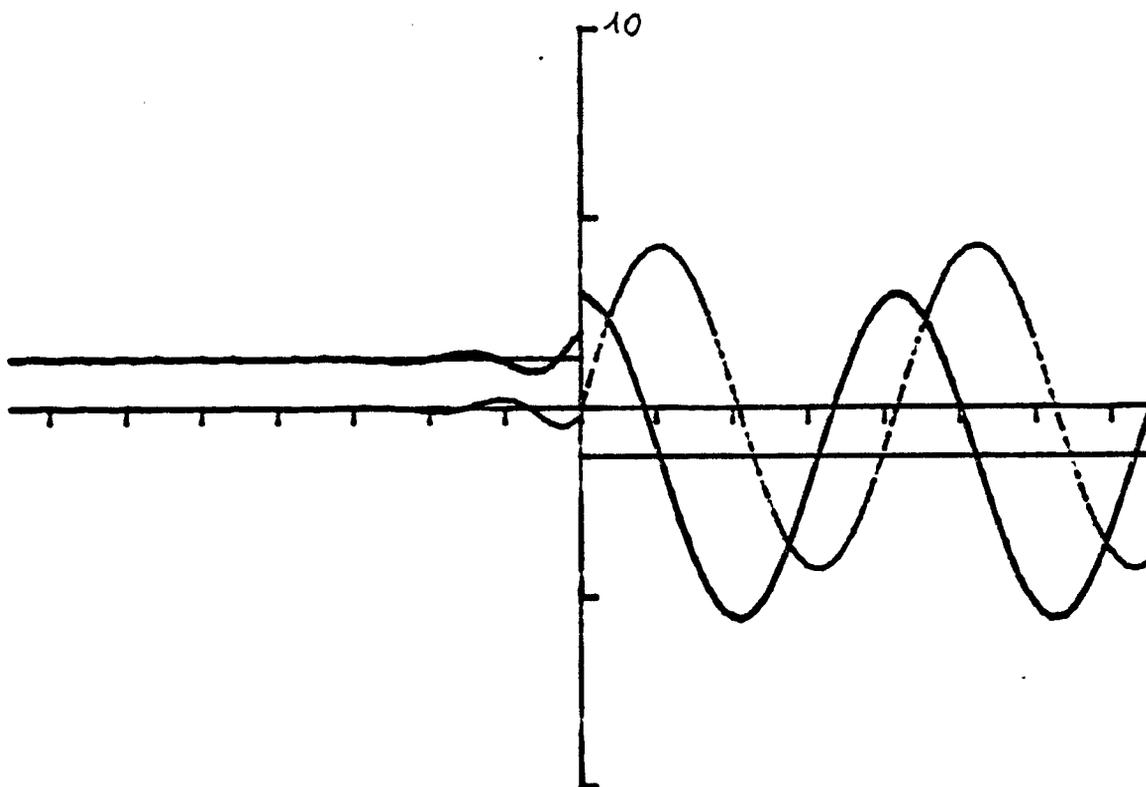


FREQUENCY 0.80

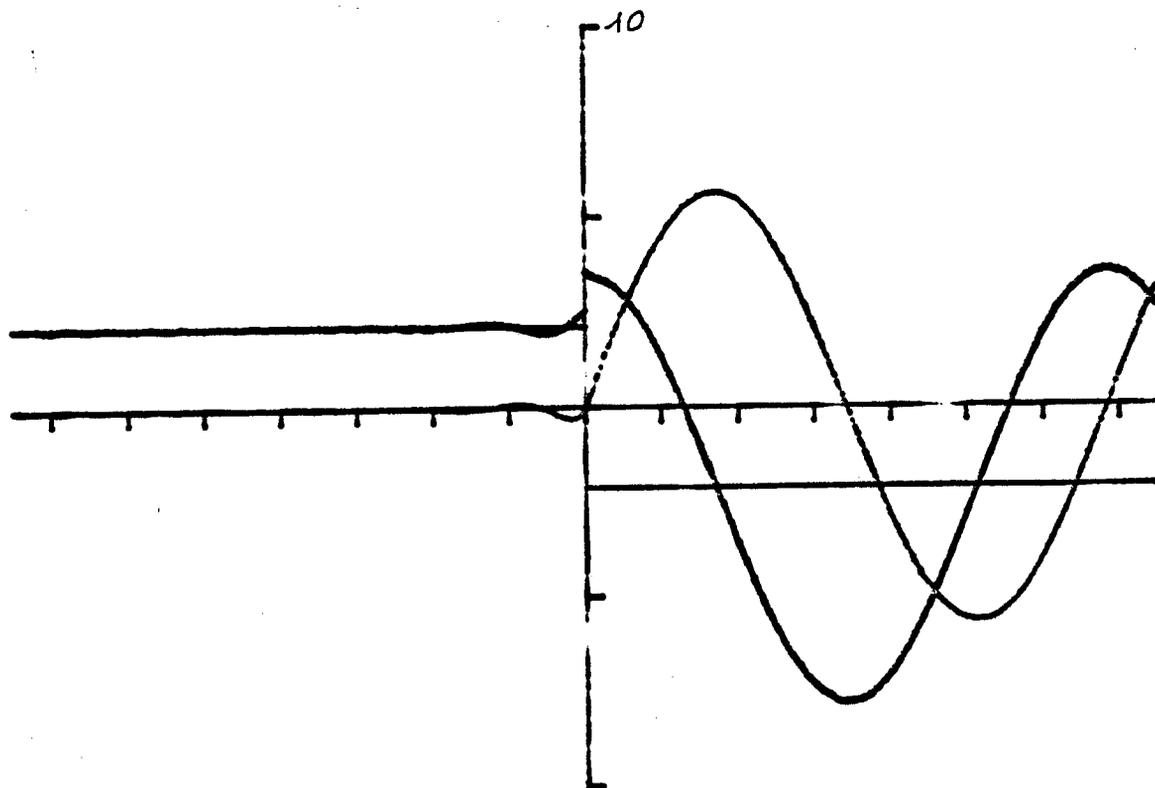
**B**



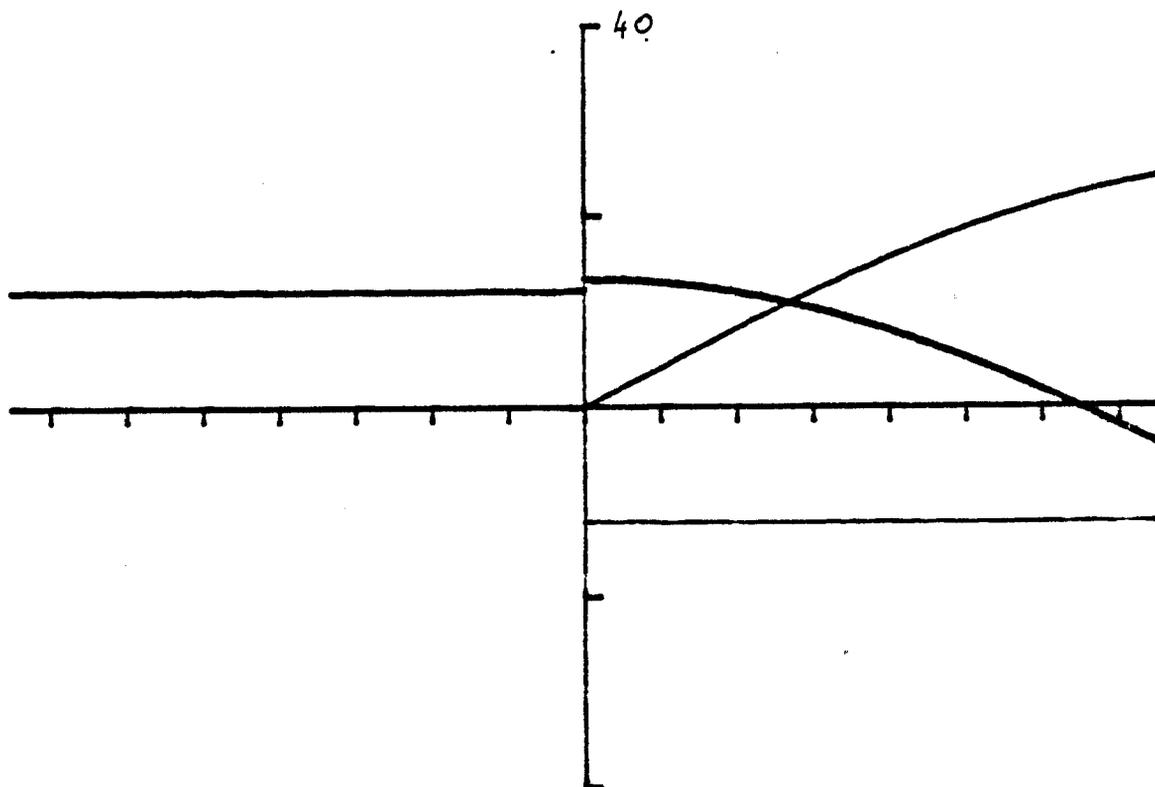
FREQUENCY 0.82



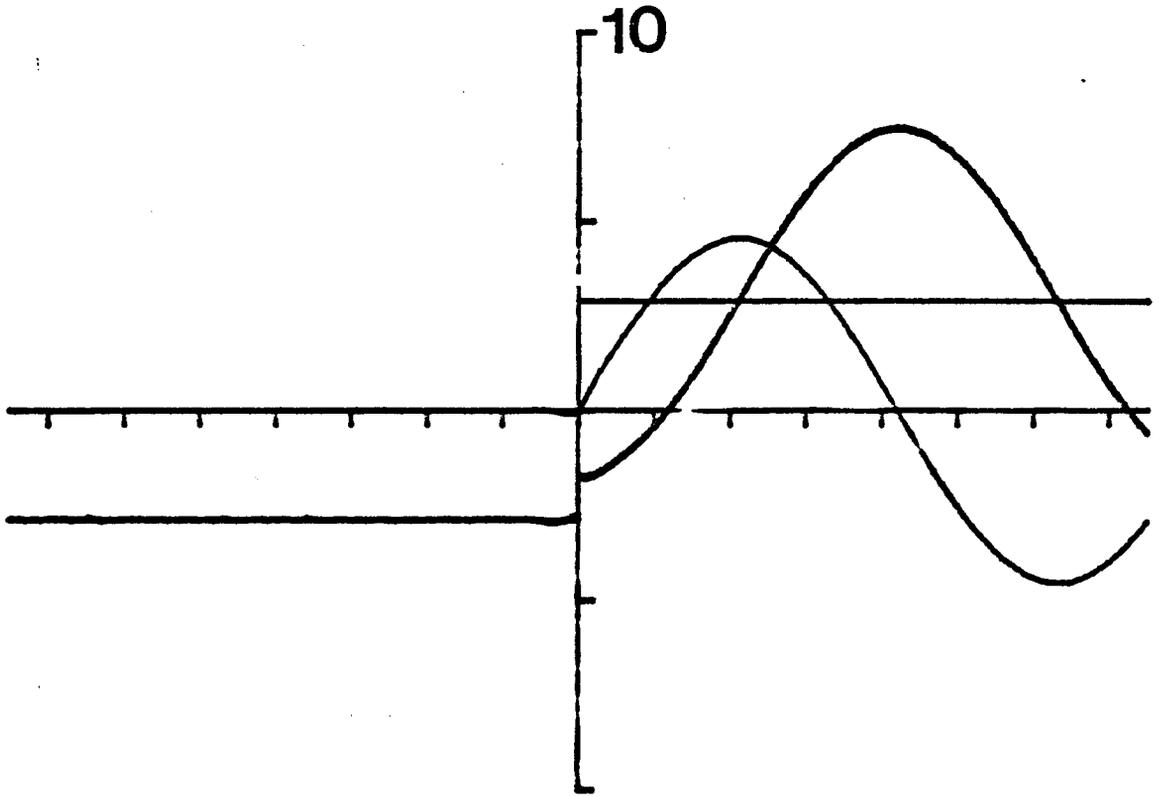
FREQUENCY 0.85



FREQUENCY 0.90

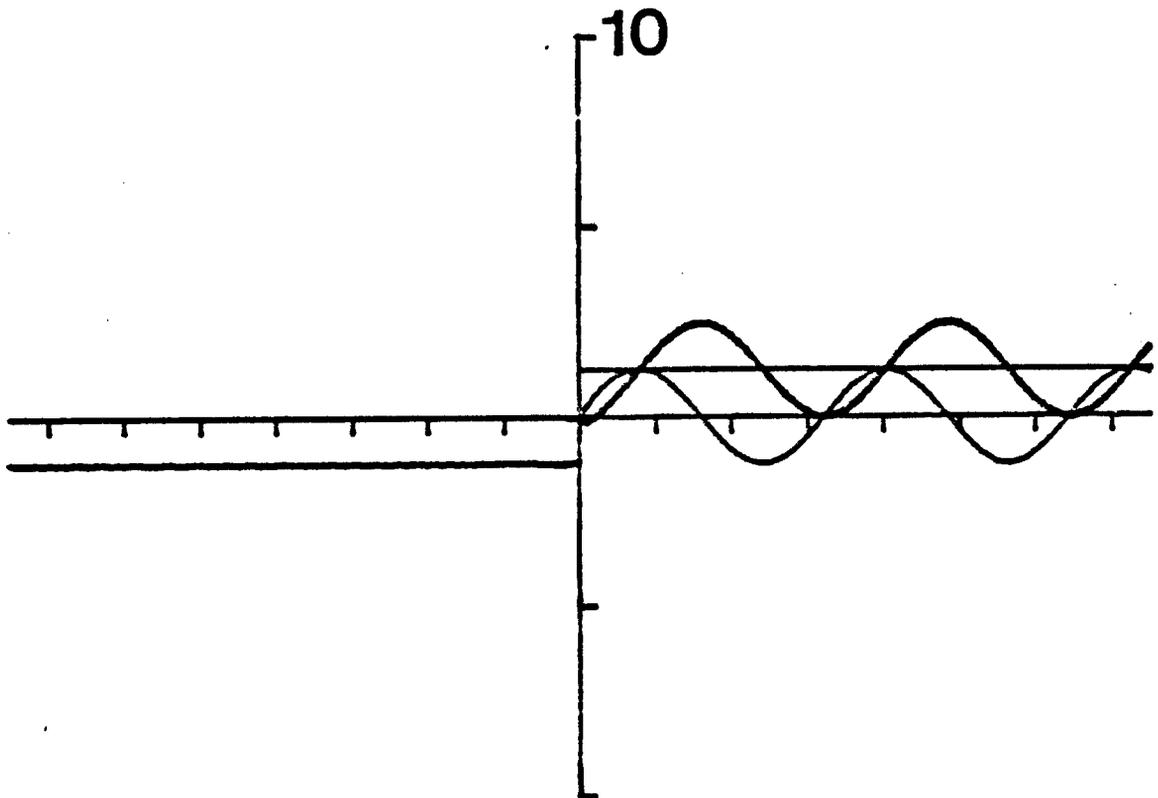


FREQUENCY 0.98



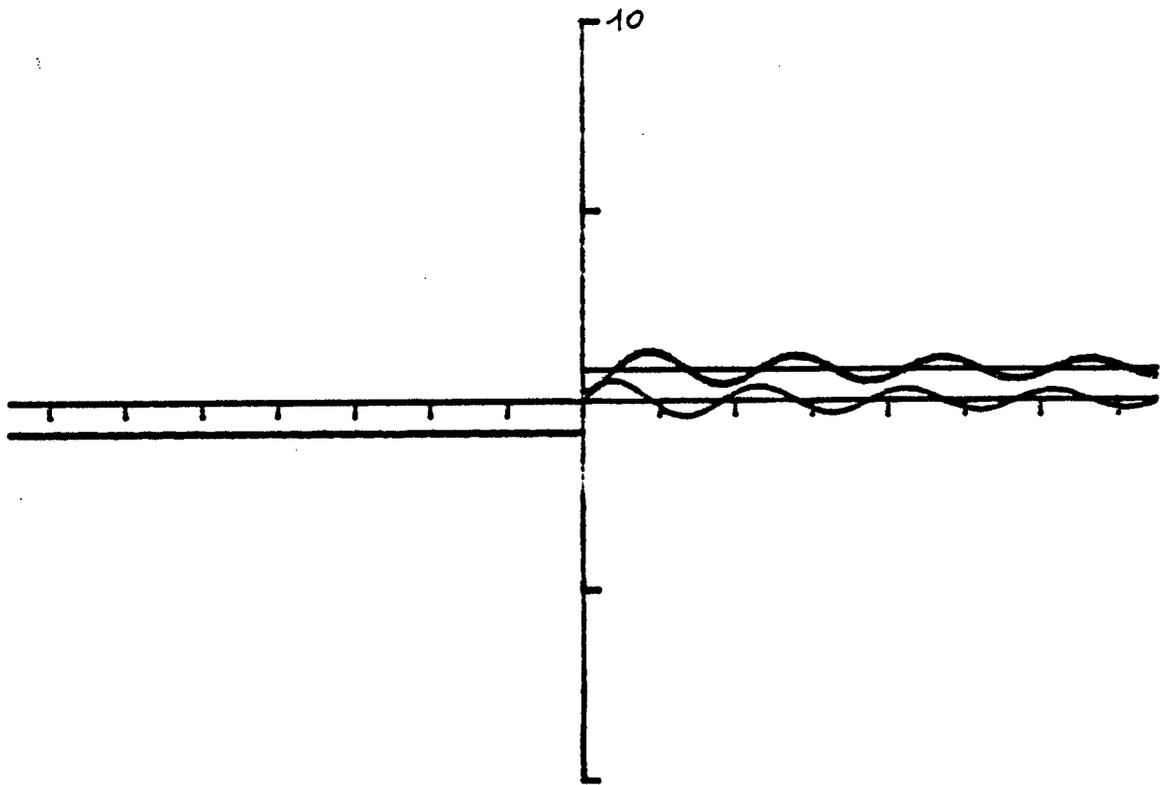
**C**

FREQUENCY 1.10

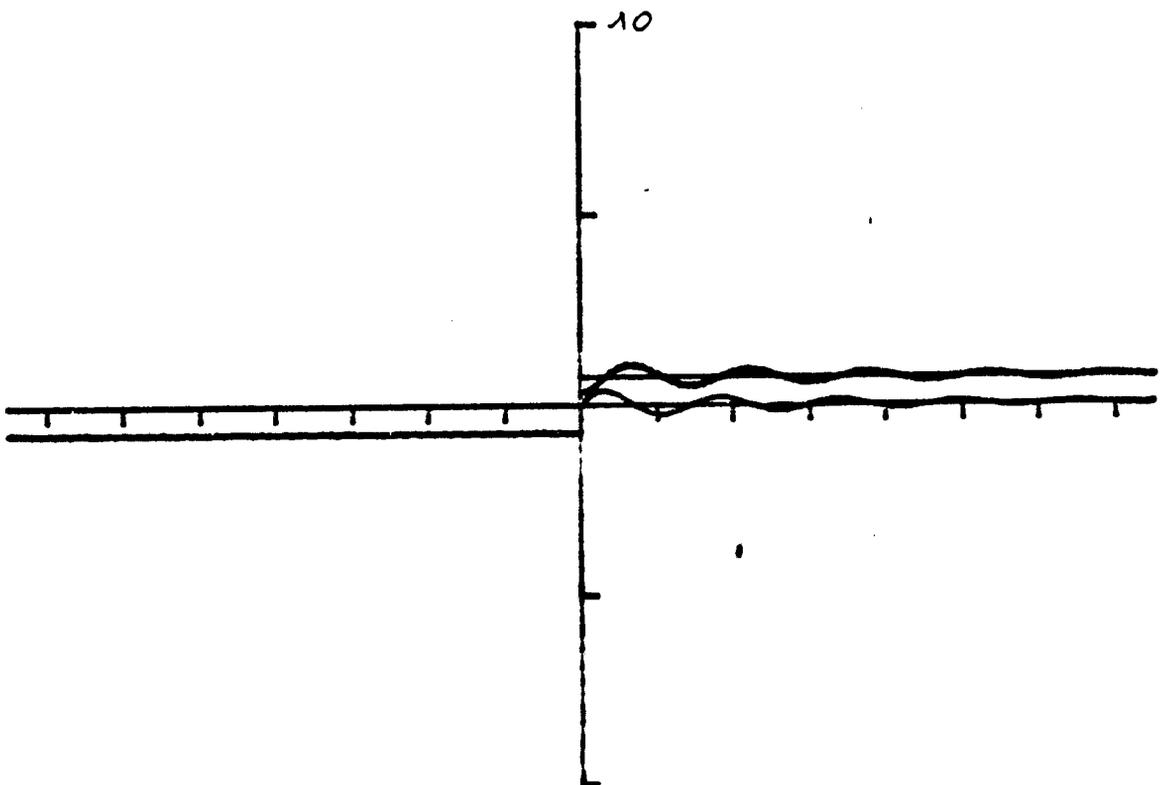


**D**

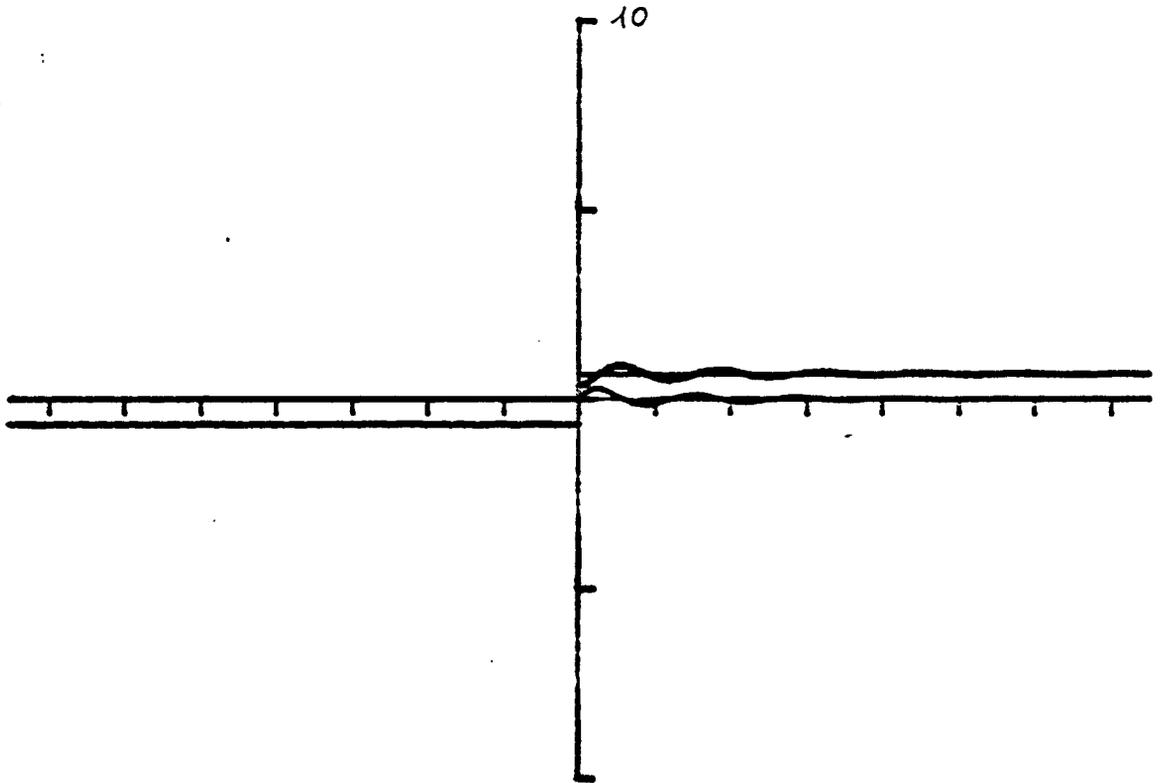
FREQUENCY 1.30



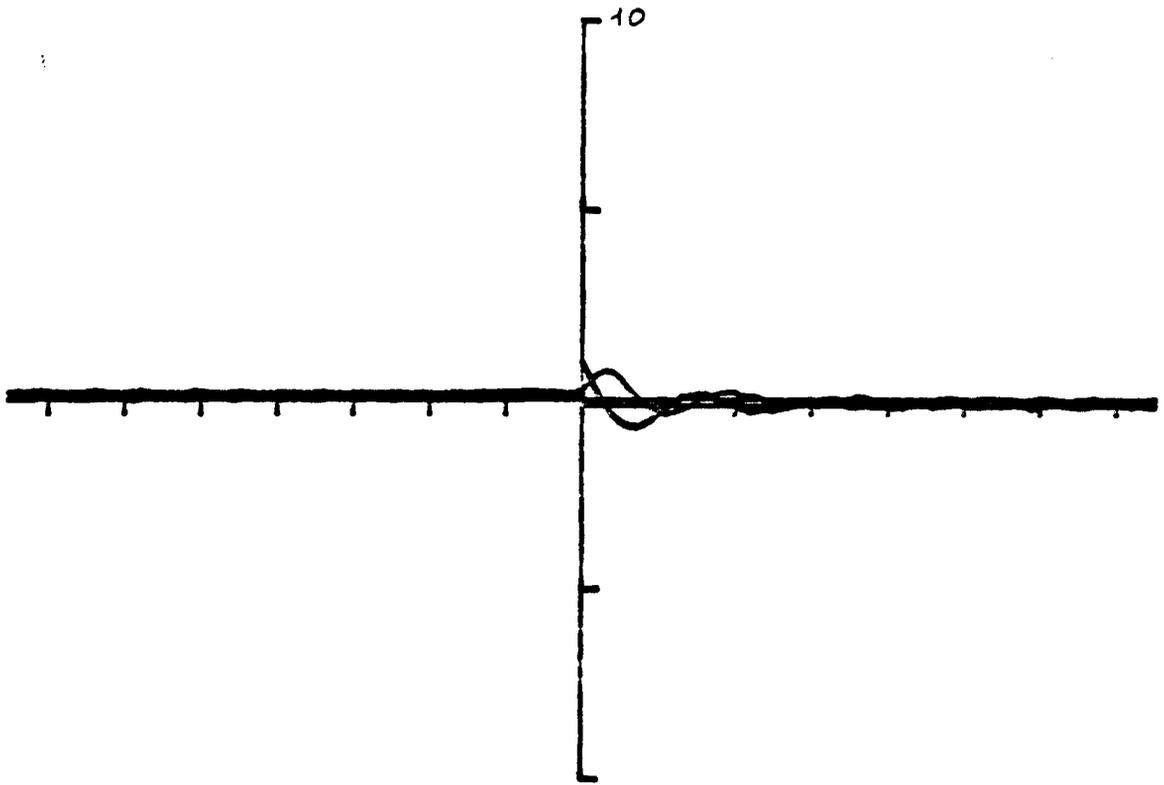
FREQUENCY 1.60



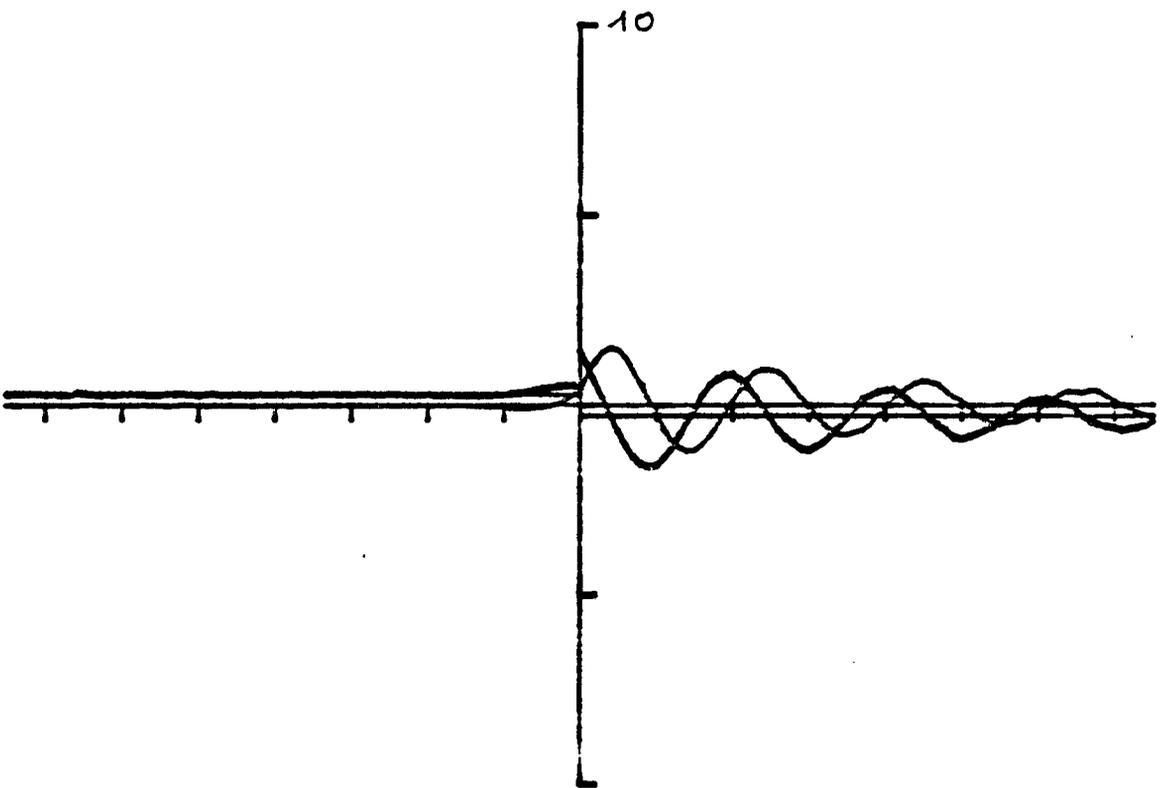
FREQUENCY 1.80



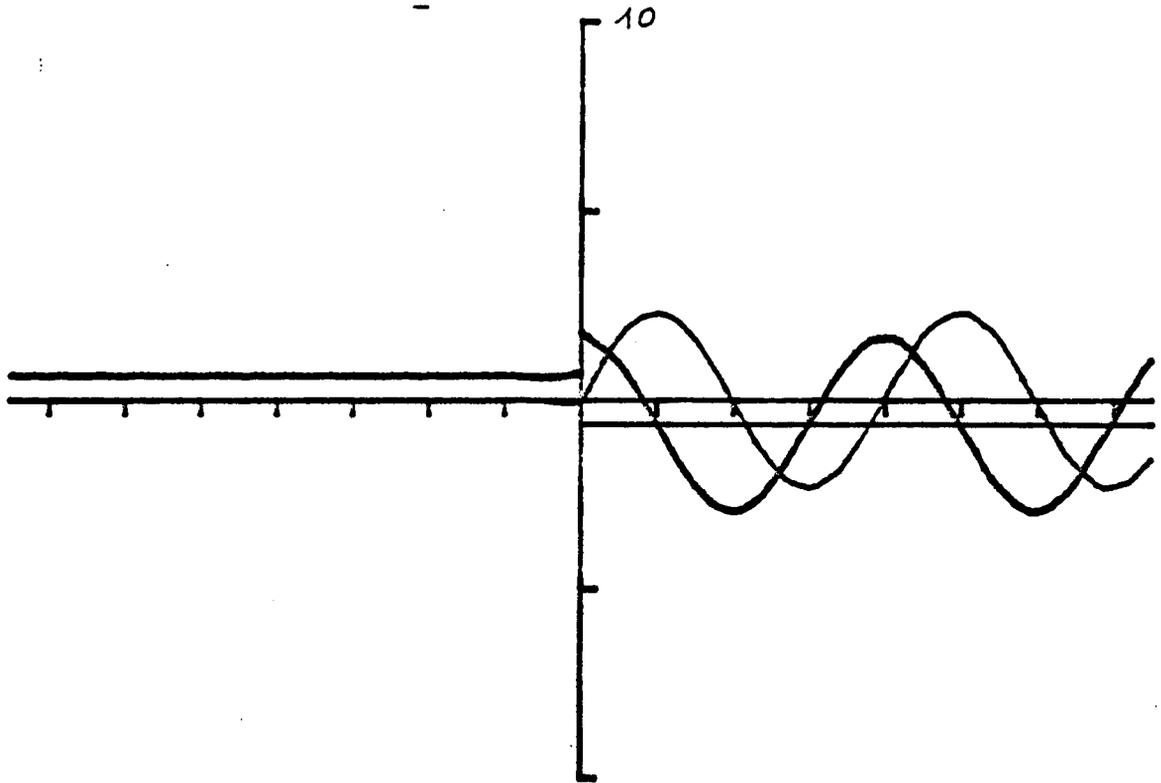
FREQUENCY 2.00



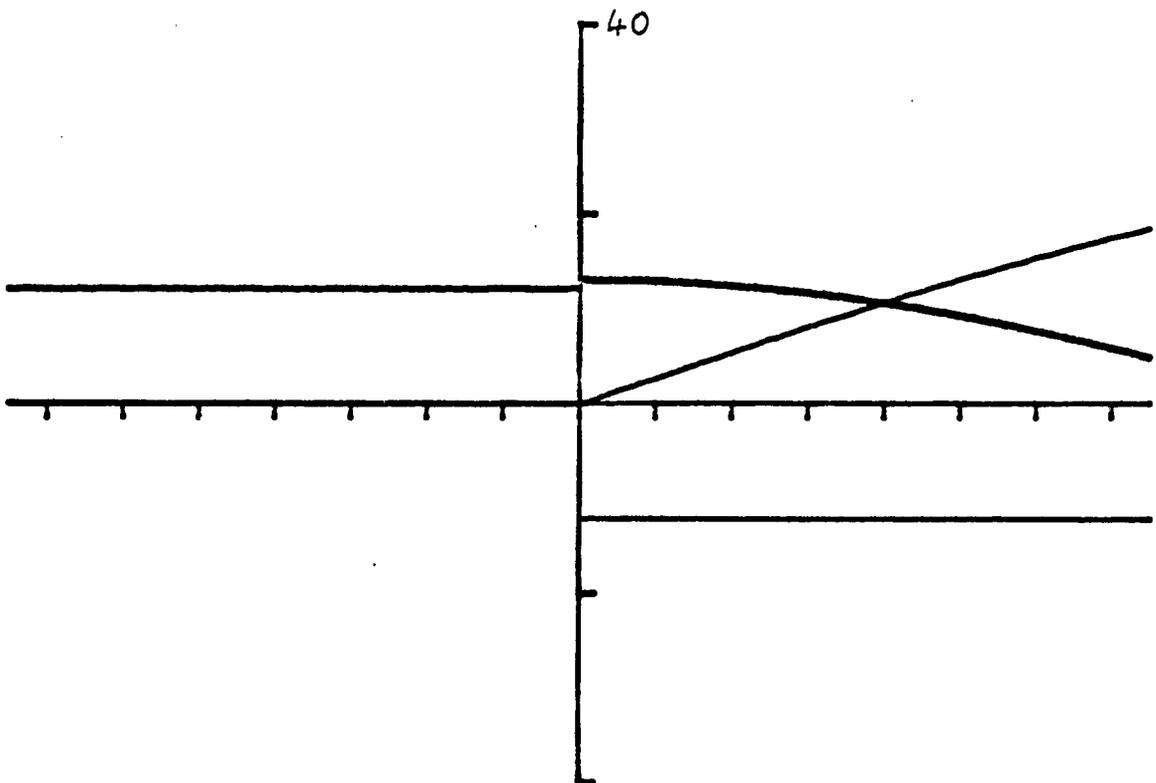
FREQUENCY 0.50



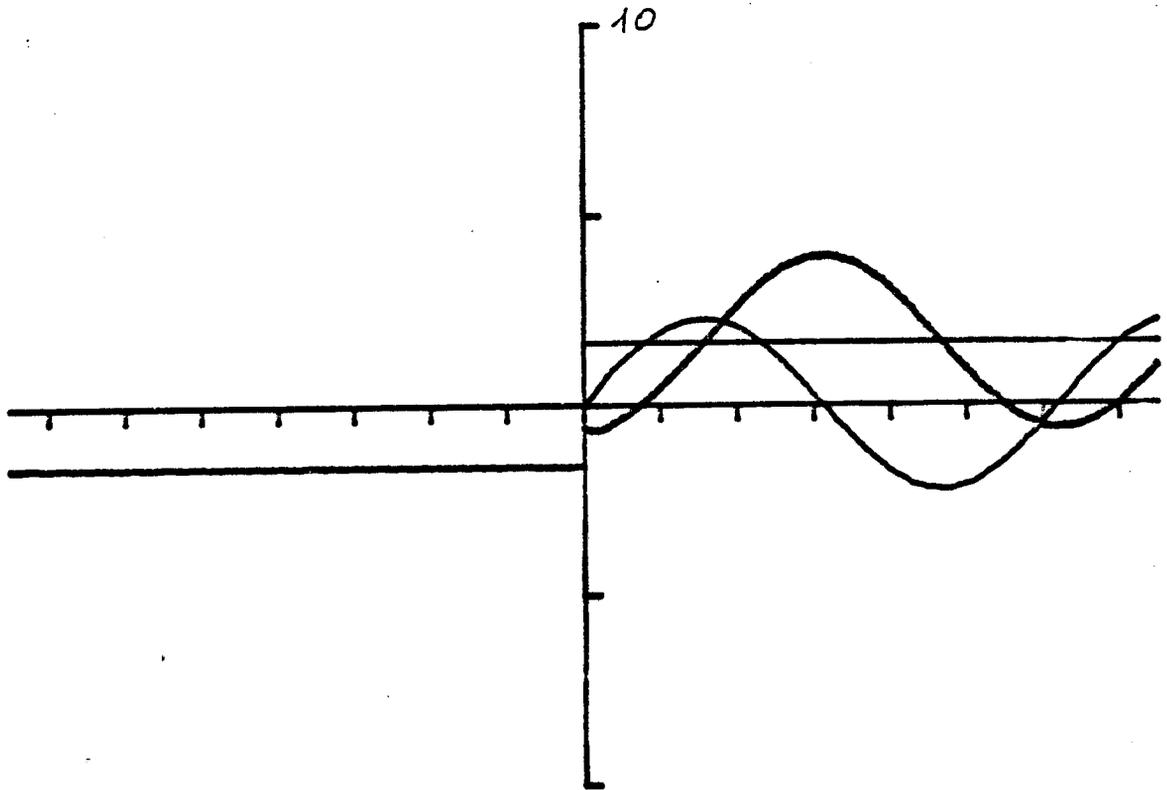
FREQUENCY 0.60



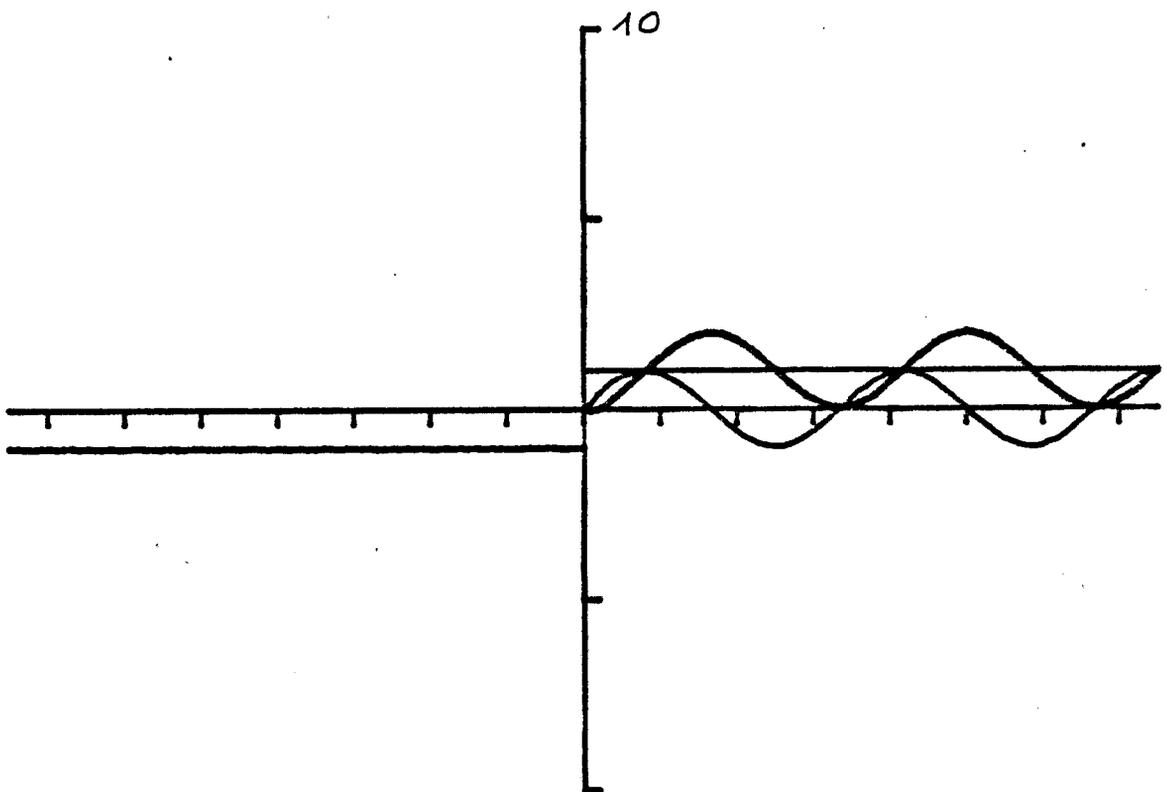
FREQUENCY 0.75



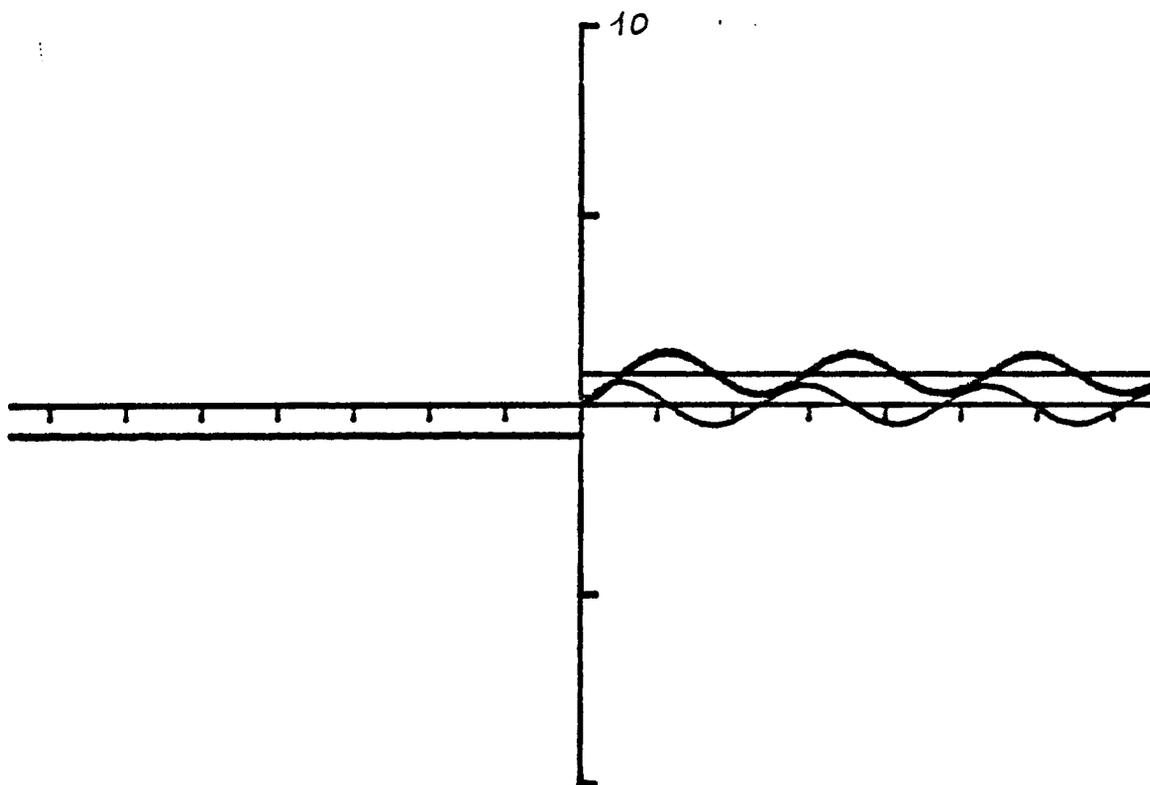
FREQUENCY 0.98



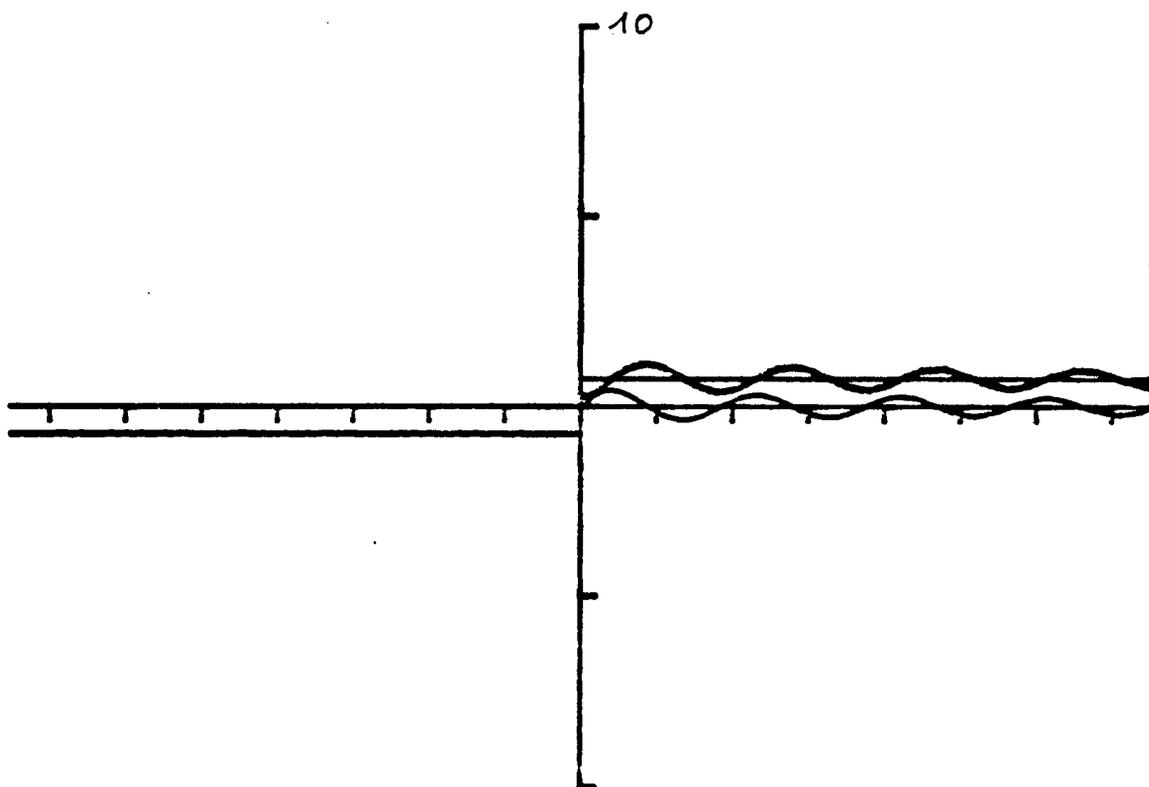
FREQUENCY 1.20



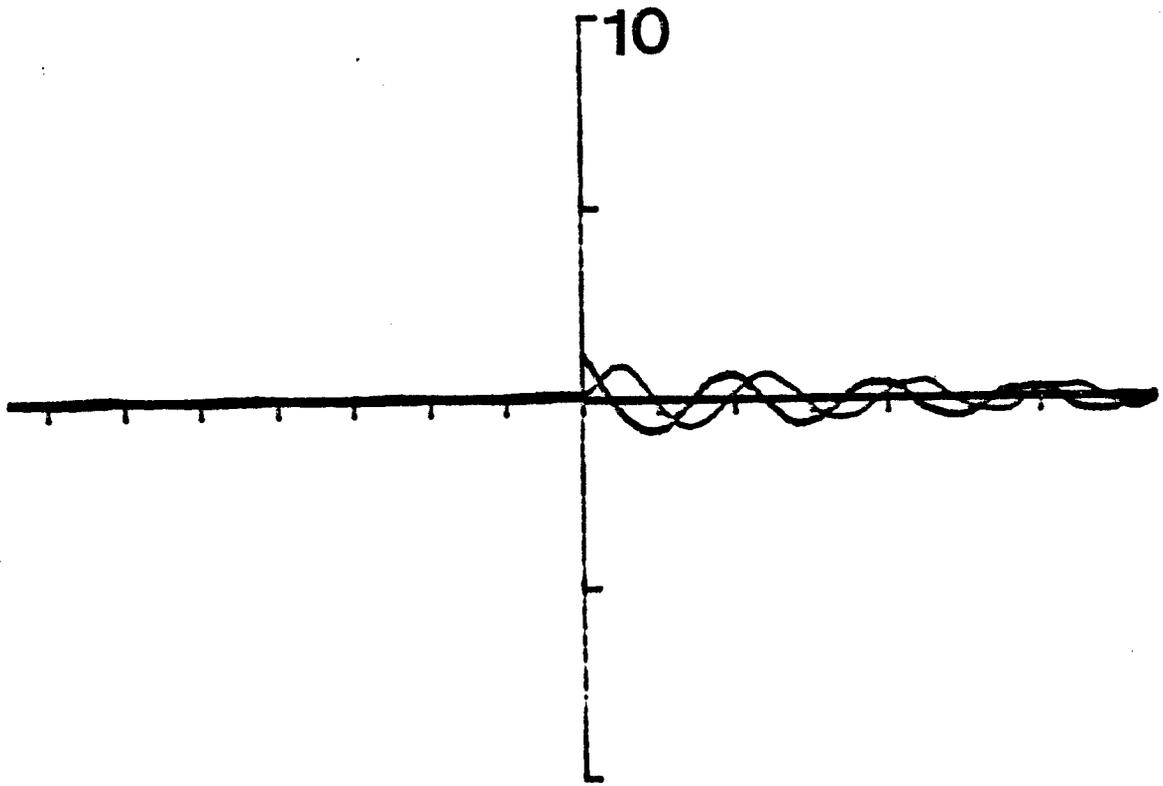
FREQUENCY 1.40



FREQUENCY 1.60

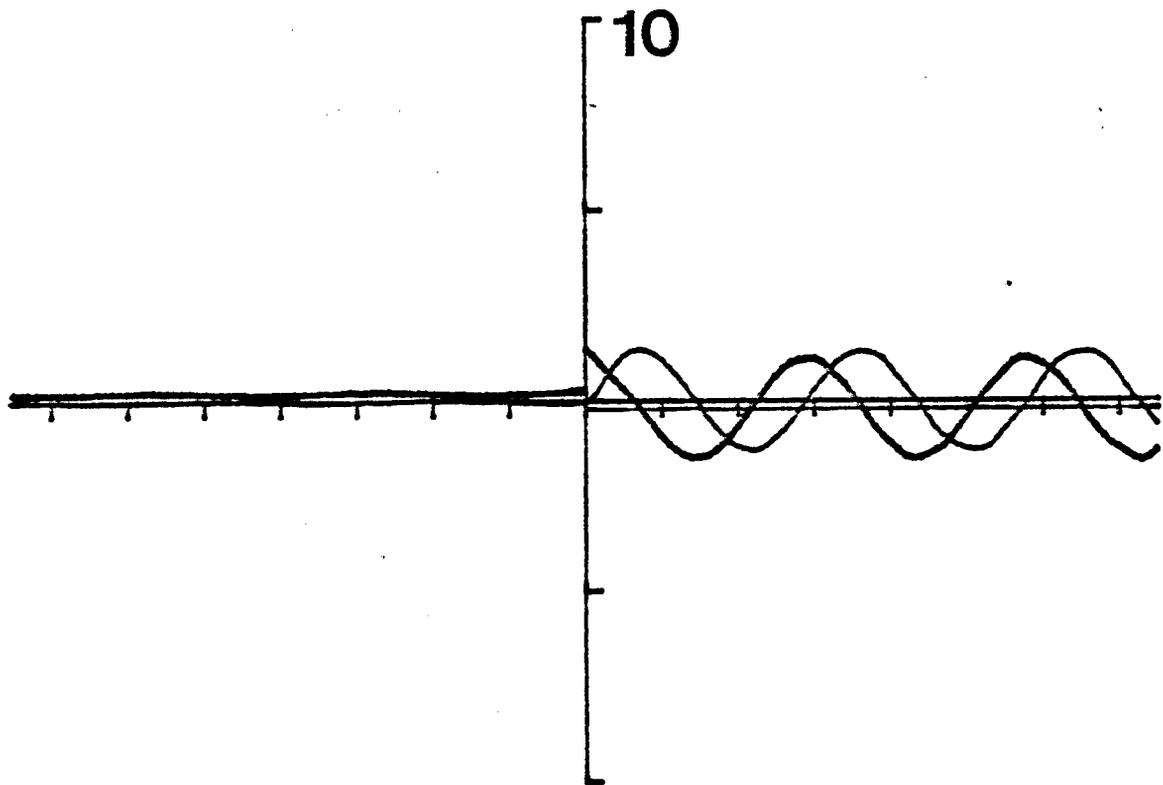


FREQUENCY 1.80



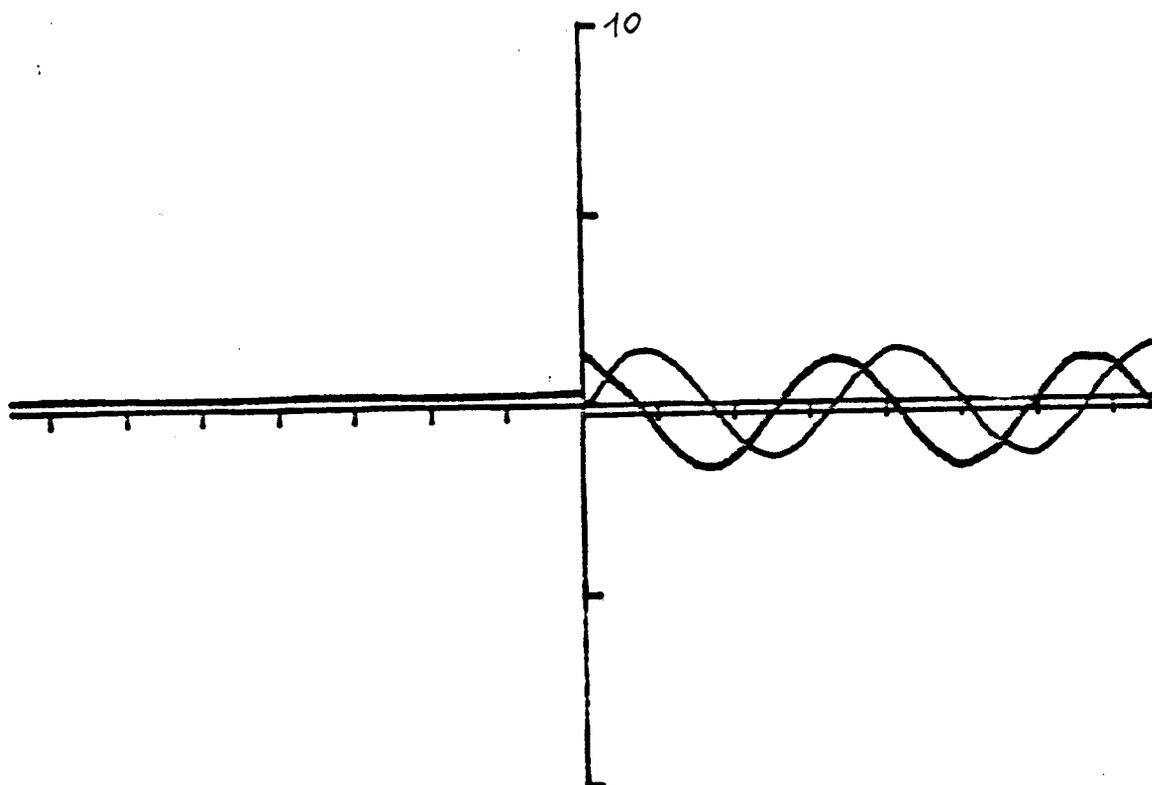
FREQUENCY 0.40

**A**

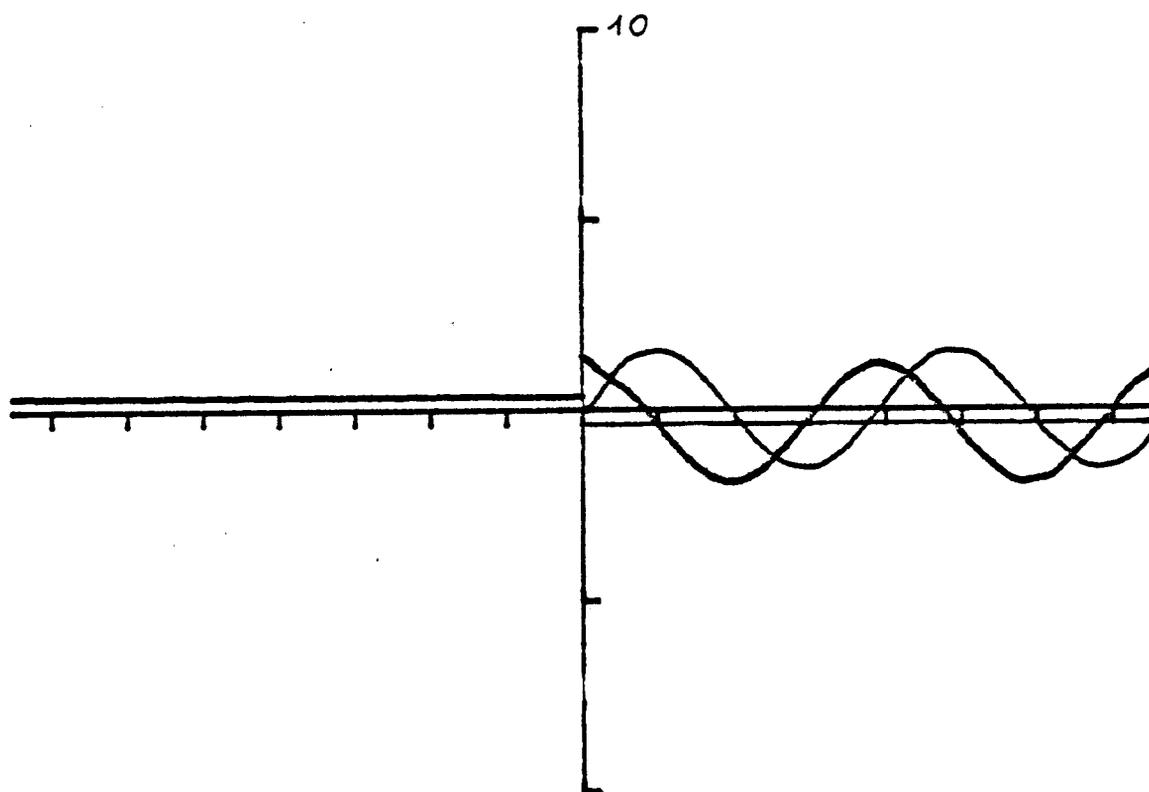


FREQUENCY 0.55

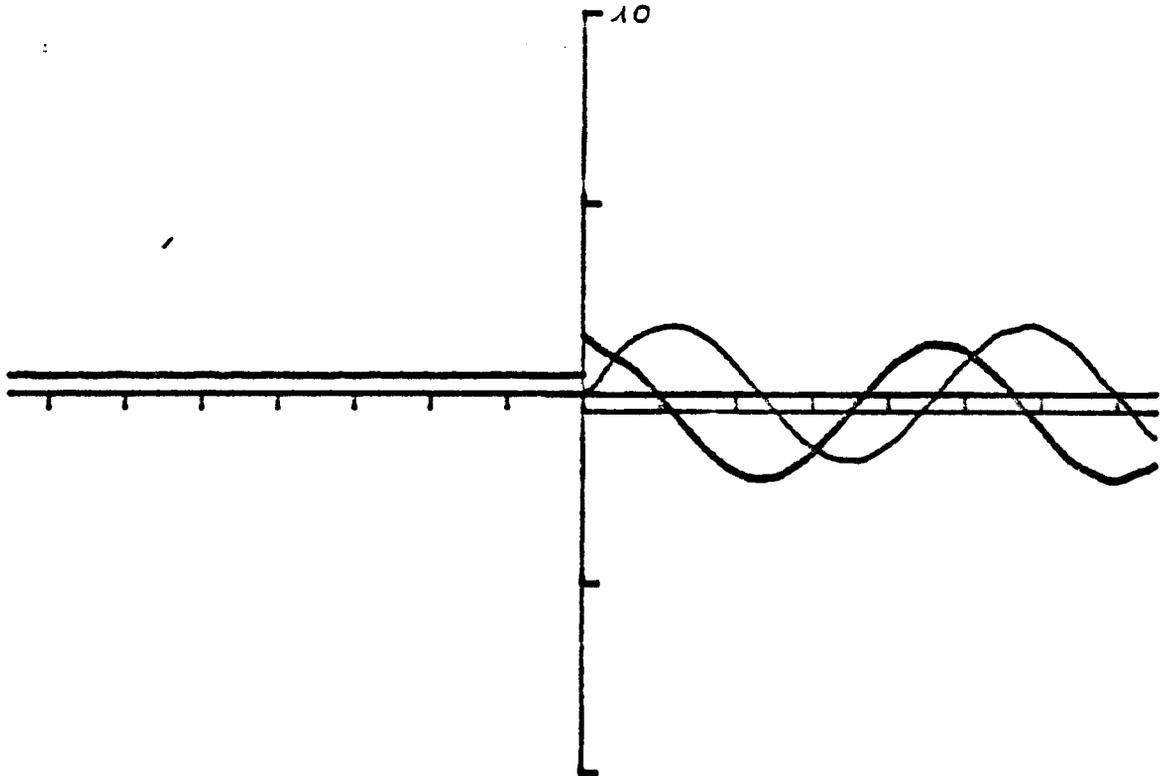
**B**



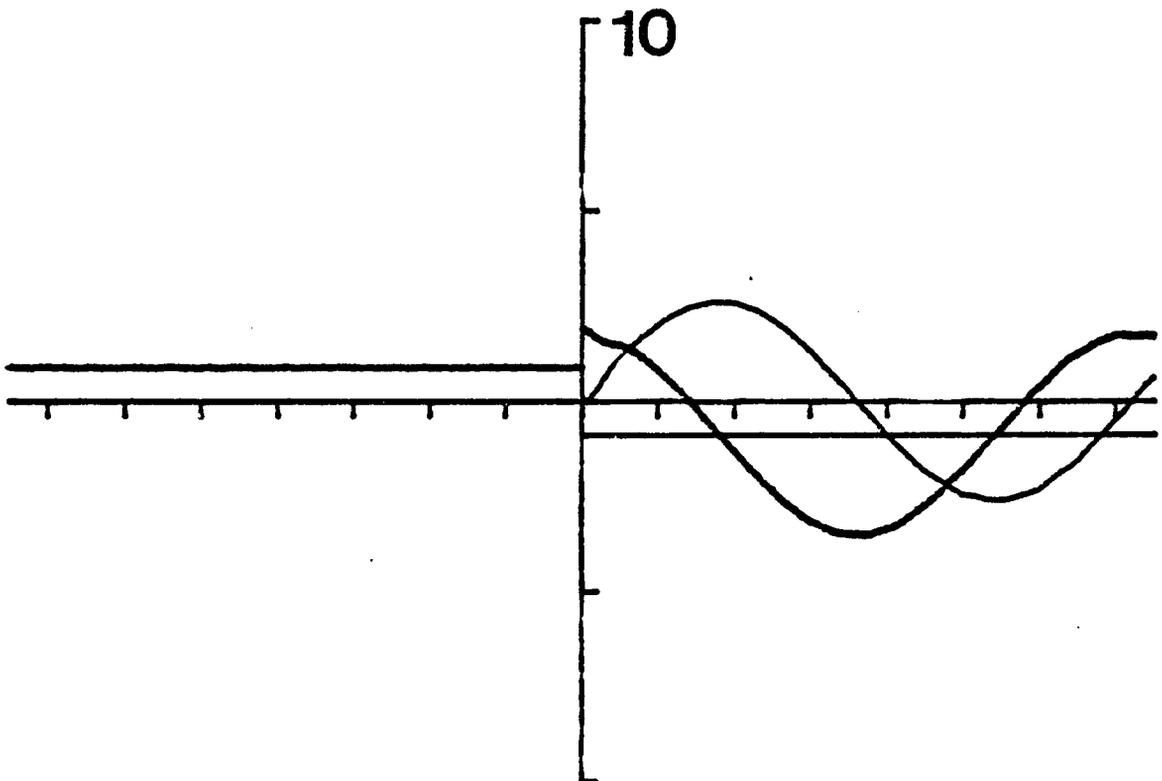
FREQUENCY 0.60



FREQUENCY 0.65

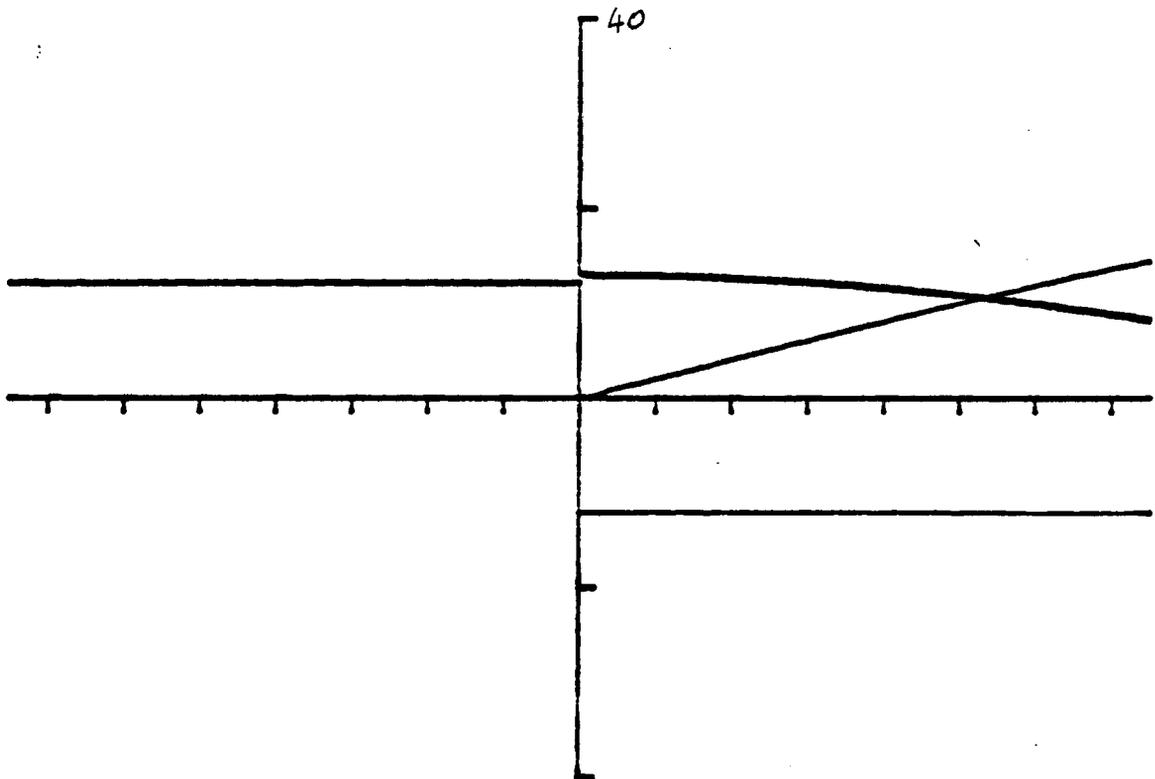


FREQUENCY 0.70

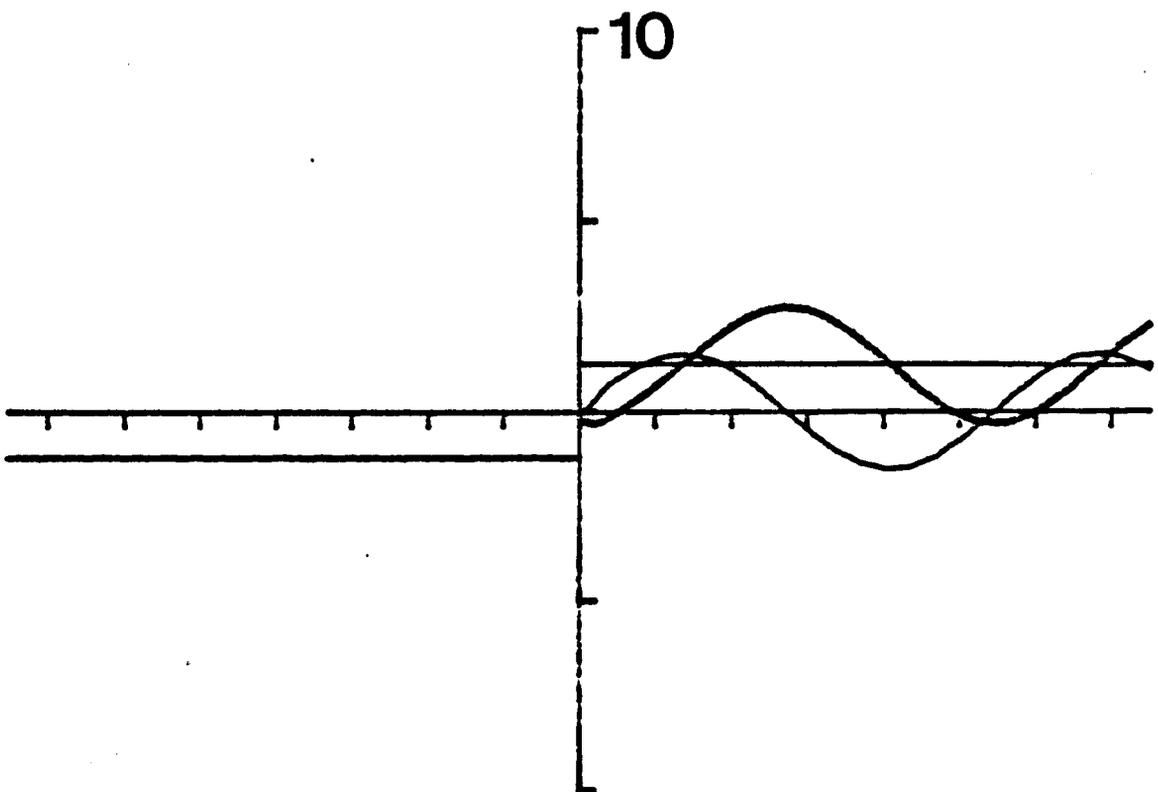


FREQUENCY 0.80

;

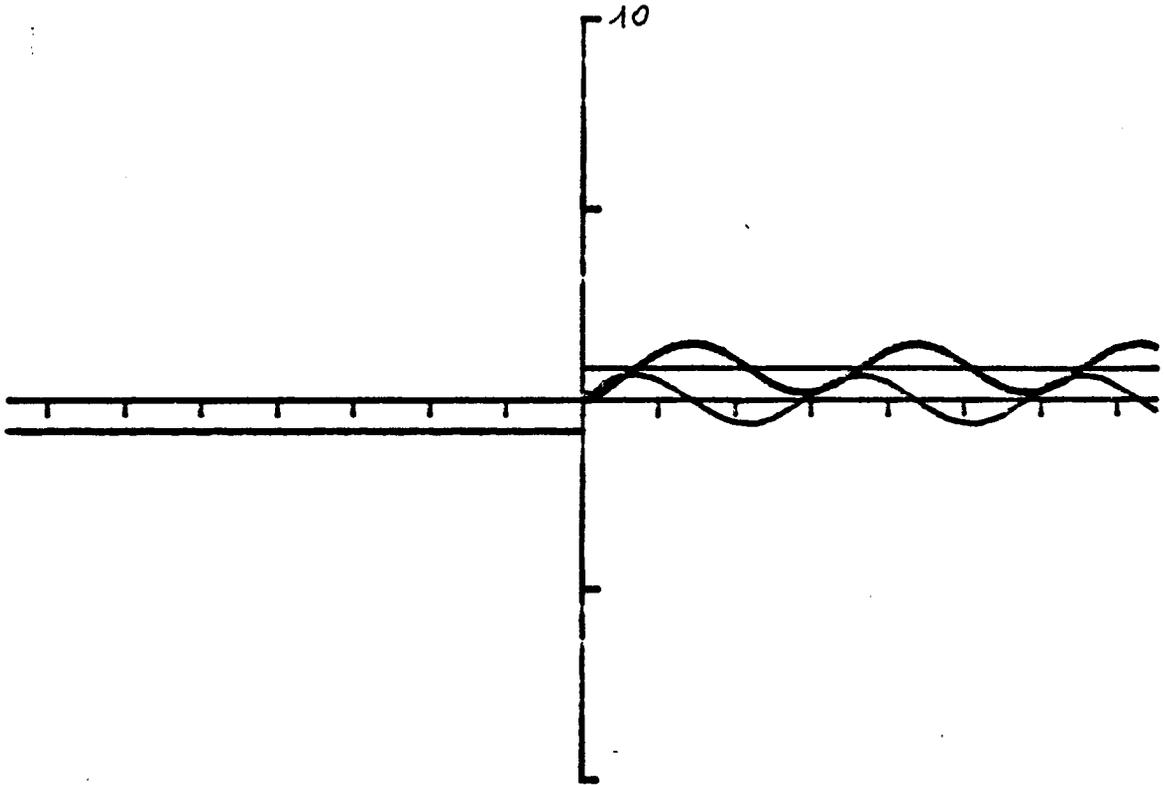


FREQUENCY 0.98

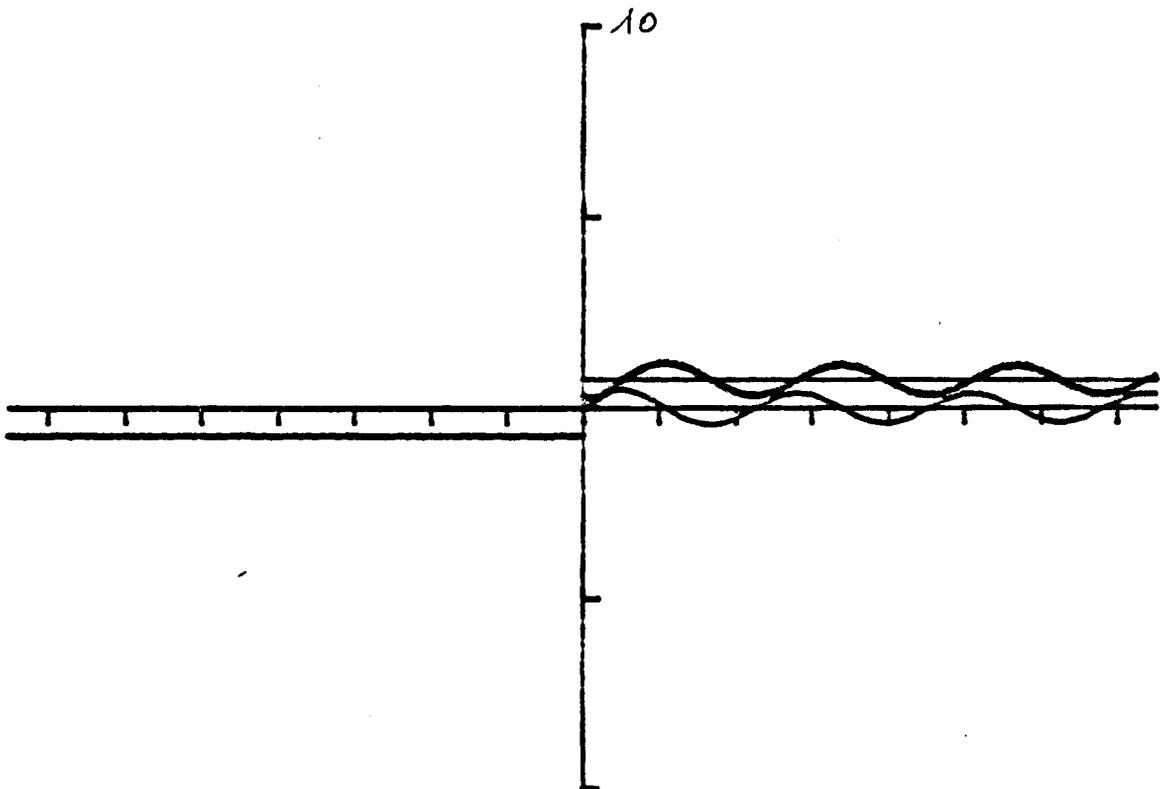


**D**

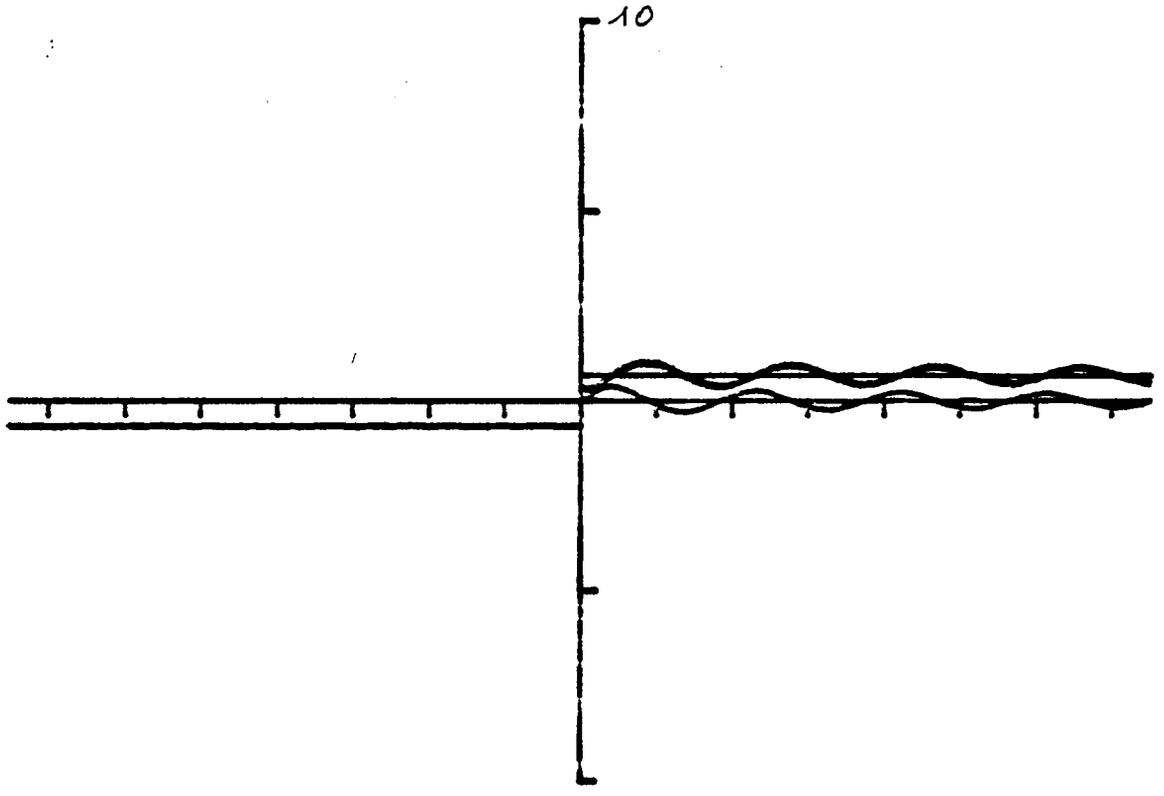
FREQUENCY 1.30



FREQUENCY 1.60

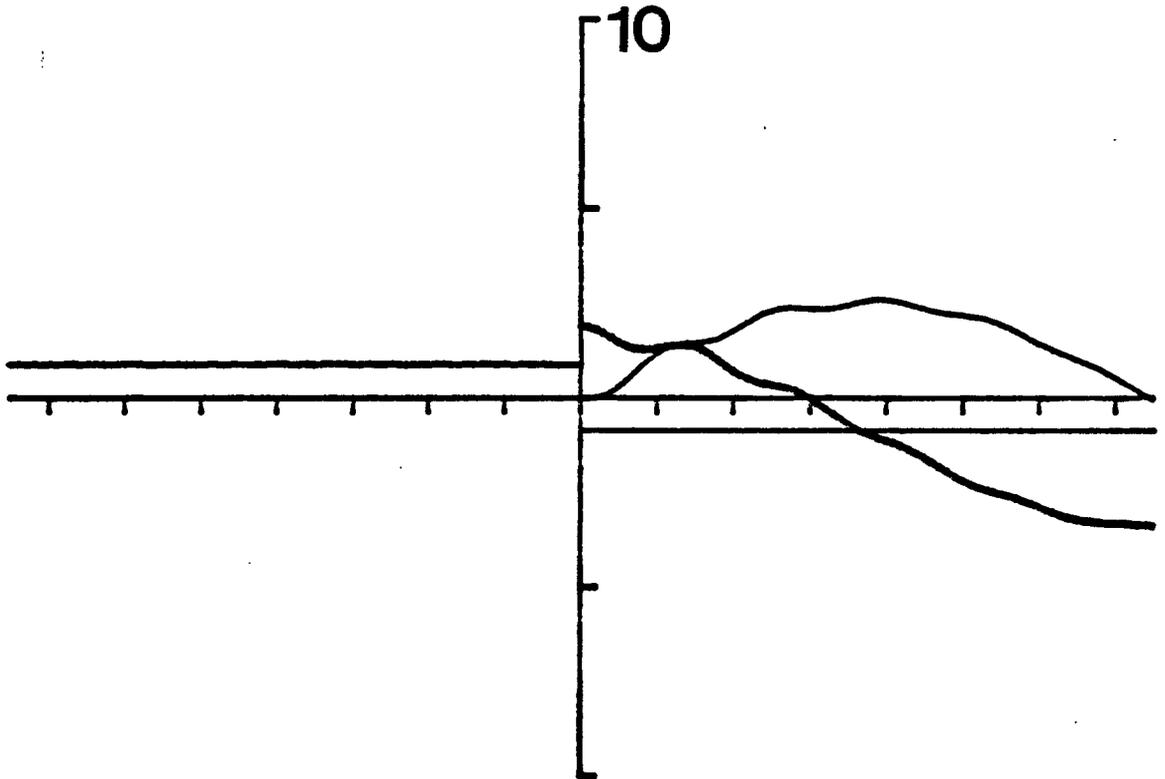


FREQUENCY 1.80



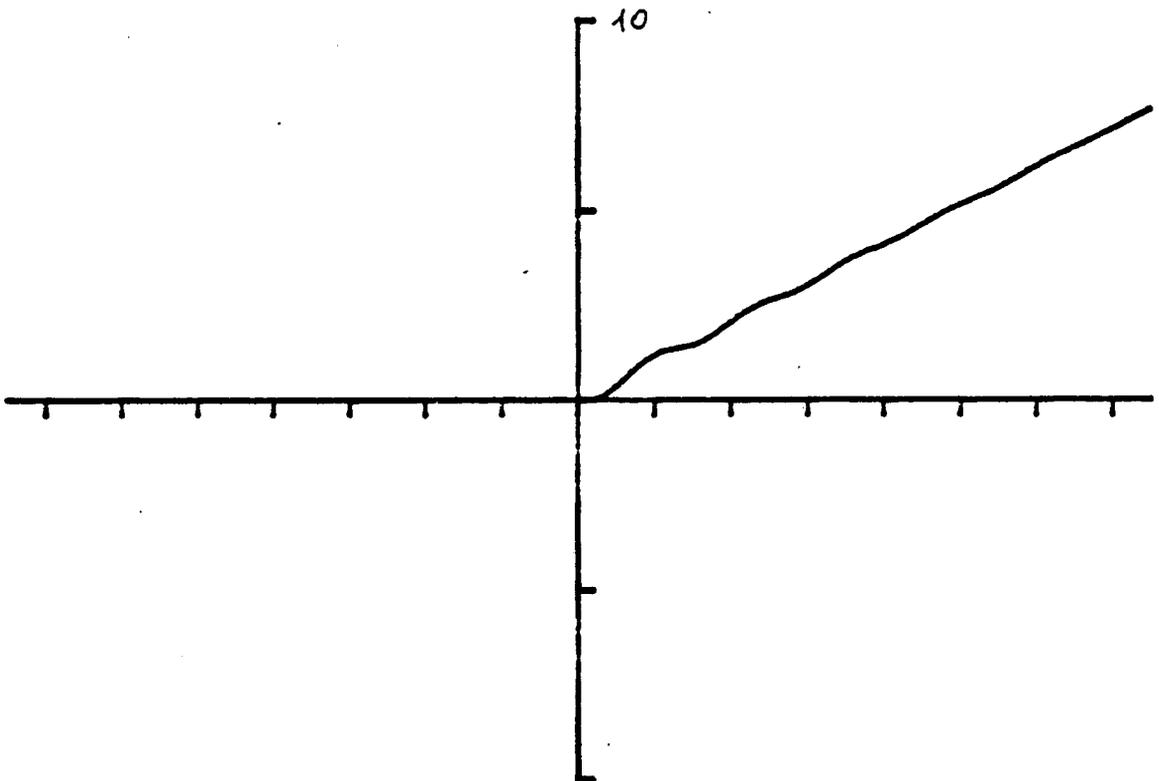
FREQUENCY 2.00



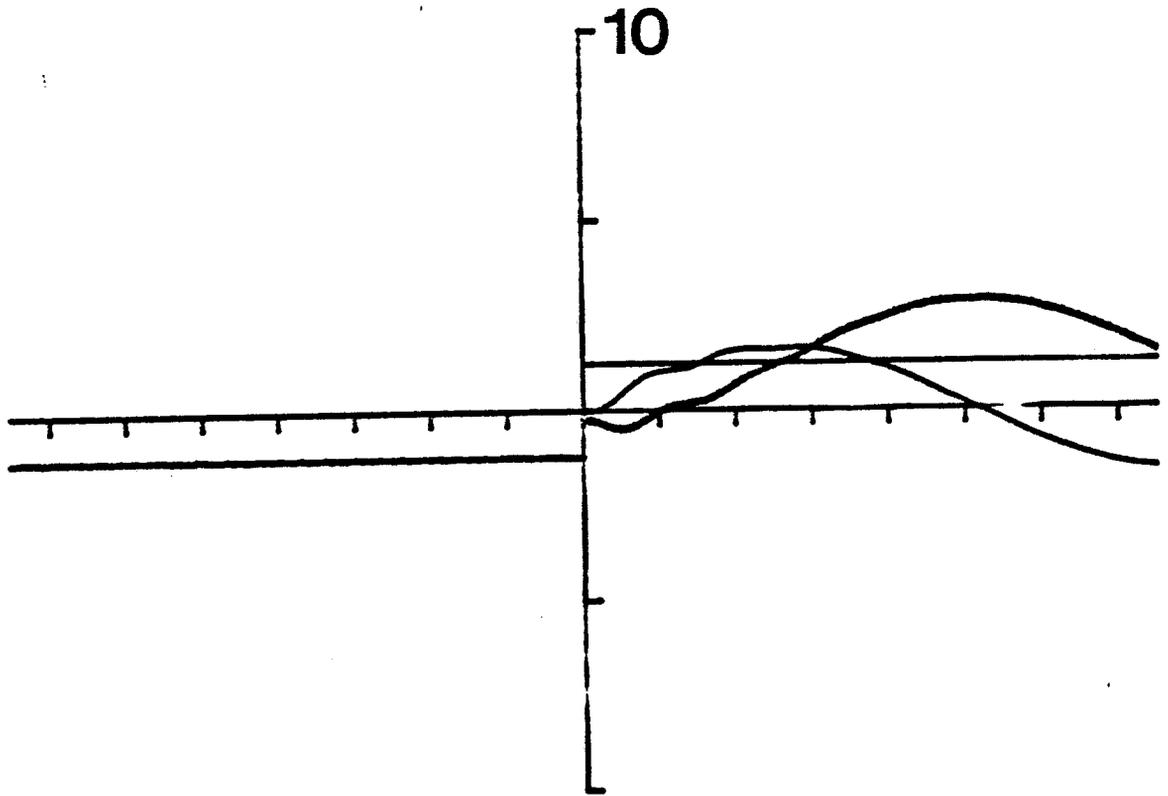


FREQUENCY 0.80

C

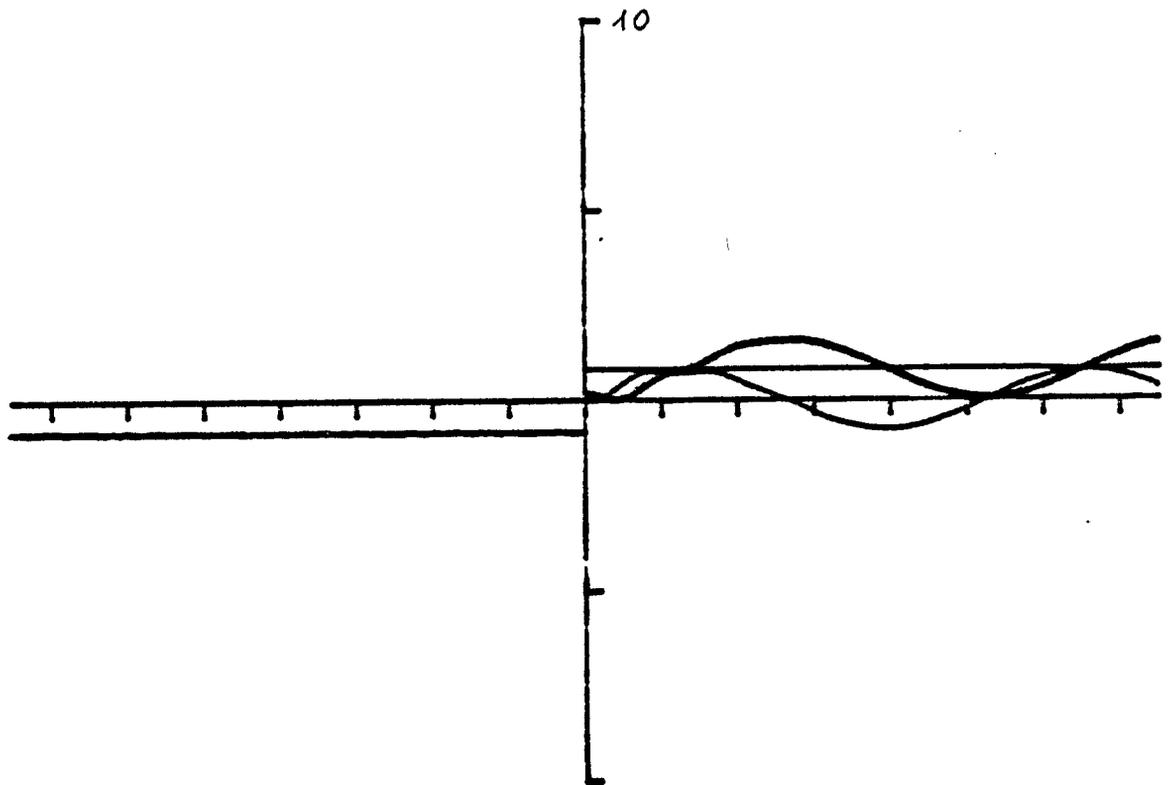


FREQUENCY 0.98

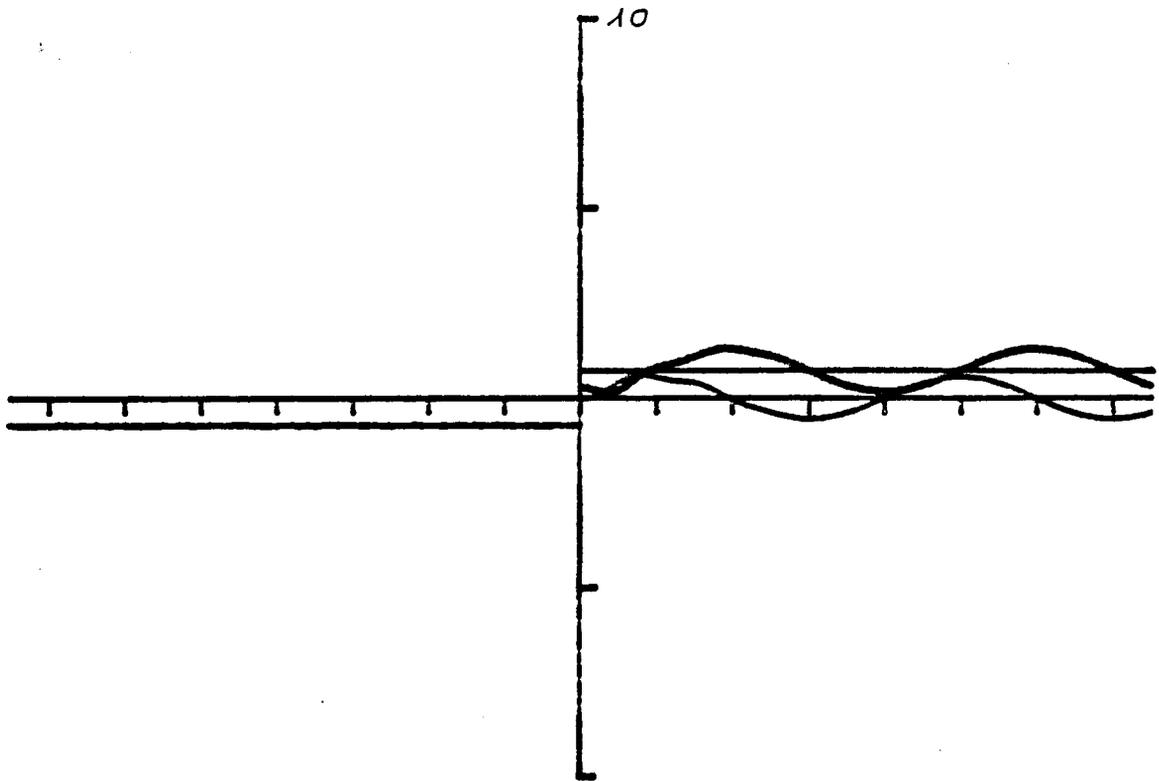


D

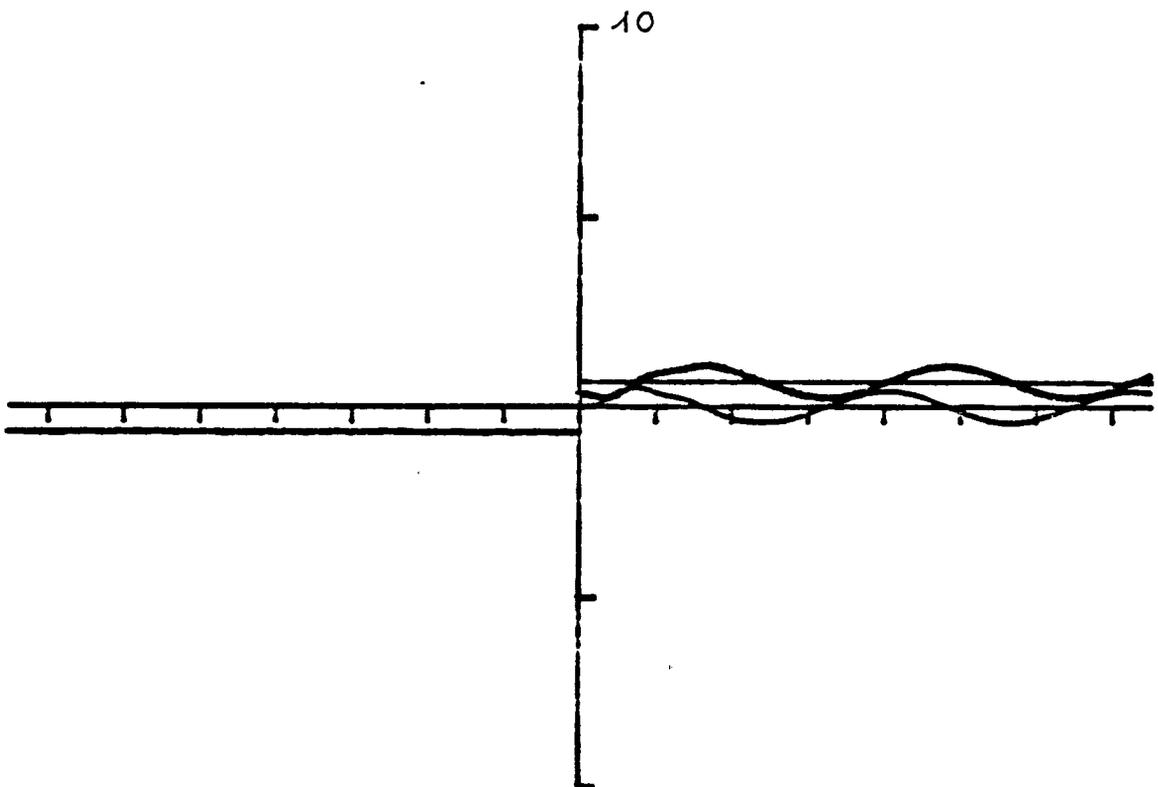
FREQUENCY 1.30



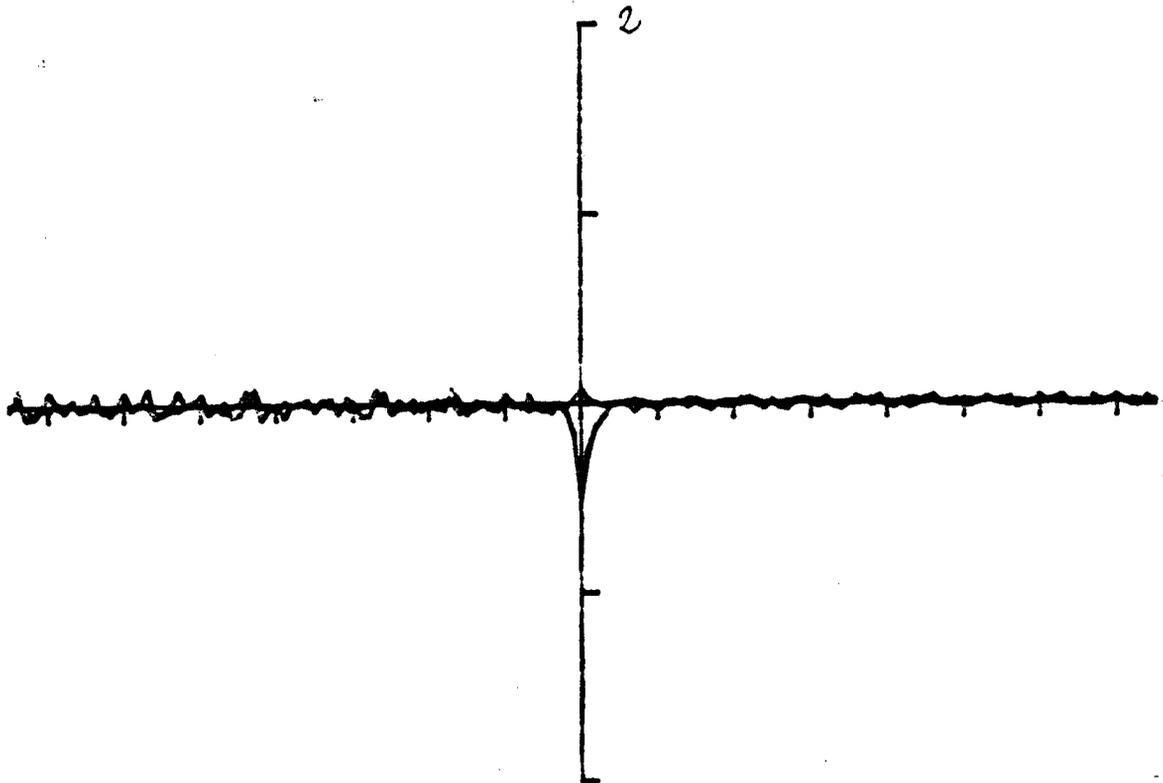
FREQUENCY 1.60



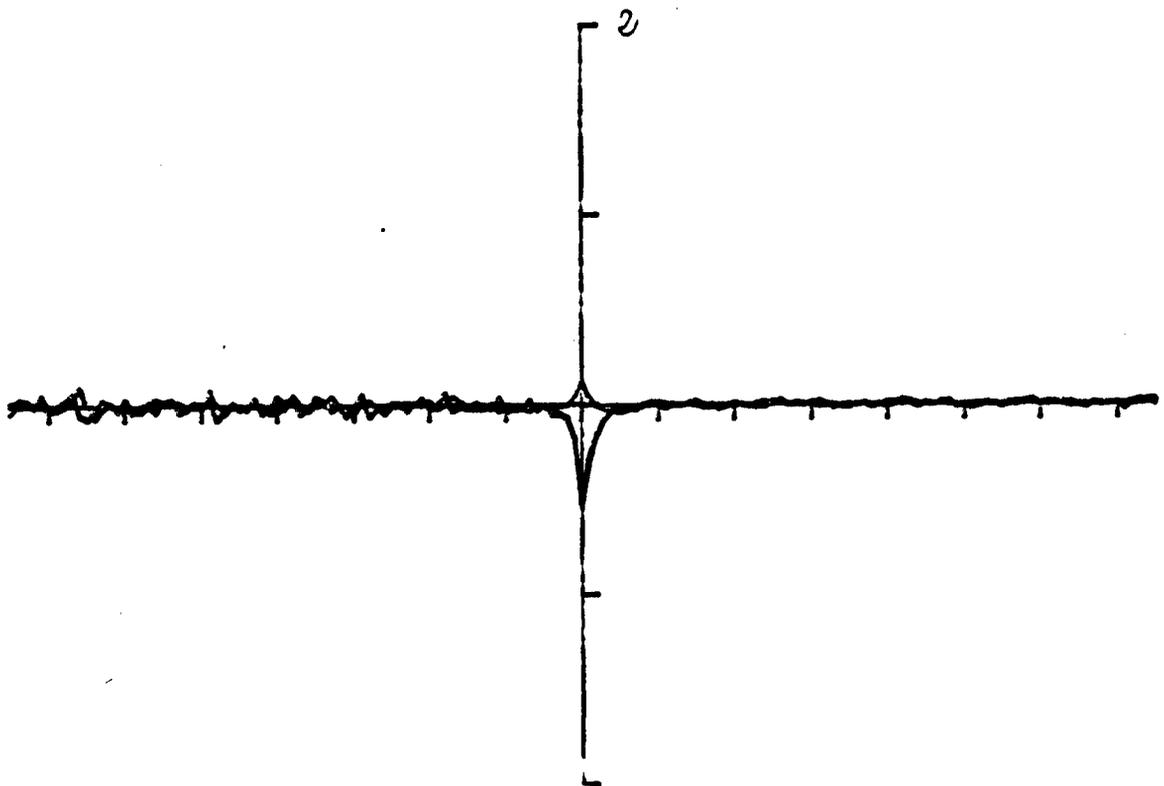
FREQUENCY 1.80



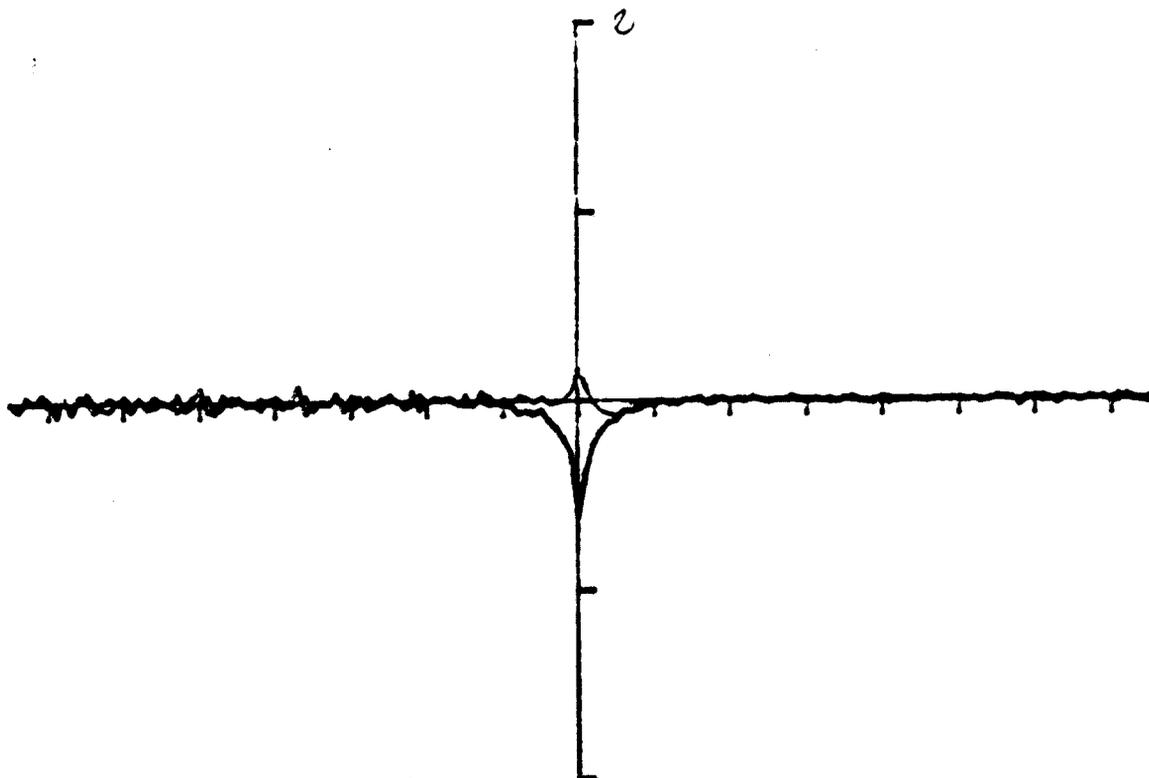
FREQUENCY 2.00



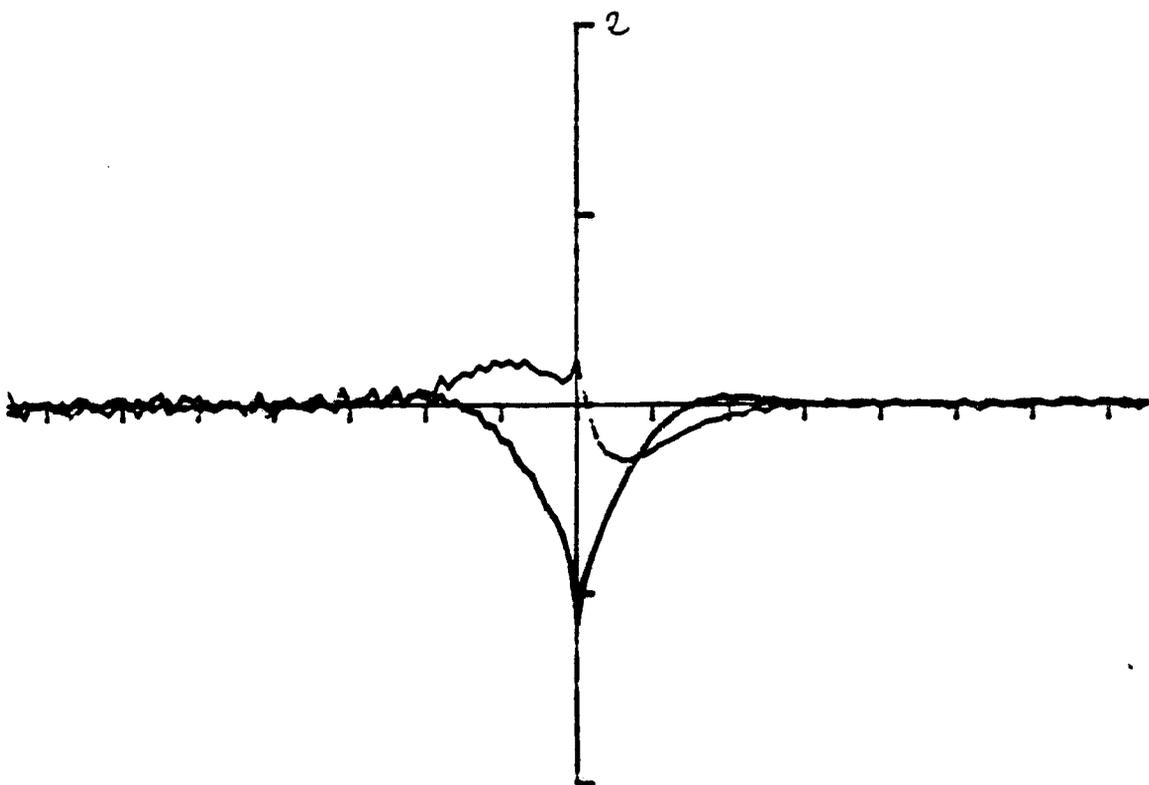
FREQUENCY 0.40



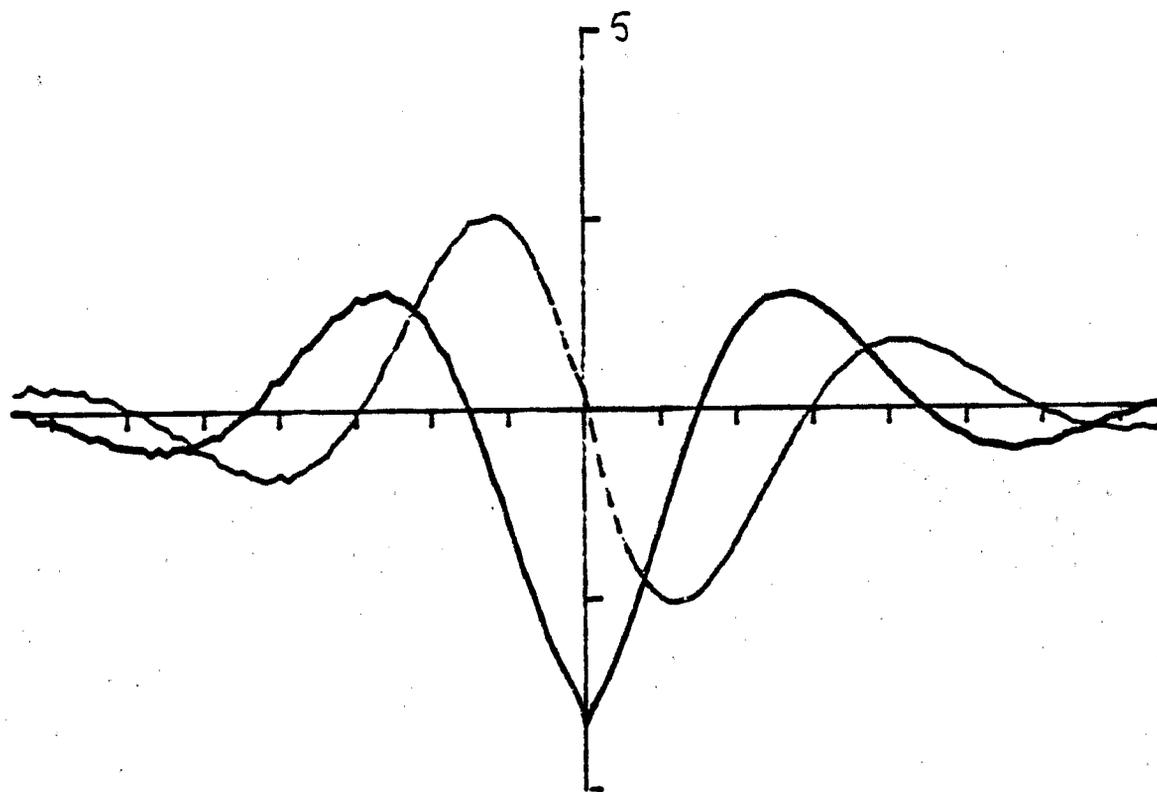
FREQUENCY 0.60



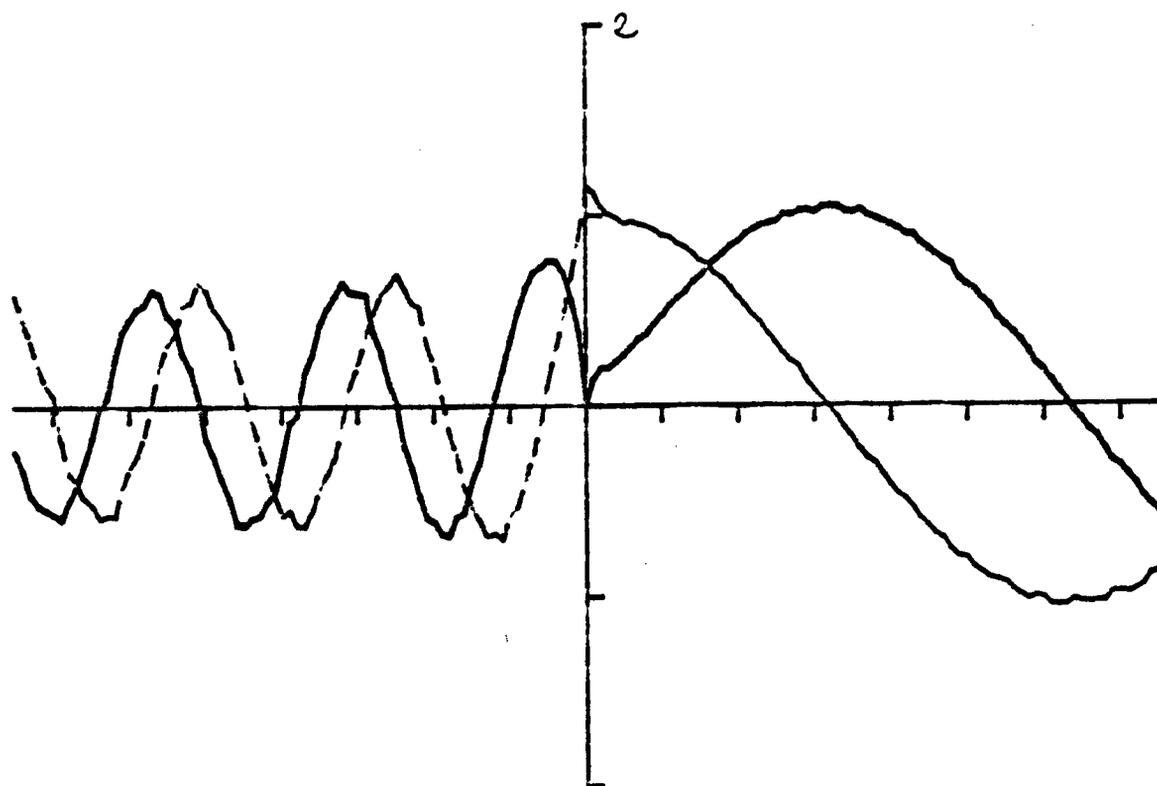
FREQUENCY 0.80



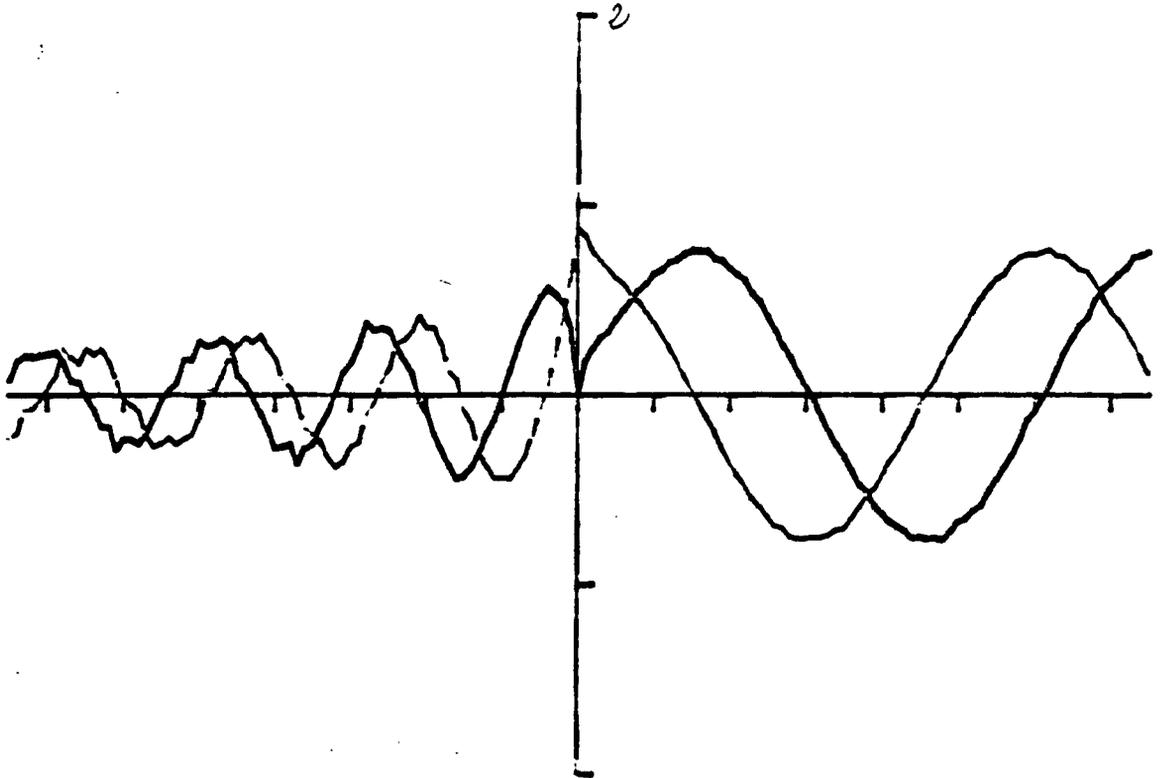
FREQUENCY 0.95



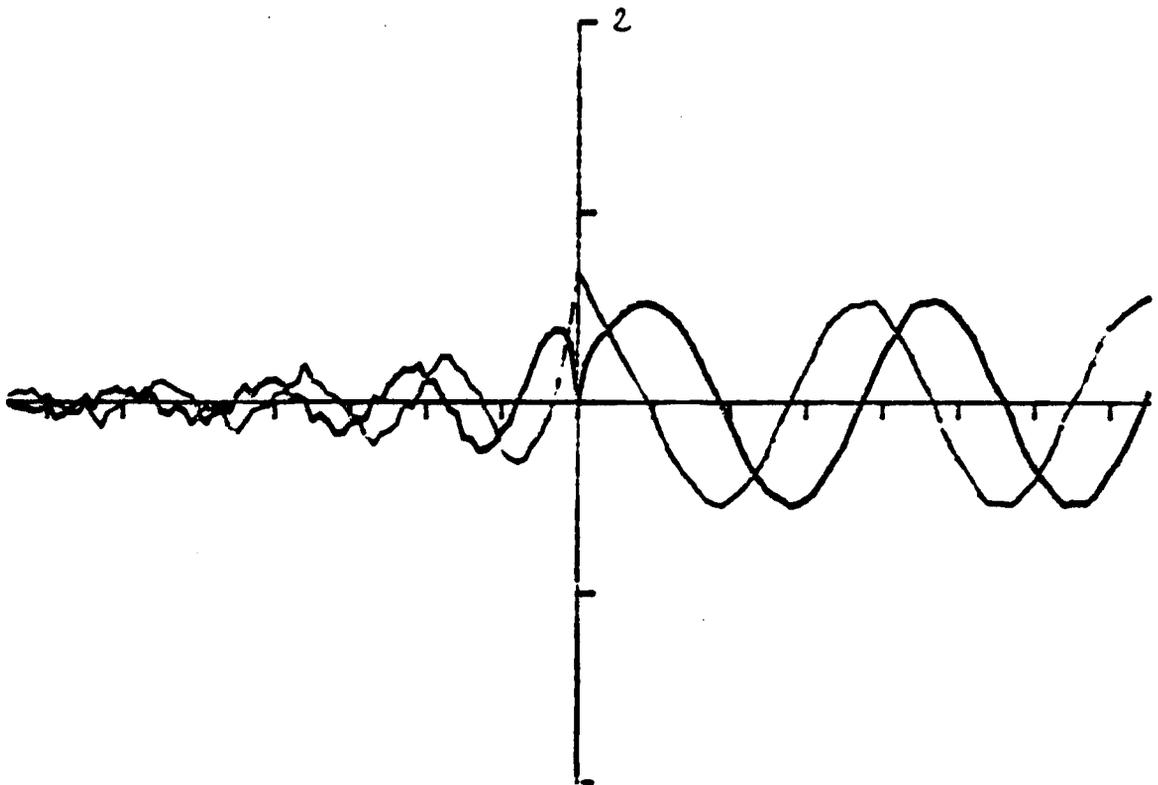
FREQUENCY 0.98



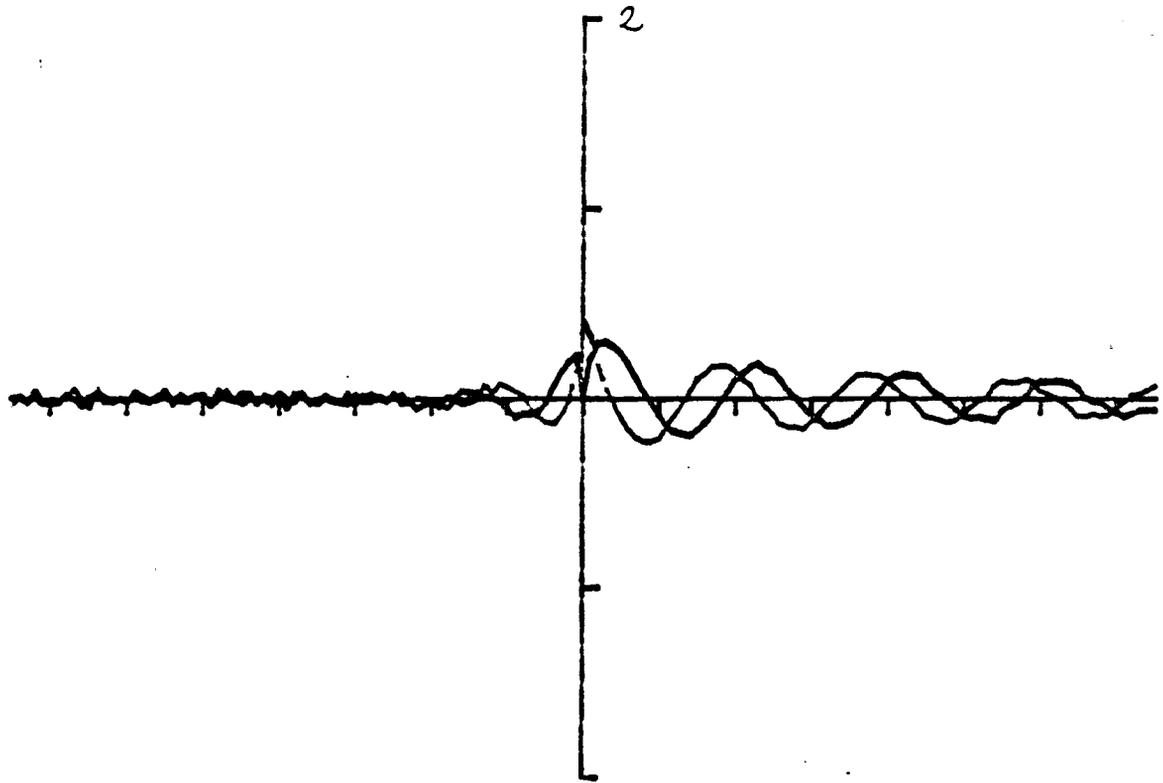
FREQUENCY 1.02



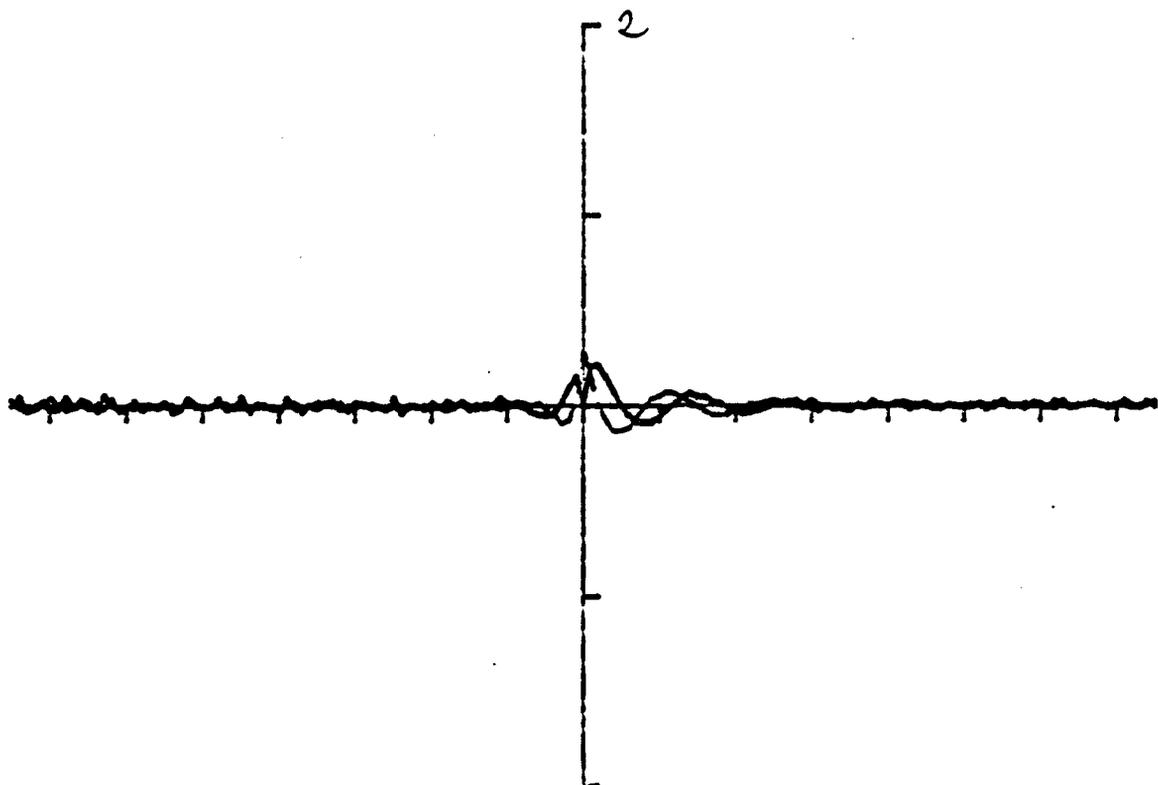
FREQUENCY 1.05



FREQUENCY 1.10



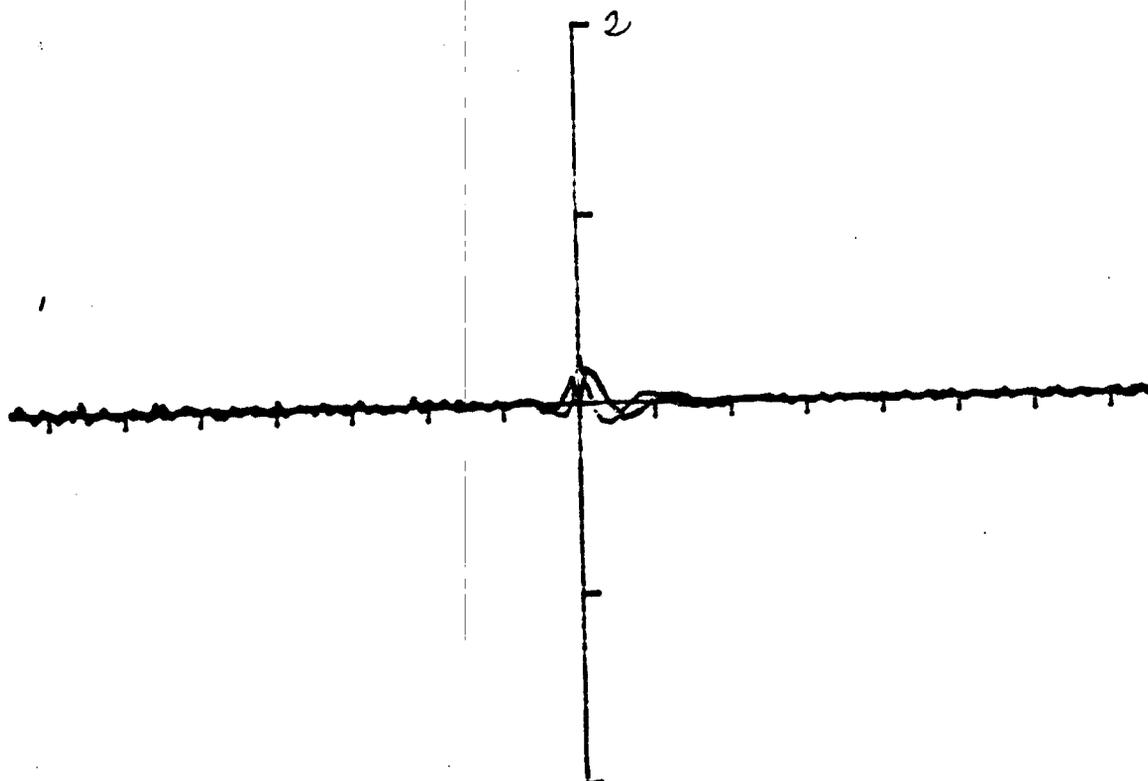
FREQUENCY 1.30



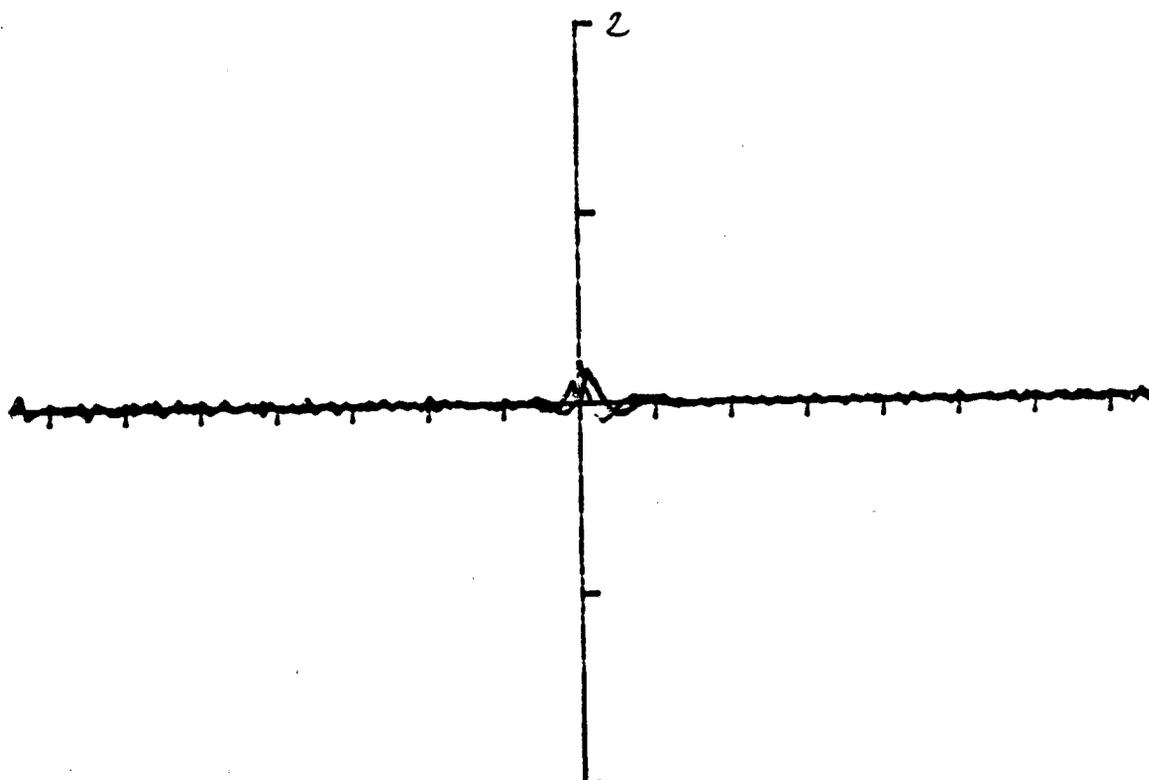
FREQUENCY 1.60

DERIVE 0.33

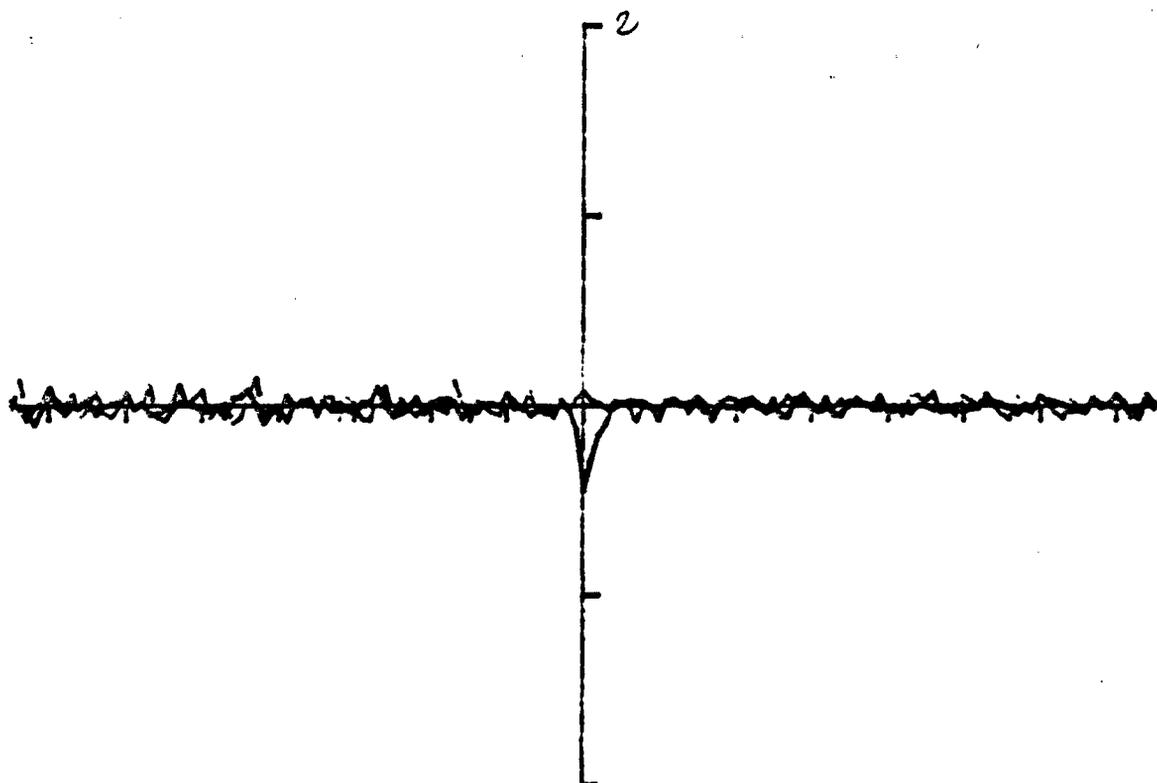
-186-



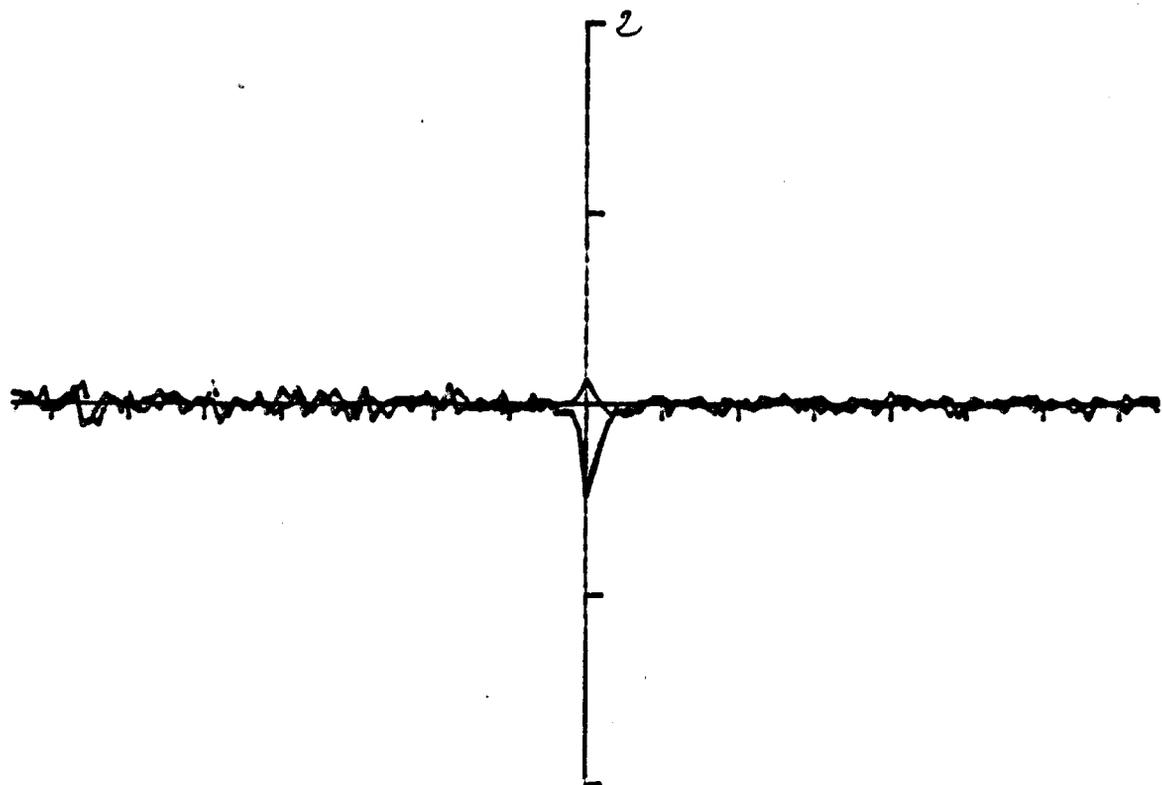
FREQUENCY 1.80



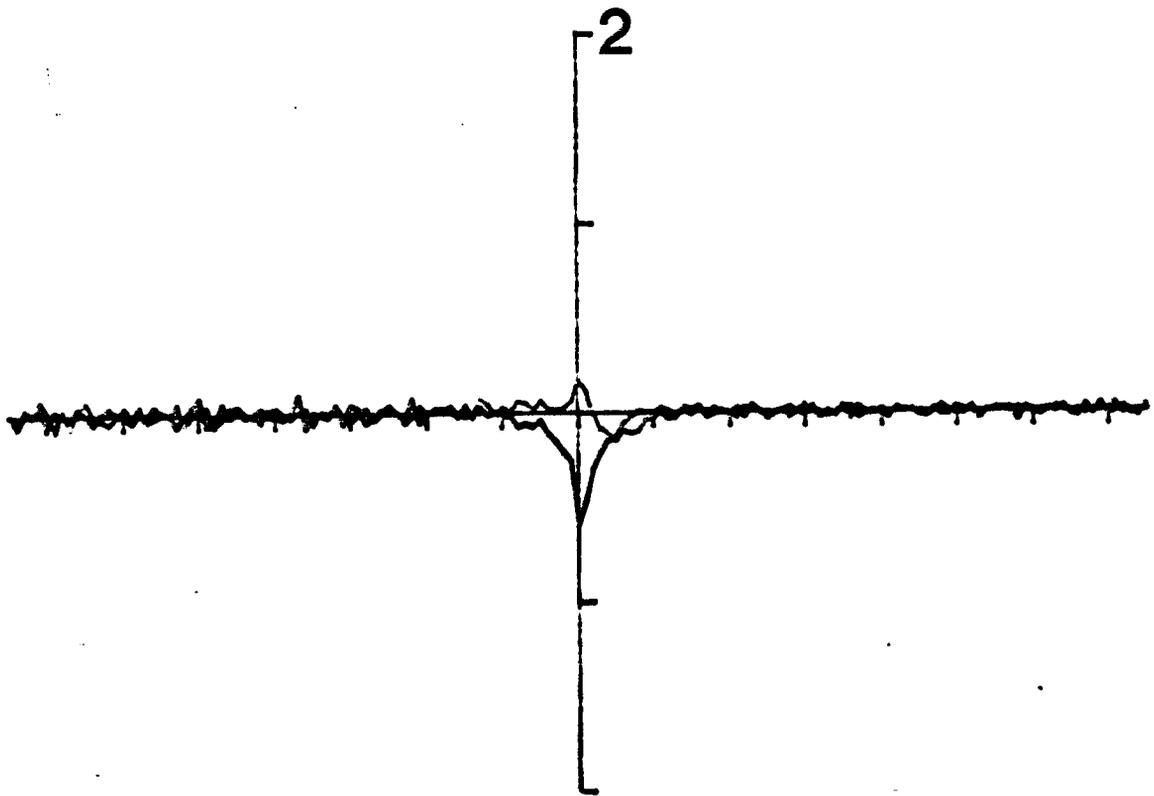
FREQUENCY 2.00



FREQUENCY 0.40

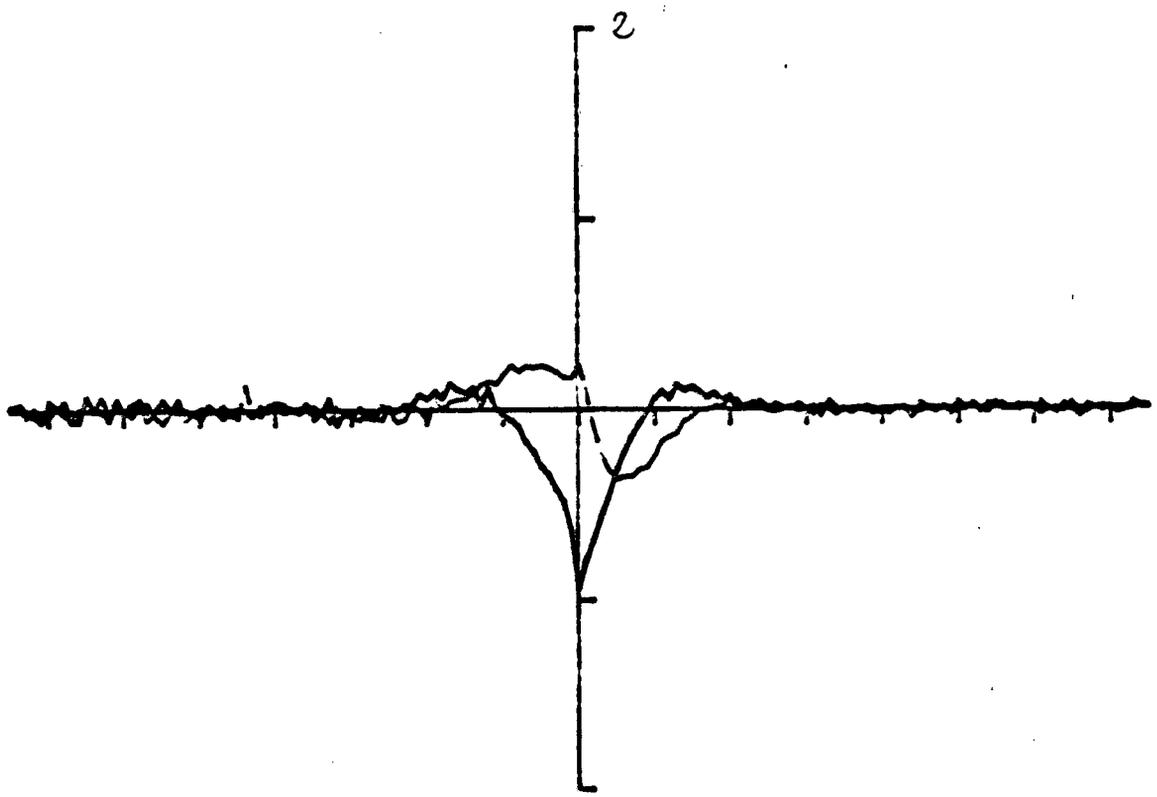


FREQUENCY 0.60

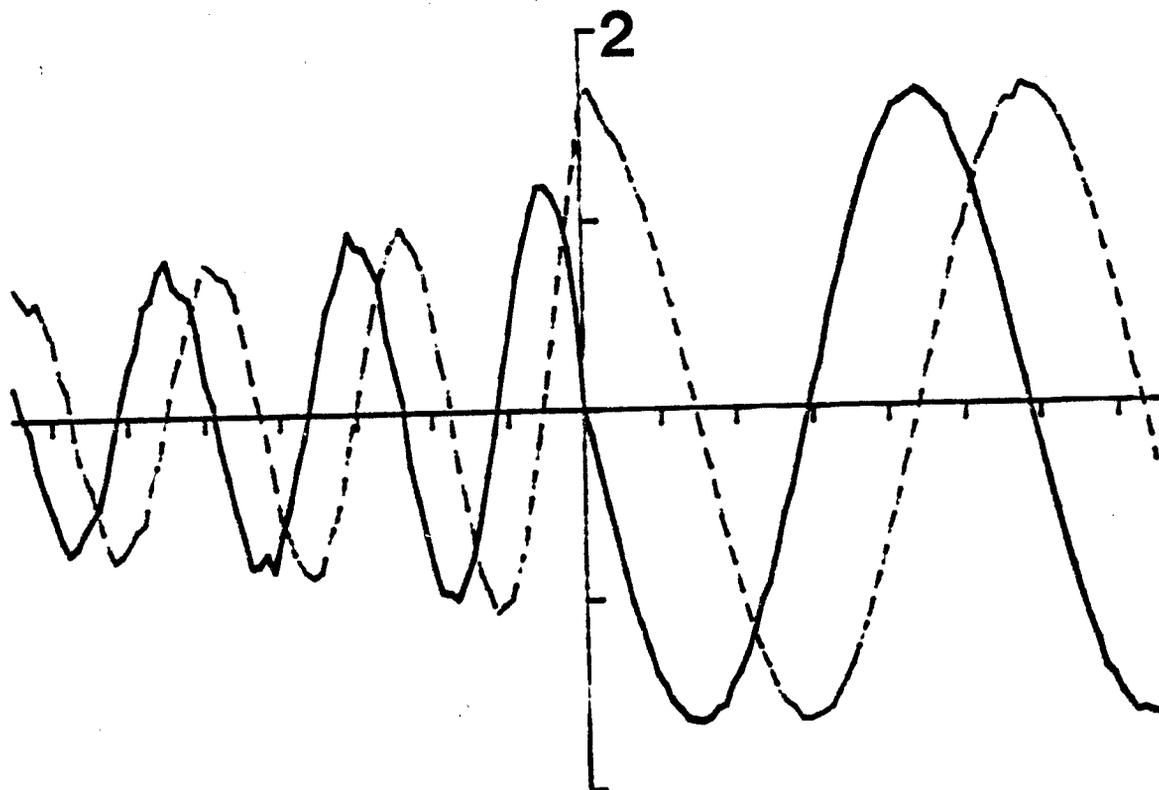


FREQUENCY 0.80

A'

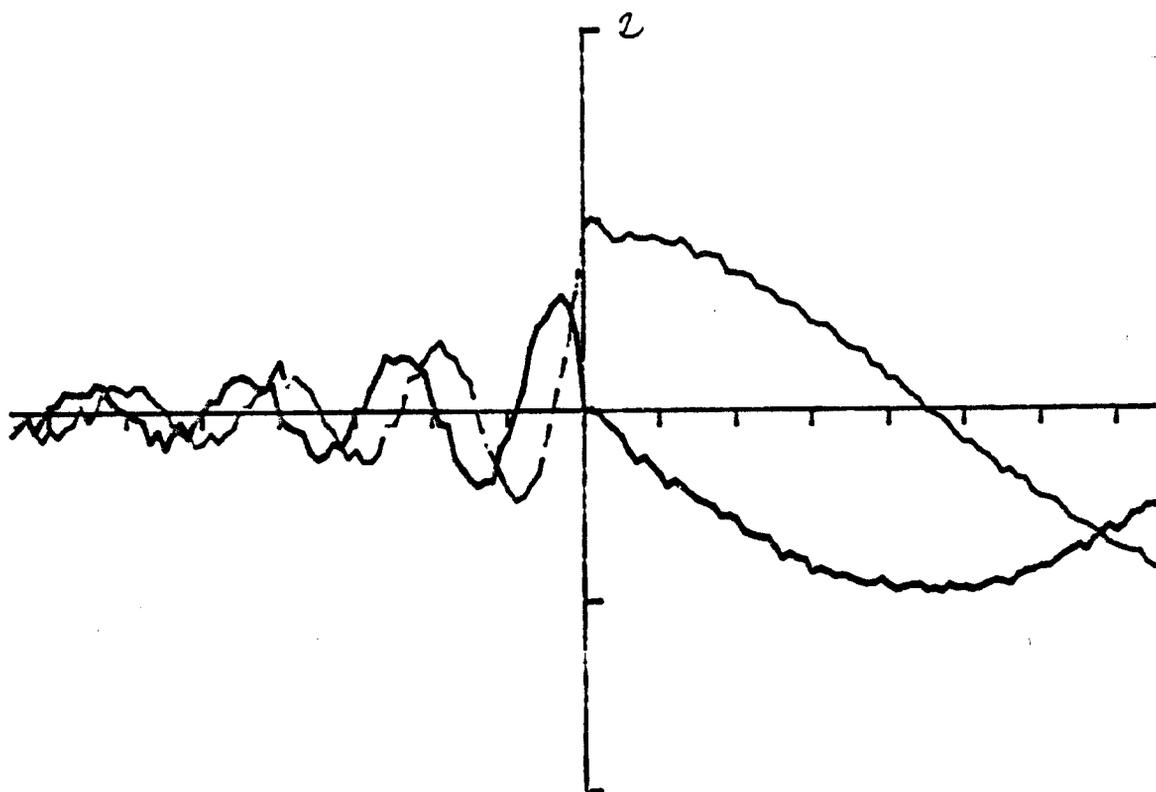


FREQUENCY 0.90

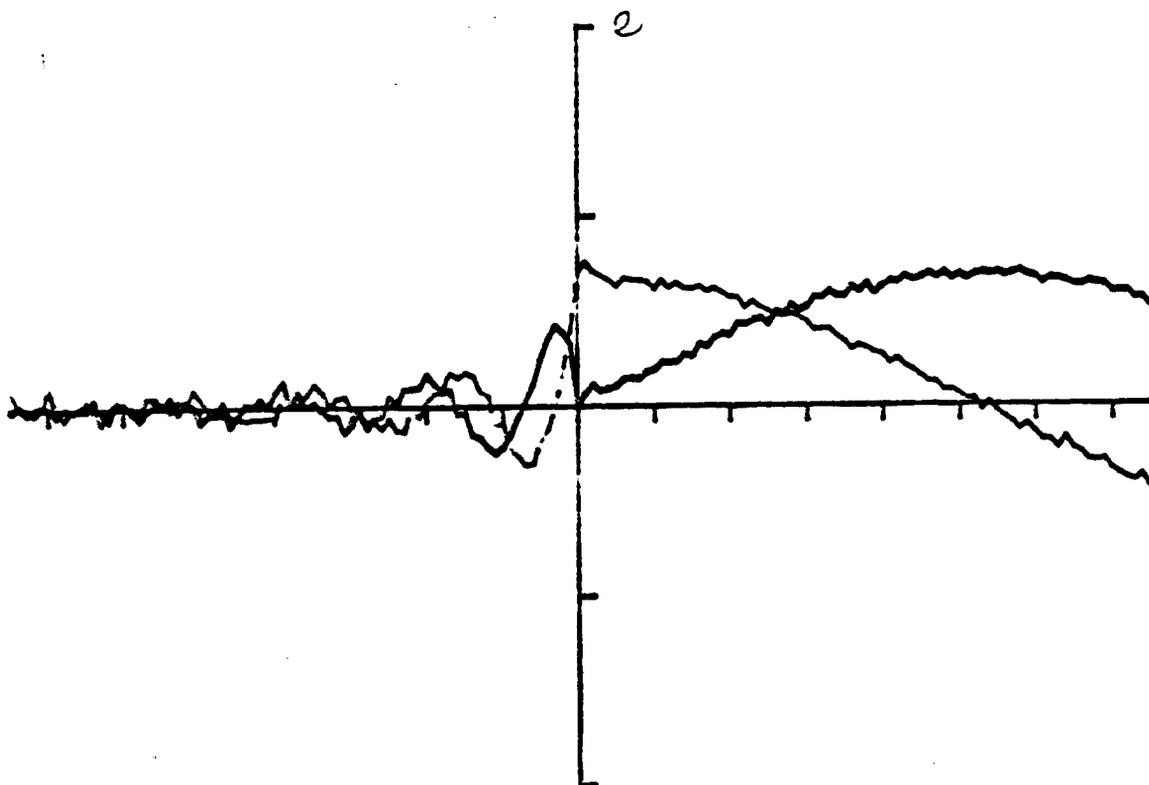


FREQUENCY 0.95

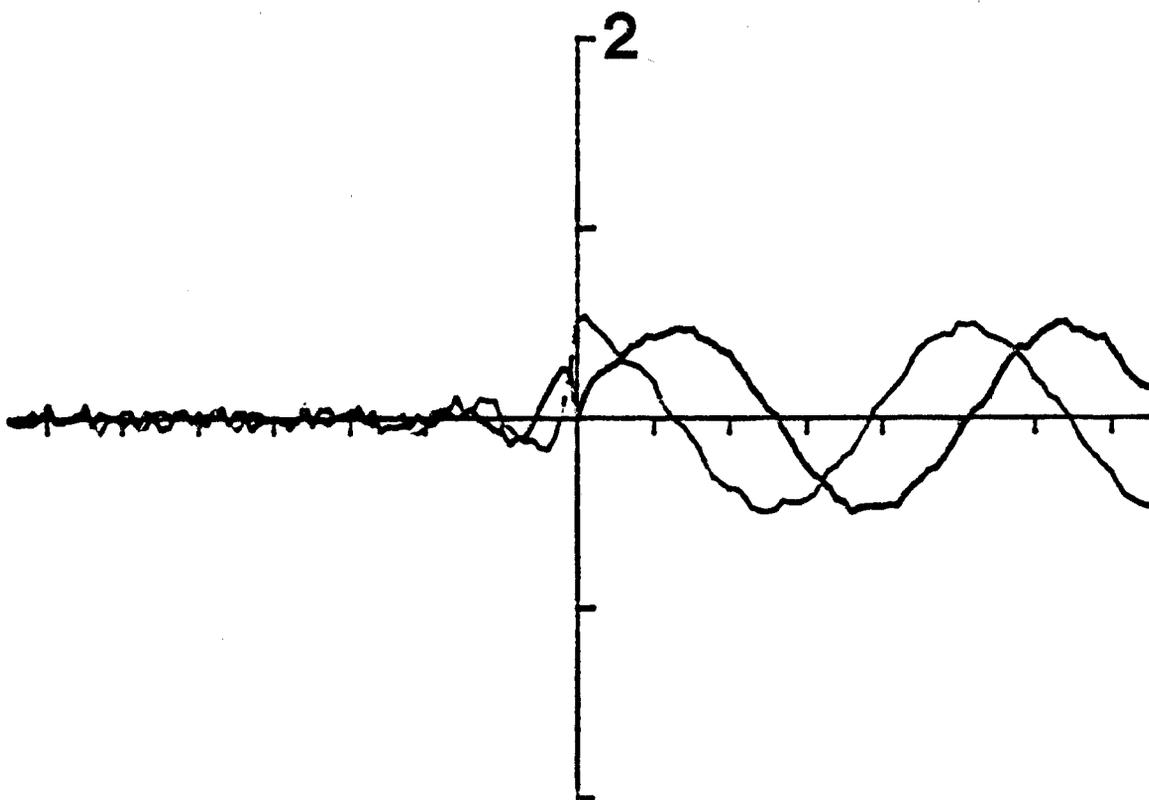
B'



FREQUENCY 0.98

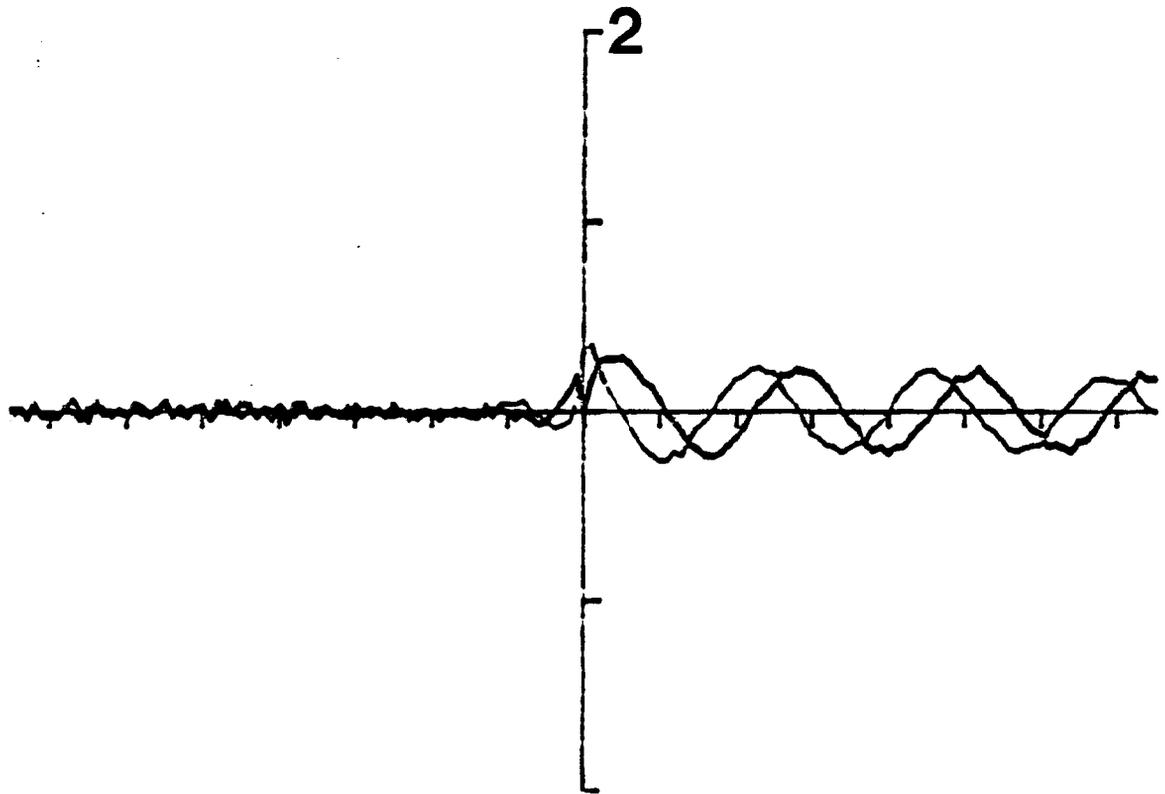


FREQUENCY 1.02



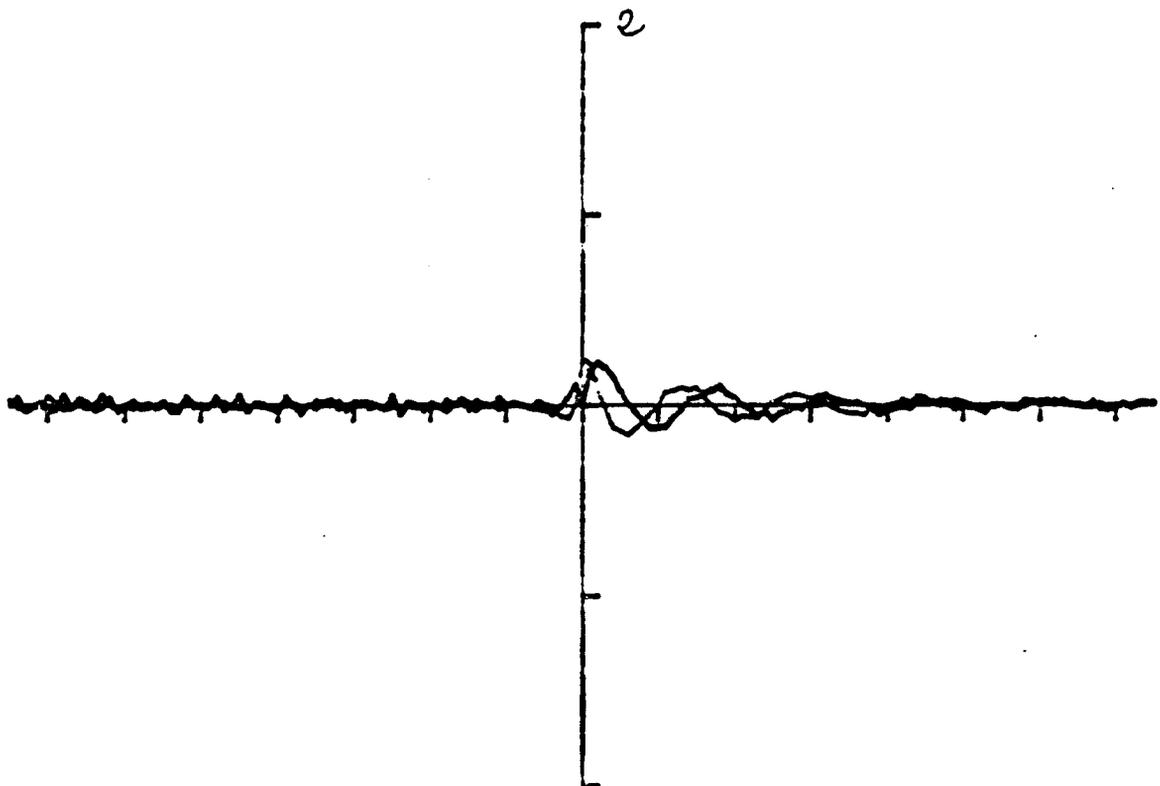
FREQUENCY 1.10

C'

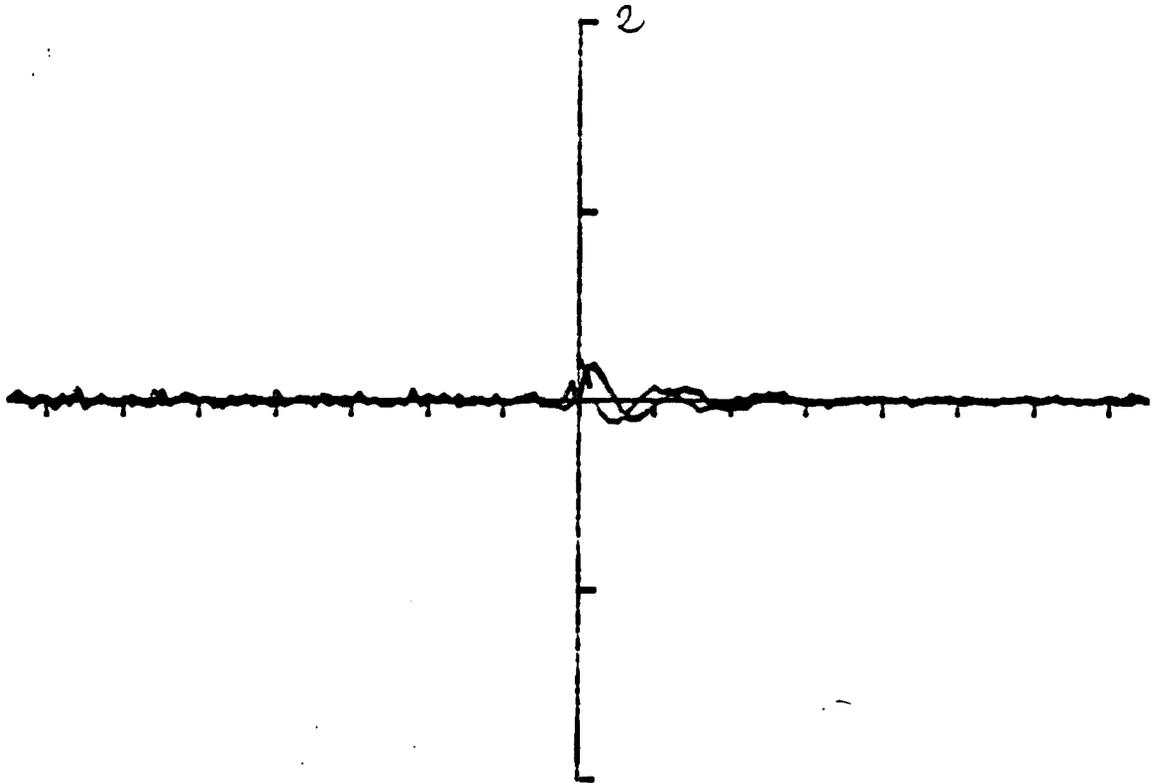


FREQUENCY 1.30

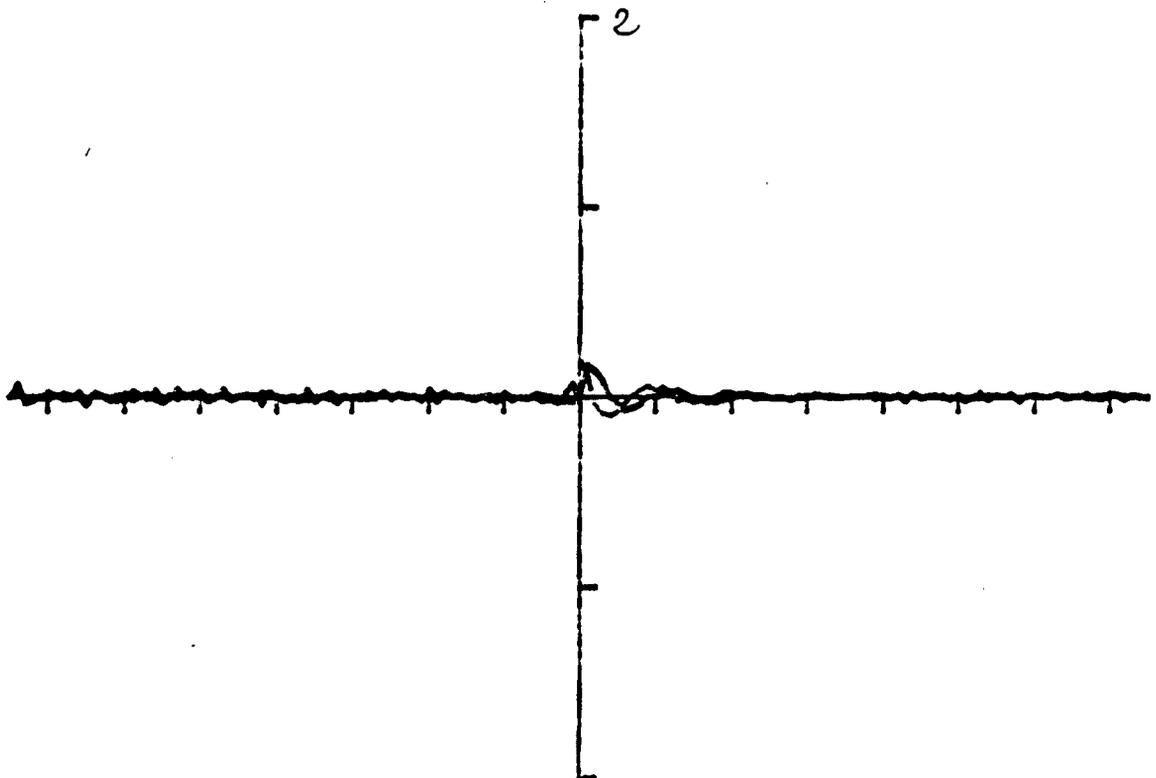
D'



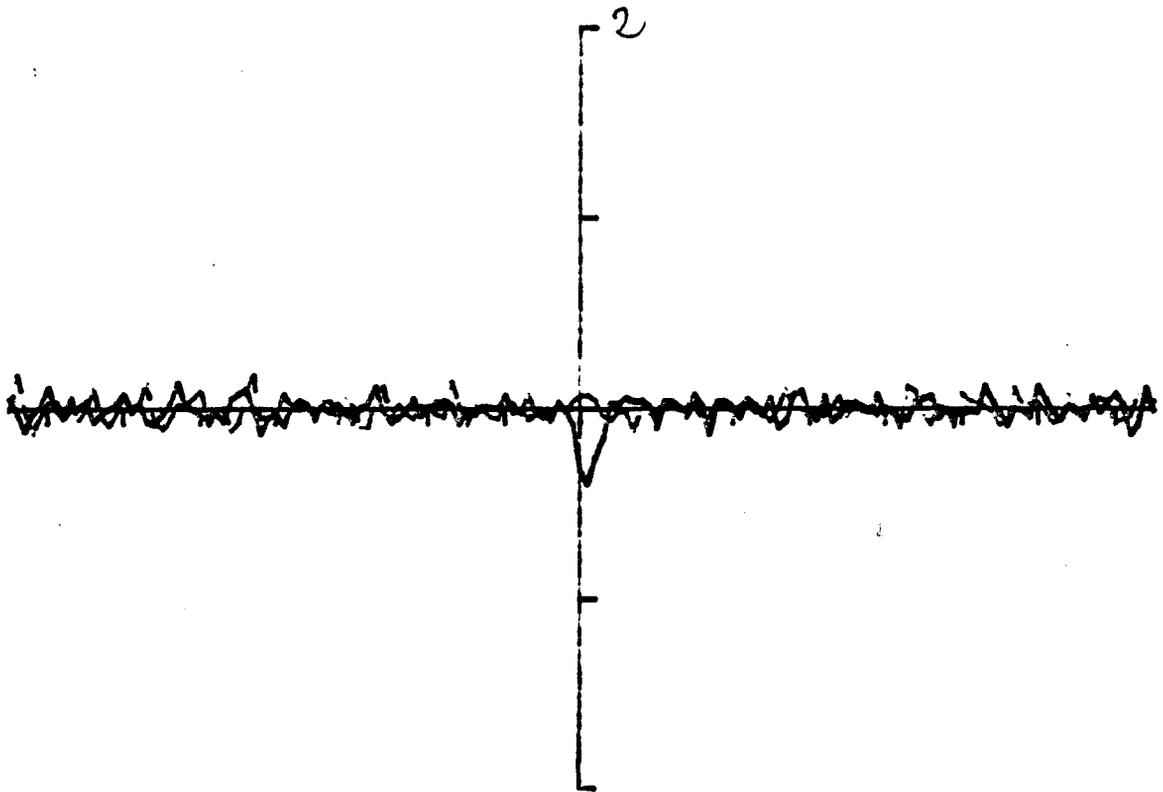
FREQUENCY 1.60



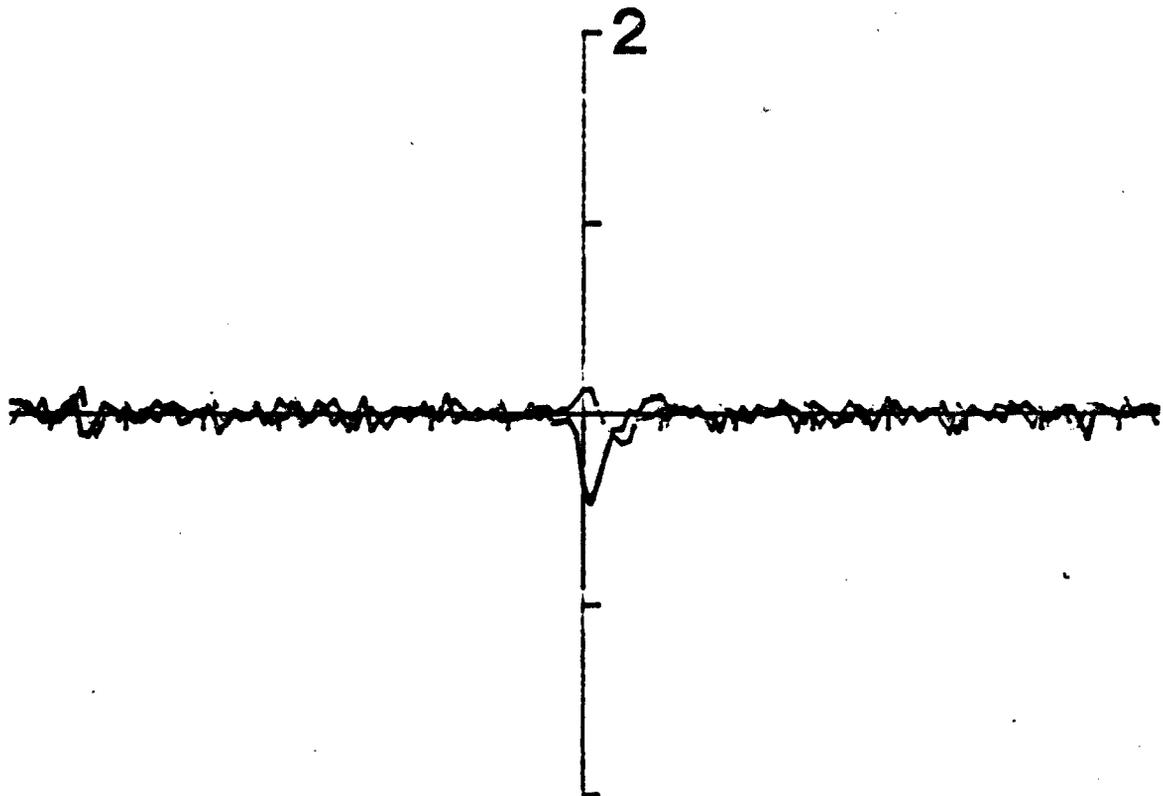
FREQUENCY 1.80



FREQUENCY 2.00

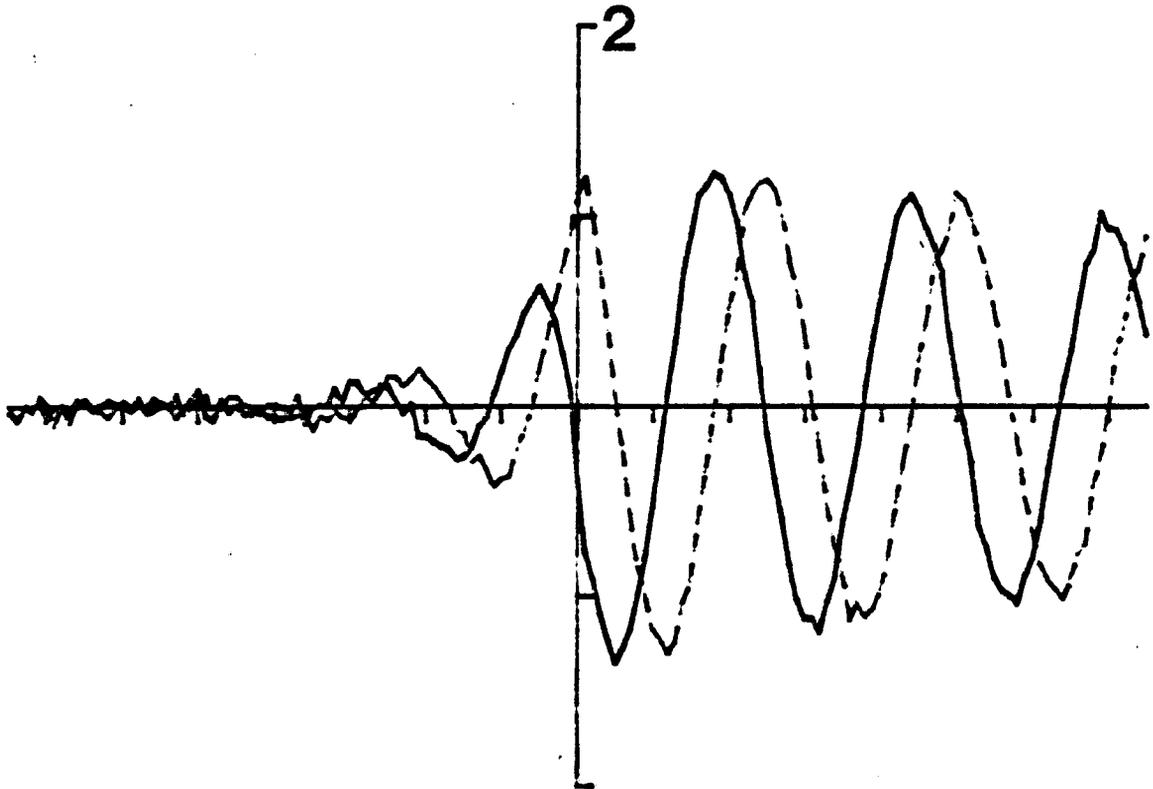


FREQUENCY 0.40



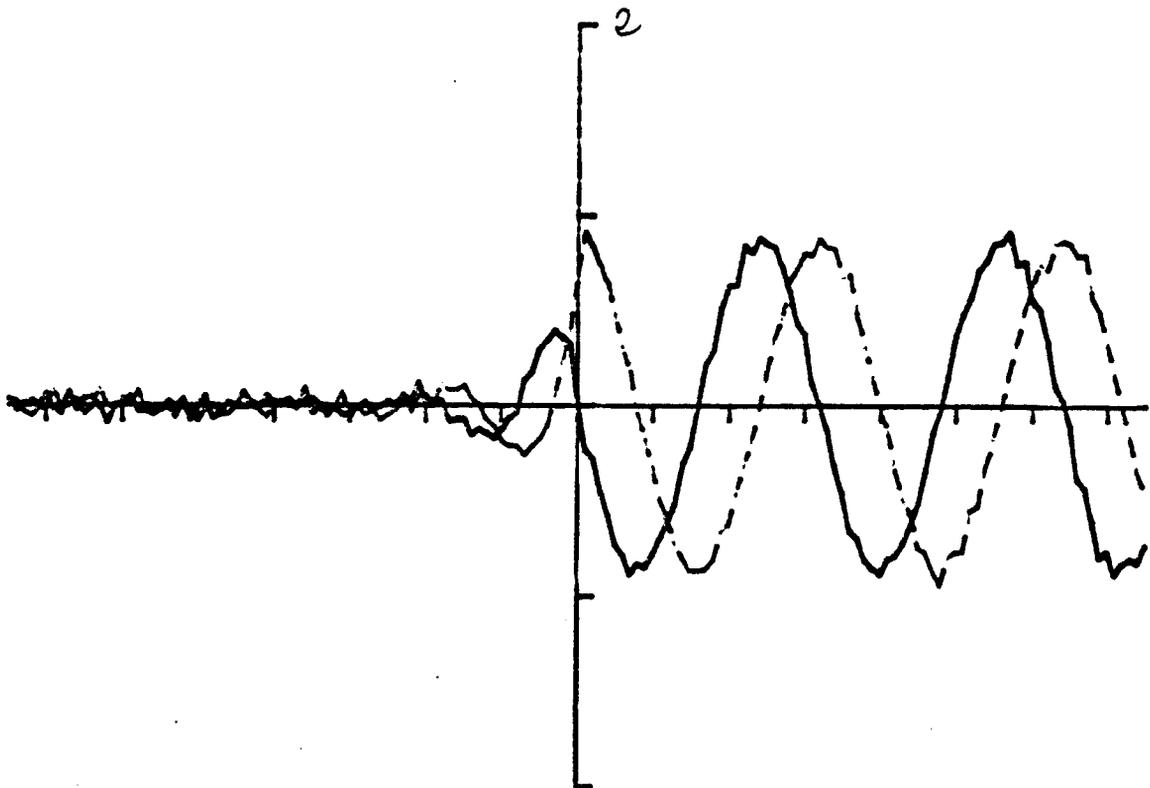
FREQUENCY 0.60

A'

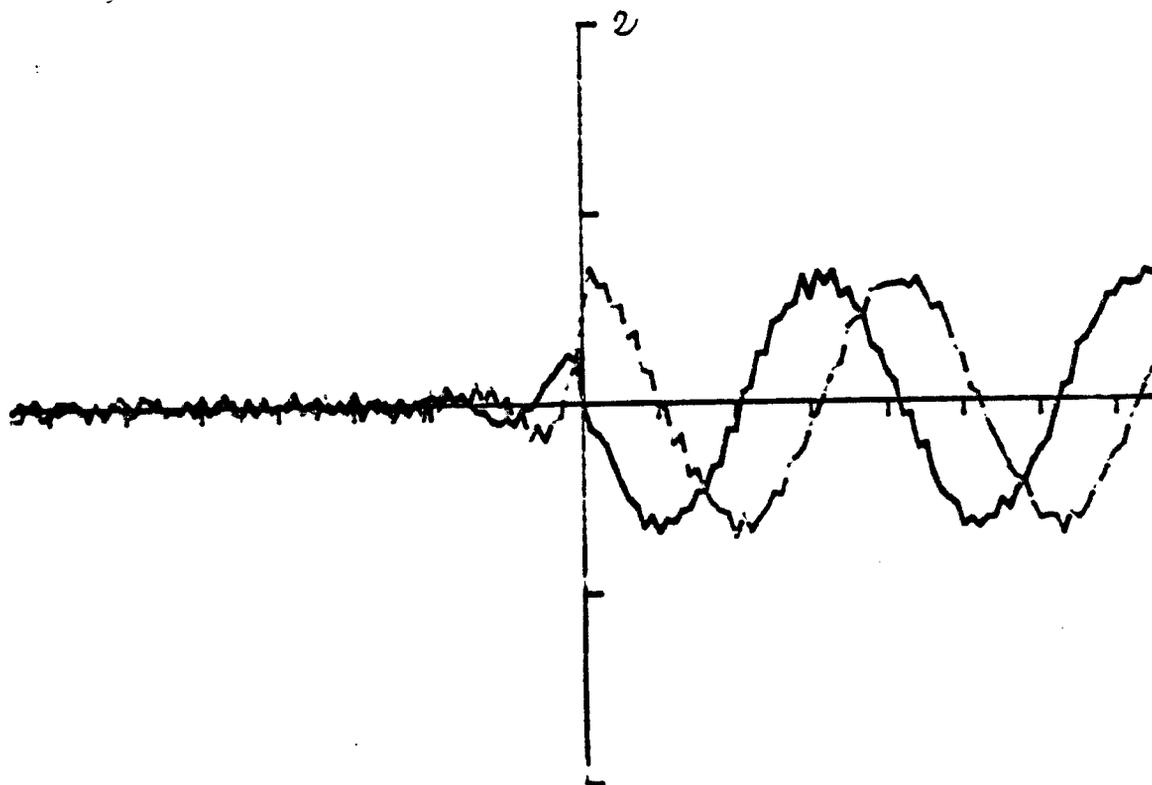


FREQUENCY 0.80

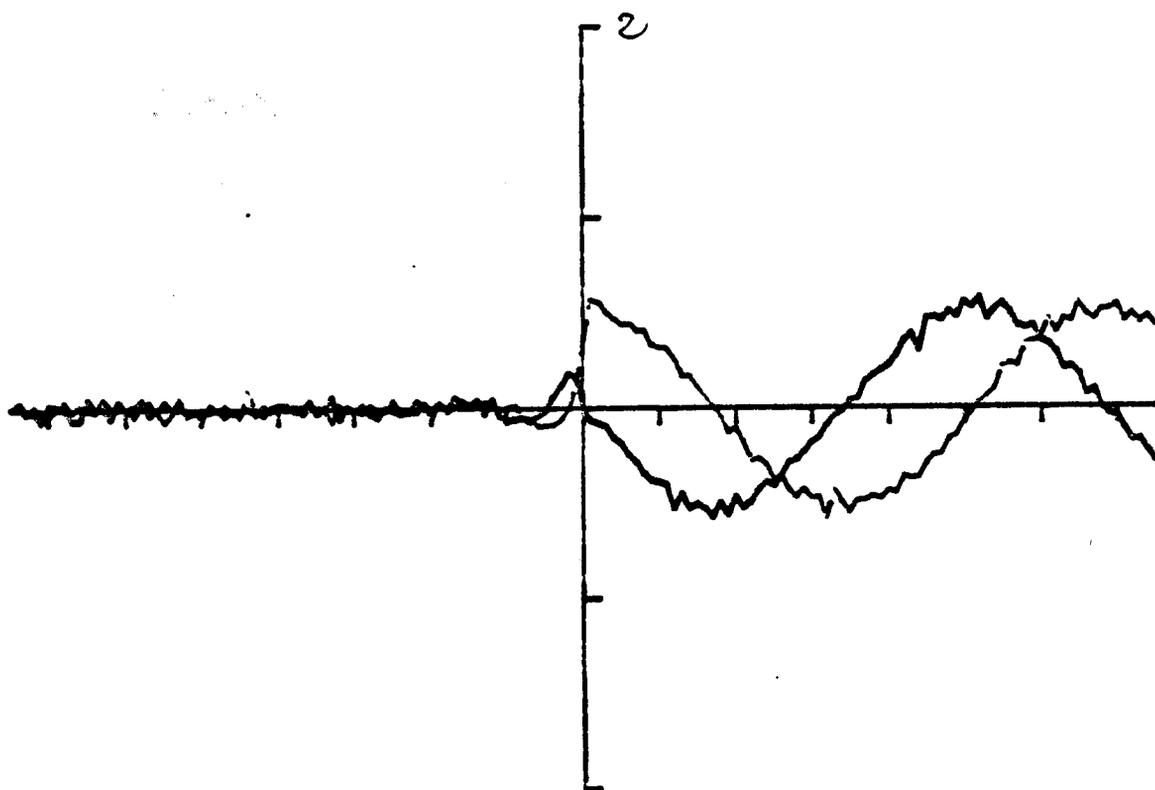
B'



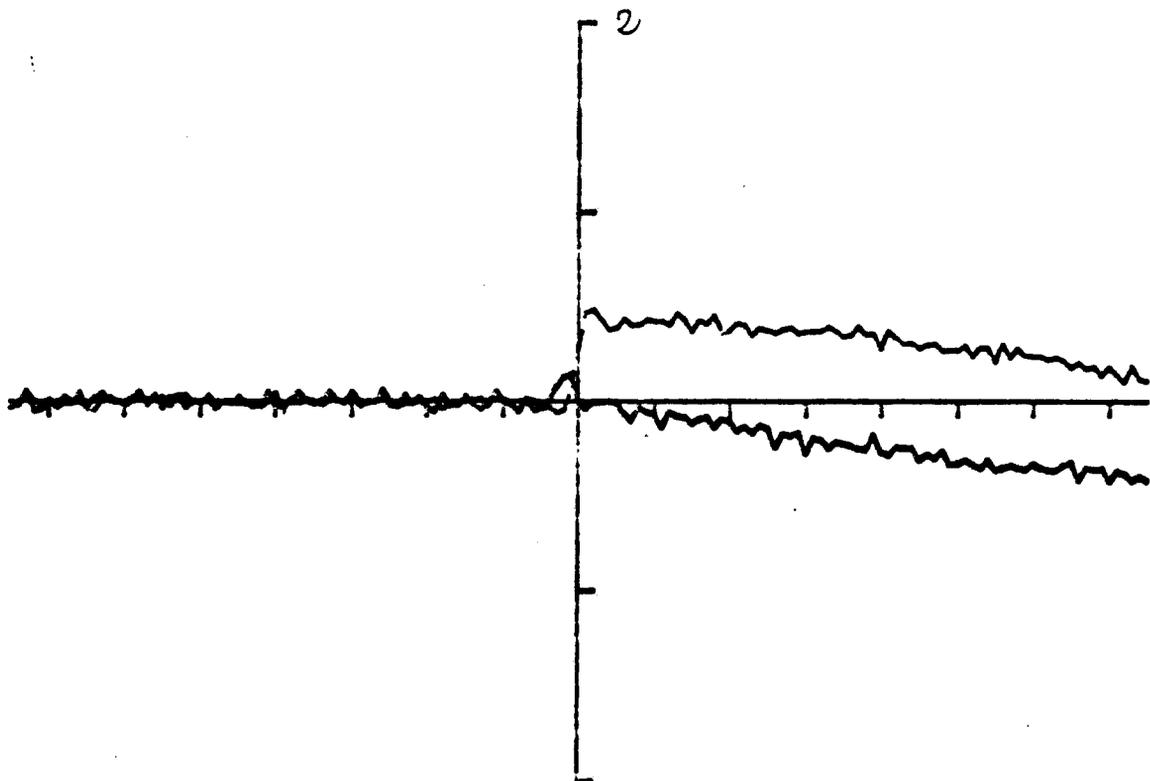
FREQUENCY 0.82



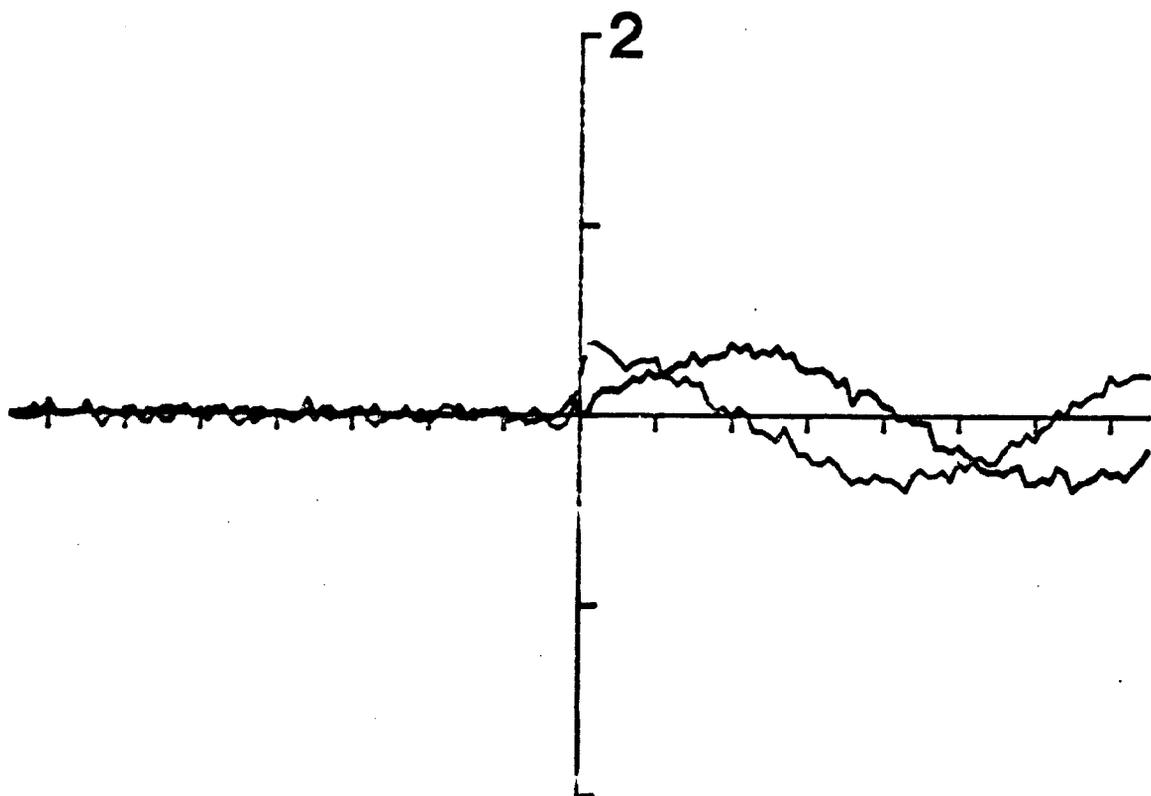
FREQUENCY 0.85



FREQUENCY 0.90

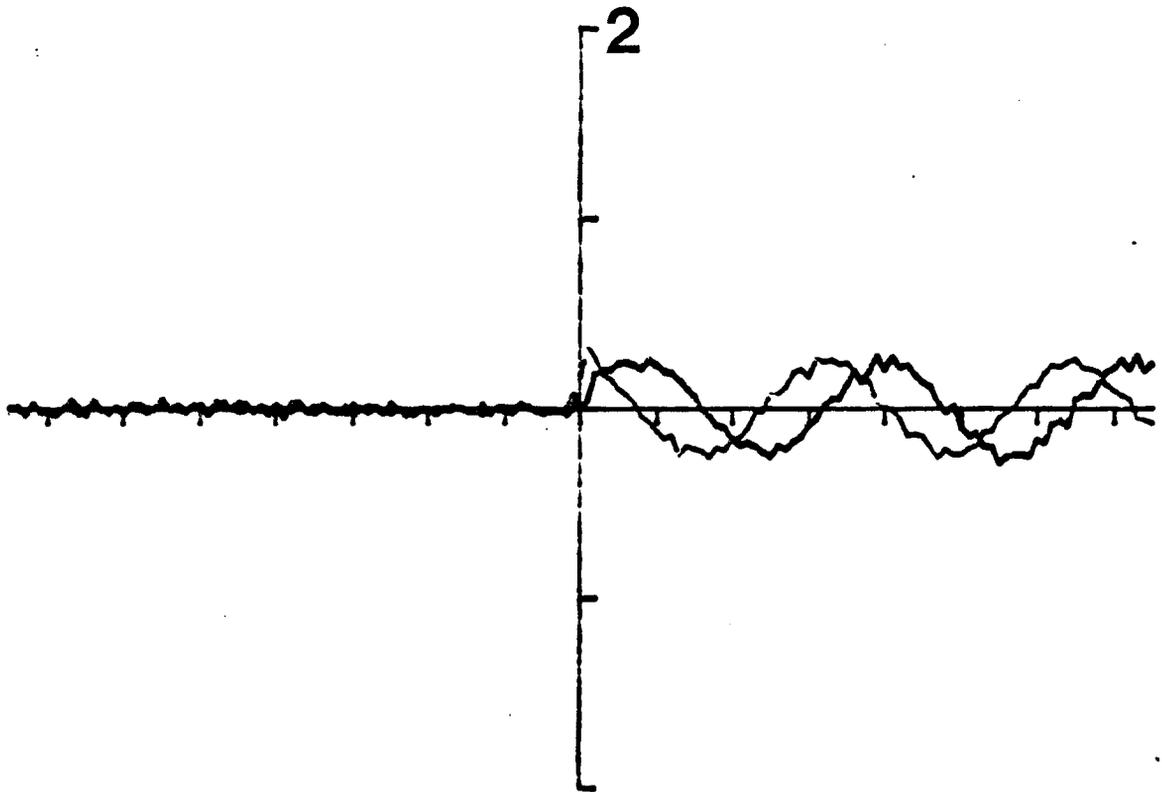


FREQUENCY 0.98



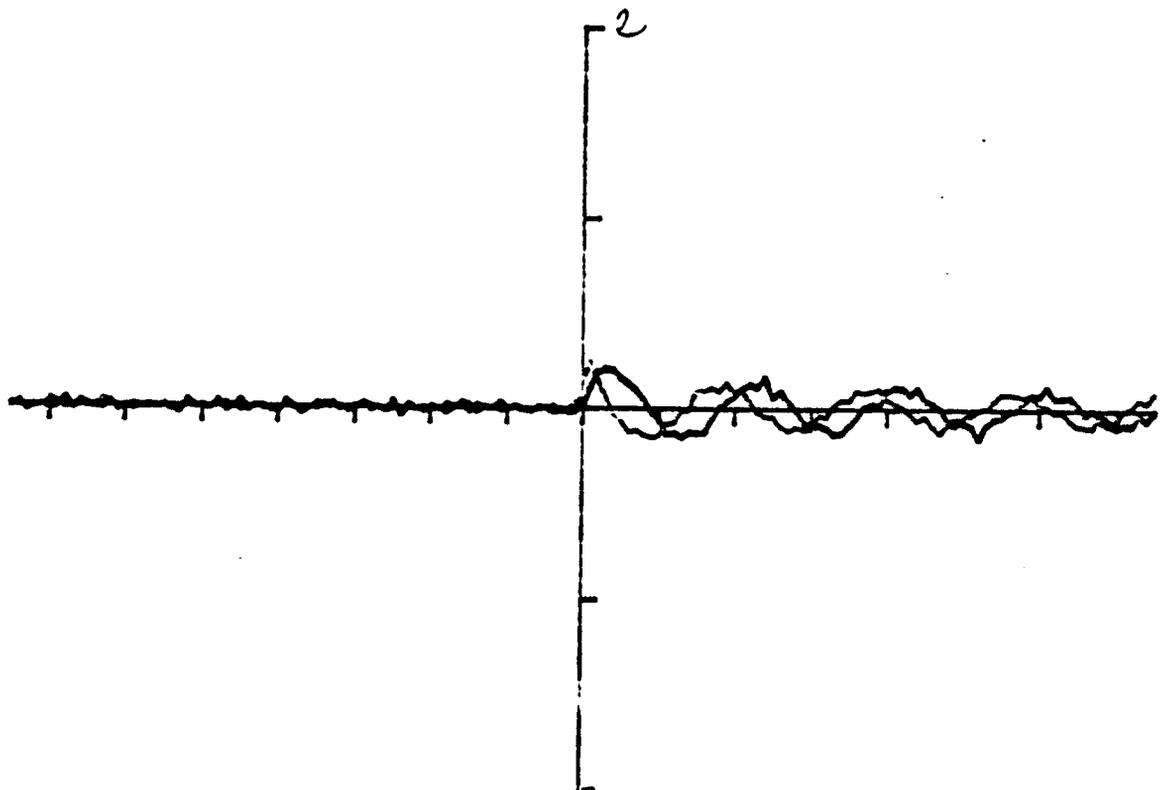
FREQUENCY 1.10

C'

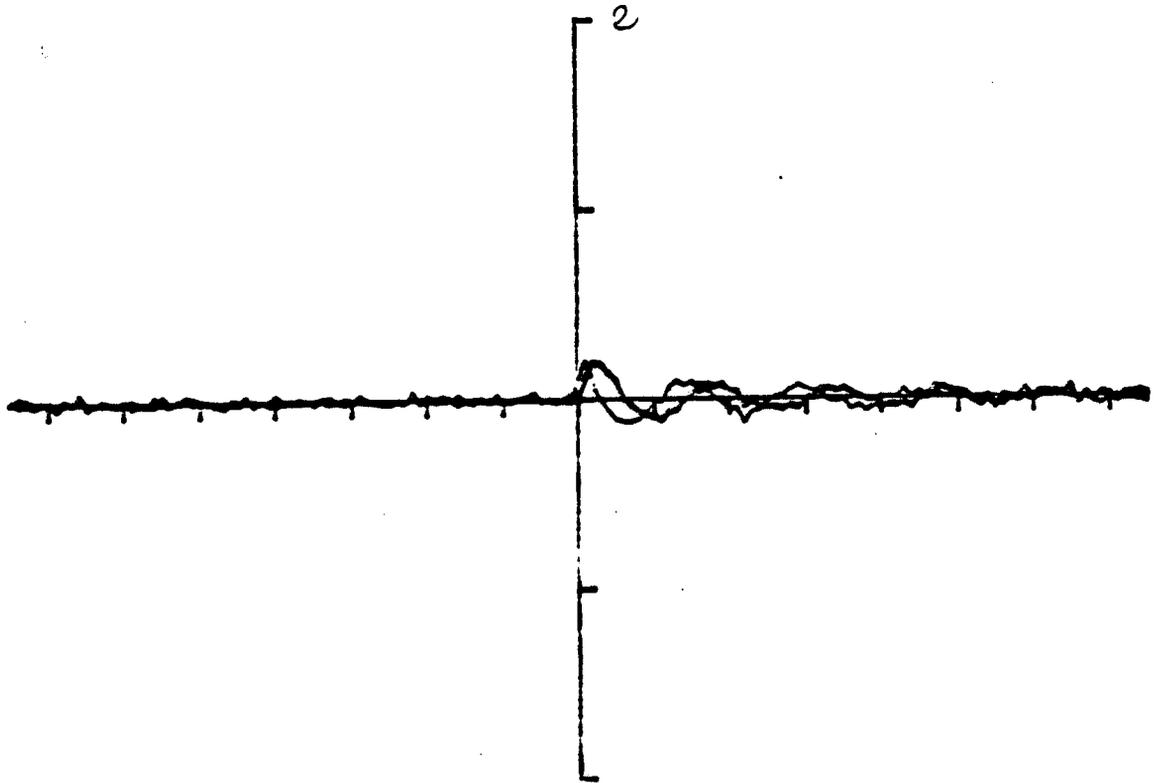


FREQUENCY 1.30

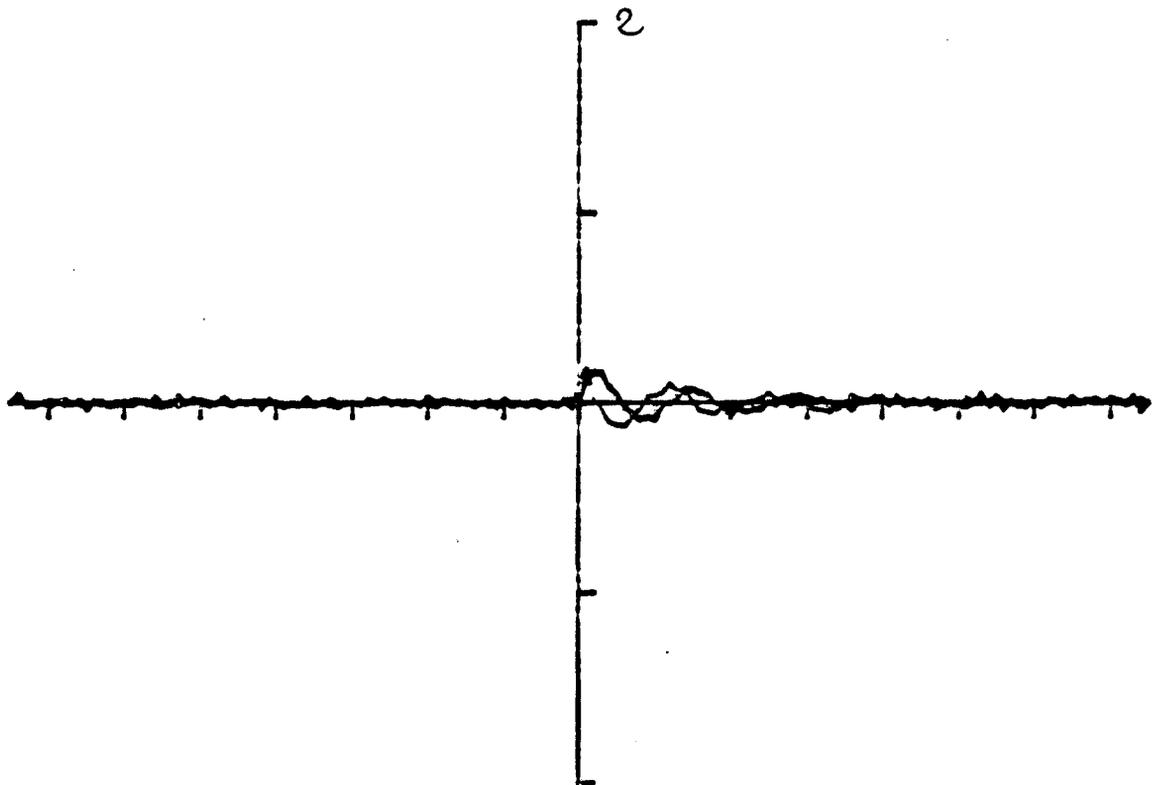
D'



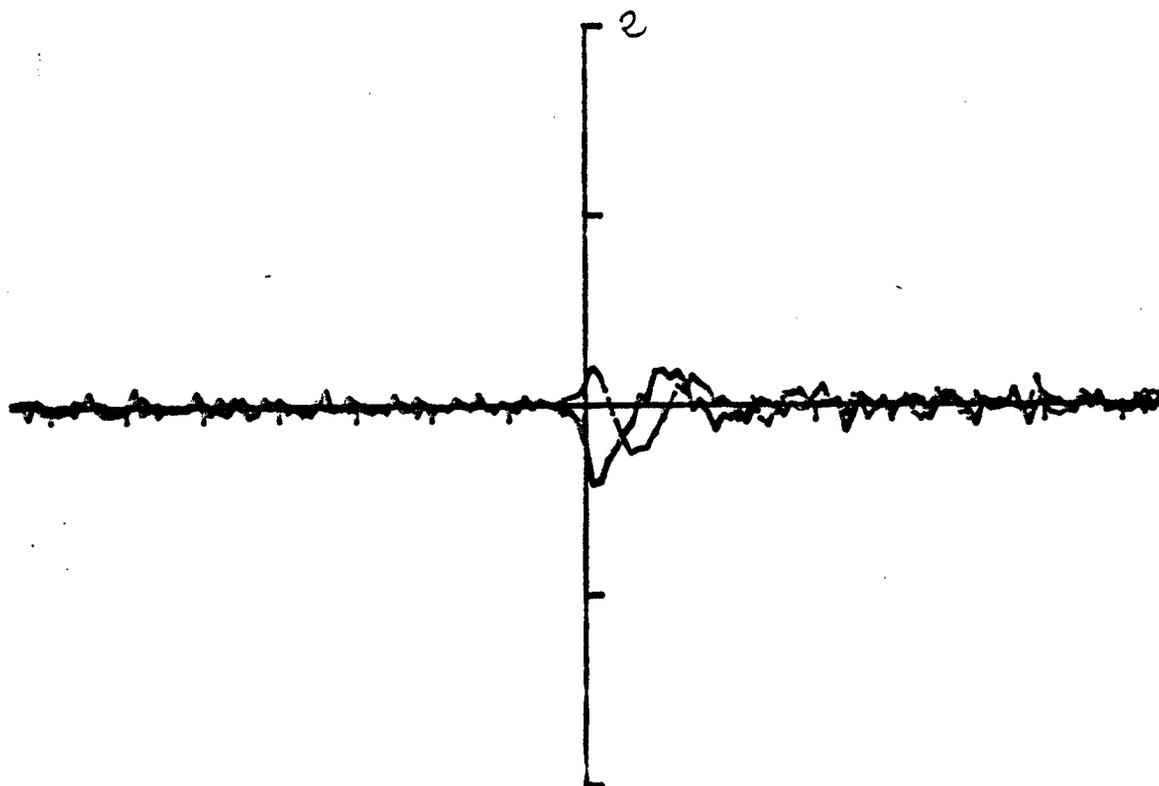
FREQUENCY 1.60



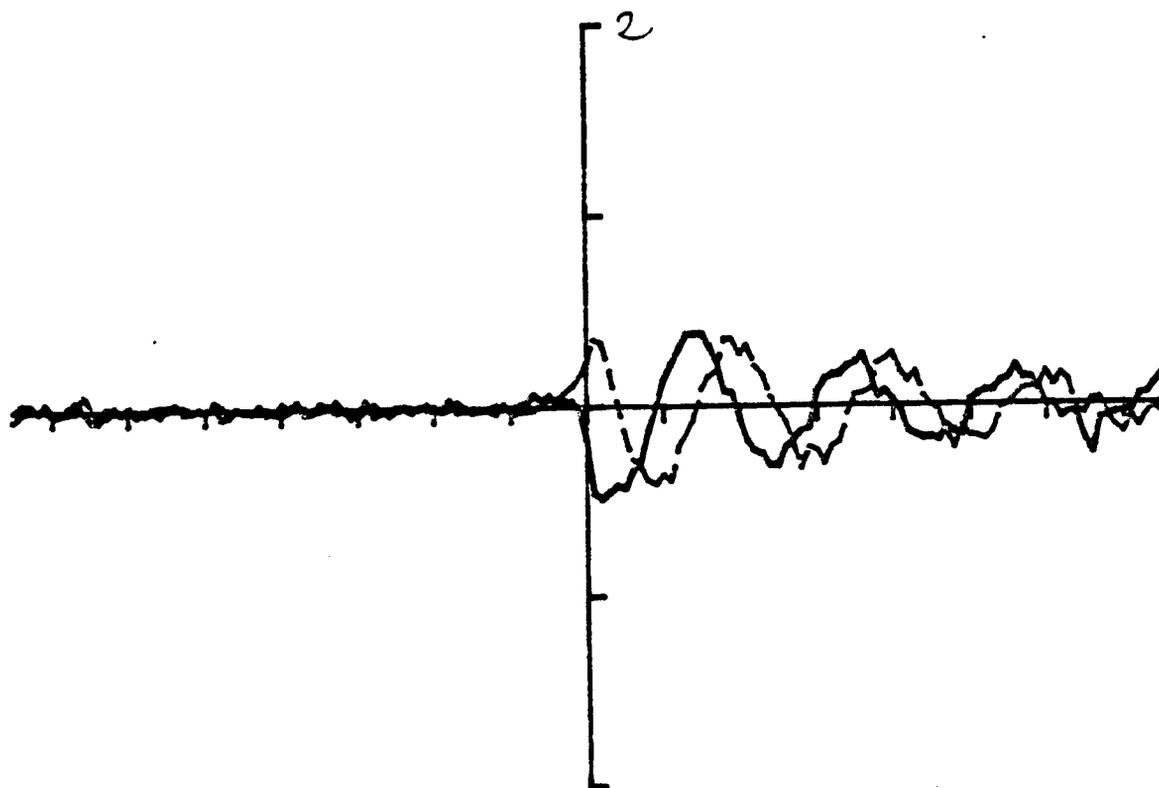
FREQUENCY 1.80



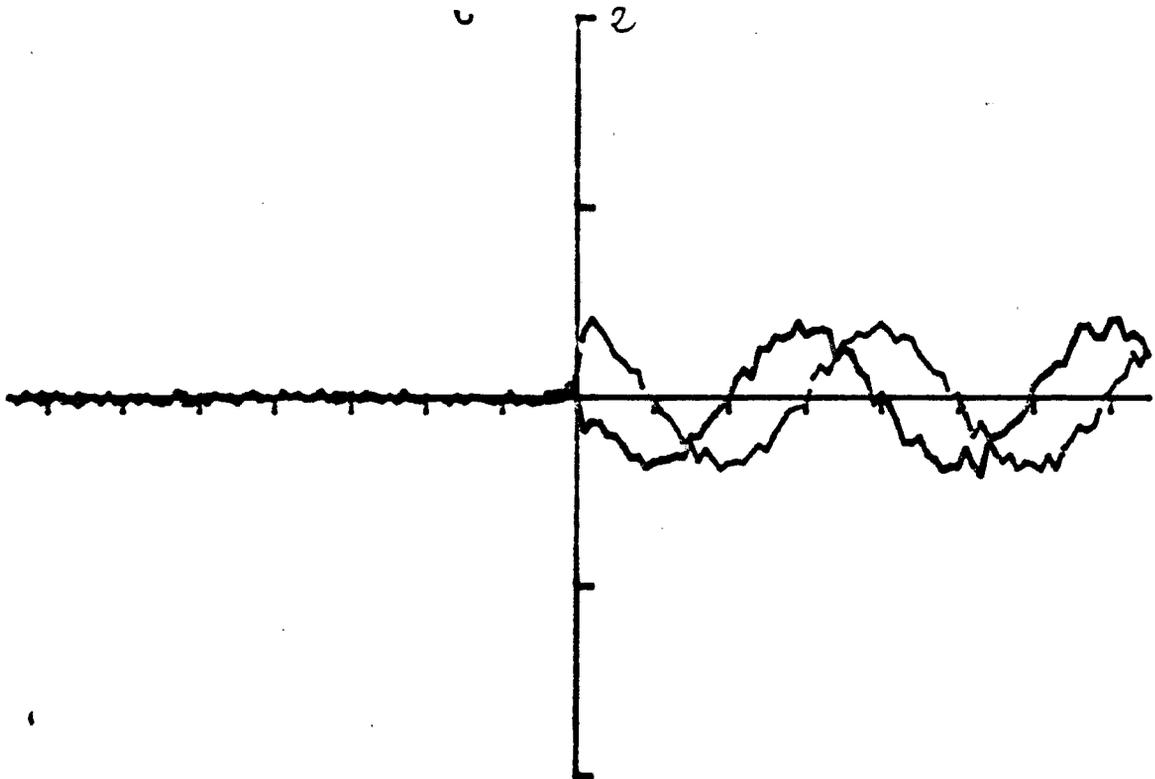
FREQUENCY 2.00



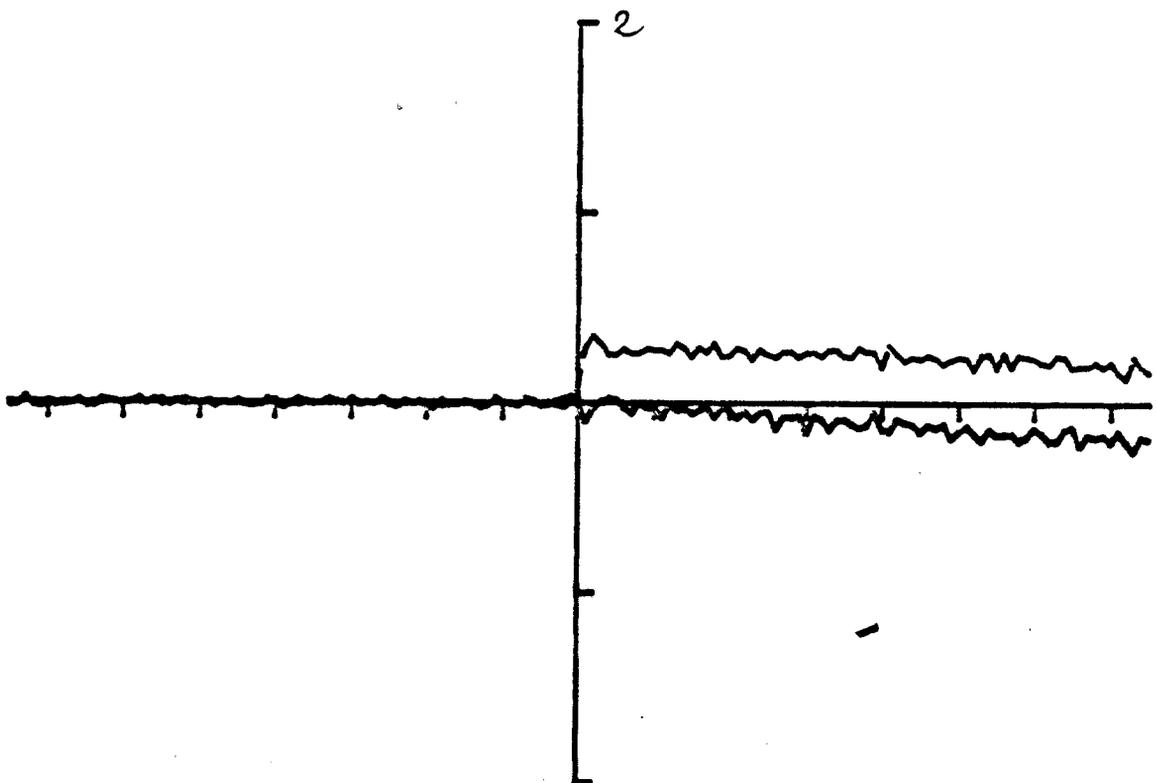
FREQUENCY 0.50



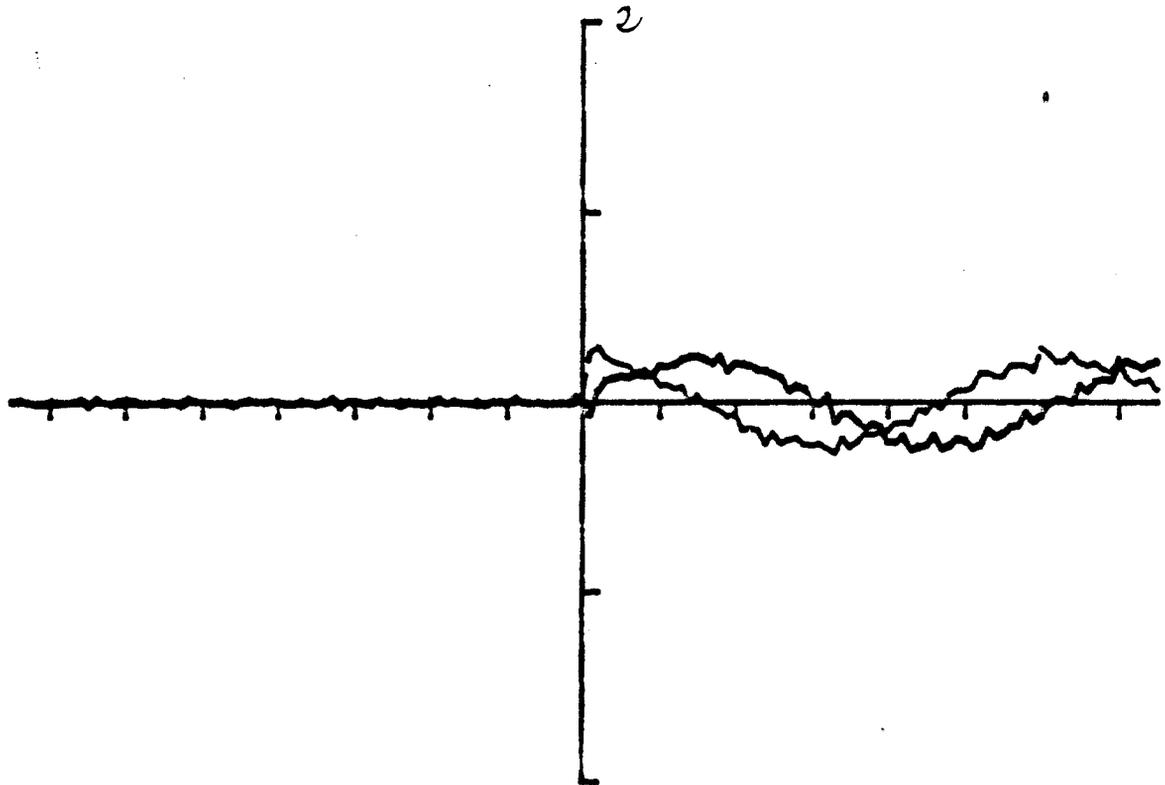
FREQUENCY 0.60



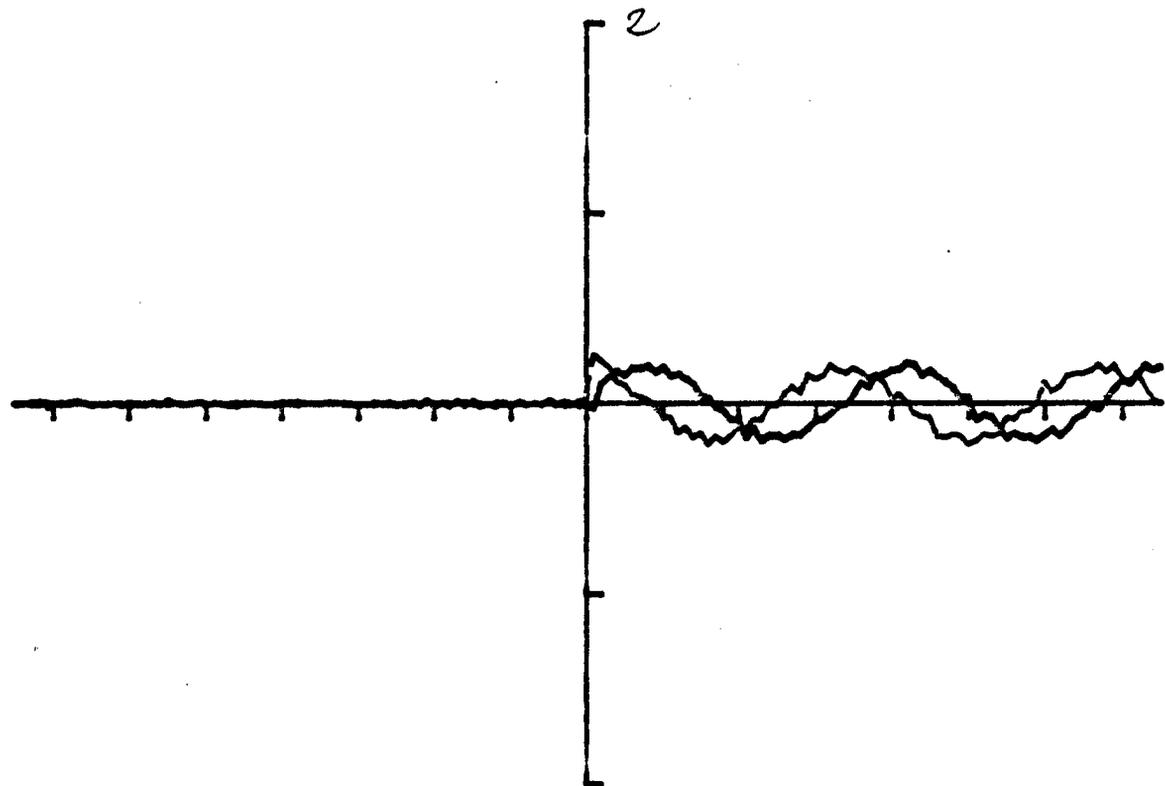
FREQUENCY 0.75



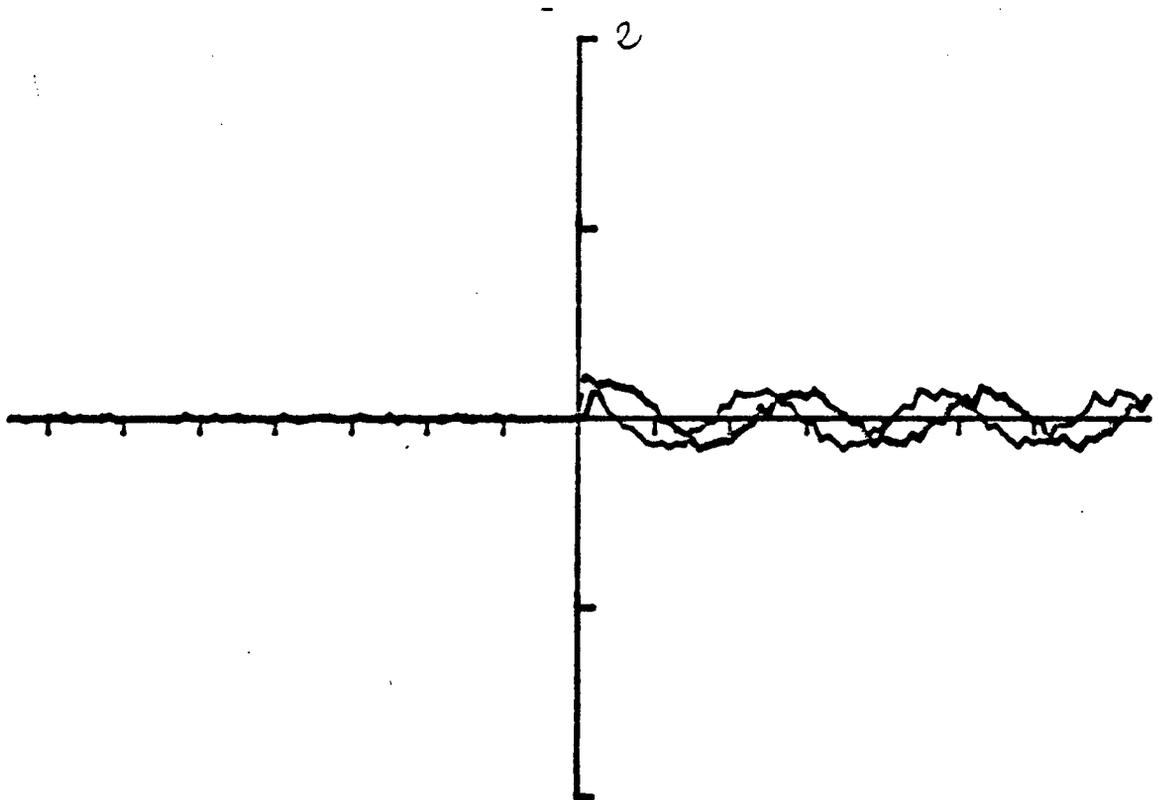
FREQUENCY 0.98



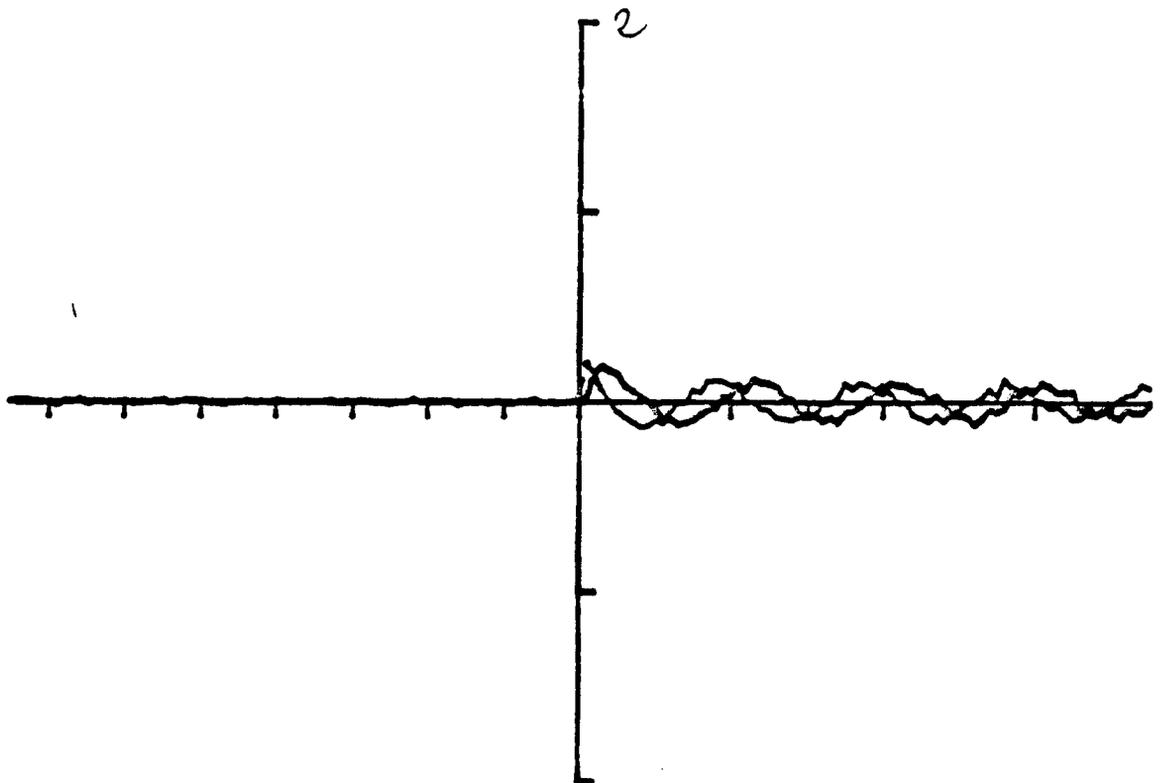
FREQUENCY 1.20



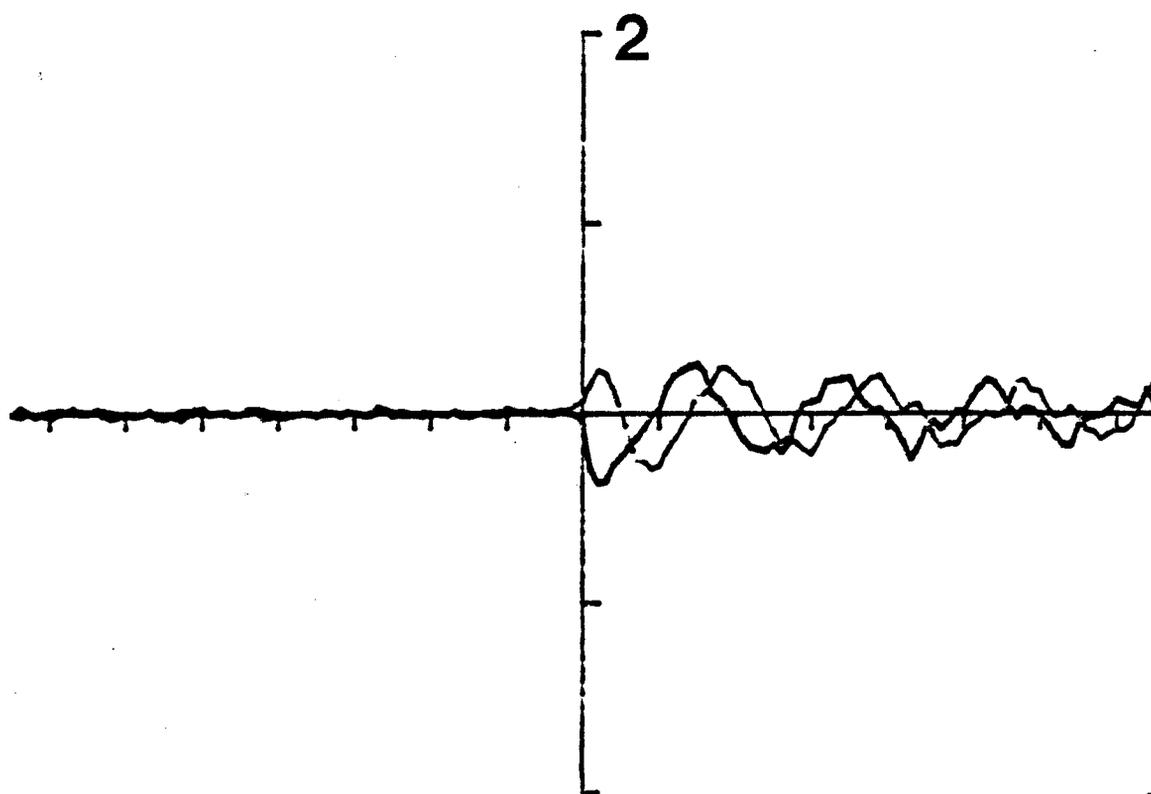
FREQUENCY 1.40



FREQUENCY 1.60

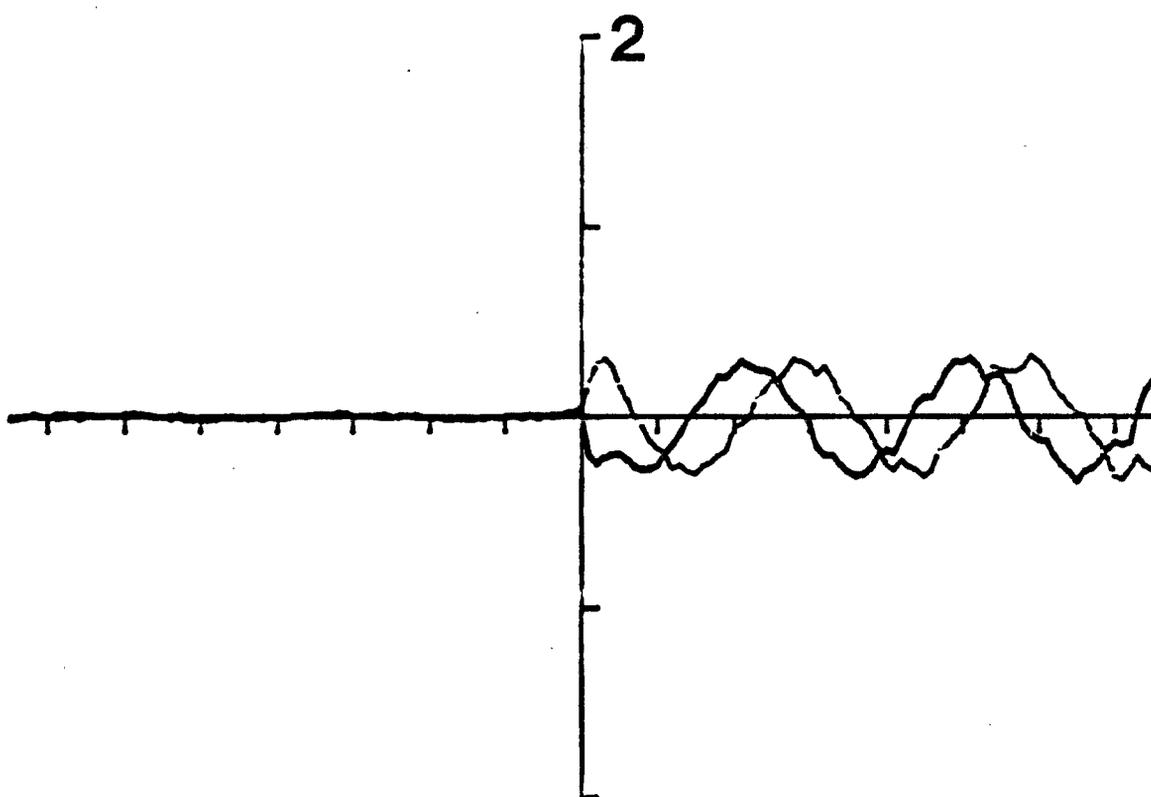


FREQUENCY 1.80



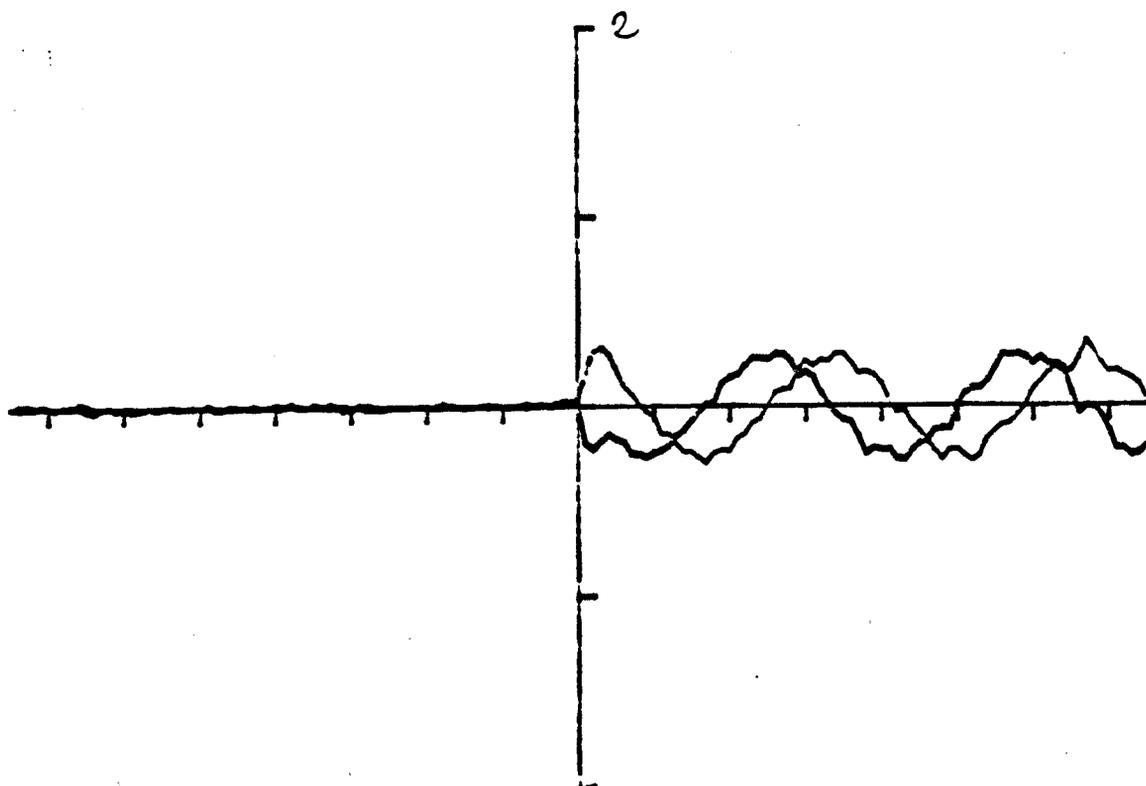
FREQUENCY 0.40

A'

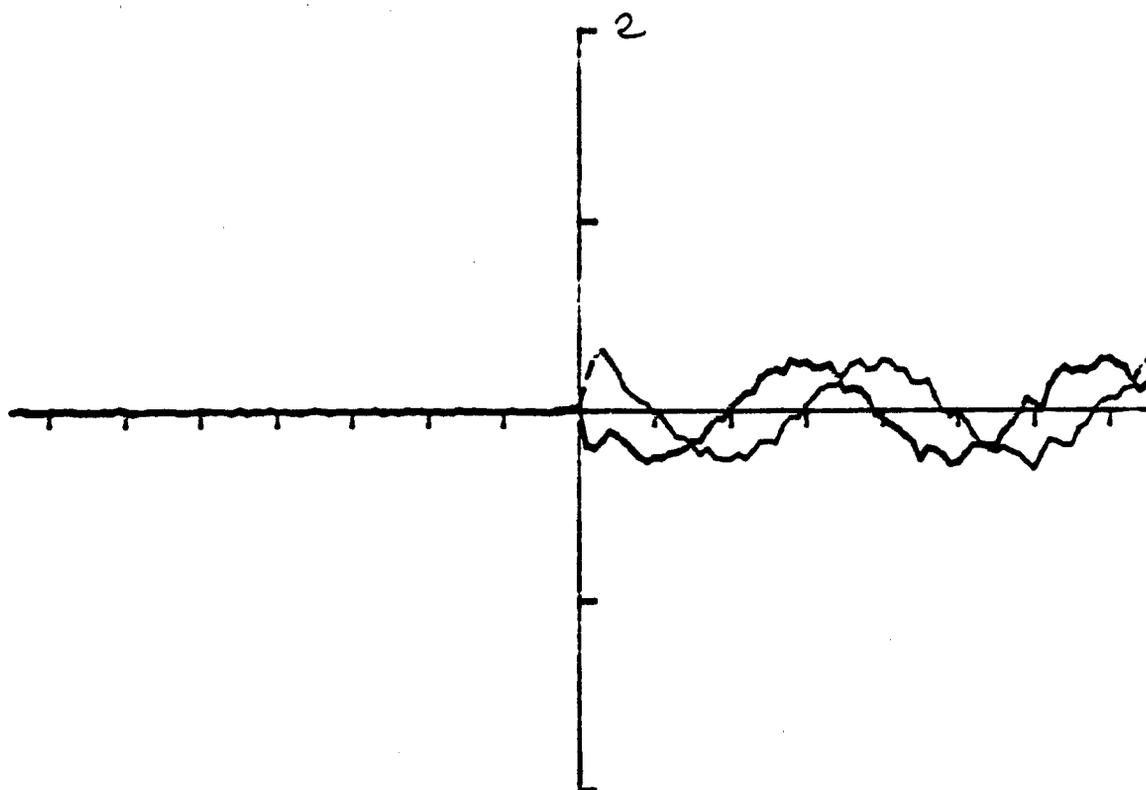


FREQUENCY 0.55

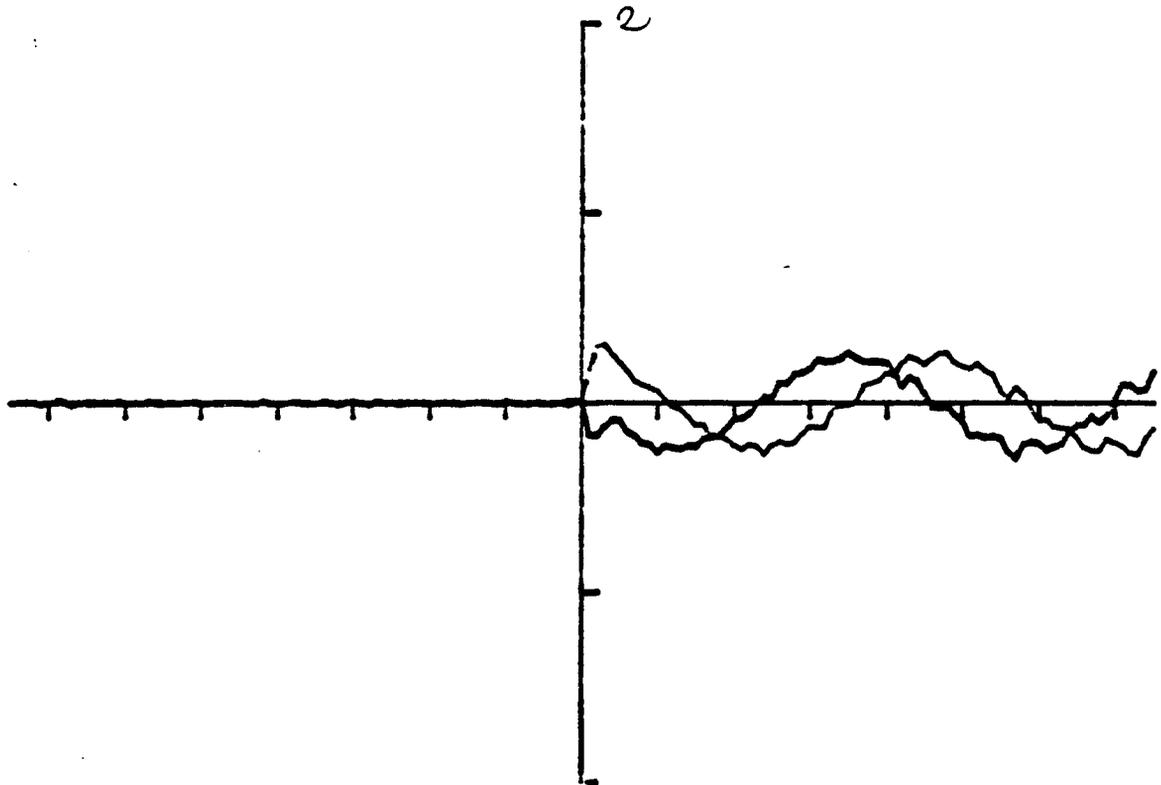
B'



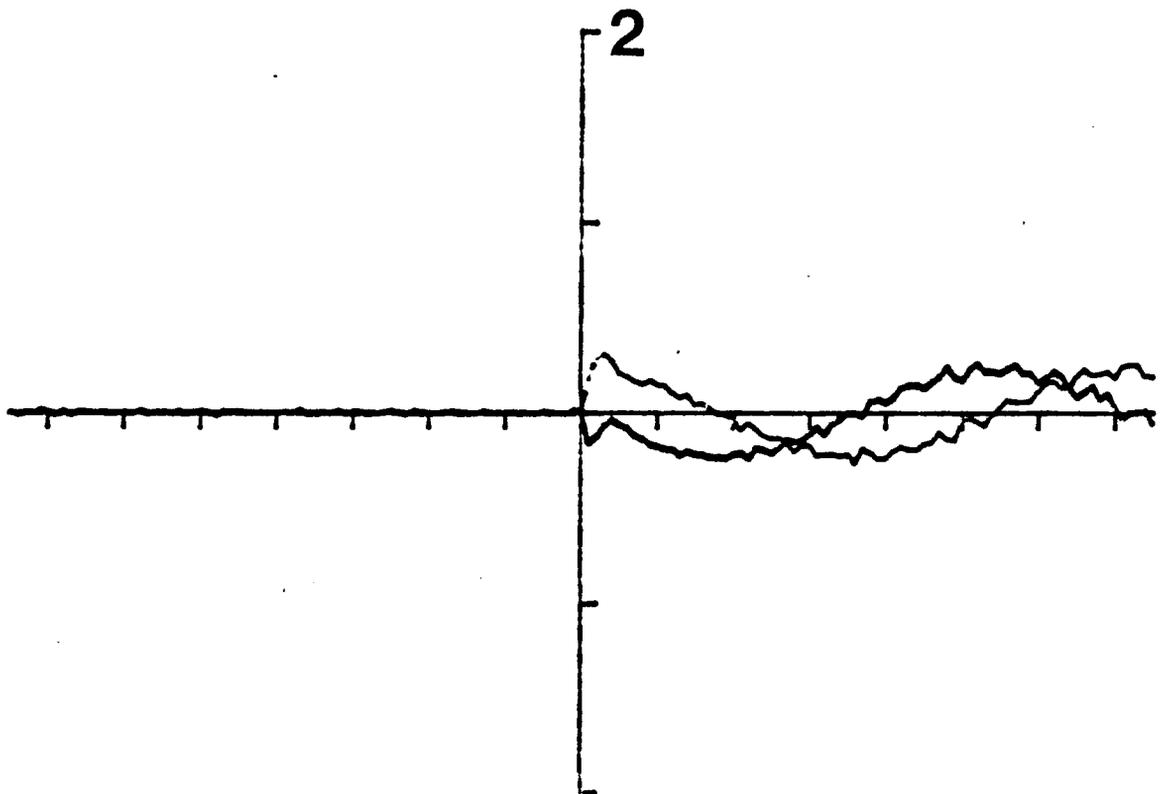
FREQUENCY 0.60



FREQUENCY 0.65

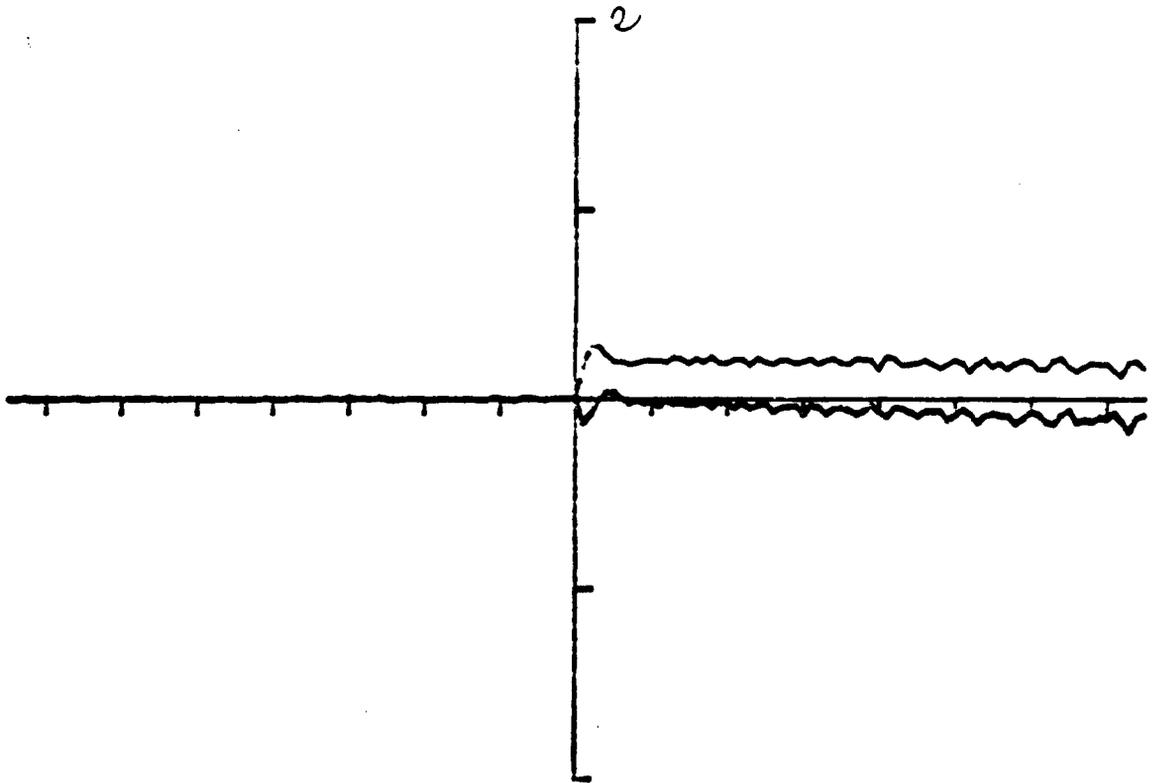


FREQUENCY 0.70

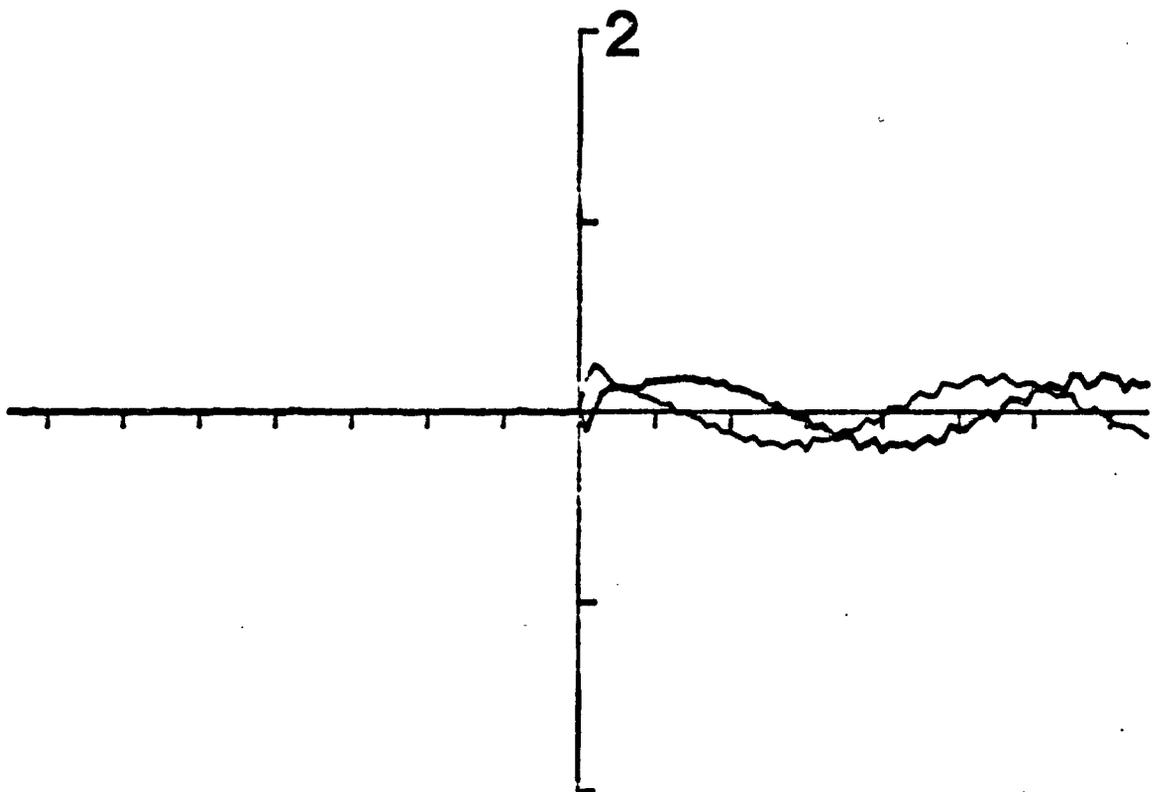


FREQUENCY 0.80

C'

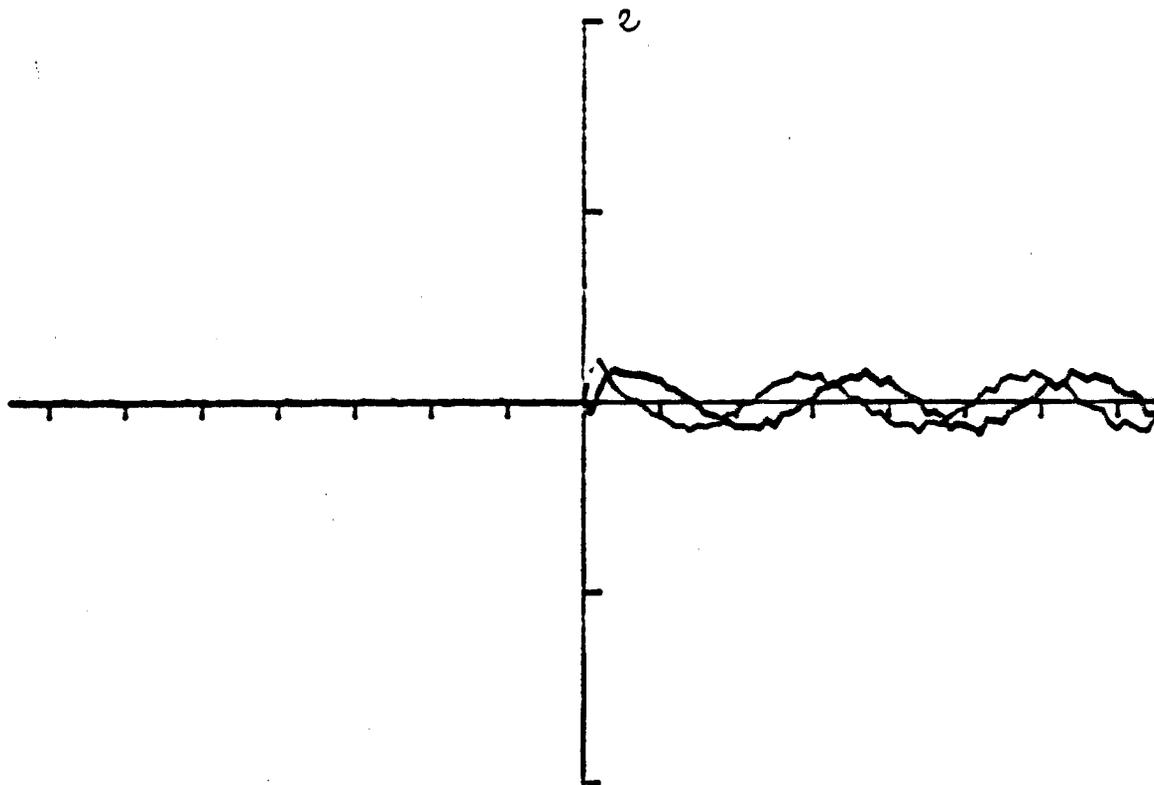


FREQUENCY 0.98

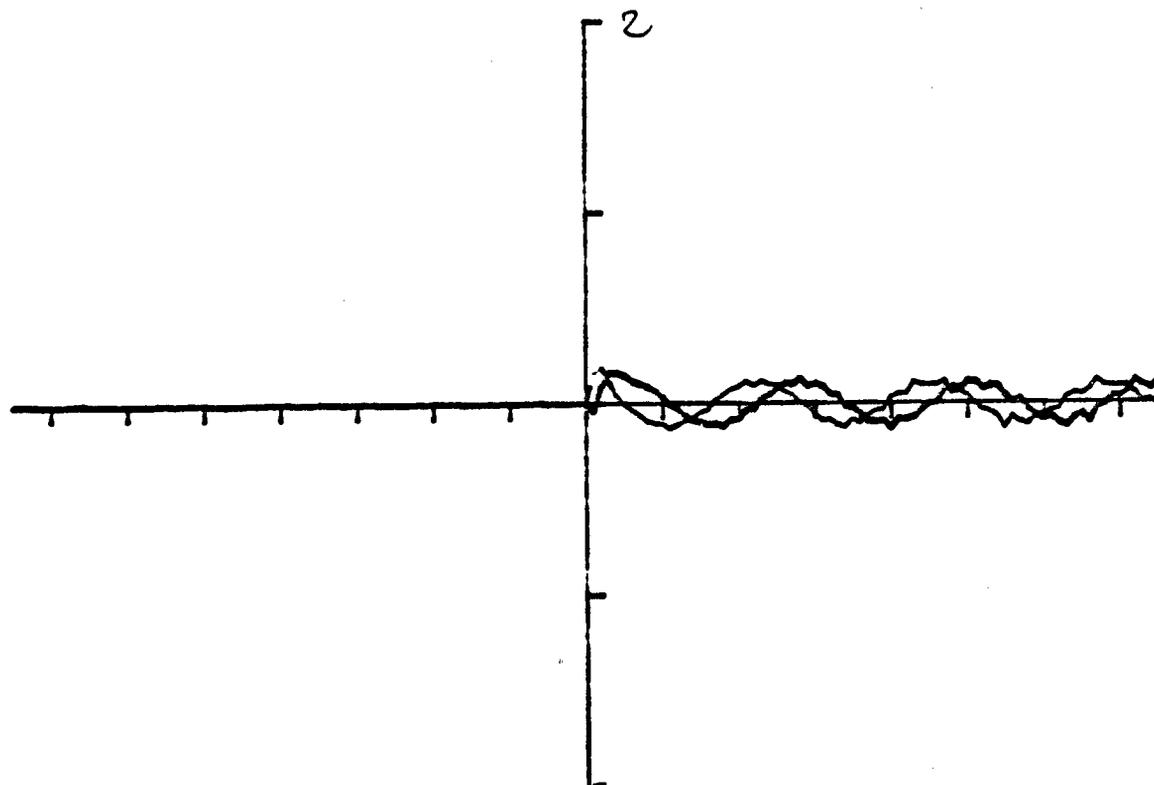


FREQUENCY 1.30

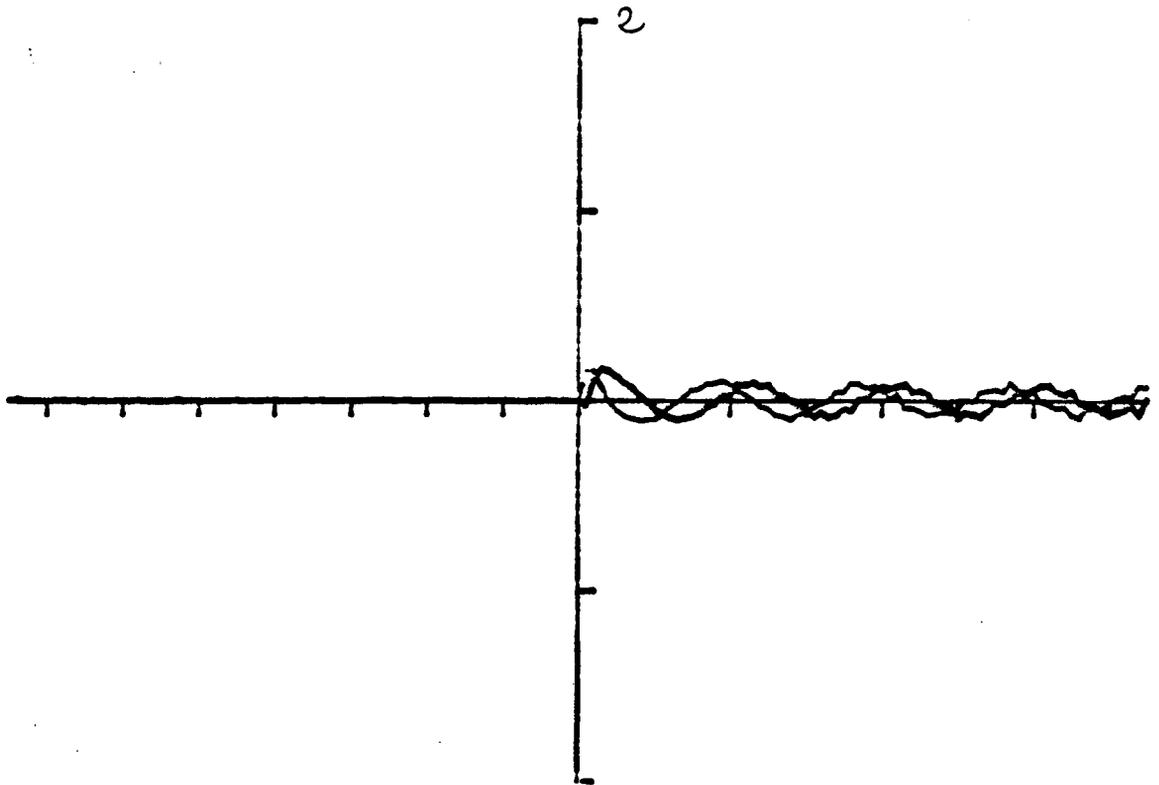
D'



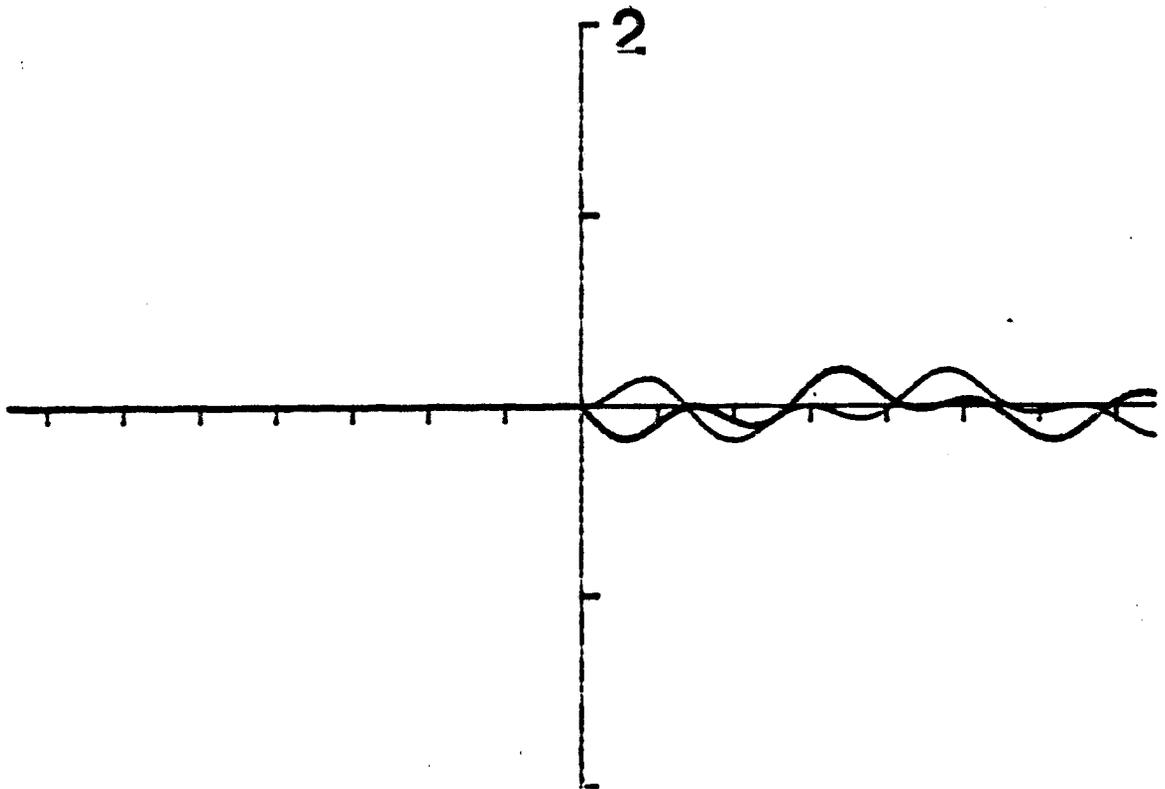
FREQUENCY 1.60



FREQUENCY 1.80

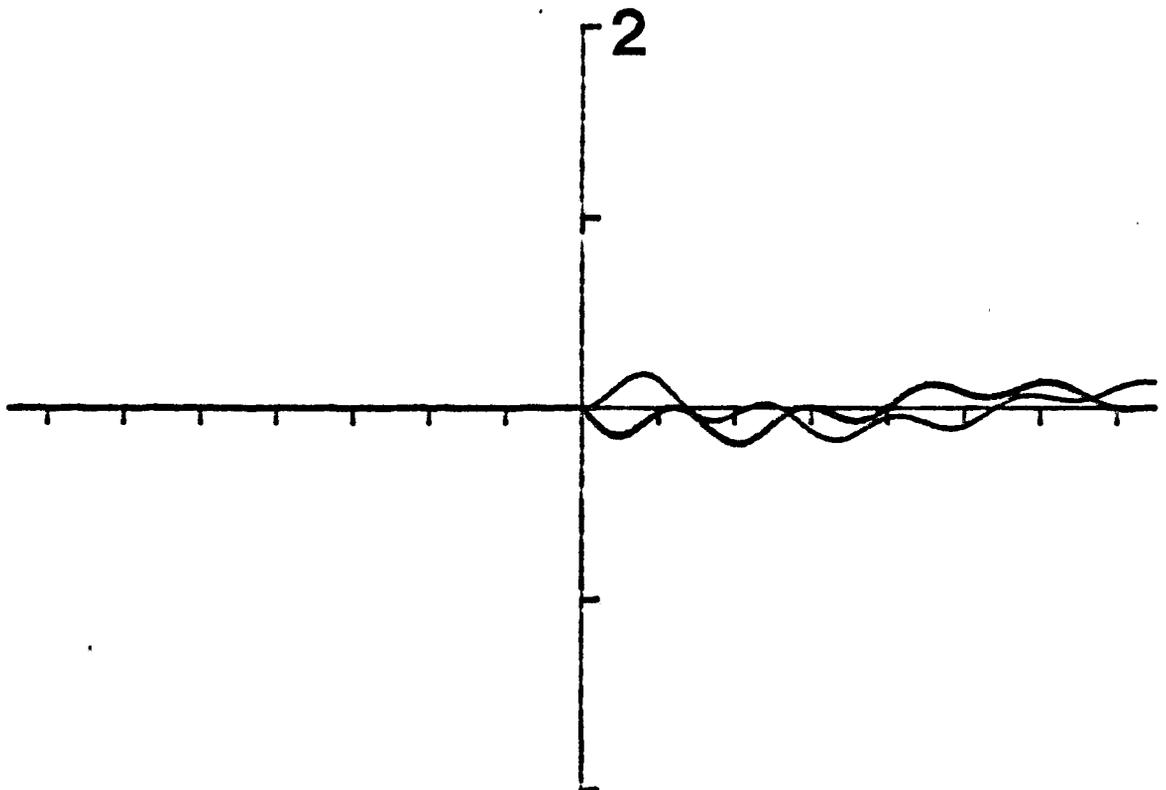


FREQUENCY 2.00



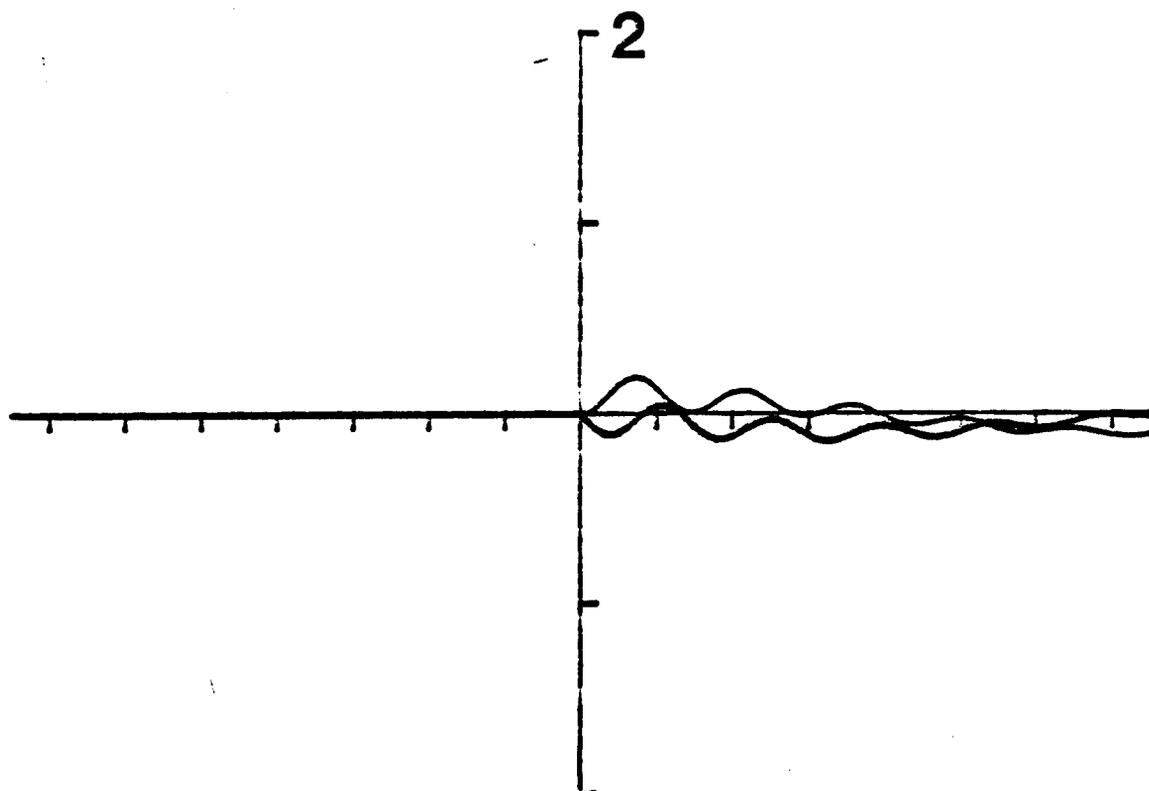
FREQUENCY 0.40

**A'**



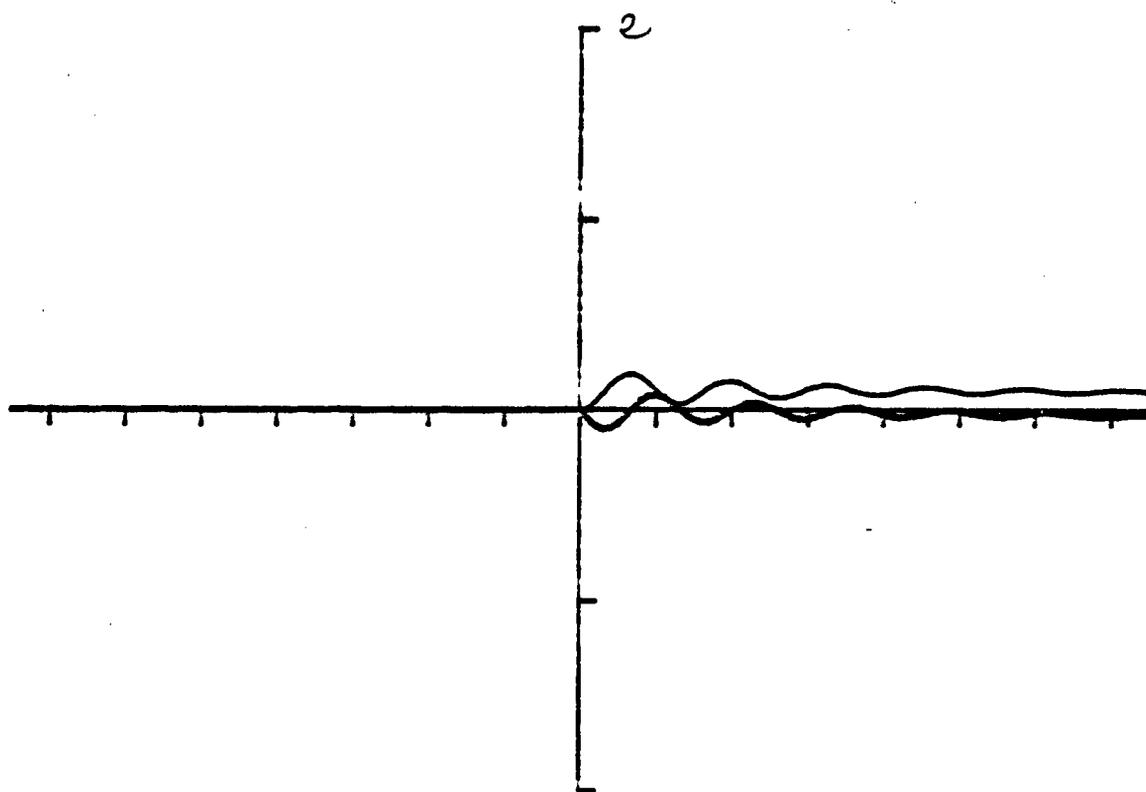
FREQUENCY 0.60

**B'**

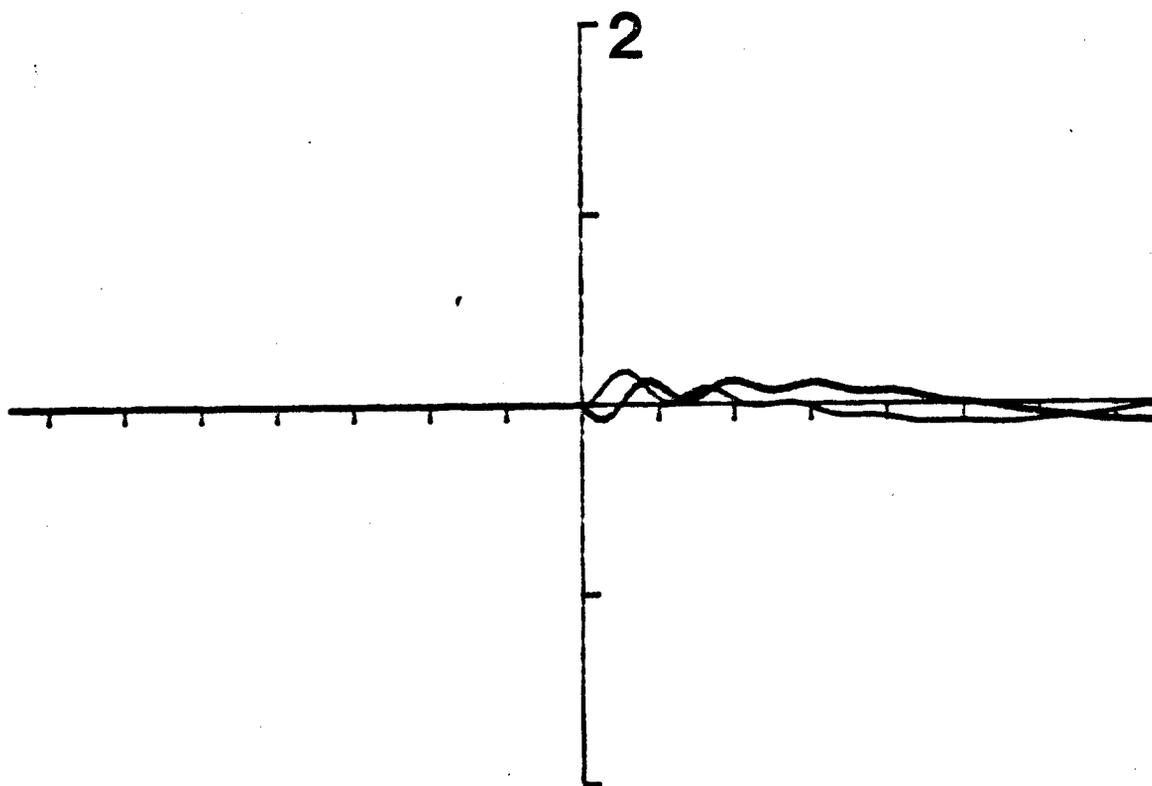


FREQUENCY 0.80

C'

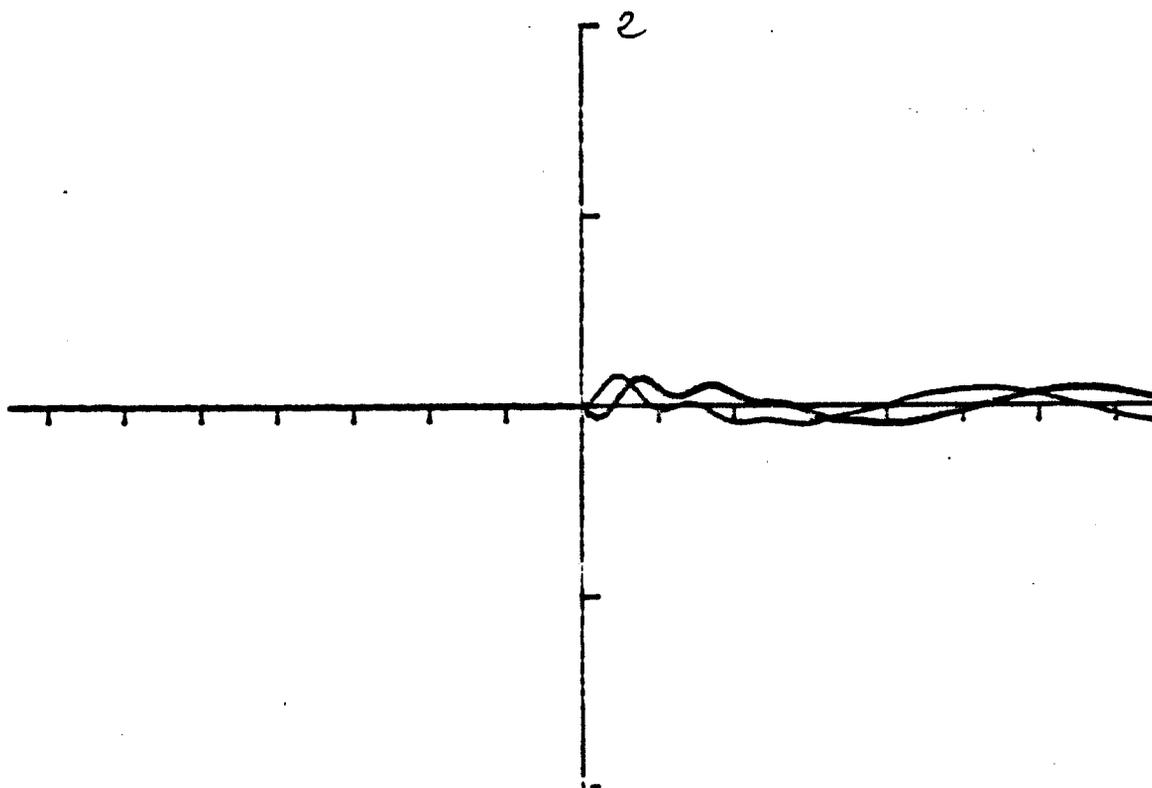


FREQUENCY 0.98

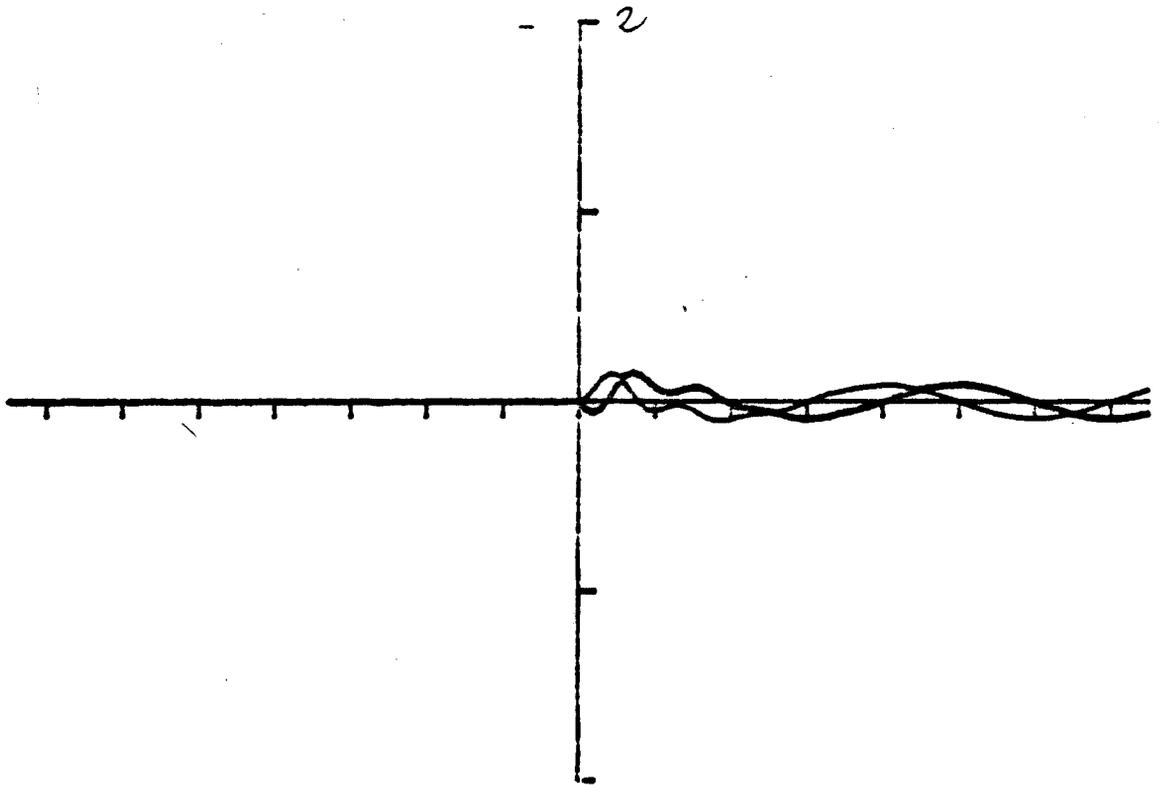


FREQUENCY 1.30

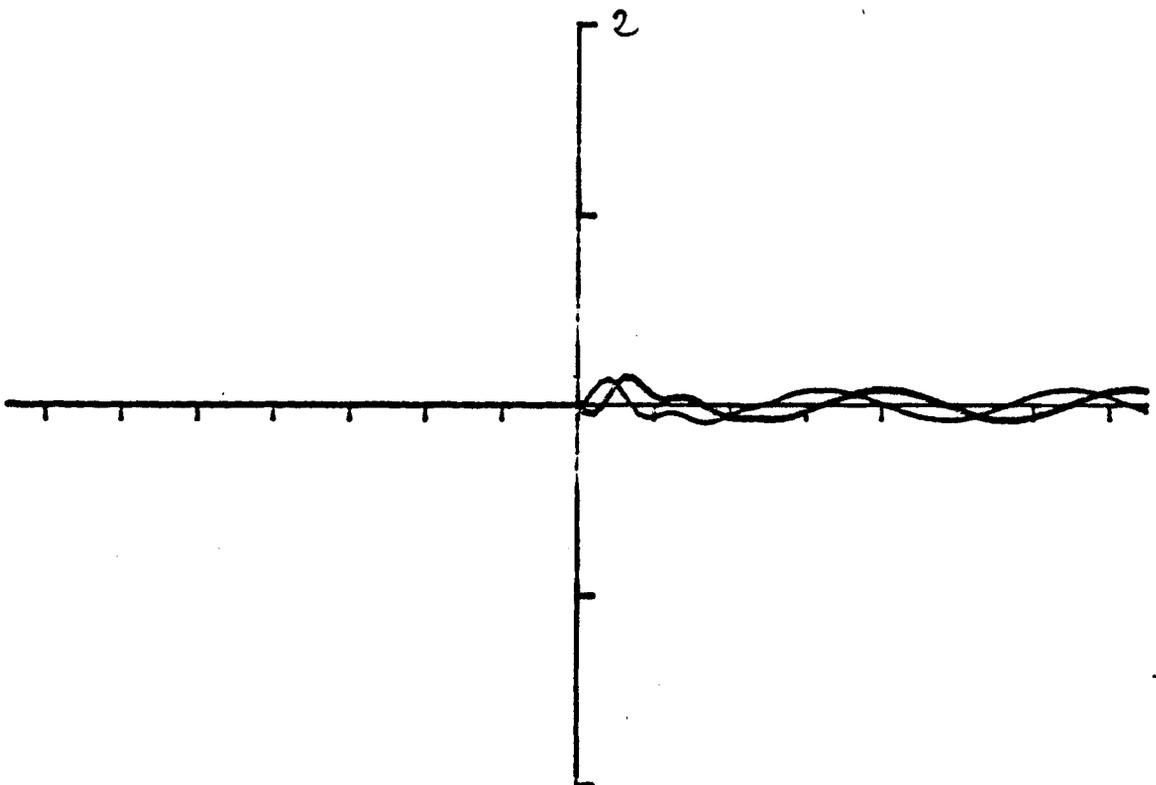
D'



FREQUENCY 1.60



FREQUENCY 1.80



FREQUENCY 2.00

**CRPE**  
*Centre de Recherches  
en Physique de l'Environnement  
terrestre et planétaire*

*Avenue de la Recherche scientifique  
45045 ORLEANS CEDEX*

**Département PCE**  
*Physique et Chimie  
de l'Environnement*

*Avenue de la Recherche scientifique  
45045 ORLEANS CEDEX*

**Département ETE**  
*Etudes par Télédétection  
de l'Environnement*

*CNET - 38-40 rue du général Leclerc  
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX*