



HAL
open science

Quelques applications des relateurs arithmétiques : de la physique à la socio-économie (documents anciens inédits et synthèses récentes)

Thiébaut Moulin, Frédéric Boccara, François Chauvet, Michel Ferre, Serge Golinsky, Guy Mauge, Philippe Riot, Lionel Saint-Paul, Claude Vallet

► To cite this version:

Thiébaut Moulin, Frédéric Boccara, François Chauvet, Michel Ferre, Serge Golinsky, et al.. Quelques applications des relateurs arithmétiques : de la physique à la socio-économie (documents anciens inédits et synthèses récentes). [Rapport de recherche] Centre national de l'entrepreneuriat(CNE); Ecole nationale supérieure de techniques avancées. 1992, 162 p., figures, 285 références bibliographiques. hal-02186093

HAL Id: hal-02186093

<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02186093>

Submitted on 17 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE
TECHNIQUES AVANCEES**

**QUELQUES APPLICATIONS DES
RELATEURS ARITHMETIQUES :
DE LA PHYSIQUE
A LA SOCIO-ECONOMIE**

(DOCUMENTS ANCIENS INEDITS ET SYNTHESSES RECENTES)

**T. MOULIN, F. BOCCARA, F. CHAUVET, M. FERRE, S. GOLINSKY,
G. MAUGE, P. RIOT, L. SAINT-PAUL, C. VALLET.**

LG

BOU

1

**RAPPORT DE RECHERCHE 265
SEPTEMBRE 1992**

ORGANISME ÉMETTEUR :
(désignation complète du Service ou de l'Établissement)

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE TECHNIQUES AVANCEES

32 Boulevard Victor
75015 PARIS

GSY

CLASSIFICATION

Secret militaire

Secret industriel

Néant

Néant

SI LE DOCUMENT ÉMANE D'UNE SOCIÉTÉ

Numéro du contrat

Service de l'État
chargé de l'exécution du contrat

Néant

Néant

TITRE : QUELQUES APPLICATIONS DES RELATEURS ARITHMETIQUES :
DE LA PHYSIQUE A LA SOCIO-ECONOMIE
(DOCUMENTS ANCIENS INEDITS ET SYNTHESSES RECENTES)

AUTEUR (S) : Th. MOULIN, F. BOCCARA, F. CHAUVET, M. FERRE, S. GOLINSKY,
(personne physique) G. MAUGE, Ph. RIOT, L. SAINT-PAUL, Cl. VALLET

DATE :	NUMÉRO D'ORIGINE DU DOCUMENT	NOMBRE		
		Pages	Figures	Références bibliographiques
Septembre 1992	R. R. 265	162	34	285

RÉSUMÉ D'AUTEUR : La première partie du rapport de recherche est constituée de trois articles inédits auxquels le groupe Systema fait parfois référence. Le plus ancien (1987) établit une liaison entre certains relateurs arithmétiques dégénérés et des algorithmes résolvant certaines équations différentielles (cas de l'oscillateur harmonique quantique par exemple). Dans l'article suivant (1988), sont esquissées des formes de cellules cérébrales (une condition de "bifurcation" est appliquée à un relateur arithmétique biquadratique). Dans le troisième (1988), des relateurs à deux variables d'environnement sont utilisées, à un niveau de synthèse élevé, pour une modélisation de certains phénomènes de vieillissement.

La deuxième partie concerne des problèmes généraux (tels que la complexité, les relations entre science et tradition) et des applications spécifiques en physique, biologie, informatique, sciences humaines, socio-économie (communications présentées en août 1992 lors du XIII^e Congrès International de Cybernétique). Les plus récentes publications exploitent la notion de "système générique" et de "1/2 pilotage".

La troisième partie est une synthèse sur les applications des relateurs arithmétiques, rédigée à l'intention des auditeurs de la deuxième Ecole de Systémique (Mont Ste Odile, octobre 1992).

NOTIONS D'INDEXAGE :

SYSTEMIQUE, SYSTEMES NATURELS, ENVIRONNEMENT, RELATEURS ARITHMETIQUES, ALGEBRES DE LIE, FRACTALES, P-ADIQUES, EQUATIONS DIFFERENTIELLES, NEURONES, VIEILLISSEMENT, PROSPECTIVE, EAU, RAMIFICATION, RESEAUX NEURONAUX, MODELES CONNEXIONNISTES, HOMEOTHERMIE, SOMMEIL PARADOXAL, AUTONOMIE, SPECULARITE, CAUSALITE, SOCIO-ECONOMIE.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES
32, boulevard Victor - 75015 PARIS — Tél. : 45 52 43 21

**QUELQUES APPLICATIONS
DES RELATEURS ARITHMETIQUES :
DE LA PHYSIQUE A LA SOCIO-ECONOMIE
(DOCUMENTS ANCIENS INEDITS ET SYNTHESES RECENTES)**

par

**Thiébaut MOULIN, Frédéric BOCCARA, François CHAUVET,
Michel FERRE, Serge GOLINSKY, Guy MAUGE,
Philippe RIOT, Lionel SAINT-PAUL, Claude VALLET.**

Edité par le centre d'édition et de documentation
de l'Ecole Nationale Supérieure de **Techniques Avancées**
32, boulevard Victor - 75015 PARIS (France)

Dépôt légal n° 92303/300

I.S.B.N. 2.7225.0847.8

SOMMAIRE

Présentation succincte du rapport	5
PREMIERE PARTIE : DOCUMENTS ANCIENS INEDITS	
<ul style="list-style-type: none"> • Réflexions sur des axiomes de la théorie des systèmes de transformations (1987) par Thiébaud MOULIN. 	9
<ul style="list-style-type: none"> • Tentative de modélisation d'un système neuronal au moyen d'un relateur arithmétique : problèmes posés et perspectives (1988) par Thiébaud MOULIN. 	29
<ul style="list-style-type: none"> • Tentative de modélisation de certains phénomènes d'évolution et de vieillissement au moyen de relateurs arithmétiques (1988) par François CHAUVET et Thiébaud MOULIN. 	51
DEUXIEME PARTIE : PROBLEMES GENERAUX ET APPLICATIONS	
<ul style="list-style-type: none"> • Complexité et adaptation à l'environnement (1991) par Thiébaud MOULIN. 	71
<ul style="list-style-type: none"> • Perspectives optimistes issues de réflexions sur l'adaptation des systèmes vivants à leur environnement (1991) par Thiébaud MOULIN. 	83
<ul style="list-style-type: none"> • XIIIe Congrès International de Cybernétique (août 1992) Introduction au Symposium XXVII «Systèmes naturels : mise en oeuvre de nouveaux formalismes et vérifications expérimentales» 	91
<ul style="list-style-type: none"> • Généralisation de la condition d'adaptation d'un système à son environnement et applications à la physique théorique (août 1992) par François CHAUVET. 	95
<ul style="list-style-type: none"> • Relateurs arithmétiques, structures de Lie et singularités (août 1992) par Philippe RIOT. 	101

.../...

- **Un apport possible des relateurs arithmétiques aux modèles connexionnistes (août 1992)** 106
par Serge GOLINSKY et Thiébaud MOULIN.
- **Ebauche d'un modèle générique de "milieux aqueux structurés" (août 1992)** 111
par Thiébaud MOULIN.
- **Cytosquelette de la cellule végétale : émergence d'un relateur arithmétique (août 1992)** 116
par Michel FERRE.
- **Préliminaires pour une nouvelle approche de certains comportements humains (août 1992)** 121
par Claude VALLET.
- **Tentative de formalisation de certains concepts de la théorie de l'autonomie selon P. Vendryès (août 1992)** 126
par Guy MAUGE.
- **Les entiers p-adiques pourraient-ils appréhender certaines régulations en économie? (août 1992)** 131
par Frédéric BOCCARA.
- **Bouclages structurels dans des référentiels "espaces-temps-imbrications" (août 1992)** 136
par Lionel SAINT-PAUL et Thiébaud MOULIN.
- **XIIIe Congrès International de Cybernétique (août 1992) : Conclusion du Symposium XXVII «Systèmes naturels...»** 141

- TROISIEME PARTIE : UNE SYNTHESE RECENTE** 143
- **Le relateur arithmétique : un nouvel outil pour une nouvelle approche en systémique (septembre 1992)** 145
par Thiébaud MOULIN.

Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, 75015 PARIS
Groupe Systema, Rapport de Recherche ENSTA n° 265, Septembre 1992.

**QUELQUES APPLICATIONS DES RELATEURS ARITHMETIQUES :
DE LA PHYSIQUE A LA SOCIO-ECONOMIE
(DOCUMENTS ANCIENS INEDITS ET SYNTHESSES RECENTES)**

par

Th. MOULIN, F. BOCCARA, F. CHAUVET, M. FERRE,
S. GOLINSKY, G. MAUGE, Ph. RIOT, L. SAINT-PAUL, Cl. VALLET

Présentation succincte du rapport

Le rapport comporte trois parties : la première est constituée d'articles inédits auxquels le groupe Systema fait parfois référence (ils ont été soumis pour publication en 1987 et 1988) ; la deuxième rassemble des articles rédigés en 1991 et un certain nombre de communications récentes sur certaines applications des relateurs arithmétiques (elles ont été présentées en août 1992 dans le cadre du XIIIe Congrès International de Cybernétique, à Namur, Belgique, et paraîtront dans les Actes de ce Congrès); la troisième est une synthèse rédigée à l'intention des auditeurs de la deuxième Ecole de Systémique (Abbaye du Mont Sainte-Odile, octobre 1992).

Partie I.

Pierre Delattre souhaitait qu'une liaison solide fût établie entre sa théorie des systèmes de transformations et les relateurs arithmétiques. Une des liaisons possibles est proposée mais le mot "relateur arithmétique" n'apparaît pas dans le texte (le colloque était organisé à la mémoire de P. Delattre, Collège de France, 1987). Cette liaison conduit à une notion inhabituelle de la notion de dérivée et préfigure celle d'ESD (éléments structurés de déplacement).

La modélisation d'un système neuronal au moyen de relateurs arithmétique est un axe permanent de recherche pour le groupe Systema. Dans le deuxième article (VIIIe séminaire de Biologie Théorique, Abbaye de Solignac, 1988), on montre comment des relateurs arithmétiques biquadratiques peuvent fournir une esquisse de formes neuronales.

Le problème du vieillissement d'un organisme vivant est abordé dans une communication au 113e Congrès National des Sociétés Savantes (Strasbourg, 1988). A un niveau de synthèse élevé, un organisme vivant est modélisé par un relateur à 2 variables d'environnement. Si les deux paramètres d'imbrication K_1 et K_2 augmentent progressivement (en restant différents), le nombre de conditions de verrouillage augmente également. Les désynchronisations qui en résultent sont interprétées comme un vieillissement de l'organisme.

Partie II.

La complexité d'un système naturel n'est pas définissable dans l'absolu : c'est celle du modèle qui le représente. Comme le même relateur arithmétique est applicable à différents niveaux d'organisation, certains organes d'êtres pluricellulaires (par exemple des fleurs)

peuvent être modélisés aussi simplement (et parfois plus simplement) qu'un atome d'hydrogène. La simplification essentielle provient de l'usage de référentiels "espaces-temps-imbrications" (point de vue exprimé au cours d'un colloque CNRS sur la complexité, 1991).

Si les paramètres d'imbrications K_1 et K_2 mentionnés précédemment sont égaux, un relateur arithmétique à deux variables d'environnement fonctionne comme un relateur à une seule variable d'environnement. La structure d'imbrication régulière qui se développe produit un "champ de résonances structurelles" dans des référentiels "espaces-temps-imbrications" adéquats. C'est un moyen d'aborder le thème "Science et Tradition" (exposé présenté au Palais de l'UNESCO, en décembre 1991).

Différentes applications des relateurs arithmétiques sont abordées dans 9 communications présentées au cours du récent Congrès International de Cybernétique : Fr. Chauvet examine de façon nouvelle le problème de la mesure en physique; la dynamique d'un relateur (à une seule variable d'environnement) se développe dans un espace ultramétrique alors que les observations se font dans un espace euclidien. En s'appuyant sur la liaison "système de racines d'une algèbre de Lie — relateur cyclique de base (BCR)", Ph Riot retrouve des concepts de la physique mathématique, tels que les flots dynamiques. S. Golinsky et Th. Moulin essayent de décrire un système neuronal au moyen d'un "système générique"; l'utilisation d'un "1/2 pilotage" fait émerger des aspects objectifs associés à des langages formels et réalise une cohérence globale associée à des cheminements dans des référentiels "espaces-temps-imbrications".

Au moyen d'un modèle analogue, est esquissée une modélisation de "milieux aqueux structurés" applicable en biologie. Les BCR sous-jacents choisis (associés au système de racines du groupe de Lie SU_5) sont compatibles avec $SO(4,2)$, qui est un groupe dynamique pour l'atome d'hydrogène; une interprétation nouvelle de phénomènes d'interférence quantique est proposée. Par ailleurs, M. Ferré montre que le relateur arithmétique correspond à une structure mathématique qui émerge naturellement de l'étude de la ramification chez les végétaux.

L'application des relateurs arithmétiques dans les sciences humaines et en socio-économie démarre. Cl. Vallet, s'appuyant sur les travaux de R. Pagès et de M. Juvet, cherche à modéliser certains comportements de Mammifères homéothermes au moyen d'un relateur arithmétique multiquadratique à 2 variables d'environnement; la condition d'homéothermie est interprétée comme un bouclage entre deux niveaux de description; une esquisse de la modélisation des phases d'éveil, de sommeil et de "sommeil paradoxal" est proposée. Guy Maugé cherche à formaliser partiellement la théorie de l'autonomie de P. Vendryès et à l'appliquer à l'entreprise : il s'agit d'intégrer profondément des objectifs économiques et des objectifs humains; la liaison est réalisée grâce au principe de spécularité de J.-L. Vullierme qui caractérise une adaptation à l'environnement. F. Boccara aborde également le domaine de la socio-économie en complétant l'usage classique des nombres réels par celui des entiers p -adiques; le relateur arithmétique se présente comme un moyen de coupler de façon cohérente ces deux types de nombres (et leurs extensions algébriques). La dernière communication reflète des préoccupations liées à la causalité dans les systèmes économiques (qui ont été exprimées notamment par B. Paulré); il semble nécessaire de prendre en compte des bouclages structurels.

Partie III.

La synthèse proposée est destinée à des auditeurs ne souhaitant pas connaître en détail le formalisme des relateurs arithmétiques. Divers exemples d'application sont présentés.

Th. Moulin

PREMIERE PARTIE :
DOCUMENTS ANCIENS INEDITS

- Réflexions sur des axiomes de la théorie des systèmes de transformations (1987)** 9
par Thiébaud MOULIN.
- Tentative de modélisation d'un système neuronal au moyen d'un relateur arithmétique : problèmes posés et perspectives (1988)** 29
par Thiébaud MOULIN.
- Tentative de modélisation de certains phénomènes d'évolution et de vieillissement au moyen de relateurs arithmétiques (1988)** 51
par François CHAUVET et Thiébaud MOULIN.

REFLEXIONS SUR DES AXIOMES DE LA THEORIE DES SYSTEMES DE TRANSFORMATIONS

Thiébaut MOULIN (*) (**)

Abstract : The axioms of the Transformation Systems Theory and some wishes expressed about ten years ago by Pierre Delattre are a reliable starting point for the modelization of natural systems. We propose to define sequentially equivalence classes at several levels of description. A new concept of time-derivation is characterized by a degenerated quadratic support and an indivisible string of reflections. The coherence of the living systems could be partially expressed by means of quadratic multiplicative domains and virtual information numbers.

Résumé : Les axiomes de la Théorie des Systèmes de Transformations et certains souhaits exprimés par Pierre Delattre il y a une dizaine d'années sont un solide point de départ pour la modélisation des systèmes naturels. Des classes d'équivalence peuvent être définies séquentiellement à différents niveaux de description. Un nouveau concept de dérivation par rapport au temps est caractérisé par un support quadratique dégénéré et une séquence insécable de réflexions. La cohérence des systèmes vivants pourrait être exprimée au moyen de domaines multiplicatifs et de nombres d'information virtuelle.

INTRODUCTION

Participer au Colloque dédié à la mémoire de Pierre DELATTRE me tenait beaucoup à coeur : d'abord parce que ses livres et ses articles ont été et continuent d'être un point d'appui solide et une source d'inspiration dans mes recherches; mais aussi, parce que l'on ne peut pas oublier le soutien

* Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, 75015 PARIS (France).

** Texte légèrement remanié de l'exposé présenté lors du Colloque "En hommage à Pierre Delattre", 4 et 5 décembre 1987, Collège de France, Paris (la présentation intuitive du concept introduit dans le paragraphe 3, p. 11-12, a été modifiée). La version soumise le 16 décembre 1987 n'a pas été retenue par l'éditeur des actes car elle était trop longue.

efficace que P. Delattre apporta au Groupe Systema depuis sa création et tout ce qu'il fit pour que les travaux de ce groupe soient connus. Grâce à lui, des articles furent publiés dès 1978 en France et à l'étranger et deux membres du groupe purent participer comme enseignants aux trois premières sessions de l'Ecole de Biologie Théorique. Ils se souviennent encore avec émotion de l'atmosphère particulièrement enrichissante et chaleureuse qui avait régné en ces moments-là à l'Abbaye de Solignac.

L'ouverture et la grande bonté de P. Delattre n'excluaient pas un souci constant de rigueur. En particulier, il estimait que la base des travaux du groupe n'était pas assez solide et que son approche devait être développée en symbiose avec d'autres théories nouvelles, notamment la Théorie des Systèmes de Transformations et la Théorie des Catastrophes. P. Delattre donnait ces conseils en 1972, quelques mois après la parution de son ouvrage *L'évolution des systèmes moléculaires* [1] et de son essai épistémologique *Systèmes, structure, fonction, évolution* [2], avec en toile de fond quelques interrogations sur un livre qui était très attendu : *Stabilité structurelle et morphogénèse* de R. Thom [3].

Nos discussions, qui se sont poursuivies au cours du colloque *Elaboration et justification des modèles* [4], peuvent être centrées sur les axiomes de la Théorie des Systèmes de Transformations. Il m'a fallu bien longtemps pour comprendre la profondeur des remarques de P. Delattre : Il souhaitait que l'on attachât la plus grande importance aux hypothèses qui sont rarement explicitées, parce que souvent leur "évidence" n'est que le fruit de l'habitude. Sur d'autres problèmes fondamentaux, il adoptait un point de vue qui me semble maintenant très judicieux, alors que, autrefois, ce point de vue me paraissait seulement prudent : par exemple, il conseillait de ne pas choisir entre le continu et le discret mais d'essayer d'assembler harmonieusement ces deux moyens de description. Il faut également citer son souci d'intégrer profondément dans la structure d'un modèle, géométrie, dynamique et rythmes sous-jacents... Et, bien sûr, la pertinence et le choix des modèles le tracassaient beaucoup; souvent, il donnait en exemple les travaux de J. Delforge [5] car, dans certains cas particuliers, ils apportent des éléments de réponse précis.

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

Ces anciennes discussions vont d'abord être résumées dans la mesure du possible : après un rappel des axiomes de la Théorie des Systèmes de Transformations, sera abordée la notion de classe d'équivalence dans l'hypothèse d'une imbrication de niveaux. Parce que l'évolution du cardinal des classes d'équivalence fait l'objet de plusieurs axiomes, on examinera comment peuvent être modifiées ces règles d'évolution quand l'hypothèse du continu n'est plus applicable. C'est un problème qu'a évoqué G. Chauvet dans son exposé et que m'avait posé P. Delattre dès 1979, en renouvelant sa demande à plusieurs reprises, au cours d'entretiens ultérieurs. En bref, la dérivation sera étroitement associée à des rythmes sous-jacents et à des séquences insécables qui font transparaitre, au niveau du local, la structure et la dynamique du global. Le problème posé ne peut donc pas être séparé d'autres sujets fondamentaux, qui sont développés dans le document de synthèse [6], présenté au cours de l'exposé de R. Thom. Citons le principe d'évolution attaché au problème de l'individuation, le problème du temps, la liaison entre les approches holistiques et réductionnistes...

Enfin, l'un des axiomes de la Théorie des Systèmes de Transformations sera interprété au moyen de l'information virtuelle, notion directement liée à deux autres préoccupations de P. Delattre : la finalité en biologie et l'autonomie des niveaux de description. A ce sujet, les travaux très fondamentaux de P. Vendryès [7], que P. Delattre m'avait fait connaître, ont beaucoup modifié mes idées.

1. LES AXIOMES DE LA THEORIE DES SYSTEMES DE TRANSFORMATIONS

Voici un résumé des six axiomes de la Théorie des Systèmes de Transformations, extrait de [8] (la numérotation diffère de celle adoptée en [1]). Le terme "axiome" doit être compris dans un sens large, n'imposant pas leur stricte indépendance. En particulier, P. Delattre rappelle que l'un d'eux, celui «qui a la même forme que la loi d'action des concentrations (Van't Hoff) de la chimie et que la loi des

rencontres (Volterra) de l'écologie,... est une véritable loi statistique, dès lors que l'on admet que le premier axiome est respecté».

«**Définition.** On se trouvera en présence de systèmes de transformations chaque fois que l'on étudiera des ensembles d'objets qui, par suite des interactions qu'ils subissent entre eux ou des actions extérieures qui leur sont imposées, voient se modifier au cours du temps certaines au moins des caractéristiques qui servent à les définir.»

«**Axiome 1.** Les objets étudiés sont supposés répartis en classe d'équivalence, l'équivalence étant définie par l'identité des propriétés dans le système étudié.»

«**Axiome 2.** Entre deux classes quelconques E_j et E_k , la possibilité de transformation des éléments peut être inexistante, à sens unique ou à double sens.»

«**Axiome 3.** Si la transformation d'un élément entre les classes E_j et E_k est provoquée par un champ, d'origine interne ou externe au système, et d'intensité φ , le nombre F_{kj} de telles transformations par unité de temps est :

$$F_{kj} = \sigma_{kj} \varphi N_j,$$

où N_j est le nombre d'éléments dans la classe j à l'instant t et σ_{kj} la probabilité de la transformation élémentaire considérée.»

«**Axiome 4.** Si la transformation d'un élément entre les classes E_j et E_k est spontanée, c'est-à-dire ne dépend que des propriétés intrinsèques de l'élément, le nombre de telles transformations par unité de temps est :

$$F_{kj} = \eta_{kj} N_j .\text{»}$$

«**Axiome 5.** Si une transformation met en jeu α_j éléments de la classe E_j , α_{j+1} éléments de la classe E_{j+1} , ... α_{j+p} éléments de la classe E_{j+p} , le nombre de telles transformations par unité de temps est de la forme :

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

$$F = K N_j^{\alpha_j} N_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \dots N_{j+p}^{\alpha_{j+p}}$$

K étant un facteur de proportionnalité.»

«**Axiome 6.** Une transformation $E_j \rightarrow E_k$ peut mettre en jeu α_{kj} éléments de E_j et donner naissance à β_{kj} éléments de E_k (α, β entiers ≥ 1).»

2. CLASSES D'EQUIVALENCE ET NIVEAUX D'IMBRICATION

Les différents symboles qui interviennent dans la dérivée dN_i / dt repèrent les principaux problèmes discutés : d et $/$ symbolisent la dérivation, t le temps et N_i la séparation en classes d'équivalence. La notion de différentielle n'est pas dissociable du continu qui s'est imposée en Théorie des Systèmes de Transformations pour une raison pratique : dans les problèmes traités, le nombre N_i d'objets dans la classe i est très élevé; les règles de transformation des classes, les unes dans les autres, sont donc exprimées statistiquement. Mais l'usage du continu peut être justifié pour des raisons plus profondes. P. Delattre souhaitait décrire les changements de niveaux d'organisation qui ont un rôle fondamental dans l'étude des systèmes vivants (l'application de la Théorie des Systèmes de Transformations en théorie des populations [9] et les travaux qui s'y rattachent, notamment ceux de P. Auger [10], le font apparaître clairement); il recherchait l'émergence du discret par l'étude des singularités (cette préoccupation sous-tend par exemple les travaux de C. Hyver [11]). A l'avis de R. Thom [12], l'approche continue présente «un avantage énorme ... par rapport aux autres approches discrètes ou ensemblistes, qui ne pourront jamais résoudre ... l'antinomie entre l'approche réductionniste et l'approche holistique.» Mais P. Delattre ne pouvait oublier que le discret intervient fondamentalement dans la théorie des graphes qui est l'outil de représentation des systèmes de transformations, que le discret sert à dénombrer les objets de chaque classe

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

moléculaire» est d'ailleurs le titre d'une des publications [13] de P. Delattre. De plus, pour que l'on puisse associer étroitement ontogénèse et phylogénèse, il faut que la notion de temps prenne en compte une imbrication progressive de niveaux d'organisation. Mais cela ne suffit pas. H. Le Guyader [14] rappelle qu'un aspect topologique doit intervenir «puisque deux cellules éloignées au stade morula peuvent engendrer des populations cellulaires voisines l'une de l'autre au stade adulte».

Dans un système quelconque, certaines classes d'équivalence se regroupent, soit pour former des sous-systèmes, soit pour devenir une nouvelle classe d'équivalence (ce sujet est traité par P. Delattre [9, p 264-274] dans le cas des systèmes linéaires). Un schéma typique, extrait de [1], est reproduit en figure 1. Les ovales représentent des sous-systèmes. L'élément CA correspond au «complexe activé» des chimistes : il est nécessaire de l'introduire pour que les axiomes de la théorie soient vérifiés.

Voici comment ces préoccupations pourraient être abordées de façon synthétique. Supposons que l'on prenne en compte a priori une imbrication de niveaux de description. Les unités, représentant les éléments d'une classe, sont décomposées en sous-unités (unités d'ordre 1), puis en sous-sous-unités (unités d'ordre 2), etc... Appelons k un des niveaux et soit ε un paramètre pouvant prendre une valeur arbitrairement petite. Le système peut être décrit jusqu'au niveau K au moyen d'une portion (ou de plusieurs portions) d'un cycle de description L_K . Chaque "état" est représenté par un ensemble de composantes X_μ jouant, chacune, le rôle d'une sorte de fonction génératrice :

$$X_\mu = \sum f_{\mu k} \varepsilon^k$$

Les $f_{\mu k}$ sont des fonctions de plusieurs variables et sont associées aux propriétés des unités d'ordre k . Un graphe d'interaction de niveau k s'obtient à partir de moyennes sur des possibilités de passage d'un état dans un autre au cours de portions de cycle L_{K+1} . Si les cycles de description sont régulièrement emboîtés, il est généralement possible de remplacer une

portion de cycle par un ensemble de séquences appelées "séquences réduites". Quatre notions se trouvent donc associées :

- un temps interne τ_k repérant des unités d'ordre k au cours du cycle L_K ,
- le nombre K maximal de niveaux,
- le temps externe décrivant la dynamique du système global,
- les séquences réduites.

A la notion de classe d'équivalence et de graphe d'interaction est donc substituée une imbrication de classes d'équivalence, de séquences réduites et de graphes, engendrée par des rythmes internes. Cette idée est en germe dans les modèles connexionnistes, qui sont des réseaux formels neuronaux ou des extensions d'automates cellulaires. Ces modèles, développés très récemment [15,16], mettent l'accent sur des imbrications de séquences qui diffèrent de celles obtenues classiquement dans la théorie des automates. Les problèmes linguistiques sont donc abordés sous un jour nouveau, chaque concept classique étant décrit, à un niveau sub-linguistique, par une configuration d'états. L'introduction d'éléments d'un langage au coeur des modèles est une préoccupation de R. Thom dont il a été souvent question avec P. Delattre.

Afin d'illustrer ce point de vue un peu abstrait, voici une configuration (figure 2) obtenue par un outil mathématique qui est étudié par le groupe Systema depuis 1971 et dont je vous laisse deviner le nom. Cet outil peut être considéré comme un moyen de construction simple de fonctions génératrices X_μ . Il est apparenté aux réseaux connexionnistes et, de façon lointaine il est vrai, à certains automates fabriquant des configurations de type fractal [17], mais ce n'est pas un automate car il est incomplètement défini. Une description sommaire est donnée en [18] (quelques pages lui sont aussi consacrées dans l'Encyclopédie sur les Systèmes qui vient d'être éditée par Pergamon Press [19]). On peut considérer que chaque amas constitué de sous-amas (amas d'ordre 1),... décrit une classe d'équivalence d'unités d'ordre 1, représentant elles-mêmes des classes d'unités d'ordre 2, etc... Les propriétés de chaque classe et les graphes d'interaction dépendent du niveau de description, de la valeur de certains paramètres et d'effets de projection caractérisant des "points de vue" sur le système considéré. Ces

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

derniers facteurs introduisent aux niveaux $k' > k$ une représentation partielle de caractéristiques considérées au niveau k comme qualitatives.

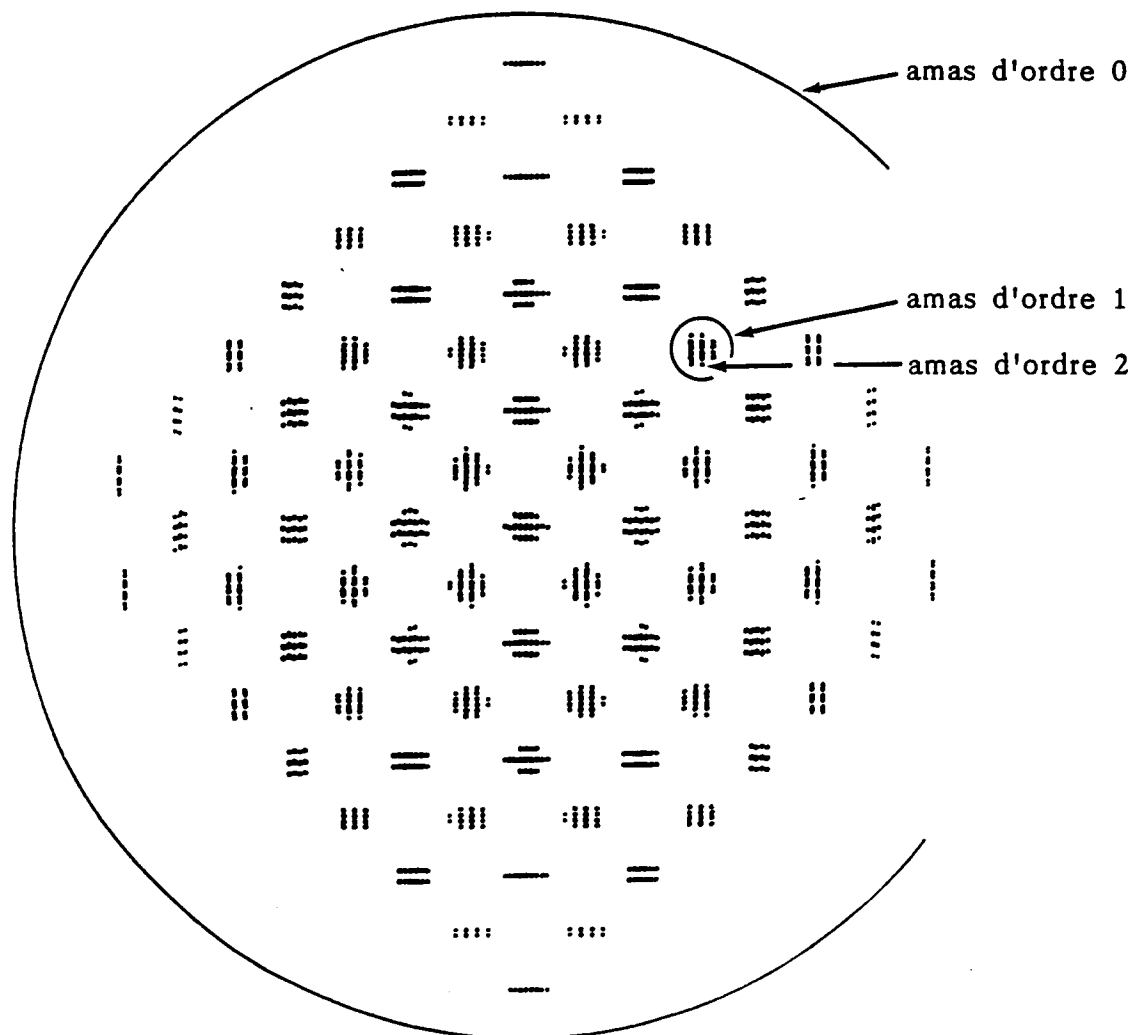


Figure 2

Dans cette optique, l'axiome 1 de la Théorie des Systèmes de Transformations exprime implicitement qu'il y a eu choix préalable d'un niveau de description, de paramètres cachés et de "points de vue"; de plus, qu'une valeur suffisamment faible du paramètre ε a garanti la séparation

des classes d'équivalence. C'est encore un problème mentionné dans l'exposé de R. Thom.

3. LA DERIVATION PAR RAPPORT AU TEMPS

A un niveau de description k fixé, la variation par unité de temps du nombres d'éléments d'une classe est le résultat d'une activité s'effectuant à des niveaux $k' \neq k$. En général, il faut distinguer soigneusement le temps physique externe au niveau k et le paramètre τ repérant des étapes de description partielle à d'autres niveaux durant un intervalle fini de temps externe δt .

Voici un exemple simple précisant ces idées. Au lieu d'écrire brutalement :

" dN/dt est la limite, si elle existe, de $[N(t+\delta t) - N(t)]/\delta t$ pour $\delta t \rightarrow 0$ ", utilisons 4 nombres : $N(t+\delta t)$, $N'(t+\delta t)$, $N(t)$ et $N'(t)$, en faisant l'hypothèse suivante : du point de vue externe, c'est-à-dire aux instants t et $t+\delta t$, $N = N'$ strictement. Par contre, au cours de la description interne, c'est-à-dire durant δt , N peut différer de N' . En d'autres termes, après une séquence S d'opérations notées \mathfrak{H}_α , qui doit être considérée du point de vue externe comme une séquence insécable, $N(t) = N'(t)$ se transforme en $N(t+\delta t) = N'(t+\delta t)$. La notion de séquence insécable est la traduction d'une constatation banale : dans un organisme vivant, à un niveau d'organisation donné, l'interruption d'un processus naturel de fabrication ne produit pas une fraction d'unité mais un ensemble d'éléments qui n'appartiennent pas à ce niveau. La notion de séquence insécable reflète donc, au plan de la dynamique interne, la notion d'unité insécable intervenant dans la définition des classes d'équivalence.

La dynamique interne est introduite au moyen d'opérateurs nilpotents qui peuvent être associés à des dérivations et sont interprétés comme des transvections (définies notamment dans les travaux de E. Artin [20]). Afin de présenter intuitivement ces notions, faisons un raisonnement qui n'est pas rigoureux mais qui permet de saisir le mécanisme mis en oeuvre.

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

Nous avons admis que les variables N et N' étaient repérées par le même paramètre t . De façon plus générale, nous pourrions supposer que N est repéré par t , et N' par un autre paramètre t' ; puis imposer les conditions $t'_{n-1} = t_{n-1}$, $N'(t_{n-1}) = N(t_{n-1})$ et $t'_n = t_n$, $N'(t_n) = N(t_n)$ aux "extrémités" de ce qui paraît être le n -ième "intervalle" $\delta t' = \delta t$ (les δt successifs sont supposés égaux afin d'alléger le raisonnement). Dans ce type d'approche, le temps externe est donc discrétisé. Les états intermédiaires de t et de t' dans les "intervalles" respectifs (t_{n-1}, t_n) et (t'_{n-1}, t'_n) peuvent différer; et t' n'est pas nécessairement situé entre t'_{n-1} et t'_n . A priori, dans ces "intervalles", pour $t' \neq t$, le rapport $(N-N')/(t-t')$ peut prendre des valeurs très différentes. Choisissons celles pour lesquelles $(N-N') = \varepsilon g$ et cherchons à exprimer en $t'_n = t_n$ l'existence simultanée de deux situations distinctes : la première définissant l'état $N'_n = N_n$ au temps présent t_n ; l'autre correspondant à un état potentiel $N^*_n = N'_n + \varepsilon g$, associé à des états intermédiaires.

La façon la plus simple de prendre en compte simultanément ces deux situations consiste à écrire que les deux valeurs N_n et N^*_n sont solutions de l'équation du second degré :

$$(N - N') (N - N' - \varepsilon g) = 0 \quad \text{qui s'écrit aussi :}$$

$$(N - N')^2 = (N - N') \varepsilon g . \quad (1)$$

Inversons maintenant la démarche. Au départ, il y a deux données : l'expression quadratique (1) et la valeur $N(t_n) = N'(t_n)$. Pour $g \neq 0$, il y a deux racines distinctes en N à N' fixé. La deuxième racine N^* se calcule aisément à partir des coefficients de N^2 et de N dans (1) :

$$N^* = -N(t_n) + 2N'(t_n) + \varepsilon g = N'(t_n) + \varepsilon g$$

Cette opération est notée \mathfrak{H} . Puis, par le même procédé, transformons N' en N'^* , à N^* fixé, en choisissant la racine $N'^* \neq N'(t_n)$. Le résultat de cette opération, notée \mathfrak{H}' , est $N'^* = N^*$. Finalement, la séquence insécable $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}'\mathfrak{H}$ (lue dans le sens de la flèche) fournit :

$$N(t_{n+1}) = N'(t_{n+1}) = N^* = N(t_n) + \varepsilon g = N'(t_n) + \varepsilon g .$$

L'intervalle de temps δt n'intervient pas dans le calcul de N^* . Il est donc possible d'ajouter l'hypothèse supplémentaire suivante : pour $\delta t \rightarrow 0$, ε décroît comme δt . Dans ces conditions, la limite du rapport $[N(t_{n+1}) - N(t_n)] / \delta t$ est, par construction, proportionnelle à g . La notion de dérivée prend donc un sens très différent de celui qui lui est classiquement attribué puisqu'elle fait intervenir un choix. La possibilité d'effectuer ce choix tient à la donnée d'une expression quadratique et d'une séquence insécable adéquates.

Prenons $\varepsilon = \delta t$ et supposons que g soit une fonction du temps t_n . Puisque (1) représente $0 = 0$, il est possible de modifier arbitrairement la valeur de g dans (1) à condition de le faire en dehors des "intervalles" δt pendant lesquels s'applique $\$,$ c'est-à-dire pour $t_n = t_0 + n\delta t$ si les δt sont égaux. Après n applications de $\$,$ $N(t_n)$, qui est égal à $N'(t_n)$, devient :

$$N(t_n) = N(t_0) + \sum_{h=0}^{n-1} g(t_h) \delta t$$

Pour δt suffisamment petit, le deuxième terme du second membre tend vers l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_n} \frac{dN}{dt} dt$$

La dérivée est donc remplacée par un ensemble de trois choses :

- une expression quadratique dégénérée en N, N' ,
- une séquence insécable $\$$ d'opérations de secondes racines,
- des valeurs "initiales" vérifiant $N(t) = N'(t)$.

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

Cette façon de procéder peut être généralisée à des formes quadratiques dégénérées à plusieurs variables. Les opérations \mathfrak{H} de "seconde racine" correspondent géométriquement à des réflexions.

La solution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants est calculable par une méthode exploitant les résultats précédents. Il faut évidemment que la relation quadratique comporte assez de variables, que son degré de dégénérescence convienne et que sa structure soit appropriée. La séquence insécable $\$$ contient alors un nombre de réflexions dépendant du nombre de variables et du degré de dégénérescence. Dans le cas de certains systèmes non linéaires ou linéaires à coefficients non constants, il y a en plus des carrés des termes croisés de degré supérieur à 2. Voici un exemple pris en mécanique quantique : celui de l'oscillateur harmonique quantique vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (\lambda - x^2) \psi = 0 \quad (2)$$

On sait que les solutions sont régulières à l'infini pour $\lambda = 2\ell + 1$ et ℓ entier positif ou nul.

Le terme x^2 est d'abord calculé par intégrations successives au moyen de la procédure indiquée précédemment. Puis la dérivée seconde $d^2\psi / dx^2$ est exprimée au moyen de (2) et intégrée deux fois. A l'équation différentielle (2), est donc associée la relation :

$$\begin{aligned} & (Y - Y')^2 + (Y - Y')X + (X - X')^2 + \gamma(X - X')Y(B - h) + \dots \\ & \dots(B - B')^2 + (B - B')A + (A - A')^2 + 2(A - A') = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Après application de la séquence insécable :

$$\$ = (\mathfrak{H}_y' \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_x' \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_{b'} \mathfrak{H}_b \mathfrak{H}_{a'} \mathfrak{H}_a),$$

les conditions $Y = Y'$, $X = X'$, $B = B'$, $A = A'$ restent satisfaites si elles le sont initialement. Ces quantités tendent respectivement vers ψ , $d\psi/dx$, x^2 et $2x$ pour $A(0) = A'(0) = 0$, $B(0) = B'(0) = 0$ si g est suffisamment petit. L'étude numérique montre que le comportement est bien régulier à l'infini pour :

$$\gamma \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad h \rightarrow \frac{(2\ell + 1)}{\sqrt{\gamma}}$$

L'entier ℓ détermine la quantification. Les autres valeurs initiales sont :

$$\begin{cases} X(0) = X'(0) = 0, & Y(0) = Y'(0) \neq 0 & \text{pour } \ell \text{ pair} \\ X(0) = X'(0) \neq 0, & Y(0) = Y'(0) = 0 & \text{pour } \ell \text{ impair.} \end{cases}$$

Les solutions classiques sont bien retrouvées (un exemple numérique est présenté sur la figure 3).

$$\begin{cases} \ell = 14 \\ \lambda = 2\ell + 1 = 29 \\ \gamma = 10^{-8} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma}} = 29 \cdot 10^4 \\ h_{\text{calcul}} = 29.039\dots \cdot 10^4 \\ \text{(valeur donnant } Y \sim 0 \text{ pour } |x| \text{ très grand à } \gamma \text{ fixé)} \end{cases}$$

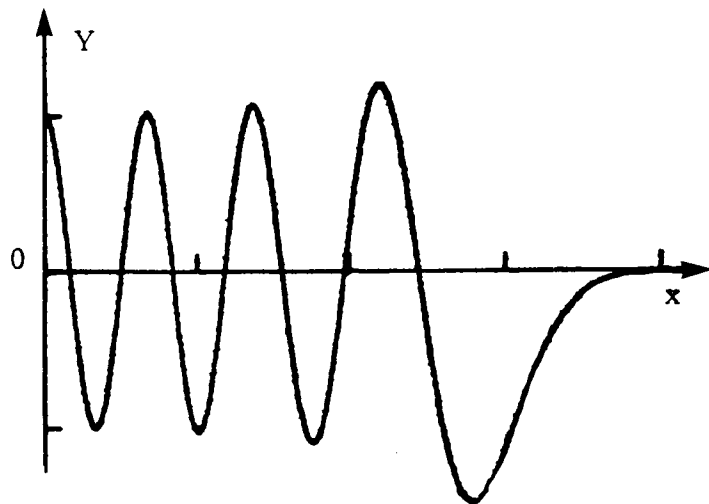


Figure 3

4. ADAPTATION D'UN SYSTEME A SON ENVIRONNEMENT

Cette construction ne correspond pas encore (*) aux demandes de P. Delattre car l'usage d'une séquence insécable n'exprime pas complètement le caractère insécable des éléments d'une classe d'équivalence. Pour résoudre ce problème, on écrit que les variables et paramètres de la relation associée au système différentiel ne prennent que des valeurs entières. Prenons l'exemple de la relation (3). Le paramètre γ est d'abord remplacé par le rationnel D/P . Le calcul montre que les réflexions \mathfrak{H}_x , $\mathfrak{H}_{x'}$, \mathfrak{H}_y , $\mathfrak{H}_{y'}$... font intervenir des divisions par P . Puisque les résultats fractionnaires sont interdits, en général la séquence $\$$ n'est applicable qu'un nombre limité de fois. Ce nombre dépend de la valuation des valeurs initiales qui est caractérisée par un entier positif K . Par exemple, pour $X(0) = X'(0) \neq 0$ et $x_{\mu 0}$ non divisible par P , $X(0)$ s'écrit :

$$X(0) = x_{\mu 0} P^K \quad (4)$$

Dans le domaine étudié, K fixe donc le pas d'intégration. Pour essayer d'accroître la précision sans augmenter K , on introduit la notion "d'environnement" qui résume tout ce qui n'appartient pas au niveau de description considéré.

Le problème des relations d'un système et de son environnement a été évoqué à de nombreuses reprises dans de précédents exposés. Avec les hypothèses faites, il est possible d'exprimer une relation générale d'adaptation à l'environnement (elle a été établie par Cl. Vallet [22] en 1975, puis interprétée géométriquement par M. Ferré [23] en 1981). On reconnaît l'outil mathématique qui est développé par le groupe Systema.

Un dernier pas reste à faire : oser casser les séquences insécables, par exemple en oubliant les réflexions associées aux X'_μ . Il en résulte un type

* La représentation d'une sommation au moyen d'opérateurs nilpotents a été envisagée, dès 1974, dans une publication de H. Apter et al. [21], à la suite d'une suggestion de M. Bouix.

de description inhabituel, réalisant essentiellement un balayage des K niveaux de description. Chacun d'eux est esquissé de façon partielle (les points figuratifs sont clairsemés) et surabondante (certaines potentialités sont prises en compte), alors que les modèles classiques décrivent en détail et de façon généralement non ambiguë un niveau (ou éventuellement deux). Si le paramètre $\gamma = D/P$ est suffisamment petit, les états se regroupent en amas, sous-amas, etc... C'est de cette façon qu'a été obtenue la figure 2 commentée précédemment. Partis de la Théorie des Systèmes de Transformations de P. Delattre, nous la retrouvons à l'arrivée.

5. INFORMATION VIRTUELLE ET BOUCLAGE

Dans la Théorie des Systèmes de Transformations, l'axiome 5 s'applique à des sous-systèmes S_j et S_k en interaction. Leur transformation s'écrit sous la forme symbolique suivante [1, p. 36-37] :

$$n_j E_j + n_{j+1} E_{j+1} \dots + n_{j+l} E_{j+l} \quad n_k E_k + n_{k+1} E_{k+1} \dots + n_{k+p} E_{k+p} \quad (5)$$

Chacun de ces sous-systèmes est symbolisé par un ovale dans le graphe d'interaction. La présence de l'élément CA_{jk} , qui correspond au complexe activé des chimistes, est indispensable dans le cadre de l'axiomatique adoptée (cet élément apparaît sur la figure 1 entre les sous-systèmes S_{123} et S_{45}). Puisque le complexe CA_{jk} est en relation avec les éléments de S_j et de S_k , les valeurs initiales du modèle arithmétique ont, en facteur, des puissances des entiers P_α liés aux éléments de S_j et de S_k . Les valeurs initiales généralisant (4) sont donc de la forme :

$$X_\mu(0) = x_{\mu 0} \prod P_\alpha^{K_\alpha} \quad (6)$$

Les exposants K_α peuvent être, dans certains privilégiés (réactions stœchiométriques), directement liés aux coefficients n_α de (5).

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

Supposons que les K_α aient K pour PGCD. Aux K_α , sont associés des changements de niveaux de description et l'on peut dire que la structure observée à un niveau, par exemple moléculaire, se reflète à d'autres niveaux. Elle le fait "réellement" s'il existe des systèmes répondant à la factorisation et "virtuellement" si le niveau d'organisation considéré n'a pas encore été atteint au cours de l'évolution. Cette remarque prend de l'importance si les P_α sont des expressions quadratiques constituant un domaine multiplicatif, c'est-à-dire à 2, 4 ou 8 variables car il y a possibilité de bouclage cohérent de la structure. Les interférences les plus simples sont décrites par les nombres complexes (et les anneaux quadratiques dans le cas de l'arithmétique); ils interviennent fondamentalement en mécanique quantique. La structure plus compliquée des quaternions se retrouve, compte tenu d'une extension algébrique convenable, dans celle de l'atome d'hydrogène et, plus généralement, dans celle de l'électromagnétisme et de la gravitation. La cohérence du vivant devrait relever de structures encore plus riches, associées à celle des octaves de Graves-Cayley (multiplication non-associative et non-commutative). C'est l'origine des "Nombres d'Information Virtuelle" qui ont été introduits en 1977 [24]. Un aperçu sur une imbrication particulière au niveau cellulaire a été présenté, en 1987, au cours du VIIe Séminaire de l'Ecole de Biologie Théorique à Solignac, à la suite d'une précédente tentative de liaison avec la Théorie des Systèmes de Transformations (cf. actes du VIe Séminaire). Enfin, d'autres bouclages structuraux devront être examinés : ils s'apparentent à ceux qui, dans les modèles connexionnistes [15], [16], conduisent à la notion d'apprentissage. Tout cela donne un éclairage inhabituel sur le problème de la finalité en biologie.

CONCLUSION

En conclusion, je voudrais exprimer une nouvelle fois ma reconnaissance à l'égard de P. Delattre qui a vigoureusement aidé le groupe Systema. Ce qu'il a fait pour nous, il l'a fait pour beaucoup d'autres. Tout en bâtissant une oeuvre d'une grande richesse, P. Delattre

savait favoriser le rapprochement des hommes et des idées. Grâce à lui, s'est créé à l'Abbaye de Solignac un réseau d'amitié reliant ceux qui réfléchissent sur le phénomène vivant, ébauchent des approches théoriques, exploitent des résultats expérimentaux. Si cette ambiance continue à se développer, la Biologie Théorique ne sera pas une mosaïque de théories disjointes ou englobantes mais apparaîtra progressivement comme un système d'approches individualisées, étroitement reliées les unes aux autres à la manière de cellules formant un organisme vivant. Dès à présent, des liens insoupçonnés apparaissent entre des approches fort différentes : théorie des systèmes de transformations, théorie des catastrophes, systèmes de Lindenmayer, modèles enzymatiques, modèles connexionnistes, modèles arithmétiques,... Même des approches peu formalisées, telles que la théorie de l'autonomie, commencent à participer à cette symbiose. Cette évolution paraît correspondre à un profond souhait de Pierre DELATTRE.

REFERENCES

- [1] P. Delattre, *L'évolution des systèmes moléculaires*, Maloine-Doin, Paris, 1971, 194 p.
- [2] P. Delattre, *Système, structure, fonction, évolution*, Maloine-Doin, Paris, 1971, 184 p.
- [3] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, W.A. Benjamin Inc., Mass, 1972, 362 p.
- [4] P. Delattre, M. Thellier (dir), *Actes du Colloque "Elaboration et Justification des modèles"*, Tome I et II, Maloine, Paris, 1978, 748 p.
- [5] J. Delforge, *Etude sur les problèmes d'identification dans les systèmes de transformations linéaires*, Thèse, Université Paris-Sud, 1975, 200 p.
- [6] P. Delattre, *Théorie des systèmes et épistémologie*, ATP "Analyse des Systèmes" du CNRS, Note CEN-Saclay, janvier 1979, 76 p.
- [7] P. Vendryès, *Vie et probabilité*, Albin Michel, Paris, 1942, 379 p.
- [8] P. Delattre, *La régulation des systèmes de transformations*, Note CEN-Saclay, 1975, 34 p.
- [9] P. Delattre, *Transformation System with Time-Dependent Characteristics and Population theory*, Mathematical Biosciences, **32**, 239-274, 1976.
- [10] P. Auger, *Coupling between N levels of observation of a system (biological and physical) resulting in creation of structures*, Int. J. General Systems, 1980, Vol. 6, p. 83-100.
- [11] C. Hyver, *Stability of transformation systems by tree graphs : extension to structures of biological importance*, J. Theor. Biol., **82**, 187-204, 1980.
- [12] R. Thom, *La théorie des catastrophes et ses applications*, in "Réflexions sur de nouvelles approches dans l'étude des systèmes", édité par ENSTA, 32 bd Victor, 75015

Réflexions sur des axiomes de la T.S.T.

Paris, 1975, p. 9-22.

[13] P. Delattre, *Les rythmes biologiques et le problème de l'intégration en biologie moléculaire*, Seillac, 23 sept. - 2 oct. 1982, CEN-Saclay, 24 p.

[14] H. Le Guyader, *Les bases de la construction d'un formalisme applicable au vivant : exemple du relateur arithmétique*, in "Actes du premier Séminaire de Biologie Théorique du CNRS", édité par ENSTA, 32 bd Victor, 75015 Paris, 1981, p. 81-120.

[15] P. Smolensky, *On the proper treatment of connectionism*, in "Behavioral and Brain Structure Formation", Cambridge University Press, 1987, 37 p.

[16] D. Amit, *Neural Network - Achievements, prospects difficulties*, in "The Physics and Structure Formation", Int. Symposium, Tübingen, oct. 1986.

[17] H.O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer Verlag, Berlin, 1986, 199 p.

[18] Th. Moulin, *Présentation sommaire des relateurs arithmétiques*, Cahiers Systema n°12, avril 1986, p. 25-113.

[19] Th. Moulin, *Simulation Modelling Formalism : Arithmetic Relators*, in "Systems and Control Encyclopedia", Vol. VI, p. 4334-4337, 1987.

[20] E. Artin, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1962, 209 p.

[21] H. Apter, Th. Moulin, Cl. Vallet, *Un exemple de modélisation au moyen de relateurs arithmétiques*, Revue du Cethedec, n° 40, Paris, 1974, p. 1-80.

[22] Cl. Vallet, Th. Moulin, H. Le Guyader, L. Lafrenière, *Emergence et imbrication de niveaux d'organisation dans les systèmes complexes*, VIIIe Congrès Int. de Cybernétique, Namur (Belgique), 1976, p. 187-199.

[23] M. Ferré, H. Le Guyader, *The geometry of leaf morphogenesis : A theoretical proposition*, Acta Biotheoretica, 33, p. 85-132, 1984.

[24] H. Le Guyader, Cl. Vallet, Th. Moulin, L. Lafrenière, H. Apter, *Arithmetical Relators and Virtual Information*, in "Information and Systems", B. Dubuisson (dir), Pergamon Press, 1978, p. 119-129.

NOTA (rédigé en 1991)

- Les actes du colloque dédié à la mémoire de P. Delattre ont été édités par

- Par ailleurs, la fondation P. Delattre, , a publié un ouvrage intitulé :

Ce livre fait découvrir des aspects de la personnalité de P. Delattre qui, de son vivant, sont restés inconnus pour bien des scientifiques qui le

cotoyaient. Le lecteur apprendra par exemple que P. Delattre, durant ses loisirs, aimait écrire des poèmes imprégnés d'amitié, de confiance et d'espoir.

- Enfin, le concept de dérivation décrit dans le paragraphe 3 et l'exemple d'application à l'oscillateur harmonique quantique ont été présentés par Th. Moulin, L. Saint-Paul, F. Chauvet et Cl. Vallet lors du "Ninth European Meeting on Cybernetics and Systems". Voici le titre de leur communication et la référence de l'ouvrage collectif où il a été publié :

A Method for Developing Models using Arithmetical Relators, in «Cybernetics and Systems '88», R. Trappl ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Hollande), 1988, p. 15-22.

Groupe Systema, E.N.S.T.A.
32 boulevard Victor
75015 PARIS

VIIIe Séminaire de Biologie
Théorique, Abbaye de Solignac,
6 - 8 juin 1988

TENTATIVE DE MODELISATION D'UN SYSTEME NEURONAL AU MOYEN D'UN RELATEUR ARITHMETIQUE : PROBLEMES POSES ET PERSPECTIVES

par Thiébaud MOULIN

ABSTRACT

The modelization of neuronal systems has been one of the prime movers in the development of the arithmetical relators (A.R.). The first attempt (1976) is reconsidered on account of new results : at a cellular level, modelization of imbricated helicoidal structures and aqueous media by means of the same kind of A.R. ; at a pluricellular level, description of typical forms of living beings.

We try to compare briefly A.R. and connectionist models by showing their complementarity : the A.R. expresses the adaptation of a system to its environment and provides a synthetic representation of multilevelled connections of a neuronal network while a connectionist model gives a dynamical description of linguistic elements at a sub-linguistic level.

Our long term purpose is to find a relation between "parallel" descriptions associated to morphogenetic potentials and "sequential" descriptions which fix at several levels the "elements of displacement" and, consequently, the dynamics. This relation would integrate linguistic and informational aspects and would generalize the classical flux-strength equations.

RESUME

La recherche de modèles applicables aux systèmes neuronaux est à l'origine des relateurs arithmétiques (R.A.). La première tentative (1976) est réexaminée compte tenu des résultats obtenus récemment : au niveau cellulaire, modélisation de structures hélicoïdales emboîtées et de milieux aqueux au moyen du même type de R.A.; au niveau pluricellulaire, description

de formes caractéristiques du vivant.

On tente d'établir une comparaison entre R.A. et modèles connexionnistes en montrant leur complémentarité : le R.A. exprime l'adaptation d'un système à son environnement et donne une représentation synthétique des connexions multi-niveaux d'un réseau neuronal tandis qu'un modèle connexionniste fait émerger une description dynamique d'éléments linguistiques à un niveau sub-linguistique.

L'objectif visé à long terme est l'établissement d'une relation entre des descriptions "parallèles" associées à des potentiels morphogénétiques et des descriptions "séquentielles" qui déterminent à différents niveaux les "éléments de déplacement" et, par suite, la dynamique. Cette relation, qui intégrerait des aspects linguistiques et informationnels, généraliserait les relations entre forces et flux qui sont à la base des descriptions physiques classiques.

INTRODUCTION

La recherche de modèles applicables aux systèmes cellulaires, en particulier neuronaux, est une préoccupation du Groupe Systema depuis sa fondation; elle est, en partie, à l'origine de la notion de relateur arithmétique (R.A.). Dans la première publication du Groupe, datant de 1971, référence est faite aux travaux de J. von Neumann sur les automates cellulaires (qui ont été complétés notamment par A.W. Burks [1] et vulgarisés sous forme du Solitaire Game "Life" de J. Conway [2]). Mais les travaux de W.S. McCulloch et de W.H. Pitts sur les réseaux neuronaux, effectués vers 1943, ou ceux de F. Rosenblatt sur le perceptron, datant des années 1960, n'y sont pas cités car nous estimions qu'il fallait d'abord développer un outil nouveau, bien adapté au but fixé : "modéliser le vivant à la manière d'un enfant qui s'émerveille devant la beauté du monde et cherche à comprendre pourquoi une chenille peut un jour se transformer en papillon...". Ensuite viendraient les applications. Cet outil devait non seulement exploiter les possibilités des calculateurs électroniques, mais aussi s'appuyer sur l'acquis de la physique, prendre en compte la découverte fondamentale (1931) de K. Gödel sur l'incomplétude des systèmes formels du second ordre et être imprégné par le bouillonnement d'idées dû au développement de l'informatique, de la biologie et de l'astronautique. Les travaux de P. Delattre [3], de R. Thom [4], de B. Mandelbrot [5], de G. Jumarie [6] et de bien d'autres scientifiques ont progressivement influencé nos recherches. L'ébauche donnée en [7] a débouché en 1975 sur le relateur

arithmétique stabilisé [8] qui exprime sous trois aspects interdépendants et évolutifs l'adaptation d'un système à son environnement.

Naïvement, nous pensions pouvoir l'appliquer à brève échéance en reconnaissance des formes. Ce fut l'objectif formulé en 1976 par H. Le Guyader et al. dans deux publications [9], [10]. Influencés par d'autres recherches, notamment par un article de J.-P. Changeux, P. Courrège et A. Danchin [11], nous avons compris qu'il fallait imbriquer étroitement, à plusieurs niveaux d'organisation, la description de l'anatomie d'un système neuronal (neurones, arbres dendritiques, connexions synaptiques,...) et celle de sa dynamique (propagation de l'influx nerveux le long des dendrites et de l'axone, activation du neurone, transmission synaptique, influence de l'environnement...). Ce qui différençait le R.A. des autres moyens de description prenait alors tout son intérêt : nous imaginions qu'un R.A. restait approximativement invariant sous l'effet de changements de niveau (cf fig. 1) -de même que certaines équations de la physique restent invariantes sous l'effet de changements de repère spatio-temporel- et que l'accroissement du domaine d'application dû à l'imbrication de différents niveaux devait être compensé par une diminution du domaine d'applicabilité à chacun de ces niveaux.

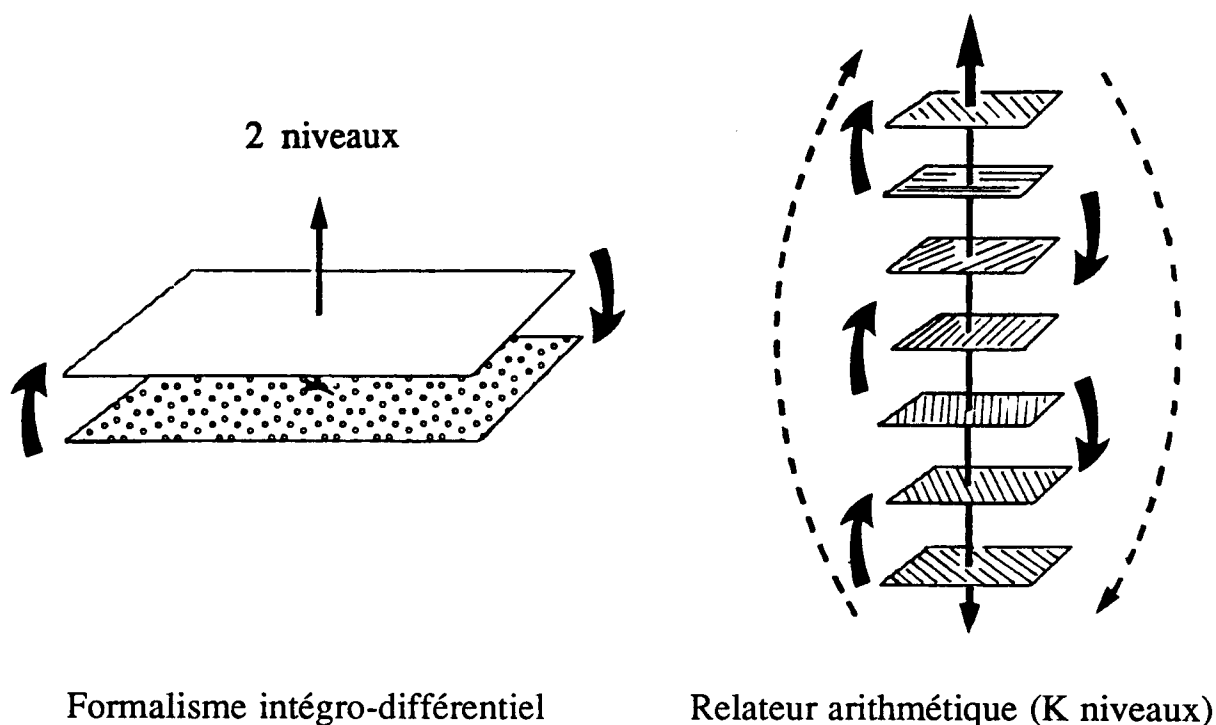


Figure 1

Un premier élément justificatif, à caractère mathématique, fut apporté par le théorème d'imbrication de J.-P. Luminet [12]. Ensuite, une longue suite de vérifications fut entreprise. Beaucoup d'entre elles ne sont d'ailleurs pas terminées.

- Le point clef d'une représentation par le même R.A. d'équations fondamentales de la mécanique, de l'électromagnétisme et de la thermodynamique a été présenté au cours du VI^e Séminaire de Biologie Théorique [13]. Le R.A. comporte 4 variables principales et, au minimum, 2 variables d'environnement; il est biquadratique dans le cas le plus simple.

- Une ébauche de représentation très schématique de configurations moléculaires hélicoïdales emboîtées les unes dans les autres, de composants cellulaires tels que microtubules, centrioles..., et surtout d'un milieu aqueux structuré a été donnée lors du VII^e Séminaire [14]. Des recherches en vue d'applications en homéopathie sont envisagées; si les résultats obtenus à l'INSERM sont bien confirmés (cf notamment [15, p 167-175] et exposé de B. Poitevin dans le cadre du présent Séminaire), elles pourront donner un support théorique aux recherches expérimentales de J. Benveniste, F. Beauvais, E. Davenas,...

- Un problème délicat a été abordé sous un jour nouveau lors du Colloque dédié à la mémoire de P. Delattre : la recherche d'une jonction avec le formalisme intégral-différentiel [16]. Des compléments se trouvent en [17].

Compte tenu de tous ces éléments, il est maintenant possible de réexaminer les applications des R.A. envisagées en 1976 : ce sera l'objet de la première partie de l'exposé.

Mais cela ne suffit pas : on doit pouvoir expliciter les bouclages implicites associés aux imbrications de niveaux. L'information indispensable semble avoir été fournie par D. Andler [18] au cours d'une conférence sur les récents développements des modèles connexionnistes. Ces modèles prennent de plus en plus d'importance en raison des besoins en informatique (conception de nouveaux ordinateurs à structure parallèle), en intelligence artificielle, en robotique,... Les recherches sur ce sujet ont démarré en France il y a une dizaine d'années environ. F. Fogelman-Soulié, qui avait donné des résultats préliminaires lors du I^{er} Séminaire de Biologie Théorique [19], présente en [20] une synthèse de travaux récents. Des perspectives d'avenir se trouvent dans un article de D. Amit [21], aimablement communiqué par D. Andler.

Il ne faut pas oublier [22] que les modèles connexionnistes sont les descendants des automates cellulaires et du perceptron. Relateurs arithmétiques et modèles connexionnistes sont donc des "cousins". Mais alors que le R.A. a été développé autour de la condition d'adaptation à l'environnement à partir de considérations de physique, les modèles connexionnistes se sont tournés vers l'informatique en faisant émerger de nouveaux concepts linguistiques, les éléments classiques étant décrits à un niveau sub-linguistique. C'est le sujet qui sera abordé dans la deuxième partie de l'exposé. Ainsi pourra être précisé l'objectif visé : établir une relation entre des descriptions "parallèles" et des descriptions "séquentielles" engendrées par un R.A.. Cette relation, qui intégrerait des aspects linguistiques et informationnels, généraliserait les relations entre forces et flux qui sont à la base des descriptions classiques de la physique.

I. IMBRICATIONS DE NIVEAUX D'ORGANISATION

Même dans les modèles connexionnistes récents, tels que le perceptron multi-couches [20, p 282], il n'est pas question d'imbriquer plusieurs niveaux d'organisation, c'est-à-dire de décrire par le même type de modèle, la propagation de globules le long d'un microtubule à l'intérieur d'un axone (niveau moléculaire), l'anatomie et le fonctionnement d'un neurone (niveau cellulaire) et le comportement d'un réseau neuronal (niveau d'un organe). Tout autre est le point de vue adopté dans les R.A., car ces trois niveaux doivent être pris en compte simultanément.

I.1 Formes de type hydrodynamique

La possibilité de modéliser sommairement la propagation de globules le long d'un microtubule a été envisagée en [14]. Beaucoup de travail reste à faire, mais le cadre du modèle est trouvé : c'est un R.A. dégénéré à 4 variables principales et 2 variables d'environnement. Est-il possible d'utiliser ce même modèle au niveau cellulaire? Pour qui sait lire entre les lignes, une réponse est donnée dans la synthèse présentée par H. Le Guyader [23] lors du Ier Séminaire de Biologie Théorique. Dans les schémas des pages 100 et 101, on admet que la membrane cellulaire est décrite au moyen de conditions de "bifurcation" entre des variables X_i donnant une vision externe de la cellule et

des variables B_i donnant une vision interne. Cela signifie que la forme cellulaire résulte d'un équilibre. Or d'après les hypothèses faites, certains systèmes physiques et certains systèmes biologiques sont fortement apparentés en raison d'imbrications de niveaux préservant une structure globale; le R.A. qui modélise les premiers systèmes se déduit, par dégénérescence, de celui convenant aux seconds. Si une démarche inverse est adoptée, à partir d'un R.A. modélisant un système physique simple il semble donc possible d'avoir une idée sur certains R.A. s'appliquant en biologie.

Le système physique le plus simple, apparenté aux formes cellulaires, est une bulle de vapeur ou de gaz s'élevant dans un liquide sous l'effet de forces de gravitation. En conséquence, le R.A. déterminant une forme sphérique dans un cadre théorique peu compliqué (écoulement non visqueux, stationnaire, incompressible,...) doit être issu d'un R.A. modélisant de la façon la plus rudimentaire une forme cellulaire. Une "vérification" a d'abord été esquissée vers 1979 dans un cas bidimensionnel. En exprimant les conditions de bifurcation d'un R.A. biquadratique, on trouve après dégénérescence les lignes de courant à l'extérieur et à l'intérieur d'un cercle, classiquement données par la théorie du potentiel complexe. Une prolongation du modèle au delà de son domaine d'application en hydrodynamique fournit des formes évoquant vaguement, en bidimensionnel, une division cellulaire ou une forme axonale.

Mais aucune vérification n'avait été faite dans un cas réaliste tridimensionnel. A la suite d'une suggestion de L. Romani sur une utilisation non classique des tourbillons toriques et d'une information adéquate donnée par D. Fruman, spécialiste en hydrodynamique, nous avons examiné la solution de Hill (datant de 1894), rappelée dans l'ouvrage de H. Lamb [24, p 245]. Elle fournit les lignes de courant d'un tourbillon torique à l'intérieur d'une sphère, en fluide parfait incompressible. Cette solution est obtenue exactement à partir de la relation support (1), qui généralise pour D/L rationnel celle caractéristique d'un R.A. biquadratique de classe (B),

$$\{L(A^2+B^2)(X^2+Y^2+Z^2-R^2) + D(AX+BY+V)(CZ+V)\} = \{-\}. \quad (1)$$

$$A = X \quad , \quad B = Y \quad , \quad C = \gamma Z \quad \text{avec} \quad \gamma = \pm 1 \quad (2)$$

quand la dégénérescence $D = 0$ et les conditions de "bifurcation"(2) sont imposées.

L'influence des termes d'environnement, qui se manifeste pour $D \neq 0$, est étudiée après application de l'effet miroir [25] (qui correspond au remplacement de $CZ+V$ par V°). Ainsi, la nouvelle forme support (3) fait apparaître la métrique du BCR sous-jacent (référentiel orthogonal dans l'exemple choisi) qui, à un facteur d'échelle près, ne dépend pas des paramètres du R.A..

$$\{L(A^2+B^2)(X^2+Y^2+Z^2-R^2) + D(AX+BY-CZ+V^\circ)V^\circ\} = \{-\}_\circ \quad (3)$$

Posons :

$$\rho^2 = (X^2+Y^2)/R^2 ; \quad \zeta = Z/R ; \quad \delta = DV^\circ/(LR^2) ; \quad \mu = (\{-\}_\circ - DV^{\circ 2})/(LR^2) \quad (4)$$

(3) devient, compte tenu de (2) :

$$\rho^4 + \rho^2 (\zeta^2 + \delta - 1) - \delta\gamma\zeta^2 - \mu = 0 \quad (5)$$

γ et δ sont supposés constants. L'équation (5) en ζ , ρ donne une coupe diamétrale des "surfaces de courant" $\mu = \text{constante}$. Deux exemples typiques sont présentés sur les figures 2a et 2b :

- pour $\gamma\delta > 0$, les différentes surfaces $\mu = \text{const}$ convergent vers un cylindre de rayon $\sqrt{\gamma\delta}$ (cf figure 2a),
- pour $\gamma\delta < 0$, il n'y a pas de points à l'infini (cf figure 2b).

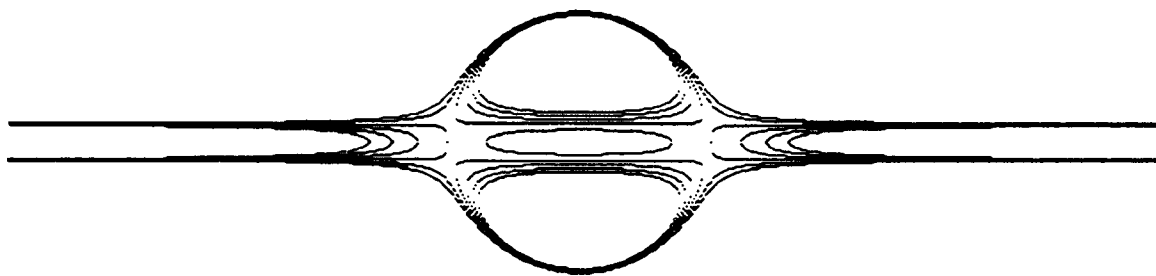


Figure 2a : $\gamma = 1$; $\delta = 0.02$; $\mu_{\min} = -0.05$; $\mu_{\max} = 0$

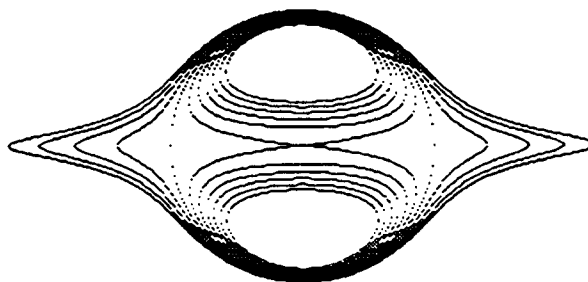


Figure 2b : $\gamma = -1$; $\delta = 0.02$; $\mu_{\min} = -0.1$; $\mu_{\max} = 0.1$

I.2 Prise en compte d'un deuxième terme d'environnement

Les formes tridimensionnelles représentées en coupe sur la planche 2, en raison de leur symétrie, n'évoquent pas la forme d'un neurone, même de façon très schématique. Pour faire apparaître une allure dissymétrique, il faut introduire d'autres termes d'environnement. Ce n'est pas étonnant puisqu'un R.A. décrivant très sommairement un milieu aqueux ou des structures hélicoïdales cellulaires emboîtées doit comporter au moins deux variables d'environnement. La nouvelle variable d'environnement W devient W° par effet miroir. Par ailleurs, R , qui représente en hydrodynamique le rayon de la sphère contenant un tourbillon torique, est considérée comme une variable prenant une valeur constante. En raison de la signature hyperbolique normale de la forme support en X, Y, Z, R , cette variable R est de type temporel; des coefficients de couplage E et E' lui sont associés.

$$\{ P_1 P_2 (X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2) + P_2 D_1 (A_1 X + B_1 Y - C_1 Z - E_1 R + V^\circ) V^\circ + \dots \\ P_1 D_2 (A_2 X + B_2 Y - C_2 Z - E_2 R + W^\circ) W^\circ \} = \{-\}. \quad (6)$$

La signature de la forme support du BCR sous-jacent mise à part, la structure de (6) est voisine de celle d'un R.A. décrivant, dans le cas le plus schématique, des particules en mouvement rectiligne uniforme interagissant avec un appareil de mesure ou des particules soumises à un champ électrostatique ou encore le comportement d'un gaz dans une enceinte [13]. Conformément à la méthode utilisée en [13], l'optimisation du système s'obtient par annulation du déterminant de la forme quadratique en X, Y, Z, V, W (les coefficients $A_\alpha, B_\alpha, -C_\alpha$, sont appelés ${}^\circ B_{\alpha i}$):

$$[4P_1/D_1 - (\sum {}^\circ B_{1i}^2 - E_1^2)] [4P_2/D_2 - (\sum {}^\circ B_{2i}^2 - E_2^2)] = (\sum {}^\circ B_{1i} {}^\circ B_{2i} - E_1 E_2)^2 \quad (7)$$

Cette équation donne $4P_1/D_1$ en fonction de A_1, B_1, C_1, E_1 si les autres paramètres de (6) sont connus. Dans le schéma très simple examiné ici, nous admettons que E_1 est une constante non nulle, que A_2 et B_2 sont nuls et que C_2, E_2 et $4P_2/D_2$ sont également des constantes. (7) s'écrit :

$$4P_1/D_1 = (A_1^2 + B_1^2) + C_1^2 - E_1^2 + (C_1 C_2 - E_1 E_2)^2 / [4P_2/D_2 - C_2^2 + E_2^2] \quad (8)$$

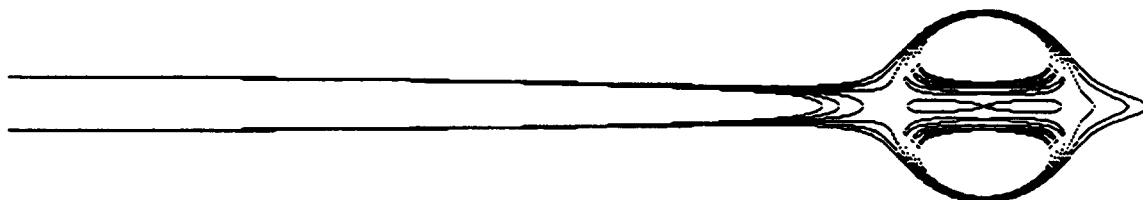
Si $W^o = 0$ et si les conditions de "bifurcation" (2) sont encore adoptées, (8) comporte un terme du premier degré en Z qui dissymétrise la configuration obtenue. L'équation (5) est remplacée par (9), les expressions des paramètres réduits δ' , μ' , ε , f , u_o , q se déduisant aisément des relations précédentes :

$$\rho^4 + \rho^2 (H + \zeta^2 + \delta' - 1) + H(\zeta^2 - 1) - \delta'\gamma\zeta^2 - \mu' = 0 \quad (9)$$

avec $H = \gamma^2\zeta^2 - \varepsilon^2 + (\gamma f\zeta - \varepsilon u_o)^2/q$.

D'après les valeurs adoptées précédemment, $\gamma^2 = 1$. L'équation (9) redonne (5) pour $q=-1$, $f=1$, $\varepsilon=0$. Le choix de la classe (β), qui paraissait arbitraire, est maintenant justifié : (1) résulte de plusieurs dégénérescences successives.

Une configuration typique est présentée sur la figure 3 pour f et ε , voisins respectivement de 1 et de 0. La partie tubulaire, représentée à gauche, n'est pas illimitée (comme c'était le cas sur la figure 2a).



$$q = -1 ; f = 0.997 ; u_o = -\sqrt{2} ; \gamma = 1 ; \varepsilon = 0.005 ; \delta' = 0.02 ; -0.04 \leq \mu' \leq 0.06$$

Figure 3

I.3 Propagation d'un influx nerveux

La dissymétrie introduite par le deuxième terme d'environnement se manifeste aux niveaux moléculaire et cellulaire d'un organisme vivant pluricellulaire, au niveau de ses organes (par exemple dans la structure du tube digestif) et dans sa forme (pour des valeurs des paramètres proches de celles de la figure 3, certaines surfaces à μ' constant évoquent des formes naturelles

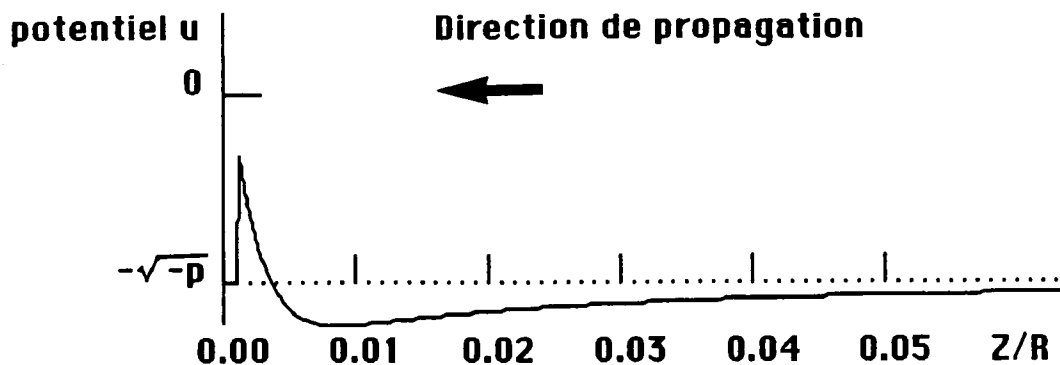
favorisant le mouvement en milieu aqueux). Elle se manifeste aussi dans le comportement d'un système neuronal, notamment par l'existence d'un sens privilégié de cheminement de l'influx nerveux, des dendrites vers l'axone.

Voici comment peut être déduite de (8) l'allure de l'évolution du potentiel le long d'un neurone, à un instant donné. L'équation d'Hamilton-Jacobi décrivant le comportement d'une particule de masse m placée dans un champ électromagnétique (qu'elle est supposée ne pas perturber) suggère une interprétation physique des paramètres B_{2i} et E_2 . Remarquons d'abord que le quadripotiel A_μ joue, au facteur e/c près (e représentant la charge de la particule et c la vitesse de la lumière), le même rôle que le quadrivecteur impulsion-énergie généralisé, $\partial S/\partial x^\mu$, S étant l'action (cf L. Landau et E. Lifchitz, [26, p 67 et 152]) :

$$\sum g^{\mu\nu}(\partial S/\partial x^\mu + eA_\mu/c)(\partial S/\partial x^\nu + eA_\nu/c) = m^2 c^2 \quad (10)$$

Par ailleurs, les biologistes ont découvert le mécanisme de la propagation d'un potentiel d'action le long d'un neurone; elle provient de l'ouverture des canaux Na^+ et K^+ (cf, par exemple, [26 p 1027 à 1032]). Puisque les paramètres B_{1i} peuvent être interprétés comme les composantes de l'impulsion (dans le cas d'un R.A. dégénéré [13] décrivant le déplacement d'une particule), par extension les B_{2i} sont associés à des courants traversant la membrane et aux composantes spatiales du potentiel vecteur (des vérifications ultérieures devront être effectuées). Dans cette hypothèse et compte tenu de la signature hyperbolique normale de la métrique sous-jacente, la composante temporelle des $B_{2\mu}$, c'est-à-dire E' , est associée à un potentiel électrique.

Pour obtenir à un instant donné l'évolution de E' le long de l'axone, il faut procéder en deux étapes : déterminer d'abord les valeurs initiales, puis examiner la propagation du signal au moyen du R.A. dégénéré en X, Y, Z, V, W . La valeur supposée constante de P_1 est calculée au voisinage du noyau du neurone. (8) fournit l'évolution de $u = E'/R$ en fonction de $C_1 = \gamma Z$. Il y a plusieurs types de solution. En effet, pour $4P_1/D_1 = (4P_1/D_1)_c = X_1^2 + Y_1^2 - E^2$, apparaît une singularité en $Z=0$; pour $4P_1/D_1$ voisin de $(4P_1/D_1)_c$, dans un cas, (8) n'a pas de solution si $|Z|$ est inférieur à une certaine borne (cf figure 4); dans un autre cas, la coupure n'existe pas. La figure 4 paraît ressembler à certains résultats expérimentaux relatifs à une impulsion isolée. Evidemment, cette esquisse devra faire l'objet de nombreux approfondissements.



$$p = q + f^2 - u_0^2 ; q = -1 ; f = 0.997 ; u_0 = -\sqrt{2} ; \gamma = 1 ; \varepsilon = 0.005$$

$$h = [(4P_1/D_1) - (X^2+Y^2)_0]/R^2 ; h < 0 \ \& \ |h| < \varepsilon^2 ; h = -0.000024$$

Figure 4

I.3 Utilisation des domaines multiplicatifs

Dans la modélisation d'un réseau neuronal [9], [10] ébauchée en 1976, nous avons admis en filigrane une hypothèse assez différente de celle adoptée dans les modèles connexionnistes, car l'extrême simplification des modèles les moins compliqués -un neurone ne prend que deux états- ne correspond pas à la structure des valeurs initiales canoniques d'un RA. Pour des raisons arithmétiques, elles sont de la forme :

$$X(0) = x_0 P_1^{k_1} P_2^{k_2}, \quad Y(0) = y_0 P_1^{k_1} P_2^{k_2}, \quad \text{etc} \quad (11)$$

Considérons les puissances successives de P_1 . Il est possible de comparer le R.A. démarré avec les valeurs initiales (7) à un autre R.A. ayant une forme support différente, mais voisine. L'un des facteurs du coefficient des termes carrés X^2, Y^2, Z^2 , valant P_1 , est remplacé par P'' , avec $P'' = P_1^{k_1}$. Les valeurs initiales, numériquement identiques à (11), s'écrivent :

$$X(0) = x_0 P'' P_2^{k_2}, \quad Y(0) = y_0 P'' P_2^{k_2}, \quad \text{etc} \quad (12)$$

L'exposant intervenant dans P'' fixe alors les possibilités d'excitation du neurone et les modes de couplage avec d'autres neurones. Puisque c'est le même R.A. qui modélise la forme et le comportement d'un neurone, il faut

donc introduire la structure de P'' dans la relation support (6).

Afin d'avoir une idée sur l'intérêt de cette hypothèse, il est bon de la transposer à un autre niveau d'organisation, par exemple au niveau moléculaire. C'est effectivement par une transformation du type $P'' = P_1^{k_1}$ (P_1 représentant la norme d'un spineur unitaire à deux composantes complexes) que l'on obtient classiquement les fonctions propres angulaires d'un atome d'hydrogène : les fonctions sphériques sont déduites des puissances successives de P_1 dans la mesure où l'on effectue des transformations infinitésimales adéquates (cf Géométrie spinorielle de M. Morand [28, p 151-181]). Ainsi obtient-on les représentations de l'algèbre de Lie du groupe SU_2 (cf N. Vilenkin [29, p 91-169]).

Bien entendu, il faut écrire le coefficient P'' sous une forme quadratique convenable et calculer les nouveaux coefficients B''_i , ce qui implique l'usage de domaines multiplicatifs. Compte tenu de la condition de "bifurcation" appliquée aux B_i , les B''_i sont des expressions de degré k_1 en X, Y, Z . Il n'existe pas de domaine multiplicatif quadratique à 3 variables; mais on trouve des solutions particulières, calculées à partir de domaines multiplicatifs à 4 variables b_μ (la forme quadratique correspondante peut être considérée comme la norme d'un quaternion entier). Le cas le plus simple correspond à une somme de 4 carrés. Si la forme en b_μ contient des termes croisés ou si elle n'est pas elliptique, il faut généralement faire appel à une extension algébrique: chaque b_μ est remplacé par un nombre complexe généralisé à plusieurs composantes entières. L'étude tridimensionnelle n'a pas encore été entreprise en raison de sa difficulté. Nous avons commencé par rechercher des formes bidimensionnelles car la théorie des anneaux quadratiques a fait l'objet de nombreux travaux (rappelons qu'elle s'applique à des nombres ayant des composantes entières tandis que la théorie du corps des complexes usuels concerne des nombres dont les composantes sont des réels). Des formes ayant plusieurs excroissances, des petites de type dendritique et une longue de type axonal, ont été obtenues; mais elles ne sont pas encore présentables devant une assemblée de biologistes!

L'étape suivante n'a pas été abordée. Elle concernera la description de l'arbre dendritique et des terminaisons axonales et s'appuyera sur les travaux de M. Ferré et de H. Le Guyader sur la ramification et la compatibilité

structurelle et fonctionnelle (discutées au VI^e Séminaire de Biologie Théorique [30]). Il faudra aussi exploiter des changements de niveaux, notamment ceux qu'introduisent certaines modélisations de la structure foliaire [31].

II REPRESENTATION DES CONNEXIONS SYNAPTIQUES

II.1 Très bref rappel sur les modèles connexionnistes

On peut aborder les modèles connexionnistes à partir, soit de la théorie des automates -c'est le point de vue des spécialistes de l'intelligence artificielle, notamment de F. Fogelman-Soulié [20]-, soit de problèmes de physique et de biologie -c'est celui de D. Amit [22]-. Dans le premier cas, l'automate représentant le neurone formel i est caractérisé :

- par son état interne S_i qui peut être actif ou passif,
- par ses connexions avec d'autres neurones formels ou avec l'environnement,
- par une fonction de transition déterminant un nouvel état $S_i(\tau+1)$ en fonction de son état interne $S_i(\tau)$ et des signaux qu'il reçoit (τ ne repère pas un temps universel; ce peut être, localement, le nombre de transitions effectuées). Cette fonction résume deux calculs :

- la somme a_i pondérée par les poids J_{ij} des connexions

$$a_i = \sum J_{ij} S_j \quad (13)$$

- l'application d'une fonction f transformant a_i en S_i (par exemple fonction à seuil, à saturation ou de type sigmoïde).

La fonction de transition se décompose donc en une expression linéaire en S_j et une fonction f fortement non linéaire.

L'interprétation physique de ce schéma est simple. Le terme $J_{ij} S_j$ peut être considéré comme le potentiel postsynaptique qui provient d'un neurone j dans l'état S_j agissant sur le neurone i . Ce produit vaut $+J_{ij}$ ou $-J_{ij}$ si S_j ne prend, respectivement, que les valeurs $+1$ ou -1 . Le neurone i réalise la sommation de tous les potentiels postsynaptiques qui lui arrivent : c'est le potentiel a_i qui fait, ou ne fait pas, basculer l'état du neurone.

L'un des premiers modèles a été proposé vers 1960 par B. Widrow (la référence est donnée en [20]). Il détermine par une méthode d'apprentissage les connexions synaptiques J_{ij} les mieux adaptées au problème de classification qu'il étudie. Pour cela, il faut lui fournir des exemples de configuration et lui indiquer les classes correspondantes. L'algorithme minimise une fonction de coût qui est généralement quadratique.

Le perceptron de F. Rosenblatt, également développé vers 1960, est issu d'études sur la rétine. Dans sa version initiale, il comportait 3 couches de neurones formels. C'est l'ancêtre des "perceptron multi-couches" actuels. Des algorithmes efficaces d'optimisation n'ont été trouvés que très récemment, notamment l'algorithme dit "de rétropropagation du gradient" [20].

Avant de clore ce très bref rappel, il est bon de signaler que les physiciens ont été les premiers à développer ce type de modèle en vue d'applications en magnétisme. Dans le modèle d'Ising, les variables S_i représentent des spins. Si la configuration interagit avec un champ magnétique extérieur H , son énergie totale est donnée par :

$$E = -J \sum S_i S_j - H \sum S_i \quad (14)$$

On calcule ensuite la fonction de partition en utilisant des variables complexes. Cette méthode a été proposée en 1952 par C.N. Yang et T.D. Lee [cf article cité en [32], page 149]. Des physiciens ont réexaminé en 1983 ce problème grâce à la théorie de la renormalisation et montré l'existence de structures fractales. Une vue d'ensemble est donnée dans l'ouvrage "The Beauty of Fractals" de H.S. Peitgen et P.H. Richter [32, p 129-149].

II.2 Correspondance avec les relateurs arithmétiques

Utilisation de séquences insécables particulières

Revenons aux R.A.. Les variables X_i d'un R.A. stabilisé par les variables d'environnement V_α peuvent être interprétées comme les variables S_i décrivant l'état du neurone i . Les possibilités d'excitation de ce neurone sont données par la factorisation du coefficient du terme carré X_i^2 de la relation

support.

Les réflexions $\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_\alpha$ relatives aux variables X_i et V_α sont des transformations linéaires en X_i, X_j, V_α . Si les états internes sont traités sur le même plan que les variables d'environnement, un produit de $\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_\alpha$ correspond à une transformation linéaire du type (13). On peut donc envisager la correspondance directe suivante :

- Une fonction de transition est représentée par une séquence insécable de $\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_\alpha$ (la notion de "séquence insécable" a été introduite en [16],[17] afin d'établir, dans un cas élémentaire, une jonction avec la dérivation et l'intégration). Durant cette séquence, les états des neurones concernés doivent être modifiés selon l'ordre prescrit.
- Deux cas se présentent : Si le résultat et tous les calculs intermédiaires sont des entiers, la séquence est applicable. Si, au contraire, l'un des résultats de calcul n'est pas entier, le R.A. revient dans l'état précédant l'application de la séquence et une autre séquence peut éventuellement être essayée.

En raison de cette condition d'intégrité, il apparaît un effet non linéaire qui, dans certains cas particuliers, correspond à un effet de seuil. Il y a donc une différence importante entre les modèles connexionniste et les relateurs arithmétiques : les parties linéaires et non linéaires de la fonction de transition sont fortement imbriquées dans le cas des R.A. alors qu'elles sont dissociées dans les modèles connexionnistes.

Une autre différence provient du rôle particulier joué par les réflexions d'environnement. Habituellement, les \mathfrak{H}_α ne sont pas imposées a priori et n'apparaissent qu'en situation de blocage afin de relancer le fonctionnement du R.A. quand elles le peuvent. Si la première séquence insécable imposée contient seulement des \mathfrak{H}_i et si elle n'est pas applicable, la présence de \mathfrak{H}_α dans l'une des nouvelles séquences essayées modifiera les coefficients J_{ij} . Quand la métrique est voisine de celle du BCR sous-jacent, les appels \mathfrak{H}_α à l'environnement créent une fluctuation des états au voisinage de ceux engendrés par ce BCR. Il y a là une certaine correspondance avec l'approche connexionniste qui introduit du bruit afin d'améliorer les performances du réseau. Dans le cas des R.A., ce "bruit" est engendré naturellement de façon pseudo-aléatoire.

On pourrait faire l'objection suivante : puisque les R.A. utilisés sont stabilisés, il n'y aura pas de blocage. Ce serait oublier une restriction importante intervenant dans l'établissement de la condition d'adaptation à l'environnement. Dans le cas d'une seule variable d'environnement, la démonstration est valable si les coefficients D , B_i sont tous premiers avec P . Or nous avons supposé que P pouvait être factorisable et s'écrire notamment p^k . On vérifie aisément que, si certains B_i sont divisibles par p et que d'autres ne le sont pas, il peut en résulter des blocages définitifs du R.A.. Par conséquent, l'objection n'est pas valable si le réseau comporte une structure d'imbrication liée à la factorisation de P . A notre avis, cette structure (qui n'apparaît pas dans les modèles connexionnistes) joue un rôle fondamental; elle est visualisée par la forme du neurone, notamment les ramifications dendritiques et axonales, par les noeuds de Ranvier et par l'enroulement des cellules de Schwann.

Les algorithmes d'apprentissage

Dans les modèles connexionnistes, les algorithmes d'apprentissage réalisent la minimisation d'une fonction de coût qui est généralement quadratique. Dans le cas des R.A., cette fonction est d'abord associée à une forme support en X_i , V_α convenablement dégénérée. Elle est aussi partiellement liée à l'expression d'un diviseur commun de plusieurs P_i (P_i est le coefficient de X_i^2 dans la relation support) si l'expression quadratique en $B_{i\alpha}$ résulte d'une "congruence exceptionnelle" car cette congruence mémorise dynamiquement et structurellement certaines configurations particulières. En raison d'une possibilité de "bifurcation" entre certains X_i et certains B_i , qui généralise (2), les états engendrés par le R.A. peuvent alors être comparés à d'autres imposés de l'extérieur grâce aux c nouvelles variables provenant de la dégénérescence de la forme support (c représente le corang de la forme support en X_i , V_α).

Ainsi apparaît une liaison entre la forme des neurones (arborescence dendritique notamment), la structure des connexions, les dynamiques locales, certaines molécules chimiques mémorisant des valeurs initiales particulières... La structure d'apprentissage se trouve donc étroitement couplée à la dégénérescence de la relation support, à l'existence de "congruences exceptionnelles et à l'imbrication de différents niveaux.

II.3 Changement du niveau de description

La modélisation qui vient d'être ébauchée est conforme aux idées formulées dans les articles [9], [10] de 1976 et fait apparaître de nombreux liens entre R.A. et modèles connexionnistes. Mais cette correspondance aurait un caractère assez académique s'il fallait en rester là. En fait, une des difficultés de la mise en oeuvre de modèles connexionnistes décrivant de façon réaliste un système neuronal provient du nombre considérable de neurones formels à prendre en compte. A titre indicatif, d'après [20, p 81], J.J. Hopfield ne pouvait simuler en 1986, dans les meilleures conditions, qu'un réseau de $30 \times 30 = 900$ neurones, alors que dans un cerveau humain les neurones se comptent par centaines de milliards! Puisque nous admettons a priori qu'un R.A. stabilisé décrivant un organe n'est pas plus compliqué qu'un R.A. décrivant au même degré d'imprécision une cellule, il faut trouver le moyen de réduire par un facteur 10^{11} environ le nombre de variables. Nous appliquons l'idée exprimée en [13] à propos de la modélisation d'un gaz : l'ensemble des neurones est engendré par un "neurone générique" de même que l'ensemble des cellules de Boltzmann est engendré par une "particule générique".

La structuration en "cellules" apparaît quand la relation support du R.A. est voisine de celle du BCR sous-jacent ou, plus généralement, d'un BCR limite comprenant à la fois les variables X_i et les variables d'environnement V_α . Dans chaque "cellule", l'état du R.A. et les voisinages de cet état, qui représentent un neurone formel et ses couplages avec d'autres neurones, fluctuent de façon pseudo-aléatoire. C'est un moyen de représenter de façon synthétique une fluctuation pseudo-aléatoire des coefficients synaptiques J_{ij} , envisagée précédemment dans le paragraphe II.2.

Le R.A. utilisé pour une description synthétique du système neuronal peut donc comporter un nombre très réduit de variables. Essayons de préciser ce que sont les "cellules". Au voisinage des points engendrés par le BCR limite se développe, à partir d'un seul état initial et par un fonctionnement séquentiel du R.A., une structure en amas. Ces amas sont constitués de sous-amas qui, pour certaines valeurs initiales, sont régulièrement disposés. Le dénombrement et la structuration des amas n'ont été étudiés que dans un cas très particulier, celui d'un R.A. à 2 variables principales (BCR sous-jacent de la famille I) et une variable d'environnement. Malgré ce manque d'information, nous

poursuivrons le raisonnement en extrapolant (malheureusement de façon bien discutable) les résultats disponibles. Dans le cas étudié, le nombre des sous-amas croît comme le cube du paramètre K intervenant dans les valeurs initiales. Ces sous-amas sont eux mêmes constitués d'amas plus petits, que nous appellerons micro-amas. Voici pourquoi ces micro-amas sont mis en correspondance avec les "cellules".

Il semble possible d'étudier le voisinage des micro-amas au moyen d'un espace vectoriel convenable ayant pour base des formes quadratiques. Puisque nous ne savons pas encore évaluer le nombre moyen de micro-amas par sous-amas, admettons qu'il soit de l'ordre de grandeur du nombre de sous-amas par amas. Dans cette hypothèse, qui pour l'instant n'a fait l'objet d'aucune vérification, le nombre de micro-amas croîtrait comme la puissance sixième de K . Le nombre de micro-amas serait de l'ordre de 10^{12} pour K voisin de 100. Cette valeur de K n'est pas exagérée puisque l'exposant de 2 intervenant dans la constante fondamentale N° atteint 65; par contre, elle le serait si les "cellules" étaient identifiées aux sous-amas (rappelons que la constante N° , voisine de 2^{65} , est égale à $(2^{65} 3^{41} 5^{28})^{1/3} = 3,68 10^{19}$; elle caractérise les changements de taille des niveaux d'organisation majeurs). En d'autres termes, nous utilisons un "développement" au deuxième ordre afin de limiter la taille des valeurs initiales tout en conservant un nombre suffisant de points par micro amas (la longueur du cycle croissant comme 3^K , le nombre moyen de points par micro amas pourrait être de l'ordre de 10^{35} pour $K = 100$).

La notion de "neurone générique" fait apparaître un bouclage fondamental. Supposons qu'un réseau neuronal soit représenté de façon synthétique par un R.A. à 4 variables principales et 2 variables d'environnement. Les formes quadratiques en $B_{i\alpha}$, associées à un développement au second ordre (niveau des micro-amas), pourraient être mise en relation avec certaines expressions quadratiques représentant P_α .

En physique, cette relation fournirait une généralisation de celle qui associe le tenseur de courbure contracté et le tenseur impulsion-énergie en gravitation relativiste; elle prendrait en compte un aspect linguistique par l'intermédiaire de séquences insécables associées aux micro-amas. En biologie, elle exprimerait un équilibre entre des dynamiques locales et ce que nous osons appeler des "potentiels morphogénétiques".

Ces "potentiels" correspondent à une transposition d'une des notions clés introduites par R. Thom dans la Théorie des Catastrophes. Pour essayer de me faire pardonner cet excès de langage, voici quelques résultats récents de calcul, exploitant cette sorte de "potentiel morphogénétique". Sur la figure 5 se trouvent des vues en perspective d'objets tridimensionnels qui avaient été appelés "fleurs" dans des publications précédentes (un seul cas particulier y était présenté en noir et blanc, au moyen de diverses coupes). Sur l'écran d'un MacIntosh II, dont le Groupe Systema a maintenant la chance de disposer, ces "fleurs" apparaissent en couleur.

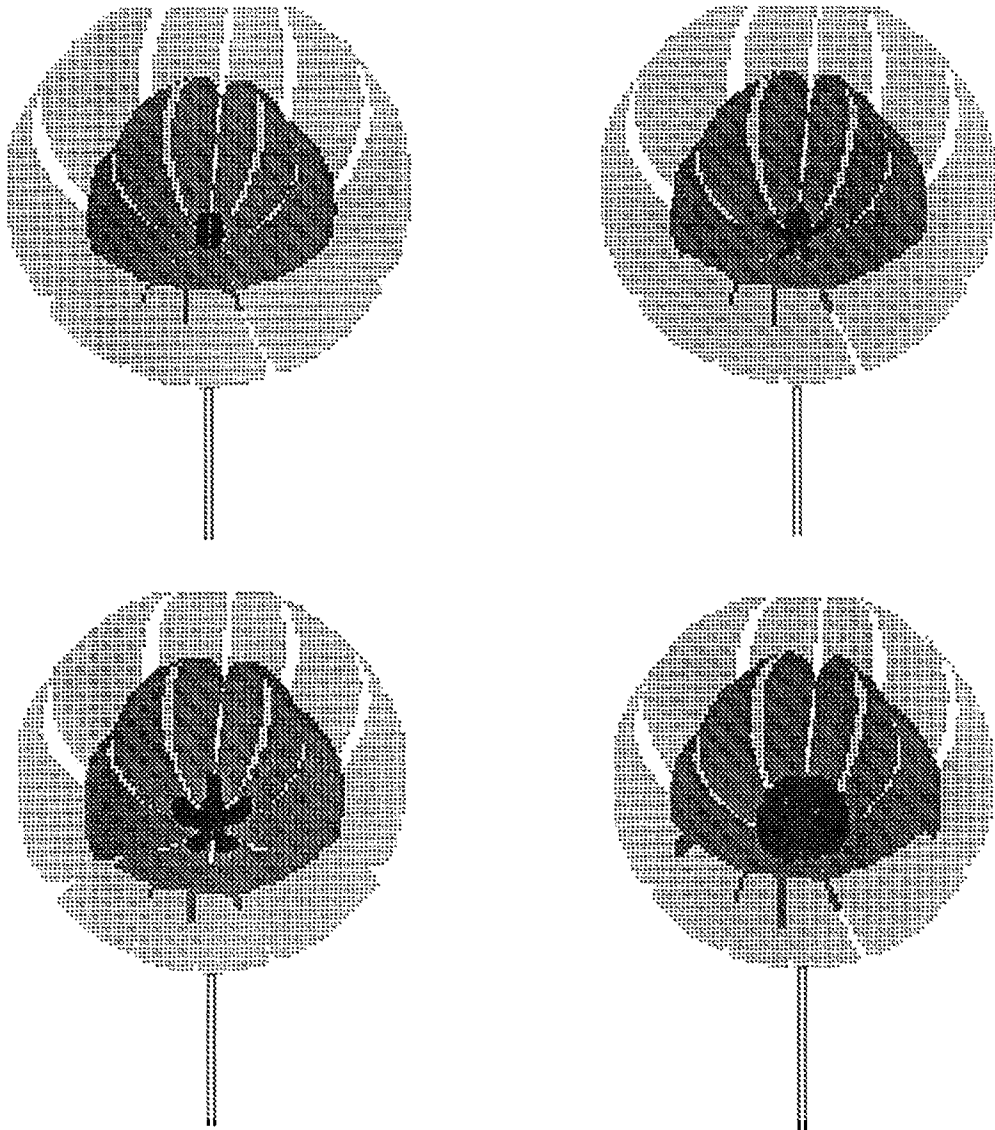


Figure 5

CONCLUSION

Tous ces propos posent plus de problèmes qu'ils n'en résolvent. Mais il me semble indispensable de trouver en biologie théorique l'analogue de la loi $F = m \gamma$ qui en quelques siècles a profondément modifié notre point de vue sur le monde physique. Certains biologistes estiment que cette loi n'existe pas et que toute l'harmonie que nous observons n'est que le fruit du hasard. Je n'adhère pas à ce point de vue, mais je le respecte car il est source de progrès. Quoi qu'il en soit, il y a au moins une certitude : les théories biologiques de l'avenir associeront étroitement la mathématique, la physique et la linguistique; c'est une idée qui est centrale dans les travaux de R. Thom. Et il n'y aura pas unicité des descriptions ni des formalismes, parce que le vivant est trop riche pour être enfermé dans un boîte, si grande soit-elle! Alors chacun a le droit de spéculer à sa manière. Il me semble que la plupart des physiciens actuels oublie d'observer et de décrire tout une partie des phénomènes physiques, simplement parce qu'ils ne veulent pas les voir. Les résultats qu'une équipe de biologistes vient d'obtenir sur le "comportement des basophiles en présence de solutions hautement diluées" (je fais bien entendu allusion à la conférence de B. Poitevin et aux travaux de l'équipe de J. Benveniste) est en train de créer une déchirure dans la vision du monde qui nous est imposée. Il me semble qu'un champ de structuration non descriptible dans le référentiel spatio-temporel classique baigne notre monde à la manière des ressorts virtuels qu'utilisent les spécialistes de l'informatique quand ils cherchent à simuler le comportement harmonieux de patineurs sur une piste glacée. C'est sur cette image que je terminerai, en souhaitant que des biologistes, des physiciens, des linguistes, des mathématiciens,... s'intéressent à une approche qu'une autre poignée de scientifiques continue à développer contre vents et marées.

REFERENCES

- [1] A.W. Burks, *Essays on cellular Automata*, Univ. of Illinois, USA, 1970.
- [2] M. Gardner, *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game life*, in *Scientific American*, oct. 1970, pp 120-123; janv 71 pp 104-108; fév. 1971, pp 112-117.
- [3] P. Delattre, *Système, structure, fonction, évolution*, Maloine, 1971.
- [4] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, W.A. Benjamin, 1972.

- [5] **B. Mandelbrot**, *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*, Flammarion, 1975.
- [6] **G. Jumarie**, *A relativistic Information Theory Model for General Systems*, Int. J. Systems Sciences, 1975, Vol. 6, n°9, pp 865-886.
- [7] **Th. Moulin, Cl. Vallet, D. Verney**, *Sur la possibilité de représenter le réel au moyen de relateurs arithmétiques*, Cahier du Cethedec, 4e tr., 1971.
- [8] **Cl. Vallet, Th. Moulin, H. Le Guyader, L. Lafrenière**, *Emergence et imbrication de niveaux d'organisation dans les systèmes complexes*, in Actes VIIIe Congrès de Cybernétique, Namur (Belgique), 1976, pp 187-199.
- [9] **H. Le Guyader, Cl. Vallet, Th. Moulin**, *Reconnaissance des formes et réseaux neuronaux*, in Actes VIIIe Congrès de Cybernétique, Namur (Belgique), 1976, pp 877-889.
- [10] **H. Le Guyader, L. Lafrenière, Th. Moulin**, *Utilisation des relateurs arithmétiques pour la représentation des systèmes biologiques*, in Overlapping Tendencies in Operations Research Systems Theory and Cybernetics, Birkhäuser, Basel, 1976, pp 451-460.
- [11] **J.-P. Changeux, P. Courrège, A. Danchin**, *A theory of the epigenesis of neuronal networks by selective stabilisation of synapses*, Proc. Nat. Ac. Sc. USA, 1973, Vol. 70, n°10, pp 2974-2978.
- [12] **J.-P. Luminet**, *Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification*, Revue du Cethedec, 1980, n°62, pp 55-95.
- [13] **Th. Moulin**, *Possibilités d'applications dans quelques domaines de la biologie de relateurs à structure parallèle et hiérarchisée*, in Biologie Théorique, Solignac 1986, A. Kretzschmar éd., Editions du CNRS, Paris, 1988, pp 179-195.
- [14] **Th. Moulin**, *Tentative de modélisation par un relateur arithmétique de quelques constituants cellulaires appartenant à des niveaux d'imbrication différents*, in Biologie Théorique, Solignac 1987, Y. Bouligand éd, Editions du CNRS (à paraître).
- [15] **B. Poitevin**, *Le devenir de l'homéopathie*, Doin, Paris, 1987.
- [16] **Th. Moulin**, *Réflexions sur des axiomes de la théorie des systèmes de transformations*, Colloque "Pierre Delattre", Collège de France, 4-5 Déc. 1987 (à paraître).
- [17] **Th. Moulin, L. Saint-Paul, F. Chauvet, Cl. Vallet**, *A method for developing models using arithmetical relators*, in Cybernetics and Systems '88, Part1, R. Trappl éd., Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1988, pp 15-22.
- [18] **D. Andler**, *Le connexionnisme, entre intelligence artificielle et neurocalcul*, in Colloque "Systèmes naturels, systèmes artificiels", Univ. de Strasbourg, oct. 1987, F. Tinland éd. (à paraître).
- [19] **F. Fogelman-Soulié**, *Les réseaux d'automates, une modélisation de systèmes biologiques?*, in Actes du Ier Sém. de Biologie Théorique, Solignac 1981, H. Le Guyader et Th. Moulin éd, Editions de l'ENSTA (32 bd. Victor, 75015 Paris), 1981, pp 469-481.

- [20] **F. Fogelman-Soulié**, *Méthodes connexionnistes pour l'apprentissage*, in Actes des Journées Nationales, Intelligence Artificielle, Toulouse 14-15 mars 1988, Teknea, 1988, pp 275-293.
- [21] **D.J. Amit**, *Neural Networks - Achievement, Prospects, Difficulties*, in The Physics of Structure Formation, Int. Symposium, Tübingen, oct. 1986.
- [22] **J.-Cl. Perez**, *De nouvelles voies vers l'Intelligence Artificielle*, Masson, Paris, 1988.
- [23] **H. Le Guyader**, *Les bases de la construction d'un formalisme applicable au vivant : exemple du relateurs arithmétique*, in Actes du Ier Sém. de Biologie Théorique, Solignac 1981, H. Le Guyader et Th. Moulin éd., Editions de l'ENSTA (32 bd. Victor, 75015 Paris), 1981, pp 469-481.
- [24] **H. Lamb**, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 6th edition.
- [25] **M. Ferré, H. Le Guyader**, *The geometry of leaf morphogenesis : a theoretical proposition*, Acta Biotheoretica, 1984, Vol 33, pp 85-132.
- [26] **B. Alberts, D. Bray, L. Lewis, M. Raff, K. Roberts, J. Watson**, *Biologie moléculaire de la cellule*, trad. de M. Minkowski, Flammarion Médecine Sciences, 1983.
- [27] **L. Landau, E. Lifchitz**, *Théorie des champs*, Mir, Moscou, 1970.
- [28] **M. Morand**, *Geométrie spinorielle*, Masson, Paris, 1973.
- [29] **N.J. Vilenkin**, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris, 1969.
- [30] **M. Ferré, H. Le Guyader**, *Un exemple de morphogénèse végétale : tentative de modélisation des angles de ramification et de divergence*, in Biologie Théorique, Solignac 1986, A. Kretzschmar éd., Editions du CNRS, Paris, 1988, pp 399-429.
- [31] **Th. Moulin**, *Autoréférence partielle et niveaux d'organisation*, in Xe Cong. de Cybernétique, Namur (Belgique), 1983, pp 392-405.
- [32] **H.O. Peitgen, P.H. Richter**, *The beauty of fractals*, Springer, 1986.

TENTATIVE DE MODELISATION DE CERTAINS PHENOMENES D'EVOLUTION ET DE VIEILLISSEMENT AU MOYEN DE RELATEURS ARITHMETIQUES

François CHAUVET et Thiébaud MOULIN

Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
32 boulevard Victor, 75015 Paris

RESUME

Le relateur arithmétique est un outil mathématique nouveau exprimant l'adaptation d'un système à son environnement. Par certains aspects, il est lié aux fractals, par d'autres aux équations de la physique et aux automates cellulaires (modèles connexionnistes). Il introduit un aspect linguistique au coeur des processus de dérivation-intégration. Les "descriptions parallèles" engendrent des champs morphogénétiques évolutifs de type végétal ou animal. Un petit film d'animation en couleur montre l'évolution de formes tridimensionnelles.

Les descriptions séquentielles prennent en compte l'influence de rythmes sous-jacents et de différents niveaux d'imbrication repérés par β paramètres K_β . Pour $\beta=1$, les congruences fixant la classe de fonctionnement du relateur ne dépendent pas de K : il y a possibilité d'évolution sans vieillissement. Pour $\beta \geq 2$, le nombre de ces congruences peut dépendre des K_β . Il en résulte des possibilités de désynchronisation des rythmes sous-jacents qui sont interprétées comme une source de vieillissement.

La dynamique d'un organisme vivant est décrite structurellement par un couplage entre les descriptions parallèles et séquentielles. La cohérence structurelle des modèles provient d'extensions algébriques de domaines multiplicatifs à 4 et 8 variables. L'une d'elles est associée au milieu aqueux cellulaire. Après approfondissement des modèles, des applications médicales seraient envisageables.

INTRODUCTION

La communication n'a pas été rédigée par des spécialistes du vieillissement, mais par des ingénieurs qui étudient les systèmes naturels d'un point de vue inhabituel au moyen d'un nouvel outil mathématique, le relateur arithmétique (R.A.). Comme ils ne sont pas biologistes, ils espèrent que des spécialistes de ce domaine leur indiqueront les points paraissant les plus discutables et les erreurs qu'ils auraient pu commettre.

Plusieurs caractéristiques (cf notamment [1],[2]) différencient nettement les R.A. des autres moyens classiques de description. Tout d'abord, cet outil est structurellement ouvert, alors que la plupart des moyens classiques issus de la physique ne le sont pas. La définition d'un R.A. est incomplète; ce qui manque est obtenu par des classifications suivies de choix. Par exemple, les constantes physiques adimensionnelles, telles que la constante de structure fine ou le rapport de la masse d'un proton à celle d'un électron [3], ne sont pas introduites de l'extérieur, mais sont calculées dans le cadre des modèles retenus (les choix sont effectués à un niveau structurel). Par conséquent, il ne peut pas y avoir unicité; on obtient toujours un ensemble de modèles plus ou moins approchés. De ce point de vue, modéliser un effet de vieillissement ne peut correspondre à des développements superficiels, mais doit résulter de choix structurels. Nous verrons qu'ils sont implicitement liés à des hypothèses sur la notion de temps.

Le continuum spatio-temporel des physiciens n'est pas adopté ab initio. Les référentiels utilisés dépendent du système d'observation et du système observé. En particulier, la notion de temps ne se réduit pas au temps-paramètre de la physique. Il faut distinguer au moins trois aspects complémentaires [4] :

- des successions d'actes au cours desquels le système vivant fait appel à son environnement afin de survivre (la notion d'environnement dépend du niveau d'observation considéré);
- des "séquences réduites" qui résument de longues successions d'actes ayant abouti à une modification structurelle (ces séquences simulent des brins d'ADN);
- certains changements de niveau d'imbrication (i.e. de description et/ou d'organisation) pouvant être associés à une évolution temporelle.

Un R.A. décrit partiellement un système vivant à différents niveaux, imbriqués les uns dans les autres. A chacun d'eux, il est beaucoup moins performant que le

formalisme intégral-différentiel classique (cf fig.1). De même que certaines équations de la physique restent invariantes sous l'effet de changements de repère spatio-temporel, dans certains cas un R.A. reste approximativement invariant sous l'effet de changements de niveau. Pour cette raison, les référentiels utilisés incorporent des dimensions nouvelles liées aux niveaux et à leur bouclage. Ils sont appelés "spatio-structuro-temporels" et sont déformés par la présence d'un système vivant : il y a non seulement courbure locale de l'espace-temps, mais encore modification de la structure informationnelle associée à ces imbrications de niveau.

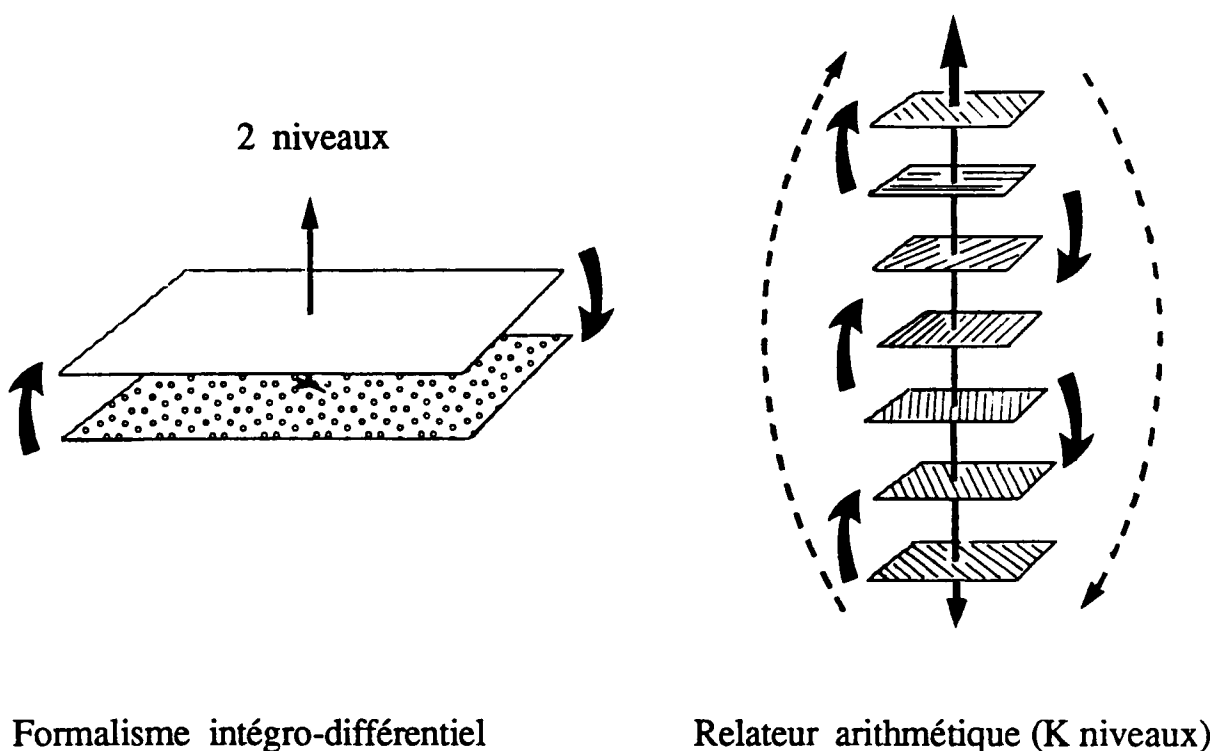


Figure 1

Dans la suite, de tels référentiels serviront à interpréter structurellement certains aspects du vieillissement. Mais avant d'aborder ce sujet, il faut examiner comment est représentée le plus simplement l'évolution d'une forme végétale ou animale afin de distinguer évolution et vieillissement. Voici, par exemple, un résultat typique, obtenu en 1979 par Cl. Vallet [5], [6] au moyen du R.A. le plus simple (3 variables de position et une variable d'environnement). C'est un objet tridimensionnel évoquant nettement une configuration florale. Il a été visualisé récemment sous différents angles (sur l'écran couleur d'un MacIntosh II) au moyen d'un algorithme éliminant les parties cachées. Les images ont été stockées



Planche 2a : Vues sous différents angles

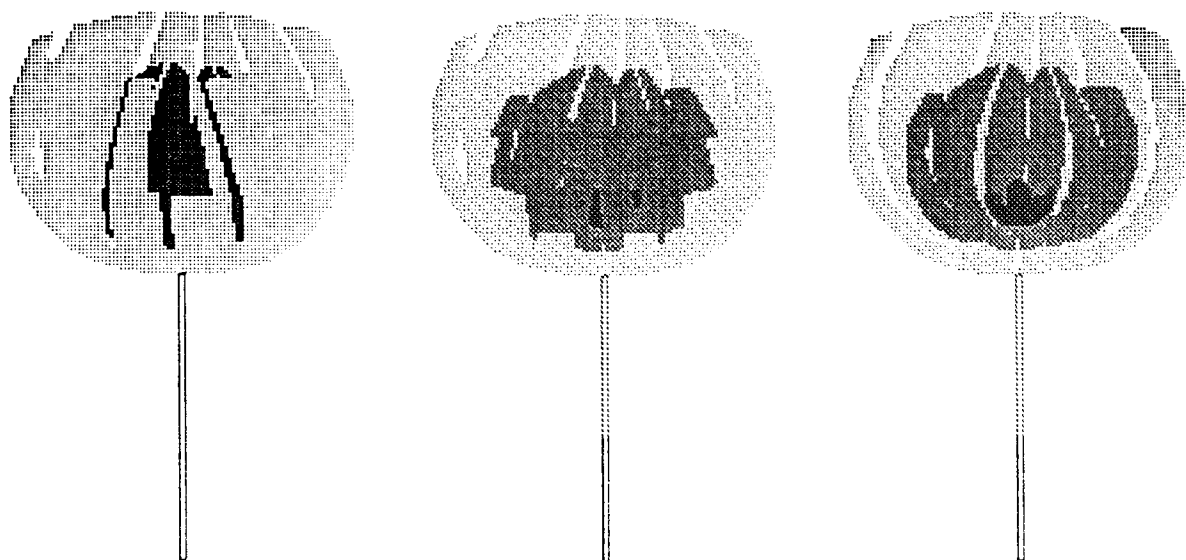


Planche 2b : Vues après différentes troncatures

UN OBJET TRIDIMENSIONNEL TYPIQUE

sur diapositives et dans une vidéocassette. Quelques vues sont présentées en noir et blanc; elles montrent d'abord le caractère tridimensionnel de cet objet (planches 2a et 2b), puis l'évolution de sa structure en fonction d'un paramètre associé au temps relativiste (planche 2c).

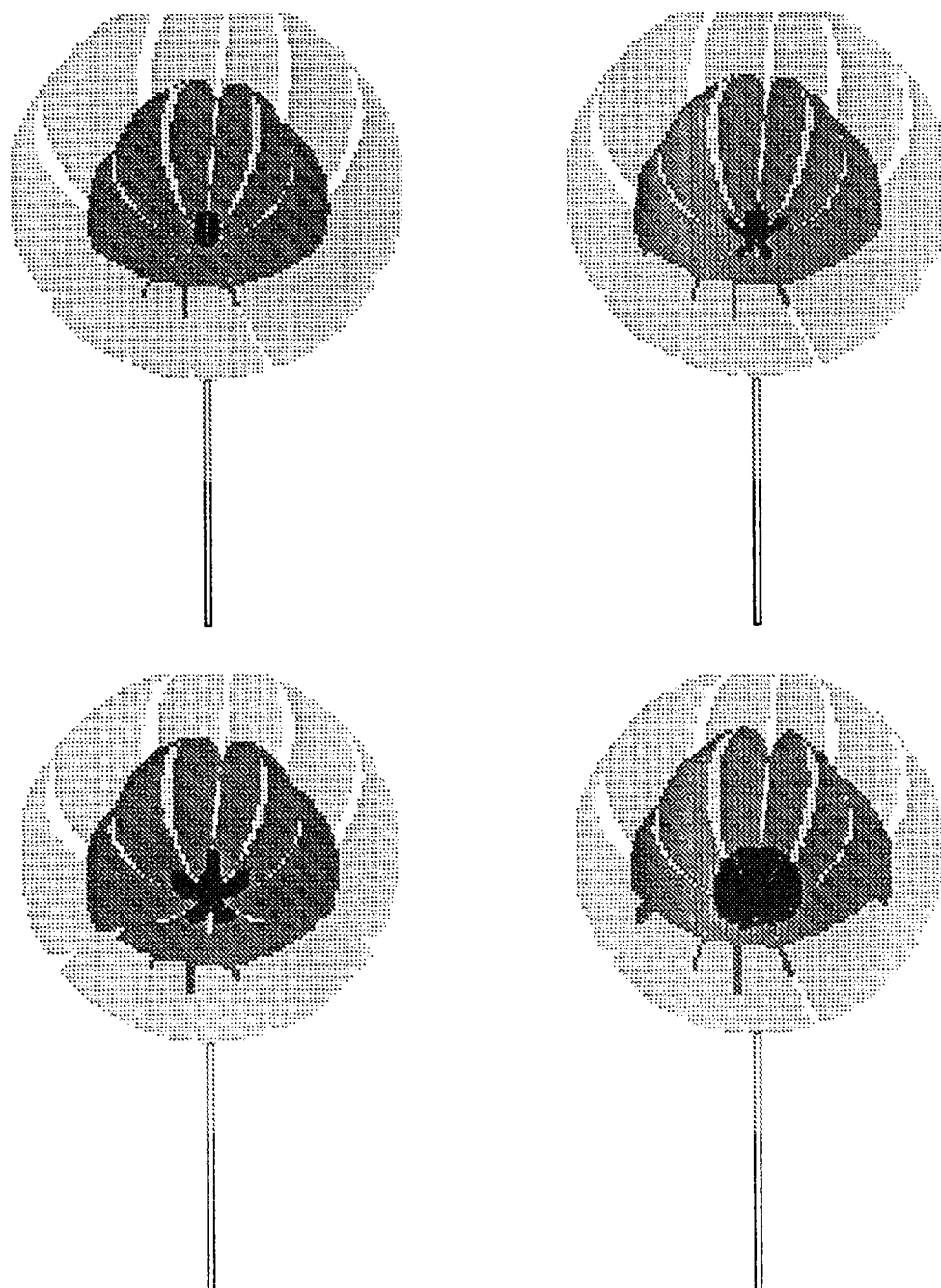


Planche 2c : Evolution de la structure

I. LE TEMPS, PARAMETRE D'EVOLUTION

I.1 Très bref rappel sur les relateurs arithmétiques

Un R.A. modélise, de façon plus ou moins précise, un système naturel en équilibre avec son environnement :

- Des entités non sécables au niveau d'imbrication considéré (par exemple des atomes, des cellules vivantes, des organismes pluricellulaires) sont représentées par des entiers. Une relation rassemble ces entités en un tout; elle est quadratique dans les cas simples et plus généralement multiquadratique; ses coefficients sont des entiers.
- Des transformations appelées "réflexions" modifient progressivement les états du R.A.; elles s'appliquent successivement aux différentes parties de la relation multiquadratique et conservent cette relation. Si un résultat non-entier survient, il y a blocage du R.A..
- Un état initial fixe le second membre de la relation; cet état peut être remplacé par un ensemble d'états compatibles avec le second membre.

Les R.A. cycliques et ne se bloquant jamais quel que soit l'ordre des réflexions appliquées sont appelés BCR (relateurs cycliques de base); ils décrivent des structures idéales de type cristallographique.

Un R.A. stabilisé décrit un système en équilibre avec son environnement. Dans le cas le plus simple, les variables entières X_i , Y_i repèrent l'état interne du système et V celui de l'environnement. Un état interne se transforme sous l'effet de deux produits de réflexions, notés x et y ; les x , y sont régulièrement alternés. Les blocages du R.A. sont surmontés au moyen d'appels V à l'environnement qui sont toujours réalisables (V est une réflexion le long de l'axe d'environnement). Autrement dit, si x (ou y) donne un résultat non-entier, le R.A. revient dans l'état précédant l'application de x (ou de y) et un appel à l'environnement est intercalé. Le relateur est stabilisé si, après cet appel, il est possible d'effectuer le produit x (ou y) qui créait le blocage.

La procédure de stabilisation est généralisable dans le cas de plusieurs variables d'environnement. La structure de la relation quadratique peut être établie, soit par voie arithmétique (Cl. Vallet [7], 1975), soit par voie géométrique (M. Ferré [8], 1981). Dans le cas le plus simple, les conditions

initiales sont caractérisées par le nombre K de x, y pouvant être effectués sans qu'interviennent d'appels à l'environnement.

I.2 Imbrication des cycles

Si la forme quadratique support du R.A. n'est pas dégénérée, le fonctionnement est cyclique. La longueur d'un cycle croît exponentiellement avec K et dépend de la classe de fonctionnement qui est caractérisée par deux ensembles de congruences. Le premier est appelé ensemble des conditions de verrouillage, le deuxième (qui peut être vide), ensemble des congruences exceptionnelles. Une condition de verrouillage transgressée se transforme en une congruence exceptionnelle.

Un théorème fondamental a été démontré en 1979 par J.-P. Luminet [9] dans le cas de R.A. à une seule variable d'environnement. Ce théorème détermine la structure du cycle K en fonction du cycle $(K-1)$, fixe l'imbrication des états engendrés par le R.A. et montre que les conditions de verrouillage d'une classe sont indépendantes de K . S'il y a plusieurs variables d'environnement, cette troisième propriété n'est généralement plus vérifiée. C'est un point essentiel qui sera interprété comme une source structurelle de vieillissement.

Les appels à l'environnement introduisent une notion de temps liée aux niveaux d'imbrication $k < K$. Supposons par exemple que le R.A. modélise la respiration d'un mammifère. Pour la valeur la plus faible de k , les appels à l'environnement correspondent à l'alternance des inspirations et des expirations. Les valeurs suivantes prennent progressivement en compte les degrés successifs de ramification des poumons, puis les échanges au niveau cellulaire, puis au niveau moléculaire, ... Cette imbrication, qui est une conséquence de l'adaptation à l'environnement, pourrait être décrite très schématiquement au moyen d'une portion de fractal [10], [11]; mais il s'agirait là d'une simple interprétation, alors qu'un R.A. engendre structurellement l'imbrication, simultanément au plan de la géométrie et de la dynamique.

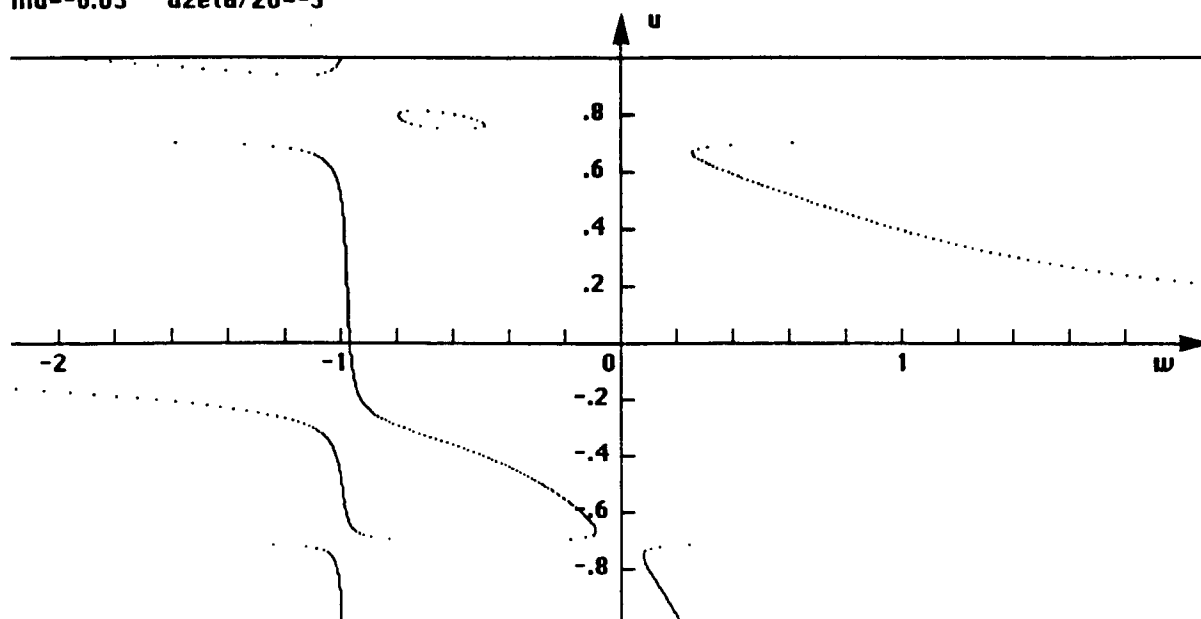
Grâce au théorème d'imbrication, il est possible de remplacer une longue séquence de transformations par une "séquence réduite". En moyenne, sa longueur est proportionnelle au logarithme de la longueur du cycle. Ces séquences fournissent donc un aspect temporel informationnel.

1.3 Potentiel morphogénétique évolutif

Associons maintenant à une entité physique originelle, par exemple le germe d'une graine, un ensemble d'état initiaux caractérisés par différentes métriques tridimensionnelles. Chacune d'elles est déterminée par une valeur particulière de la variable d'environnement. Puisqu'un R.A. prend en compte plusieurs niveaux de description, les B_i ont une signification qui en dépend : ce peuvent être des concentrations moléculaires à l'échelle de la cellule, ..., un degré d'humidité ou de luminosité à l'échelle d'une plante. Par hypothèse, tous les états initiaux sont représentés dans l'espace physique tridimensionnel par un seul point choisi comme origine. C'est la représentation d'un germe possédant un grand nombre de possibilités de développement. A partir de ce point initial, est appliquée une "séquence réduite" qui résume, à l'échelle de temps de l'ontogénèse, le résultat de nombreuses tentatives faites à l'échelle de temps de la phylogénèse. Le R.A. se comporte alors comme un ensemble d'automates fonctionnant en parallèle à partir du germe initial. Les détails sont donnés en [6]. L'objet tridimensionnel obtenu est l'image de deux, de trois ou de cinq domaines d'un espace abstrait représenté sur la figure 3; chacun de ces domaines est transformé en plusieurs surfaces.

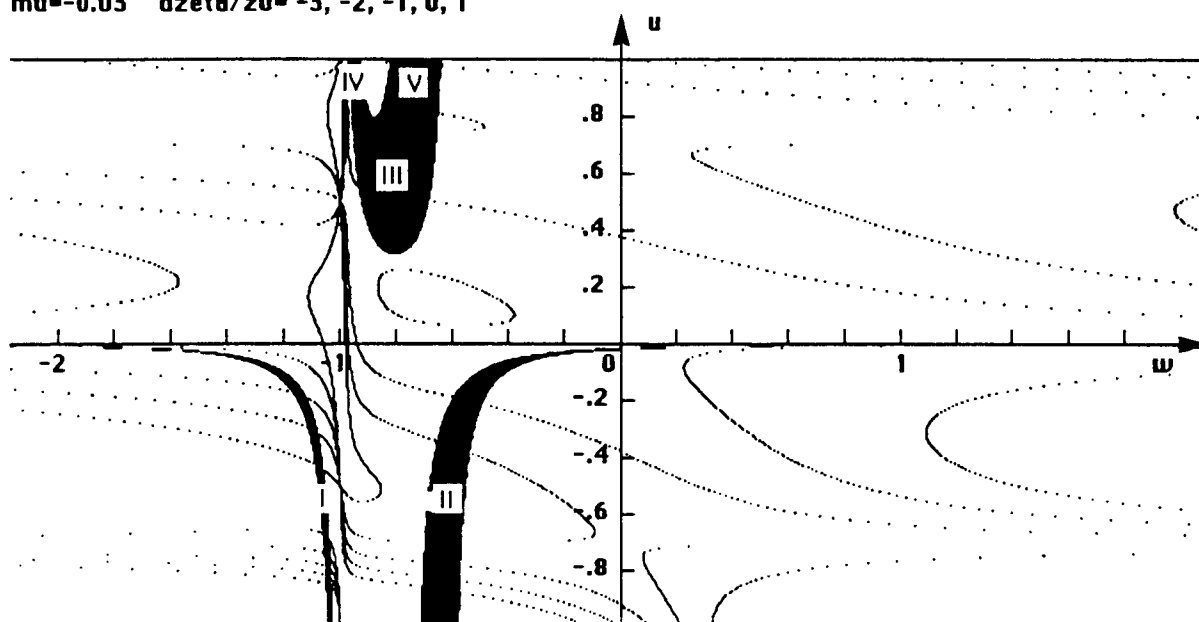
La grandeur portée en abscisse est proportionnelle à la variable d'environnement. En ordonnée, se trouve le cosinus d'un angle lié aux caractéristiques angulaires du référentiel local (lui-même associé à la relation quadratique support du R.A.). Ce cosinus est le produit d'une constante par un facteur qui, par l'intermédiaire de la variable d'environnement et des B_i , peut être exprimé en fonction des coordonnées cartésiennes locales. A ce facteur est associée une sorte de "potentiel morphogénétique" car, dans divers modèles physiques (décrivant par exemple l'oscillateur harmonique quantique ou les orbitales d'un atome d'hydrogène), on lui associe le potentiel d'interaction. Les courbes d'isopotential correspondent approximativement à des courbes d'isocoloration. Le potentiel morphogénétique est un moyen de résumer une situation complexe, un peu à la manière des "ressorts virtuels" que certains spécialistes en intelligence artificielle utilisent pour décrire aisément l'enchaînement de divers mouvements du corps humain; par exemple, "ressorts" liant épaules et genoux opposés en diagonale dans des modèles de patineurs (cf travaux d'A. Luciani et de Cl. Cadoz [28], Univ. de Grenoble, qui nous ont été indiqués par J. Louchet).

$\mu = -0.03$ $dzeta/z_0 = -3$



$\mu = (t^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)$ est fonction du temps relativiste t . Les paramètres x_0, y_0, z_0 caractérisent le germe initial. $Dzeta$ repère la hauteur d'une coupe normale à l'axe de la "fleur". La variable u , liée au potentiel morphogénétique, est le cosinus d'un angle caractéristique du réseau local. Enfin w est proportionnelle à la variable d'environnement. La "fleur" est représentée par certains domaines de la surface $f(u, w, dzeta) = 0$ (cf [6]).

$\mu = -0.03$ $dzeta/z_0 = -3, -2, -1, 0, 1$



Les différents domaines I, II, III, IV, V, représentés en noir, sont déterminés par la condition de sélection [6] qui, dans un modèle physique, exprimerait une optimisation de l'action. I, II, III correspondent respectivement aux "sépalés", "pétales", "étamines". Le "pistil fécondé" est l'image de IV et V.

Planche 3 : Espace abstrait de description

Aux différents domaines de cet espace abstrait correspondent les "sécales", les "pétales", les "étamines", certaines parties du "pistil". On constate que le paramètre t , qui joue le rôle du temps relativiste au niveau atomique, fait évoluer la structure de l'objet tridimensionnel. Pour t assez faible, le modèle fait apparaître les "sécales", les "pétales" et un embryon de "pistil". Puis, quand t franchit une certaine valeur, apparaît l'image d'un troisième domaine : ce sont les "étamines" qui gonflent progressivement. A une autre valeur de t , la structure du "pistil" est modifiée par l'apparition de deux autres domaines, comme s'il y avait "fécondation". Puis arrive une valeur singulière au delà de laquelle le modèle est profondément changé (l'étude n'est pas achevée). Signalons que des modèles "duaux", dans lesquels l'importance relative des balayages en B_i et en $X_i(0)$ est inversée, font émerger des formes de type "animal" présentant une évolution analogue (des configurations bidimensionnelles sont présentées en [5]). D'autres investigations [12] ont montré des possibilités d'applications en embryogénèse. Pour des ingénieurs, qui ne sont ni des botanistes, ni des entomologistes, cette évolution ne correspond pas à ce qu'ils considèrent intuitivement comme un vieillissement.

II. UNE SOURCE EVENTUELLE DE VIEILLISSEMENT : LA DESYNCHRONISATION DES DYNAMIQUES SOUS-JACENTES

II.1 Problème posé

Pour décrire le développement et le vieillissement d'un système vivant, il faut connaître non seulement le potentiel morphogénétique, mais aussi les flux locaux et les relations entre forces et flux à différents niveaux d'imbrication. Il s'agit donc de rechercher une généralisation de la loi fondamentale de la dynamique newtonienne. Puisque le même R.A. décrit un système vivant à différents niveaux, le formalisme doit prendre en compte le passage progressif du non-dissipatif, qui règne à l'échelle quantique, au dissipatif qui paraît fondamental pour le vivant. Une première approche a été proposée par A. Le Méhauté [13], grâce à des dérivées d'ordre fractionnaire liées à la dimension fractale du milieu considéré. Elle montre qu'il n'est pas possible de résoudre le problème posé au moyen des concepts classiques d'espace et de temps; il faut introduire des grandeurs nouvelles qui font intrinsèquement partie du référentiel : pour A. Le

Méhauté, ce sont les dimensions fractales. Par une approche différente, L. Nottale, qui est d'ailleurs à l'origine de la notion de "séquence réduite" mentionnée précédemment, vient de proposer un nouveau concept de dérivée fractale dans le cadre d'un formalisme utilisant l'analyse non-standard [14], [15].

II.2 Construction des éléments de déplacement

Nous utilisons une construction des éléments de déplacement, qui résulte d'études effectuées par J. Chastang [16], [17], et diverses méthodes d'intégration [18]. A ce sujet, indiquons que certains R.A. dégénérés, fonctionnant sous l'effet de "séquences insécables", donnent un moyen de retrouver la définition classique d'une dérivée [19], [20]. En [21], est donné un exemple simple : c'est l'ascenseur à balancier, utilisé autrefois dans certaines mines (à Kongsberg, Norvège, par exemple).

Ce système est composé de deux ensembles identiques de cabines équidistantes, disposées verticalement et reliées par un câble inextensible (cf figure 4). Ce câble passe sans glisser sur une poulie solidaire d'un balancier. Écarté de sa position d'équilibre, le balancier communique à l'ensemble un mouvement oscillatoire. Par hypothèse, l'amplitude du mouvement est telle que certaines cabines sont face à face aux instants où le balancier est le plus écarté de sa position d'équilibre. A ces instants, un passager peut passer d'une cabine dans une autre située au même niveau. Pour monter ou descendre d'une hauteur notable vis-à-vis de l'amplitude d'oscillation, il doit changer de cabine à chaque demi-période. Si aucun changement n'est oublié, le sens de déplacement reste celui choisi initialement.

Dans le formalisme classique, le mouvement d'une cabine et les changements de cabine sont décrits de façon distincte. Au contraire, dans une modélisation par R.A., les deux types de mouvement s'enchaînent automatiquement. Les variables X et Y du R.A. sont associées à la distance verticale parcourue par un passager et à sa vitesse. La variable d'environnement V repère la position verticale moyenne des cabines, c'est-à-dire leur numéro d'ordre. En l'absence d'appel à l'environnement, V reste constant; le R.A. décrit les modifications de position et de vitesse d'une cabine. Un blocage du R.A. (i.e. le calcul d'une composante X ou Y non-entière) implique une modification de V (appel à l'environnement) qui décrit un changement de cabine.

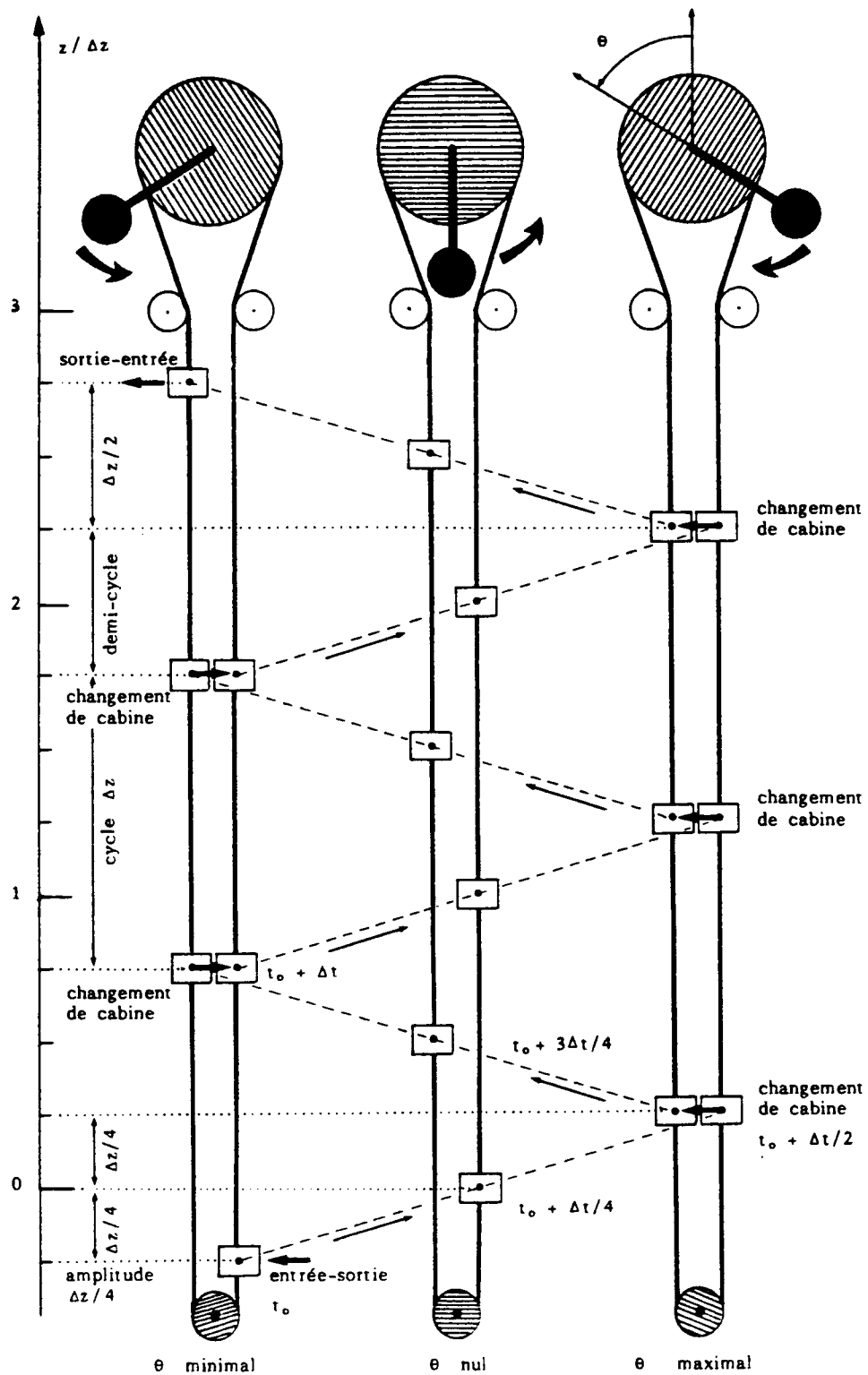


Figure 4 : Schéma d'un ascenseur à balancier

Ce modèle peut être complexifié par un accroissement du nombre des variables d'environnement, suivi de dégénérescences. Dans le cas le plus simple, le R.A. obtenu modélise un mouvement de propagation rectiligne (c'est une transvection) couplé à une rotation. Il peut représenter très schématiquement une double hélice d'ADN, des hélices de protéines, la propagation de globules le long d'un microtubule, une paire de centrioles,...

II.3 Effets de désynchronisation

Le fonctionnement d'un système comprenant plusieurs niveaux imbriqués implique une synchronisation convenable des dynamiques sous-jacentes. Dans l'approche adoptée, elle résulte du théorème d'imbrication. Mais encore faut-il qu'il soit applicable. Or la description des molécules fondamentales du vivant, notamment des brins d'ADN et des protéines, nécessite au minimum deux variables d'environnement. Dans le modèle le plus dégénéré, l'une est associée au déplacement rectiligne et l'autre à la rotation. Au voisinage de la dégénérescence, le fonctionnement du R.A. dépend de deux exposants K et H qui interviennent dans les valeurs initiales, chacun d'eux étant lié au déverrouillage du R.A. par l'une des deux variables d'environnement. Si $K=H$, le R.A. fonctionne de la même façon qu'un R.A. à une seule variable d'environnement. Mais si $K \neq H$, la troisième partie du théorème d'imbrication n'est plus vérifiée : à K fixé inférieur à H , le nombre de conditions de verrouillage croît avec H . Par conséquent, si l'écart entre K et H augmente au cours du temps, il arrive nécessairement une étape à partir de laquelle la classe de fonctionnement du R.A. change de façon non prévisible algébriquement (des solutions particulières de congruences arithmétiques interviennent). Admettons que les trois notions de temps complémentaires introduites précédemment (i.e. la succession d'actes, les séquences réduites et les niveaux liés à K et H) soient, en moyenne, liées au temps d'évolution t . Nécessairement, apparaîtront au cours du temps des changements de classe de fonctionnement engendrant une désynchronisation progressive des dynamiques sous-jacentes et entraînant le vieillissement de l'organisme, puis sa mort.

III. EXPRESSION D'UNE COHERENCE GLOBALE

III.1 Introduction d'un aspect linguistique dans les relations entre forces et dynamiques sous-jacentes

Il ne suffit pas d'avoir repéré un potentiel morphogénétique évolutif et une source de désynchronisation pour espérer aborder une modélisation globale du vieillissement... Dans le cadre du formalisme adopté, il faut au moins exprimer des relations entre forces et dynamiques sous-jacentes. Ces relations font intervenir des "séquences insécables", grâce auxquelles la dynamique respecte des relations de voisinage, et des "séquences réduites" qui fixent le potentiel morphogénétique. Un aspect linguistique est donc introduit. On devrait pouvoir poursuivre les recherches en utilisant les récents développements des modèles connexionnistes (cf synthèses présentées par D. Andler [22] et par J.-Cl. Perez [23]). En effet, relateurs arithmétiques et réseaux connexionnistes peuvent être considérés comme des "cousins" car ils ont une origine commune, la théorie des automates cellulaires et des automates autoreproducteurs de J. von Neumann [24], [25]. Mais leur développement a été très différent. Les R.A. s'appuient sur les équations de la physique et de la chimie alors que les modèles connexionnistes ont surtout concerné les problèmes linguistiques en vue d'application en intelligence artificielle et en neurophysiologie : les concepts linguistiques classiques sont remplacés par des configurations d'états décrites à un niveau sub-linguistique [26], [27]. Or c'est un problème qui a été effleuré dans l'étude de la linéarisation des R.A. (cf travaux de L. Nottale [29]). Il faut donc poursuivre dans cette voie. En bref, nous proposons de déterminer l'aspect linguistique intervenant dans les processus de dérivation et d'intégration au moyen d'un bouclage entre la relation support d'un R.A. (d'où découle le potentiel morphogénétique) et la dynamique locale (repérée au moyen de développements limités au voisinage de certaines singularités). En intelligence artificielle, ce bouclage devrait correspondre à certains processus d'apprentissage et, en physique relativiste, à la relation entre le tenseur de courbure contracté et le tenseur impulsion-énergie.

III.2 Utilisation des domaines multiplicatifs quadratiques

Les applications des R.A. en physique (notamment modélisation d'un atome

d'hydrogène et modélisation de phénomènes électromagnétiques) ont montré l'importance d'une cohérence globale introduite par des domaines multiplicatifs quadratiques. Par extension, nous faisons l'hypothèse suivante : la cohérence globale des mécanismes du vivant les plus fondamentaux sont décrits par des domaines multiplicatifs associés aux formes quadratiques à 2, 4 et 8 variables (dans le corps des réels, la structure associée à ces domaines est celle des nombres complexes ordinaires [multiplication associative et commutative], des quaternions [multiplication associative et non-commutative] et des octaves de Graves-Cayley [multiplication non-associative et non-commutative]). Pour des applications en biologie, le caractère entier des coefficients et des variables jouent un rôle important. Il faut donc faire appel à des extensions algébriques convenables. C'est le cas pour la description des structures hélicoïdales imbriquées qui existent au sein d'une cellule vivante. D'après les investigations en cours, cette imbrication se refléterait dans celle du milieu aqueux qui serait dynamiquement structuré. Les formes quadratiques à 4 variables décrivant ce milieu ont été trouvées [30] ainsi que l'extension algébrique qui, d'ailleurs, contient celle utilisée par les spécialistes des quasi-cristaux : chaque composante d'un quaternion est remplacée par un nombre à 4 composantes entières de la forme : $x_1 + x_2 \sqrt{2} + x_3 \sqrt{5} + x_4 \sqrt{10}$.

CONCLUSION

Il semble possible d'aborder globalement le problème du vieillissement d'organismes vivants au moyen de formalismes prenant en compte une imbrication de niveaux de description et d'organisation. Une des approches envisageables est fondée sur les relateurs arithmétiques qui exploitent une relation générale d'adaptation à l'environnement. On en déduit simplement des potentiels morphogénétiques évolutifs. Si le système est descriptible par un R.A. à une seule variable d'environnement, les dynamiques sous-jacentes sont régulièrement imbriquées. Mais s'il faut plusieurs variables d'environnement, au phénomène d'évolution se superpose une désynchronisation progressive des dynamiques sous-jacentes qui est interprétée comme une source de vieillissement.

La modélisation du développement d'un organisme vivant nécessite une relation entre le potentiel morphogénétique et ces dynamiques; cette relation

contient un aspect linguistique. La cohérence du modèle est assurée par certains domaines multiplicatifs quadratiques, notamment celui qui est associé au milieu aqueux cellulaire.

Naturellement, cette approche doit faire l'objet d'une critique approfondie et constructive de la part des spécialistes du vieillissement. A notre avis, elle devrait s'inscrire dans un cadre ouvert où peuvent être remises en cause les notions classiques d'espace et de temps.

REFERENCES

- [1] **Th. Moulin**, "Simulation Modelling Formalism : Arithmetic Relators", Encyclopedia of systems and Control, Pergamon, 1987, Vol. VI, pp 4334-4337.
- [2] **Th. Moulin**, "Le relateur arithmétique : un moyen d'associer localement des notions d'espace, de temps et de niveau d'imbrication dans les systèmes naturels", Colloque 'Perspectives Systémiques' organisé par l'AFCEC, Cerisy-La-Salle, 19-29 sept. 1986, B. Paulré éd., Ed P.U.L., Lyon (à paraître).
- [3] **Cl. Vallet, Th. Moulin**, "Un nouveau moyen d'appréhender les niveaux d'organisation majeurs observés dans la nature", XIe Congrès Int. de Cybernétique, Symposium VI, Namur (Belgique), 1986, pp 251-265.
- [4] **H. Le Guyader, Cl. Vallet, M. Ferré, Th. Moulin**, "Différents aspects des notions d'espace et de temps dans des modèles de systèmes naturels", Cybernetica, 1981, 24, n°2, pp 102-114.
- [5] **Cl. Vallet, H. Le Guyader, Th. Moulin**, "Signes naturels, formes du vivant et relateurs arithmétiques", IIe Congrès Int. de Sémiotique, Vienne (Autriche), 2-6 juillet 1979, in 'Semiotics Unfolding', Tasso Borbé éd., Mouton Pub., Berlin, 1984, pp 389-396.
- [6] **Cl. Vallet**, "Modélisation arithmétique de formes biologiques", Int. Conf. on Systems Science, sept. 1979, Univ. de Wroclaw (Pologne), in Cahier Systema n°9, 1982, pp 5-40 (30 rue Croix-Bosset, 92310 Sèvres, France).
- [7] **Cl. Vallet, Th. Moulin, H. Le Guyader, L. Lafrenière**, "Emergence et imbrication de niveaux d'organisation dans les systèmes complexes", VIIIe Congrès Int. de Cybernétique, Namur (Belgique), 1976, pp 187-199.
- [8] **M. Ferré, H. Le Guyader**, "The geometry of leaf morphogenesis : A theoretical proposition", Acta Biotheoretica, **33**, 1984, pp 85-132.

- [9] **J.-P. Luminet**, "Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification", *Revue du Cethedec*, n°62, 1980, pp 55-95.
- [10] **B. Mandelbrot**, "Les objets fractals : forme, hasard et dimension", Flammarion, Paris, 1975.
- [11] **H. Vérine**, "Importance potentielle des fractales en biologie", VIe Séminaire de Biologie Théorique, Solignac 1986, A. Kretzschmar éd., Ed CNRS, 1988 (à paraître).
- [12] **Th. Moulin**, "Configurations initiales planes, positionnées dans le repère propre", *Cahier Systema* n°11, 1983, pp 113-135 (adresse en [6]).
- [13] **A. Le Méhauté, A. de Guilbert, M. Delaye, C. Filippi**, "Note d'introduction de la cinétique des échanges d'énergie et de matières sur les interfaces fractales", *C.R.Acad.Sc.Paris*, t. 294, Série II, 1982, pp 835-838.
- [14] **L. Nottale, J. Schneider**, "Fractals and nonstandard analysis", *J. Math. Phys.*, **25**, 1984, pp 1296-1300.
- [15] **L. Nottale**, "Sur le temps de la Microphysique", *C.R.Acad.Sc.Paris*, t. 306, Série II, 1988, pp 341-346.
- [16] **Cl. Vallet, M. Ferré, Th. Moulin, J. Chastang**, "Use of a partially self-referent formalism for description of natural systems", in *Cybernetics and Systems Research*, R. Trappl éd., North-Holland, Amsterdam, 1982, pp 85-90.
- [17] **J. Chastang, F. Chauvet**, "Déploiement d'un relateur arithmétique par la variable d'environnement", à paraître dans le *Cahier Systema* n°13.
- [18] **Th. Moulin**, "Présentation sommaire des relateurs arithmétiques", in *Cahier Systema* n°12, 1986, pp 25-113 (adresse en [6]).
- [19] **Th. Moulin**, "Réflexions sur des axiomes de la Théorie des Systèmes de Transformations", Colloque P. Delattre, Collège de France, 4-5 déc. 1987, C.P. Bruter éd. (à paraître dans les Actes du Colloque).
- [20] **Th. Moulin, L. Saint-Paul, F. Chauvet, Cl. Vallet**, "A method for developing models using arithmetical relators", in 'Cybernetics and Systems', R. Trappl éd., Kluwer Academic Pub., tome I, 1988, pp 15-22.
- [21] **Th. Moulin**, "Tentative de modélisation par un relateur arithmétique de quelques constituants cellulaires appartenant à des niveaux d'imbrication différents", VIIe Séminaire de Biologie Théorique, Solignac, juin 1987 (à paraître dans les Actes du Séminaire, Y. Bouligand éd., Ed CNRS).
- [22] **D. Andler**, "Le connexionnisme, entre intelligence artificielle et neurocalcul", Colloque 'Systèmes Naturels, Systèmes Artificiels', 8-10 oct. 1987, Univ. Strasbourg, F. Tinland éd. (à paraître).
- [23] **J.-Cl. Perez**, "De nouvelles voies vers l'Intelligence Artificielle", Masson, Paris, 1988.

- [24] **J. von Neumann**, "Theory of self-reproducing automata", A.W. Burks éd., Univ of Illinois Press, USA, 1966.
- [25] **A.W. Burks**, "Essays on Cellular Automata", Univ. of Illinois Press, 1970.
- [26] **D.J. Amit**, "Neural Network - Achievements, Prospects, Difficulties", The Physics of Structure Formation, Int. Symp. Tübingen, Oct. 1986.
- [27] **P. Smolensky**, "On the proper treatment of connectionism", Behavioral and Brain Sciences, Cambridge Univ. Press. 1987.
- [28] **A. Luciani, Cl. Cadoz**, "Utilisation de modèles mécaniques et géométriques pour la synthèse et le contrôle d'images animées" in 'Colloque 'Image-Cesta', Nice, avril 1986, éd. CESTA, Paris, pp 704-711.
- [29] **L. Nottale**, "Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques", Revue du Cethedec, n°67, 1981, pp 35-82.
- [30] **Th. Moulin**, "Modélisation de structures du vivant et leur imbrication dans le milieu aqueux", Journée 'Réflexions sur la structure du milieu aqueux et implications en biologie', ENSTA, Paris, 19 mars 1988 (à paraître).

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient vivement le Dr. Henri Vérine qui a bien voulu présenter leurs investigations au cours du Colloque sur le Vieillissement.

Une partie des recherches a été effectuée dans le cadre de contrats financés par la Direction des Recherches, Etudes et Techniques du Ministère de la Défense, Paris.

DEUXIEME PARTIE :

PROBLEMES GENERAUX ET APPLICATIONS

Complexité et adaptation à l'environnement par Thiébaud MOULIN.	71
Perspectives optimistes issues de réflexions sur l'adaptation des systèmes vivants à leur environnement par Thiébaud MOULIN.	83
XIIIe Congrès International de Cybernétique (août 1992) Introduction au Symposium XXVII «Systèmes naturels ... »	91
• Généralisation de la condition d'adaptation... par François CHAUVET.	95
• Relateurs arithmétiques, structures de Lie et singularités par Philippe RIOT.	101
• Un apport possible des R.A. aux modèles connexionnistes par Serge GOLINSKY et Thiébaud MOULIN.	106
• Ebauche d'un modèle générique de "milieux aqueux structurés" par Thiébaud MOULIN.	111
• Cytosquelette de la cellule végétale : émergence d'un R.A. par Michel FERRE.	116
• ...pour une nouvelle approche de comportements humains par Claude VALLET.	121
• ...formalisation ... de l'autonomie selon P. Vendryès par Guy MAUGE.	126
• Les entiers p-adiques ... en économie? par Frédéric BOCCARA.	131
• Bouclages structurels... par Lionel SAINT-PAUL et Thiébaud MOULIN.	136
• Conclusion du Symposium XXVII «Systèmes naturels...»	141

Colloque "Arguments pour la Pensée Complexe"
CNRS, 23 octobre 1991

COMPLEXITE ET ADAPTATION A L'ENVIRONNEMENT

Thiébaut MOULIN (*)

INTRODUCTION

Au lieu d'aborder l'étude des systèmes biologiques à partir de notions développées pour les systèmes artificiels, le groupe Systema recherche directement des modélisations du vivant en posant la question fondamentale [1, p. 74] suivante : "La notion de système correspond-elle à une réalité objective ou n'est-elle qu'un artifice créé par le cerveau humain pour tenter de comprendre ou d'influencer les phénomènes qu'il est susceptible de percevoir?" Si elle n'est qu'un artifice, il faut parler non pas de la complexité d'un système naturel, mais de la complexité du modèle qui essaye de le représenter. Ce point de vue a été développé en 1982 au cours d'un congrès organisé à Washington par la Society for General Systems Research. Les deux principaux intervenants étaient B. Zeigler, spécialiste de la théorie des automates, et R. Rosen, biologiste et mathématicien ayant développé des modèles fondés sur la théorie des catégories. Ces scientifiques ont rappelé que les objets qui pouvaient être modélisés globalement avec le moins de difficulté étaient ceux dont la taille différait le plus de celle des êtres humains, par exemple les amas de galaxies ou les particules dites "élémentaires"! Et, par contre, qu'il était

* Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, 75015 PARIS (France).

bien difficile de modéliser globalement un être humain avec les moyens classiques! A la limite, R. Rosen a soutenu qu'il était impossible de parler de la complexité d'un système naturel. A son avis, la question "un électron est-il plus complexe qu'une cellule vivante?" n'a pas de sens. J.-L. Le Moigne, qui a également développé ce point de vue, a posé en [2] une autre question : "La complexité est-elle-modélisable?"

Parce que le groupe Systema a été fondé par des ingénieurs ayant exercé leur métier et qu'il a été vivifié par la présence de jeunes biologistes, notamment B. Calvino et H. Le Guyader, il a pu se demander de façon pertinente si la complication des modèles classiques de systèmes vivants ne prenait pas racine dans des habitudes de pensée héritées des constructeurs de machines à vapeur [1]. Les recherches du groupe, entreprises il y a une vingtaine d'années [3], débouchent maintenant sur de nouveaux types de modèles qui effectivement s'affranchissent des concepts classiques d'espace et de temps, abandonnent au point de départ le formalisme intégral-différentiel (c'est-à-dire l'hypothèse de dérivabilité et même celle de continuité), introduisent de nouvelles notions, par exemple celle de "système générique", et prennent en compte un "champ d'interférences structurelles" décrit, dans le cas le plus simple, au moyen d'entiers p -adiques. L'outil mathématique correspondant a été appelé "relateur arithmétique". Au dire de Ph. Riot [4], "malgré un caractère apparemment simpliste, ... il se trouve au carrefour de plusieurs théories mathématiques de pointe", probablement parce qu'il est fondé sur des structures mentales primordiales.

Le relateur arithmétique réduit considérablement la complication de certains modèles de systèmes vivants et conduit à poser en termes nouveaux le problème de "la pensée complexe" car la notion de complexité semble dépendre fortement du degré d'action volontariste attribué à l'observateur-acteur qui étudie le système naturel. S'il est "pacifique", au sens que paraît lui donner M. Mendès-France dans un récent article [5], il abordera l'étude de ces systèmes avec émerveillement en recherchant simplicité et harmonie [6]; mais s'il veut rester strictement objectif (au sens classique des physiciens), une réalité artificiellement complexe risque

d'être perçue : celle que percevrait un étudiant des beaux-arts qui, pour apprendre l'art du sculpteur, broierait les plus belles statues afin de connaître d'abord la nature exacte de la pierre ou du bronze qui les constitue.

LES STRUCTURES DE BASE

Jusqu'en 1988, les relateurs arithmétiques ont été présentés à partir de considérations systémiques. C'est notamment le cas de la présentation faite en 1986 à Cerisy-La-Salle, lors du colloque "Perspectives systémiques" organisé par B. Paulré [7, p. 89-104]. Au cours de ce colloque, R. Thom a incité le groupe Systema à établir un lien entre cet outil et les structures de Lie qui jouent un rôle fondamental dans la physique actuelle. C'est un jeune mathématicien, Ph. Riot, qui a établi cette jonction en montrant que les structures de base appelées BCR (Basic Cyclic Relators) pouvaient être mises en relation avec les systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples [8]. Dans la suite, cette nouvelle présentation, développée notamment par Fr. Chauvet [9], sera adoptée, mais aucune précision ne sera donnée sur le formalisme. Une vue d'ensemble sur les relateurs arithmétiques et les principales références se trouvent dans plusieurs documents publiés récemment [10], [11], [12].

Un relateur arithmétique est défini incomplètement par trois données indissociables :

- un support qui est une relation multiquadratique à coefficients entiers présentant certaines particularités; les variables ne prennent que des valeurs entières (d'un point de vue systémique, à un niveau de description fixé –par exemple celui d'une communauté d'humains–, la notion d'entité non entière –par exemple celle de demi-homme– est exclue);
- des transformations qui sont interprétables géométriquement au moyen de réflexions; dans le cas le plus simple, elles font intervenir une division par un entier P ;
- des ensembles de valeurs initiales qui introduisent certaines factorisations, notamment l'exposant K de l'entier P .

Cette définition est incomplète. Ce qui manque est obtenu par classification.

Les structures les plus simples sont celles pour lesquelles, après une réflexion, l'état est toujours un entier et qui présentent un caractère cyclique. Ce sont les BCR qui sont en relation directe avec les systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples, les groupes cristallographiques, certaines singularités (notamment les catastrophes élémentaires), la théorie des tresses,... Rappelons que la liaison entre structures de Lie et singularités des applications différentiables a été conjecturée par Grothendieck et établie en 1970 par E. Brieskorn (cf [13]). Il est rassurant de constater que les catastrophes élémentaires, qui émergent d'un raisonnement fondé sur le continu, peuvent être mises en correspondance avec certains BCR, trouvés par une approche fondée sur le discret!

L'importance de la circularité est mentionnée dans les premiers travaux de H. Maturana et F. Varela [14a] (qui avaient été communiqués au groupe Systema par H. von Foerster, en 1974) et dans des publications plus récentes [14b].

Toutes ces constatations fournissent les bases d'une nouvelle approche de la complexité; en d'autres termes, pour qu'un modèle de système vivant paraisse peu compliqué, le langage utilisé doit s'appuyer sur des structures fondamentales qui sont directement interprétables à différents niveaux d'organisation.

ADAPTATION A L'ENVIRONNEMENT

La nouveauté essentielle des relateurs arithmétiques provient de la condition d'adaptation à l'environnement. Elle consiste à coupler deux structures idéales : l'une est appelée structure sous-jacente du système; l'autre, structure idéalisée de l'environnement. Par hypothèse, les réflexions relatives à l'environnement peuvent toujours être effectuées. Nous supposons qu'un système est adapté à son environnement si, en cas de blocage (c'est-à-dire s'il y a apparition d'un résultat non entier au

niveau des variables décrivant l'état du système), il est toujours possible de trouver des séquences de réflexions relatives à l'environnement qui permettent de relancer le fonctionnement du relateur arithmétique. La relation de base a été trouvée par Cl. Vallet en 1975 [15] et interprétée géométriquement par M. Ferré en 1981 [16].

Un théorème, établi en 1979 par J.-P. Luminet, montre que la relation d'adaptation à l'environnement introduit une structure d'imbrication pouvant être régulière. La régularité des imbrications se manifeste si le relateur arithmétique stabilisé (R.A.) a même fonctionnement qu'un R.A. à une seule variable d'environnement; elle peut se concrétiser sous forme de configurations fractales. Les référentiels spatio-temporels classiques des physiciens sont remplacés par des référentiels "espace-temps-imbrication". C'est une nouveauté essentielle qui diminue considérablement la complication des modèles satisfaisant au théorème d'imbrication. Des conclusions analogues émergent d'autres recherches, faites notamment par A. Le Méhauté [18] sur les interfaces fractales ou par L. Nottale dans le domaine de l'astrophysique [19].

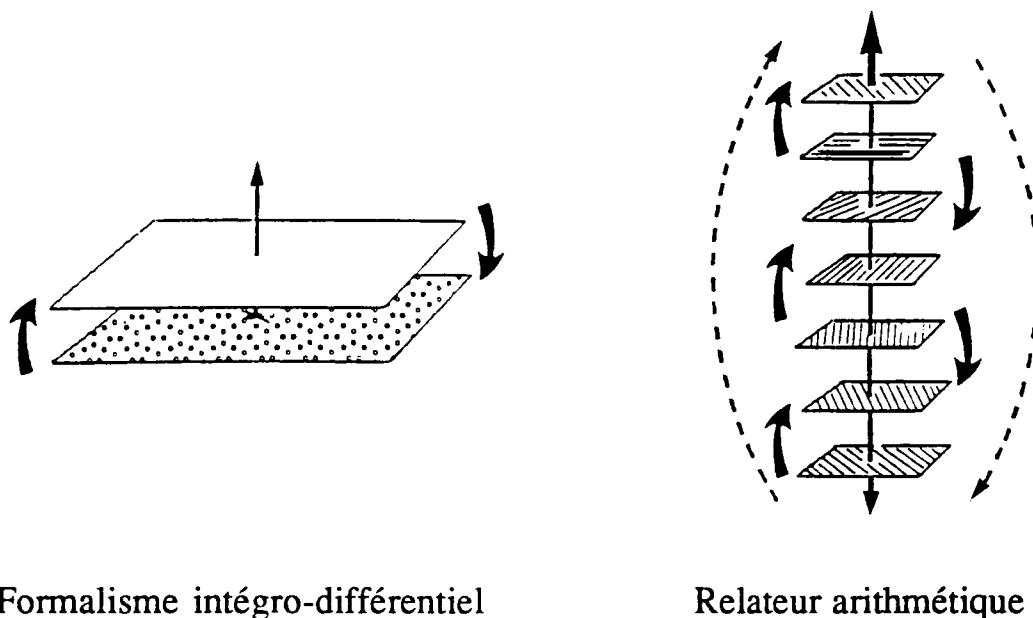


Figure 1

Si l'observateur-acteur, par exemple un expérimentateur en physique ou en biologie, a une attitude volontariste, le relateur arithmétique stabilisé le plus schématique décrivant le "système observé" comporte au minimum deux variables d'environnement, l'une pour l'environnement du système, l'autre pour l'observateur-acteur. Le système modélisé de façon réversible dans la structure "espace-temps-imbrication" est alors remplacé par un autre système comportant des irréversibilités. Cette situation se présente, notamment, lors d'une mesure en mécanique quantique : c'est le collapse de la fonction d'onde qui est probablement l'une des causes de la flèche du temps macroscopique (cf H.D. Zeh [20], p. 70-103).

Dans l'hypothèse où existe une structure d'imbrication approximativement régulière, une modélisation adéquate peut devenir approximativement invariante sous l'effet de changements de niveaux. Un relateur arithmétique décrit toute une filière de systèmes imbriqués les uns dans les autres, mais à chaque niveau le domaine d'applicabilité du modèle est relativement faible; au contraire, dans le cas du formalisme intégral-différentiel, il n'y a généralement que deux niveaux mais, à chacun d'eux, le domaine d'applicabilité est relativement large (cf figure 1). On peut vérifier que certains relateurs arithmétiques s'appliquent à l'échelle subquantique (définition d'un système d'unités physiques privilégié où apparaît la longueur de Planck, égale à $1.6 \cdot 10^{-35}$ m), à l'échelle planétaire ou cosmique, en passant par la modélisation d'atomes, de molécules hélicoïdales et même de configurations florales.

Le modèle le plus simple est une sorte d'automate cellulaire (cf Cl. Vallet [21]) : un grand nombre de R.A. à 3 variables spatiales X,Y,Z, une variable temporelle T et une variable d'environnement V sont mis en oeuvre simultanément; ils diffèrent les uns des autres par les valeurs initiales. La forme support définit une métrique locale relativiste qui varie en fonction de la valeur locale de la variable d'environnement. Le fonctionnement séquentiel de chacun des relateurs, à T fixé, décrirait une sorte d'évolution à l'échelle géologique (aspect phylogénétique); il est remplacé par une "séquence réduite" de réflexions imposée (aspect ontologique) qui schématise un brin d'ADN. Le temps habituel des

physiciens ne se manifeste pas par un enchaînement de processus, mais «statiquement» au moyen du paramètre T. Une modification de T provoque généralement une évolution progressive de la configuration; mais pour certaines valeurs particulières, apparaissent des transformatifs brutales au voisinage de singularités métriques. Certaines pièces florales qui étaient à l'état virtuel deviennent visibles (cf planche 2).

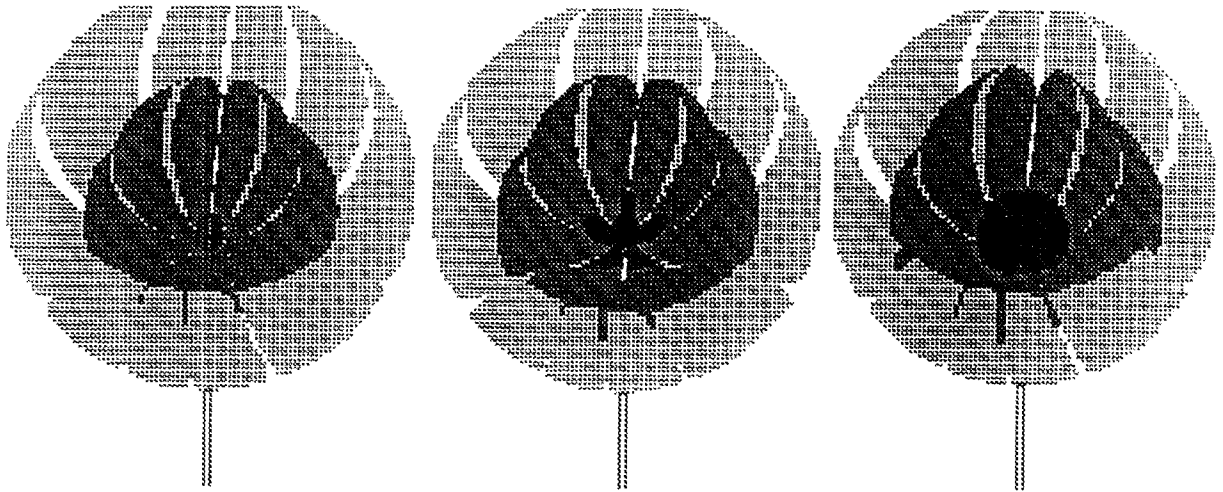


Figure 2

Le même type de relateur arithmétique s'applique à des systèmes situés à des niveaux très différents. Le point de départ est une modélisation de «grains de matière» et de «grains de lumière» [22]. Puis, après adjonction d'une deuxième variable d'environnement, ont été décrits schématiquement l'effet d'une mesure quantique, une interaction électrostatique simplifiée, un atome d'hydrogène. Autrement dit, le modèle d'un atome paraît plus complexe que celui d'une configuration florale! Il est aussi beaucoup plus dégénéré car les systèmes physiques, contrairement aux systèmes biologiques, peuvent être isolés en majeure partie de leur environnement.

LES ELEMENTS STRUCTURES DE DEPLACEMENT (ESD)

Le concept d'ESD remplace celui d'élément différentiel. Ces ESD sont engendrés par des relateurs arithmétiques dégénérés, certains d'entre eux (imaginés par J. Chastang [23]) étant bâtis à partir de relateurs non dégénérés. Grâce à des changements d'échelle, un ESD peut être rendu arbitrairement petit et, après un passage à la limite, redonner globalement l'élément différentiel. Mais alors que la structure des niveaux d'organisation inférieurs est gommée dans cet élément, elle persiste dans un ESD. L'exemple suivant (cf figure 3) donne, dans le cas d'un ESD nul, l'évolution des états $(X-X_0)$ pris en fonction du nombre τ de réflexions principales (rapporté à la longueur $L(K)$ du cycle engendré par le R.A. non dégénéré). Cette évolution comporte une partie auto-affine. La courbe limite correspondante, obtenue pour K tendant vers l'infini (K est l'exposant intervenant dans les valeurs initiales), est un attracteur fractal.

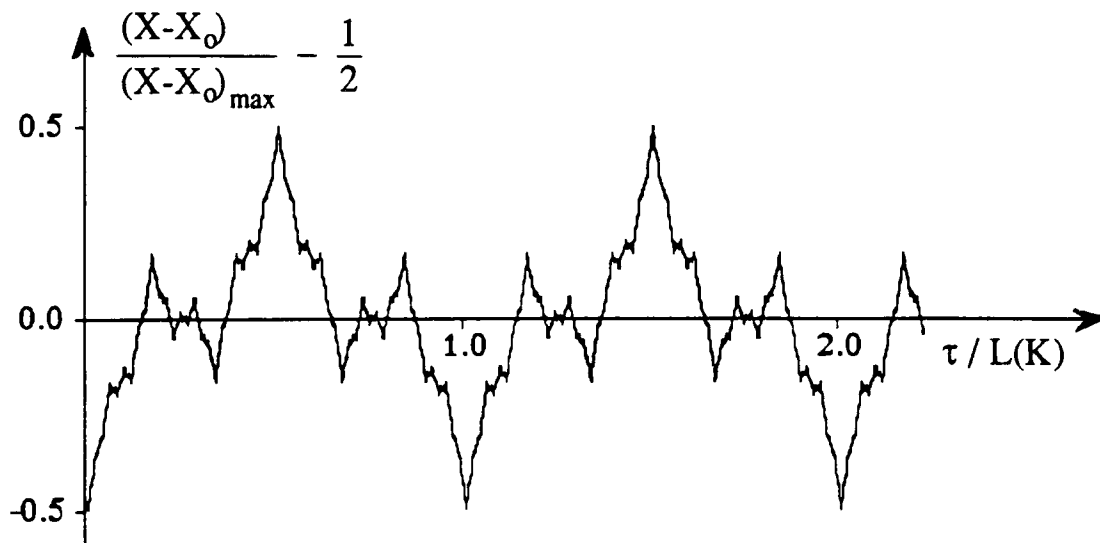


Figure 3

Il peut être engendré par un IFS, nom donné par M. Barnsley [24] à un système de fonctions itérées (Iterated Functions System en anglais); dans ce cas, on utilise 4 contractions affines définies chacune par 6 paramètres et appliquées avec la probabilité $1/4$. En [24] sont données les

valeurs de l'IFS engendrant le tapis de Sierpinski ou un "brin de fougère" (il faut utiliser respectivement 3 et 4 contractions affines). L'exemple du "brin de fougère" montre à quel point un algorithme adéquat peut simplifier la représentation. Cette simplification provient de la prise en compte d'une dimension "imbrication" engendrée par l'itération des contractions affines.

SYSTEME GENERIQUE

A la suite de réflexions sur différents aspects de la notion de temps, sur les phénomènes ergodiques, sur les imbrications de niveaux..., a été introduit le concept de "système générique" [10]. Il provient de la linéarisation d'un R.A. (et plus généralement de son développement à l'ordre $k < K$) au voisinage d'une singularité. Un système générique décrit le comportement cohérent d'un grand nombre de sous-systèmes en prenant en compte, de façon séquentielle, des états qui, dans le système global, peuvent être réalisés en parallèle, au même instant ou à des instants différents. La description obtenue de cette façon est atemporelle et ne respecte pas toutes les contraintes habituelles, notamment celles de voisinage. Elle évoque beaucoup le comportement de particules traversant l'une après l'autre un dispositif interférentiel.

La modélisation des molécules d'un gaz en équilibre a fourni le premier champ d'application : les sous-amas engendrés par le R.A. représentent les cellules de Boltzmann. La "molécule générique" passe de cellule en cellule; des tranches de fonctionnement séquentiel représentent, sous certaines réserves, une configuration possible d'un ensemble de molécules... Une autre application concerne la modélisation d'un système cérébral comportant neurones et cellules gliales [25].

La linéarisation d'un relateur pose un autre problème : celui de la détermination des appels à l'environnement qui dépend de termes complètement négligés dans la linéarisation. Pour que la linéarisation fournisse une configuration proche de celle qu'engendrerait le relateur, il

faut connaître sa classe de fonctionnement et déclancher les appels à l'environnement au moyen d'un pilote. Les "plus petit pilotes" sont les R.A. qui ont même classe de fonctionnement que le R.A. linéarisé et qui fonctionnent avec la valeur de P la plus faible. P est le diviseur qui est introduit au cours des réflexions; c'est lui qui intervient, à la puissance K , dans l'expression de certaines valeurs initiales dites "canoniques". Dans le cas de valeurs initiales non canoniques, le niveau d'imbrication est déterminé au moyen d'un emboitement de congruences arithmétiques modulo P, P^2, P^3, \dots . Pour décrire cet emboitement, les mathématiciens ont introduit la notion d'entiers p -adiques, définis pour p premier. Nous supposons que, à tout système vivant, est associé un pilote qui engendre un "champ informationnel", descriptible dans le cas le plus simple au moyen de ces entiers p -adiques.

CONCLUSION

La condition d'adaptation structurelle d'un système à son environnement, si elle est exprimée dans des référentiels adéquats, donne un moyen d'aborder de façon nouvelle le problème de la complexité des modèles de systèmes naturels. En particulier, des référentiels "espace-temps-imbrication" (nommés "espace-temps-fractalité" par certains auteurs) remplacent les référentiels spatio-temporels classiques.

Des "champs informationnels", appelés aussi "champs d'interférences structurelles" paraissent être à l'origine de la prodigieuse organisation des systèmes vivants. Ils se manifesteraient dans le milieu aqueux d'une cellule vivante comme dans le crâne d'un vertébré supérieur. Diverses investigations sont faites actuellement : au niveau cellulaire, les vérifications portent sur le calcul des molécules d'ADN et le fonctionnement de la machinerie ribosomique; au niveau cérébral, les cellules gliales joueraient un rôle important. Ces champs seraient introduits dans les réseaux connexionnistes (qui, d'ailleurs, sont en étroite liaison avec les relateurs arithmétiques) sous une forme dégénérée, au moyen de certains fonctionnements pseudo-aléatoires.

Si la validité des hypothèses émises était prouvée expérimentalement (compte tenu d'un protocole convenable impliquant, notamment, des observations à caractère "pacifique"), il faudrait tenir compte de ces "champs informationnels" dans les approches formalisées de la "pensée complexe".

REFERENCES

- [1] *Nouvelles approches dans l'étude des systèmes*, Colloque organisé en juin 1975 à l'Ecole Centrale par H. Apter, M. Clément et Th. Moulin. Actes édités par l'ENSTA, 32 bd Victor, 75015 Paris (encore en vente actuellement).
- [2] **J.-L. Le Moigne**, *La modélisation des systèmes complexes*, Afcet Systèmes, Dunod, Paris (1990).
- [3] **Th. Moulin, Cl. Vallet, D. Verney**, *Sur la possibilité de représenter le réel au moyen de relateurs arithmétiques*, Revue du Cethedec, 122 pages (1971).
- [4] **Ph. Riot**, *Fondements mathématiques sous-jacents des relateurs arithmétiques*, in Congrès Européen de Systémique, CES1 (Lausanne, 3-6 oct. 1989), Actes édités par l'AFCT, Paris, Tome I, 505-514 (1989). Texte paru également in Cahier Systema n°13 (Association Systema, 30 rue Croix Bosset, 92310 Sèvres), 27-42 (1991).
- [5] **M. Mendès-France**, *Compte rendu de lecture : "Biologie Théorique, Solignac 1987"*, Pour la Science, n° 154, p. 102 (août 1990).
- [6] **Th. Moulin**, *Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques*, Revue Internationale de Systémique (à paraître).
- [7] **B. Paulré** (dir), *Perspectives Systémiques - Colloque de Cerisy 1986*, L'Interdisciplinaire éd., 480 rue de la Glannde, 69760 Limonest (1989).
- [8] **Ph. Riot**, *Relateur arithmétique et théorie des catastrophes*, in XIIe Congrès International de Cybernétique, Namur (Belgique), 1199-1207 (1989).
- [9] **Fr. Chauvet**, *Quelques applications de modèles associant algèbres de Lie et cheminements pseudo-aléatoires*, in XIIe Congrès International de Cybernétique, Namur (Belgique), 1230-1237 (1989).
- [10] **Th. Moulin**, *Le relateur arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques*, Revue Internationale de Systémique, Vol. 3, n° 4, 459-483 (1989).
- [11] **Cl. Vallet, Ph. Riot, L. Saint-Paul, Fr. Chauvet, Th. Moulin**, *Le relateur arithmétique ...*, Congrès Européen de Systémique CES 1, Lausanne, B. Bouchon-Meunier (dir), AFCET éd., 156 bd Péreire, 75017 Paris, tome I, 495-534 (1989).
- [12] **Th. Moulin**, *Le relateur arithmétique : présentation succincte, récents résultats et perspectives*, Cahier Systema n°13, 1-26 (1991).
- [13] **P. Slodowy**, *Simple singularities and Algebraic Groups*, L.N.M. n° 815, Springer Verlag (1980).
- [14a] **H.R. Maturana, F. Varela**, *Autopoietic Systems; a Characterisation of the living Organisation*, BCL Pub. n° 94, Univ. of Illinois, USA, (1974).
- [14b] **F. Varela**, *Autonomie et connaissance*, Seuil éd., (1989).
- [15] **Cl. Vallet, Th. Moulin, H. Le Guyader, L. Lafrenière**, *Emergence et imbrication de niveaux dans les systèmes complexes*, in VIIIe Congrès International de Cybernétique, Namur (Belgique), 187-199 (1976).

- [16a] **M. Ferré**, *Le théorème de l'effet miroir*, Cahiers Systema n° 9, 87-109 (1982).
- [16b] **M. Ferré, H. Le Guyader**, *The geometry of leaf morphogenesis : A theoretical proposition*, Acta Biotheoretica n° 33, 85-132 (1984).
- [17] **J.-P. Luminet**, *Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification*, Revue du Cethedec, n° 62, 55-95 (1980).
- [18] **A. Le Méhauté**, *Les géométries fractales*, Hermès éd., Paris (1990).
- [19a] **L. Nottale**, *Fractals and the quantum theory of spacetime*, Int. Journal of Modern Physics A, Vol. 4, n° 19, 5047-5117 (1989).
- [19b] **L. Nottale**, *The Theory of Scale Relativity*, article proposé à Int. Journal of Modern Physics.
- [20] **H.D. Zeh**, *The Physical Basis of the Direction of Time*, Springer Verlag (1989).
- [21] **Cl. Vallet**, *Modélisation arithmétique de formes biologiques*, Cahiers Systema n° 9, 5-40 (1982).
- [22] **Th. Moulin**, *Possibilités d'application dans quelques domaines de la biologie de relateurs à structure parallèle et hiérarchisée*, in Biologie Théorique, Solignac 1986, A. Kretzschmar dir., Editions du CNRS, Paris, 179-195 (1988).
- [23] **J. Chastang**, *Etirement d'un relateur arithmétique par adjonction d'une variable principale*, Cahiers Systema n° 13, 43-92 (1991).
- [24] **M. Barnsley**, *Fractals everywhere*, Academic Press, San Diego (1988).
- [25] **Cl. Vallet, Th. Moulin**, *Relateurs arithmétiques et modèles connexionnistes*, in XIIe Congrès International de Cybernétique, Namur (Belgique), 1208-1218 (1989).

Congrès "Science et Tradition : Perspectives transdisciplinaires"
Palais de l'UNESCO, 2-6 décembre 1991

PERSPECTIVES OPTIMISTES ISSUES DE REFLEXIONS SUR L'ADAPTATION DES SYSTEMES VIVANTS A LEUR ENVIRONNEMENT

Thiébaud MOULIN (*)

Résumé: L'adaptation d'un système vivant à son environnement, exprimée au moyen de *relateurs arithmétiques*, fait émerger des référentiels *espaces-temps-imbrications* comportant un aspect fractal. Les structures de base sont associées aux algèbres de Lie, à la cristallographie, à la théorie des singularités, à la théorie des noeuds,... L'élément différentiel est remplacé par un *élément structuré de déplacement* (ESD) qui contient une description du système global auquel il appartient. Des champs de *résonances structurelles* sont décrits au moyen d'entiers p-adiques. On suppose qu'ils interagissent dans le milieu aqueux cellulaire, au niveau du cerveau par l'intermédiaire des cellules gliales,... Des bouleversements sont envisagés en médecine, en psychologie et dans de nombreux domaines. C'est pourquoi, malgré une pollution généralisée de la biosphère, il est raisonnable d'avoir une vision optimiste de l'avenir.

Mots-clés: Adaptation, relateur arithmétique, biosphère, cellules gliales, eau, environnement, espace-temps, fractal, p-adiques, résonances.

Abstract: The adaptation of a living system to its environment is expressed by means of *arithmetical relators*; it gives rise to *multilevelled space-time reference frames* which contain a fractal aspect. The basis structures are associated to Lie algebras, cristallography, singularities theory, knots theory,... The differential element is replaced by an *elementary structured displacement* (ESD) containing a description of the global system in which it is included. Structural resonances fields are described by means of p-adic integers. We suppose they interact in the aqueous cellular medium, at the brain level through glial cells,... Deep transformations are foreseen in medicine, psychology and various other domains... That is the reason why, in spite of a generalized pollution of the biosphere, the future is seen in an optimistic light.

Key-words: Adaptation, arithmetical relator, biosphere, environment, fractal, glial cells, p-adic, resonance, space-time, water.

* Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, 75015 PARIS (France).

INTRODUCTION

Les exposés prévus semblent indiquer que le congrès sera résolument tourné vers l'avenir, tout en respectant la tradition. Actuellement, des bouleversements se préparent dans de nombreux domaines, de la physique au géopolitique. Et il faut réfléchir car l'humanité (mais il vaudrait mieux dire la biosphère terrestre) paraît se trouver dans l'état d'une chrysalide qui n'est plus chenille et qui n'est pas encore papillon.

Pourquoi ai-je une vision optimiste de l'avenir alors qu'il faudrait parler, à juste raison, d'une détérioration grave de l'environnement, d'une pollution généralisée qui affecte aujourd'hui la majeure partie de ce qui vit et de ce qui pense sur notre planète? Parce que cet état ne peut être que transitoire et qu'il fait surtout prendre conscience de l'insuffisance des référentiels mentaux en vogue actuellement, et de pratiques qui sont issues d'une vision mécaniciste et réductionniste de l'univers; en d'autres termes, parce que la vie a toujours été, est et restera la plus forte.

FORMALISME EXPRIMANT L'ADAPTATION D'UN SYSTEME A SON ENVIRONNEMENT

L'une des notions les plus redoutables est celle de "système isolé de son environnement" ou celle de "boite noire n'ayant qu'un petit nombre d'échanges bien limités et bien contrôlés avec son environnement". C'est elle qui est à la racine non seulement du prodigieux développement technologique du monde moderne, mais aussi du matérialisme qui imprègne profondément le comportement des hommes; c'est elle qui présente comme fruit du hasard et du bruit ce qui devrait surtout susciter l'émerveillement et prouver l'inadéquation de certains modèles.

R. Thom est l'un des mathématiciens-philosophes qui sont particulièrement conscients de ce problème (1990a, b). Son approche reste fondée sur le continu et le différentiable mais elle présente le très grand intérêt de mettre en évidence des structures idéales primordiales, les catastrophes élémentaires, qui peuvent être des éléments de base d'un langage pluridisciplinaire applicable au vivant (1988). Tout en restant profondément attaché au formalisme intégral-différentiel, R. Thom est bien conscient des liens étroits et étranges qui unissent continu et discret : n'est-il pas stupéfiant que les plus simples des singularités des applications différentiables puissent être mises directement en relation avec des structures cristallographiques via les systèmes de racines des algèbres de Lie? (*)

Emergence de référentiels "espaces-temps-imbrications"

L'insuffisance des modèles fondés sur la géométrie différentielle a incité B. Mandelbrot (1975, 1983) à introduire la notion de fractale qui est devenue essentielle pour la description de certains phénomènes naturels.

* Cette liaison a été établie en 1970 par E. Brieskorn, cf. P. Slodowy (1980) et V. Arnold (1986).

Des physiciens, notamment A. Le Méhauté (1990) et L. Nottale (1990, 1991a), ont compris la nécessité de remettre en cause les concepts classiques d'espace et de temps en introduisant des imbrications de niveaux. Bien sûr, il y a d'autres tentatives : citons celle d'A. Connes (1990) qui développe la géométrie non commutative et insiste sur l'importance que devraient prendre en biologie (J.-P. Changeux, A. Connes, 1990) les nombres p-adiques (et leurs extensions). L'utilisation de ces nombres (étroitement liée à celle des fractales) devrait être un facteur de révolution en physique (*) : la communication de D. Versteegen à l'Ecole d'Hiver de Physique Théorique (les Houches, 1989) montre que c'est un moyen d'aborder la dynamique chaotique; de façon plus générale, les nombres p-adiques introduisent en physique un aspect informatique (c'est le cas, même dès à présent, pour la résolution de problèmes où les erreurs d'arrondi sont déterminantes, cf. M.R. Schroeder, 1986, p. 81-86).

L'apport des relateurs arithmétiques

Ces diverses préoccupations sont, en partie, à l'origine d'un outil mathématique nouveau, le relateur arithmétique, qui est développé depuis 1971 par le Groupe Systema. Deux articles assez récents publiés par l'un des membres de ce groupe (1989), (1991a) (**) précisent ses liens avec les structures de Lie, la théorie des catastrophes, les fractales,... les résultats ayant été établis par Ph. Riot (1989) et F. Chauvet (1989). Un résumé a été présenté l'an dernier au cours du Colloque de "Taxinomie Informatisée", organisé au Palais de l'Unesco par l'U.I.T.F. (1990) (**). En bref, Cl. Vallet (1976), puis M. Ferré (1982), ont réussi à exprimer structurellement l'adaptation d'un système à son environnement sans qu'il soit nécessaire de faire appel, ab initio, aux concepts habituels d'espace et de temps. La structure sous-jacente des systèmes et celle de l'environnement sont décrites par des relateurs cycliques de base (BCR) qui sont directement associés aux structures de Lie et aux groupes cristallographiques.

L'originalité du formalisme provient de la relation particulière associant ces deux BCR. D'après un théorème établi par J.-P. Luminet (1980), certains relateurs arithmétiques à une seule (***) variable d'environnement engendrent une imbrication régulière de rythmes sous-jacents; cette propriété peut être étendue à d'autres relateurs arithmétiques ayant même classe de fonctionnement que l'un d'eux. Mais, en général, s'il y a plus d'une variable d'environnement, l'imbrication perd sa régularité à partir d'un certain niveau d'imbrication et des désynchronisations de rythmes internes peuvent se manifester. L'influence d'une deuxième variable est interprétable comme la présence d'un observateur-acteur qui ne s'adapte pas aux rythmes internes du système

* D'après R. Vallée, cette idée a été défendue il y a plus de vingt ans par Charles Pisot, un arithméticien bien connu!

** Respectant d'anciennes habitudes, l'auteur ne mentionne pas son nom dans le texte de la communication.

*** Cette variable d'environnement V réalise une synthèse; ce qui, en systémique, correspond aux caractéristiques de l'environnement est représenté dans le support du relateur arithmétique par les coefficients des termes croisés $X_{\mu}V$, les X_{μ} étant les variables du système. En physique, dans le cas le plus simple, V représente une action (produit d'une longueur par une quantité de mouvement ou d'un temps par une énergie).

qu'il observe, cf. F. Chauvet et al. (1988), Groupe Systema (1991); en d'autres termes, qui n'est pas «pacifique», au sens que M. Mendès-France (1990) semble donner à ce qualificatif.

L'existence d'une imbrication régulière introduit des référentiels *espaces-temps-imbrications* dans lesquels il y a possibilité d'inversion apparente de la flèche du temps. Cette possibilité disparaît dès que l'observateur perd son caractère «pacifique». A notre avis, tout un ensemble de phénomènes est exclu de la physique classique parce que les contraintes associées à ce caractère «pacifique» ne sont respectées ni au niveau théorique, ni au plan expérimental.

Plusieurs notions systémiques nouvelles ont été introduites :

- Une *filière* est un ensemble de systèmes imbriqués dont la description reste approximativement invariante sous l'effet de changements de niveaux. Par exemple, les relateurs arithmétiques bâtis sur le système de racines de l'algèbre de Lie du groupe SU5 sont applicables en théorie quantique des champs, au niveau moléculaire (modélisation d'un milieu aqueux structuré), au niveau cérébral (modélisation de neurones et de cellules gliales). Mais ce qu'apporte l'imbrication est compensé par une limitation du domaine d'applicabilité des modèles à chacun des niveaux.
- Un *élément structuré de déplacement* (ESD) remplace un élément différentiel. Il contient en lui-même une description de l'ensemble du système auquel il appartient (à la manière d'une cellule vivante qui contient un ruban d'ADN). Le développement de cette partie du formalisme est fondée sur les travaux de L. Nottale (1980), (1991b) et de J. Chastang (1991).
- Un *système générique* décrit de façon séquentielle une population de systèmes évoluant en parallèle. Ce concept joue un rôle fondamental dans le formalisme. En particulier, c'est lui qui introduit la cohérence a-temporelle d'une filière et les *champs de résonances structurelles*, et qui donne le moyen d'engendrer des langages formels pouvant, dans certains cas, être associés à une sorte de langage naturel multi-niveaux...

PERSPECTIVES

Sciences humaines

L'une des raisons de mon optimisme provient d'une possibilité d'application des référentiels "espaces-temps-imbrications" dans les sciences humaines et de l'importance que prendra progressivement la notion d'«observateur-acteur pacifique». Alors que la séparation des concepts aboutit à une philosophie de l'individualisme, la recherche d'une adaptation des humains à leur environnement débouchera naturellement sur un comportement individuel et collectif très différent de celui que nous connaissons. Et il ne sera pas imposé; il émergera de lui-même, sans contrainte, parce que les esprits auront pris conscience de l'interdépendance et de la cohérence a-temporelle de notre monde. Dès à présent, certains biologistes, zoologistes, écologistes,... mettent intuitivement en pratique de telles notions; mais ils éprouvent beaucoup de difficulté car les esprits ne sont pas préparés.

La première tentative d'application des relateurs arithmétiques dans les sciences humaines, sociales, et en économie résulte de discussion avec G. Maugé dans le cadre d'un groupe de travail AFCET «Autonomie» qui tente de prolonger la pensée de P. Vendryès (1973); d'autres aspects sont issus de réflexions sur les travaux de B. Paulré (1985). Il s'agit de trouver certains types de filières centrées sur la structure de l'entreprise, ce qui conduit à prendre en compte simultanément le niveau moléculaire (qualité de la nourriture par exemple) et le niveau macroéconomique ou politique (structures financières, problème de l'emploi par exemple). Les formalismes classiques n'appréhendent pas ces différents points de vue de façon cohérente car le comportement inconscient des êtres humains est ignoré. Au contraire, dans les modèles à base de relateurs arithmétiques intervient constamment un équilibre entre le conscient et l'inconscient par l'intermédiaire des champs (*) de résonances structurelles. Par exemple, les fondateurs d'une entreprise déterminent ses objectifs en recherchant intuitivement la stabilité dynamique d'une filière, ce qui implique une réflexion à différents niveaux, incluant non seulement des études de marché et des moyens financiers mais aussi un souci de la qualité de la vie pour tous ceux qui travailleront dans l'entreprise...

Informatique Avancée (IA) et robotique

Une filière est généralement décrite de façon détaillée par une imbrication de relateurs arithmétiques, chacun d'eux contenant un relateur arithmétique simplifié qui résume toute la filière. Cette imbrication fait intervenir une procédure dite de *linéarisation* (et plus généralement de développement à l'ordre k) qui comprend deux comportements asymptotiques au voisinage de certaines singularités :

- Si certains paramètres sont suffisamment petits, l'un de ces comportements précise au moyen de nombres réels (ou d'une extension algébrique de ces nombres) la position de sous-amas engendrés par un relateur arithmétique. La séparation des amas peut être interprétée comme une séparation de concepts. Il en résulte, notamment, l'élaboration de langages à caractère systémique, fondés sur des types de singularités, des classes de fonctionnement et des factorisation partielles de nombres entiers; c'était le thème de la communication présentée en 1990 au Congrès de Taxinomie Informatisée. Dans un système cérébral, ce comportement asymptotique est engendré par les neurones... Au niveau cellulaire, il est associé au ruban d'ADN présent dans chaque cellule d'un organisme pluricellulaire.
- L'autre comportement asymptotique précise la "position des appels à l'environnement" vis-à-vis des transformations internes du système; il provient de la partie du développement qui est complètement négligée dans le comportement précédent. La position de ces appels est décrite par un emboîtement de congruences modulo p , p^2 , p^3 , ..., p^K dans la mesure où l'entier p^K est compatible avec la taille du système physique. Or la valeur de K la plus élevée est obtenue pour la valeur de p la plus faible. Un

* Un champ de résonance structurelle est modélisé par un ensemble de solutions potentielles d'équations diophantiennes, qui est résumé par des nombres entiers partiellement factorisés. On associe à ces équations un emboîtement de congruences, ce qui introduit les nombres p -adiques.

deuxième relateur, fonctionnant en synchronisme avec le premier et appelé pilote, est donc introduit. Il n'y a pas groupement en amas car les paramètres ne sont pas petits : les états du pilote sont répartis de façon approximativement uniforme (c'est-à-dire délocalisée) dans les référentiels associés au premier relateur. Le champ informationnel qui fournit la position des appels à l'environnement est modélisé par des nombres caractérisant un emboîtement de congruences : ce sont des entiers p-adiques. Cette modélisation n'est pas sans rappeler certaines investigations de G. Langlet (1991). Elle recoupe des préoccupations de physiciens tels que R. Penrose (1989). A notre avis, ce champ informationnel, qui a été appelé précédemment "champ de résonances structurelles", est traité au niveau cérébral par les cellules gliales.

Si cette hypothèse est bien confirmée, la prise en compte simultanée de ces deux comportements aura de très nombreuses applications, non seulement dans le domaine de l'informatique (pour la reconnaissance des formes, le traitement automatique de documents, la robotique,...) mais aussi dans le domaine de la psychologie. Et certaines interprétations psychologiques faites actuellement paraîtront complètement erronées. Ce point de vue renforce encore celui qui a été proposé dans le domaine des sciences humaines et incite à l'optimiste. Mais il est évident que donner autant d'importance à l'intuitif qu'au déductif, à la poésie qu'aux tables de multiplication, modifiera beaucoup notre monde et développera des motivations bien différentes de celles qui structurent les sociétés modernes.

Biologie et médecine

Une compréhension profonde des phénomènes physiques couplant les macromolécules présentes dans le milieu aqueux cellulaire devrait aboutir à une révolution en biologie et en médecine. L'approche scientifique actuelle privilégie considérablement l'aspect local, moléculaire au dépens du global et des résonances structurelles. Les premières vérifications, qui sont en cours, concernent une modélisation multi-niveaux de l'ADN et celle des résonances associées au milieu aqueux structuré cellulaire. Ces résonances pourraient être une des principales sources du champ informationnel se manifestant dans le phénomène vivant, cf. Cl. Vallet et al. (1989).

D'autres applications sont envisagées. L'une d'elles exploite le phénomène de cristallisation sensible. L. Bige et J.-P. Garel (1991) ont proposé d'utiliser ce phénomène pour la détection de la pollution alimentaire et de la séquence de traitements subis par un aliment avant qu'il ne soit consommé. Une autre concerne des thérapeutiques fondées sur l'usage d'une eau convenablement traitée. Au lieu de développer une médecine qui vise à remplacer les fonctions naturelles de l'organisme par des expédients qui le rendent dépendant, on cherche à renforcer les capacités naturelles de protection d'un individu, en exploitant les résonances structurelles associées notamment à des milieux aqueux structurés. Ces résonances sont inexplicables dans le cadre des référentiels spatio-temporels classiques, de même que les ondes électromagnétiques sont inexplicables au moyen de l'électrostatique et du magnétisme. C'est le couplage réalisé par l'imbrication de niveaux qui, à

notre avis, est à l'origine des phénomènes observés par certains biologistes. Mais leurs expériences sont rejetées par la majorité de la communauté scientifique parce qu'elles remettent en cause trop de dogmes et ébranlent tout un système fondé sur une certaine conception de la médecine. C'est pour cette raison que j'apporte sans ambiguïté mon soutien à l'équipe de J. Benveniste (cf. Fr. Beauvais et al., 1989) bien que je ne sois pas en mesure de donner un avis pertinent sur les expériences de biologie qui sont effectuées.

CONCLUSION

L'optimisme que j'ai essayé de communiquer prend finalement sa source dans l'abandon des référentiels spatiotemporels classiques au profit de référentiels "espaces-temps-imbrications" qui transforment notre vision du monde en introduisant beauté, cohérence, harmonie et en donnant aux hommes des motivations bien différentes de celles que proposent les différentes philosophies matérialistes.

Je terminerai en conseillant de méditer la philosophie de deux grands penseurs : celle de Saint Thomas souvent citée par R. Thom et celle de Saint Bonaventure à qui E. Bernard-Weil (1988, p. 139-140) aime faire référence. Il est étonnant de constater à quel point sont actuelles les préoccupations de ces penseurs, surtout celles relatives aux notions de temps (cf. synthèse écrite par E. Gilson, 1943). L'une d'elles, l'*aevum* ($\alpha\iota\omega\nu$ en grec), paraît avoir été développée intuitivement dans le cadre de référentiels "espaces-temps-imbrications"... C'était à une époque où l'on bâtissait de merveilleuses cathédrales, qui sont encore des vaisseaux pour un autre monde et qui apportent confiance et espoir.

REFERENCES

- V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé (1986), *Singularités des applications différentiables, Tome 1*, Editions MIR, Moscou.
- Fr. Beauvais, E. Davenas, B. Poltevin, J. Benveniste (1989), *L'activation du basophile humain et sa régulation par des agonistes à hautes dilutions - Modèle expérimental pour une "eau structurée"?*, in *XI^e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1238-1243.
- E. Bernard-Weil (1988), *Précis de Systémique Ago-Antagoniste*, Editions L'Interdisciplinaire, 480 rue de la Glannde, 69760 Limonest (France).
- L. Blige, J.-P. Garel (1991), *La thésigraphie - Mise en évidence de divers états biophysiques de l'eau par une méthode d'analyse globale*, in *L'eau, Vol. 1, Sciences du Vivant n°2*, Epidaure, Arys éd., 8 rue Darwin, 75018 Paris, p. 99-111.
- J.-P. Changeux, A. Connes (1989), *Matière à pensée*, Editions Odile Jacob, Paris.
- J. Chastang (1991), *Etirement d'un relateur arithmétique par adjonction d'une variable principale*, Cahier Systema n° 13, 30 rue Croix Bosset, 92310 Sèvres (France), p. 43-92.
- Fr. Chauvet (1989), *Quelques applications de modèles associant algèbres de Lie et chemine-ments pseudo-aléatoires*, in *XI^e Congrès International de Cybernétique, Namur (Belgique)*, p. 1230-1237.
- Fr. Chauvet, Th. Moulin (1988), *Tentative de modélisation de certains phénomènes d'évolution et de vieillissement au moyen de relateurs arithmétiques*, 113^e Congrès National des Sociétés Savantes, Strasbourg (à paraître).
- A. Connes (1990), *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris.
- M. Ferré (1982), *Le théorème de l'effet miroir*, Cahiers Systema n° 9, Association Systema, 30 rue Croix Bosset, 92310 Sèvres, p. 87-109.

- E. Gilson** (1943), *La philosophie de Saint Bonaventure*, 2e éd., Librairie J. Vrin, Paris.
- G. Langlet** (1991), *Paritons and Cognitons - Towards a new theory of information*, APL-CAM Journal, Vol 13, Nr 2, J. De Kerf, Rooienberg 72, B-2570 Duffel (Belgium) ed., p. 399-432.
- A. Le Méhauté** (1990), *Les géométries fractales*, Hermès éd., Paris.
- J.-P. Luminet** (1980), *Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification*, Revue du Cethedec, n° 62, p. 55-95.
- B. Mandelbrot** (1975), *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, Flammarion, Paris.
 " " (1983), *The fractal Geometry of Nature*, Freeman and Co, N.Y.
- M. Mendès-France** (1990), *Compte rendu de lecture : "Biologie Théorique, Solignac 1987"*, Pour la Science, n° 154, août 1990, p. 102.
- Th. Moulin** (1989), *Le relateur arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques*, Revue Internationale de Systémique, Vol. 3, n° 4, p. 459-483.
 " (1990), *Possibilité d'une taxinomie fondée sur un "langage naturel" issu des relateurs arithmétiques*, Colloque organisé à l'UNESCO par l'UITF, 6 déc. 1990 (à paraître).
 " (1991a), *Catastrophes, dynamique chaotique, fractals, relateurs arithmétiques*, in *Systémique et applications*, F. Le Gallou et B. Bouchon-Meunier (dir), Editions Lavoisier, Paris.
 " (1991b), *Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques*, Revue Internationale de Systémique (à paraître).
- L. Nottale** (1980), *Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques*, Revue du Cethedec, n°62 p. 55-95.
 " (1989), *Fractals and the quantum theory of spacetime*, Int. Journal of Modern Physics A, Vol. 4, n° 19, 5047-5117.
 " (1991a), *The Theory of Scale Relativity*, article proposé à Int. J. of Modern Physics.
 " (1991b), *Relateurs arithmétiques biquadratiques dégénérés les plus simples*, Cahier Systema n° 13, p. 93-144.
- B. Paulré** (1985), *La Causalité en Economie*, Presses Universitaires de Lyon.
- R. Penrose** (1989), *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press.
- Ph. Riot** (1989), *Fondements mathématiques sous-jacents des relateurs arithmétiques in Congrès Européen de Systémique (CES1)*, Afcet éd., p. 505-514; ou in *Cahier Systema n° 13*, Association Systema, 30 rue Croix Bosset, 92310 Sèvres, p. 27-42.
- M.R. Schroeder** (1986), *Number Theory in Science and Communication*, 2d ed., Springer Verlag, Berlin.
- P. Slodowy** (1980), *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Math. n° 815, Springer Verlag, Berlin.
- R. Thom** (1988), *Esquisse d'une Sémiophysique*, InterEditions, Paris.
 " " (1990a) *Apologie du logos*, Hachette, Paris.
 " " (1990b) in *La querelle du déterminisme*, Collection Le débat, Gallimard.
- Cl. Vallet, Th. Moulin, H. Le Guyader, L. Lafrenière** (1976), *Emergence et imbrication de niveaux dans les systèmes complexes*, in *Ville Congrès International de Cybernétique, Namur 1976*, (Belgique), 187-199.
- Cl. Vallet, Th. Moulin** (1989), *Relateurs arithmétiques et modèles connexionnistes*, in *XIIe Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1208-1218.
- P. Vendryès** (1973), *Vers la théorie de l'homme*, Collection Sup, P.U.F., Paris.
- D. Versteegen** (1990), *p-adic Dynamical System*, in *Number Theory and Physics*, Springer Verlag, Berlin.

**XIIIe Congrès International de Cybernétique
Namur, 24-28 août 1992**

Symposium XXVII «Systèmes naturels»

**(Systèmes naturels : mise en oeuvre de nouveaux formalismes
et vérifications expérimentales)**

1. Physique et neuroscience (26 août 1992, de 8H30 à 12H30)

R. Vallée, Fr. Chauvet, P. Etévenon, S. Golinsky, Ph. Riot, D. Verney

2. Biologie (26 août 1992, de 13H30 à 18H00)

J. Benveniste, J.-P. Garel, D. Thieffry, M. Ferré, J. Chastang, Th. Moulin

3. Sciences humaines (27 août 1992, de 8H30 à 12H30)

G. Maugé, M.-Cl. Dupré, Cl. Vallet, F. Boccara, L. Saint-Paul, Th. Moulin

Auteurs des communications reproduites ci-après :

F. Boccara, F. Chauvet, M. Ferré, S. Golinsky, G. Maugé,
Th. Moulin, Ph. Riot, L. Saint-Paul, Cl. Vallet.

Animateur : Thiébaud MOULIN , Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure
de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, F-75015 Paris.

INTRODUCTION AU SYMPOSIUM XXVII

«SYSTEMES NATURELS : NOUVEAUX FORMALISMES

ET VERIFICATIONS EXPERIMENTALES»

par Thiébaud MOULIN *

Pour la quatrième fois, un symposium consacré à de "nouveaux formalismes applicables aux systèmes naturels" se tient dans le cadre du Congrès International de Cybernétique. Je remercie chaleureusement ceux qui ont accepté d'exposer leurs travaux. Si tout se passe comme prévu, dix-sept communications seront présentées et seize conférenciers différents interviendront. Il y aura approximativement deux fois plus d'exposés qu'en 1989 et quatre fois plus qu'en 1986. Il sera question d'opérateurs d'observation, de théorie des singularités, de fractales, d'imbrications d'hypercubes, de réseaux de régulation, de réseaux booléens,... et de relateurs arithmétiques! C'est une preuve de l'intérêt suscité par de nouveaux formalismes; c'est aussi une manifestation de la vitalité du groupe de travail AFCET "Outils mathématiques nouveaux pour la systémique" (**) -auquel adhère la majeure partie des intervenants- et du groupe Systema qui a organisé ce symposium.

Les communications sont réparties en trois demi-journées. Chacune d'elles démarre par la présentation de travaux orientés vers de nouvelles approches ou par l'énoncé de résultats expérimentaux pouvant conduire à un bouleversement de dogmes en vigueur. R. Vallée, qui est l'un des fondateurs du Collège de Systémique de l'AFCET, ouvrira la demi-journée consacrée à certains problèmes de physique et de neuroscience en étudiant la discrétisation spatio-temporelle. A l'avis de Fr. Chauvet, il faut repenser le problème de la mesure dans le cadre d'un formalisme exprimant structurellement l'adaptation d'un système à son environnement, ce qui conduit à l'usage de référentiels "espaces-temps-imbrications". Ph. Riot rappelle que les structures sous-jacentes des relateurs arithmétiques, qui expriment cette adaptation, sont celles de la théorie des singularités, de la théorie des groupes de Lie (fondés sur le continu et le différentiable) et également celles des groupes cristallographiques (fondés sur le discret); le relateur arithmétique réalise une synthèse entre ces structures et les fractales. L'importance des imbrications se manifeste également dans le

* Thiébaud MOULIN, Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, F-75015 PARIS (France).

** L'AFCET est "l'association française des sciences et technologies de l'information et des systèmes", 156 bd Péreire, F-75017 Paris. Elle regroupe environ 3000 scientifiques. L'une des 6 revues scientifiques qu'elle publie est la "Revue Internationale de Systémique" (Dunod éditeur).

domaine des neurosciences : P. Etévenon, à partir de recherches en électro-encéphalographie, développe un modèle à base d'imbrications d'hypercubes; S. Golinsky applique aux modèles connexionnistes le concept de "système générique" qui est un moyen de décrire séquentiellement dans des référentiels "espaces-temps-imbrications" une population de systèmes évoluant en parallèle. Enfin, D. Verney, exploitant ces structures mentales primordiales, envisage un modèle général de la cognition qui devrait avoir de nombreuses applications, notamment en reconnaissance des formes.

Au début de l'après-midi, seront abordés des problèmes fondamentaux de biologie : J. Benveniste, puis J.-P. Garel, présenteront des résultats expérimentaux difficilement explicables au moyen des théories actuelles. Les uns concernent l'action de dilutions homéopathiques; les autres, la cristallisation dendritique qui peut révéler des traitements (de denrées alimentaires) non détectables par les méthodes chimico-physiques classiques. Dans ces deux cas, les imbrications de niveaux jouent un rôle essentiel. Puis Ph. Thieffry montrera l'intérêt de modèles logiques, puissants et simples, applicables dans de nombreux domaines de la biologie, par exemple à l'analyse de la régulation génétique de l'expression virale. J. Chastang s'intéresse également à des modèles logiques utilisables en physique; ce pourrait être l'amorce d'une approche associant de façon nouvelle phénomènes physiques et phénomènes de cognition. Ces modèles reposent sur des structures d'imbrication binaires qui, dans les systèmes vivants, se concrétisent localement en structures de ramification. Le modèle de ramification végétale étudié par M. Ferré montre l'intérêt des relateurs arithmétiques biquadratiques. Cette recherche paraît fondamentale pour une nouvelle approche des problèmes mentionnés précédemment car le local est associé dynamiquement au global. Enfin, je terminerai cette deuxième demi-journée en donnant l'état des recherches sur une modélisation de "milieux aqueux structurés", développée au moyen de relateurs arithmétiques; à cette occasion, une interprétation non classique de l'usage des amplitudes de probabilité en mécanique quantique sera proposée; au moins deux référentiels temporels interviennent, l'un paraissant fractal vis-à-vis de l'autre.

La troisième demi-journée est consacrée à l'application de nouveaux formalismes dans le domaine des sciences humaines et de la socio-économie. G. Maugé essaye d'appliquer aux entreprises la théorie de l'autonomie de P. Vendryès et, en s'appuyant sur le "principe de specularité" de J.-L. Vullierme, de la formaliser. Les résultats d'une étude ethnologique, effectuée par Madame M.-Cl. Dupré, mettront en évidence des structures sous-jacentes très fondamentales. Afin de modéliser ultérieurement de telles structures et de les intégrer éventuellement dans des modèles socio-économiques, Cl. Vallet appréhende les comportements humains en se référant aux travaux de R. Pagès et à ceux de M. Jouvét. Ensuite, F. Boccara montrera l'insuffisance des concepts et des types de nombres utilisés actuellement en économie. A son avis, il faut prendre en compte des aspects qualitatifs, des méthodes d'action,... qui sont cachés dans les n-ièmes décimales des indicateurs monétaires; autrement dit, faire des "développements à rebours" qui conduisent à l'usage conjoint de nombres réels et de nombres p-adiques. Retenu par des obligations professionnelles, L. Saint-Paul ne pourra pas présenter la dernière communication qui est une réflexion sur les bouclages structurels et la causalité en économie (étude suscitée par des travaux de B. Paulré). Avec son accord, je limiterai l'exposé à une tentative impliquant l'usage de référentiels "espaces-temps-imbrications", appelés aussi "espaces-temps-fractalité". Ce sera, je l'espère, l'occasion de faire un bilan du symposium, imprégné d'optimisme.

GÉNÉRALISATION DE LA CONDITION D'ADAPTATION D'UN SYSTÈME À SON ENVIRONNEMENT ET APPLICATIONS À LA PHYSIQUE THÉORIQUE

par François CHAUVET

INTRODUCTION

Le formalisme des relateurs arithmétiques permet d'exprimer formellement le fait qu'un système naturel est adapté à son environnement. En généralisant cette expression, on obtient des résultats de structure pour de tels systèmes, valables pratiquement sans restriction. Ces résultats, interprétés au niveau informationnel, conduisent à une conception de la mesure et de l'observation dans laquelle la notion d'indéterminisme est remplacée par une dynamique pseudo-aléatoire inaccessible à la mesure. Dans ce cadre, les systèmes décrits par les relateurs arithmétiques peuvent être vus comme des généralisations des systèmes quantiques usuels.

LA CONDITION DE STABILISATION GÉNÉRALISÉE

Nous supposons connues les notions de base du formalisme des relateurs arithmétiques, telles qu'elles sont exposées, par exemple, en [1]; deux articles de synthèse récents [7, 8] donnent également les motivations et les concepts sous-jacents au formalisme et discutent quelques applications.

Un relateur stabilisé décrit un système adapté à son environnement, au sens suivant: si la dynamique propre du système devait le conduire à un état non viable, des interactions avec l'environnement permettent toujours d'éviter cet état. Au niveau du relateur, cela signifie que si une réflexion principale devait donner un résultat non entier (verrouillage du relateur), on peut toujours obtenir un résultat entier en la faisant précéder de réflexions d'environnement (déverrouillage).

La condition pour qu'un relateur soit stabilisé a été trouvée par C. Vallet en 1975 [2], pour un relateur à deux variables principales (X, Y) et une seule variable d'environnement (V) construit autour de la forme quadratique

$$Q = P (X^2 + Y^2) + \lambda XY + DAXV + DBYV + DV^2$$

Ce relateur est stabilisé si et seulement si le coefficient de couplage λ vérifie

$$\lambda \equiv DAB \pmod{P}$$

ce qui conduit à l'expression de la forme quadratique

$$Q = P (X^2 + kXY + Y^2) + D (AX + V) (BY + V)$$

Le premier terme est caractéristique d'un relateur de base (BR), qui ne présente jamais de verrouillage. Il représente la structure sous-jacente idéalisée du système. Le second terme apparaît comme une perturbation de la structure sous-jacente et représente le couplage du système à son environnement.

M. Ferré a montré ensuite [2] que, si l'un des axes principaux du relateur (par exemple e_Y) était remplacé par son image e_{Y^0} dans la réflexion le long de e_V , on obtenait une forme quadratique

$$Q^0 = P (X^2 + kXY + Y^2) + D (AX - BY + V^0)V^0$$

où le terme croisé en XY n'intervient plus dans les termes d'environnement. On en déduit la construction d'un relateur stabilisé par "effet miroir": partant d'un relateur de base sous-jacent et d'un axe d'environnement, et moyennant un choix adéquat des coefficients de couplage A et B , on obtient un relateur stabilisé en transformant l'un des axes principaux au moyen de la réflexion d'environnement.

Ces résultats fondamentaux sont à la base du formalisme. Ils ne concernent cependant qu'un type de relateur très particulier: le seul fonctionnement non trivial consiste à faire alterner régulièrement les deux réflexions principales, en utilisant l'unique réflexion d'environnement pour déverrouiller le relateur. D'autres types de relateurs ont pu être utilisés, mais leur stabilisation devait être vérifiée.

Dans le cas général d'un relateur à n variables principales (X^1, \dots, X^n) et p variables d'environnement (V^1, \dots, V^p), les possibilités sont multiples, et aucune ne s'impose comme naturellement privilégiée. Il faut donc reconsidérer la notion de stabilisation.

Par hypothèse, les réflexions d'environnement ne produisent jamais de verrouillage; elles engendrent un groupe D qui laisse stable le réseau S des états du relateur (points à coordonnées entières). On dira qu'une réflexion principale s est *déverrouillable* en un point $z \in S$ s'il existe un $w \in D$ tel que $w \circ s \circ w^{-1}(z) \in S$. Ce w n'est pas a priori unique, et il peut être réduit à l'identité, ce qui correspond au cas où $s(z) \in S$. Autrement dit, la réflexion s est déverrouillable au point z si, appliquée à ce point, elle fournit un résultat entier, au besoin en la faisant précéder d'un produit de réflexions d'environnement (¹).

Définir la notion de stabilisation pour le relateur le plus général, c'est préciser quelles réflexions doivent être déverrouillables, et en quels points.

Le choix le plus simple est que toutes les réflexions principales doivent être déverrouillables en tous les états du relateur. Cette condition est trop forte, car elle interdit l'existence de relateurs stabilisés à une seule variable d'environnement qui ne soient pas des BR.

La condition que nous adoptons est encore très forte: toutes les réflexions principales doivent être déverrouillables aux mêmes points. À partir d'un tel point, toute séquence de réflexions principales est utilisable pour faire évoluer le relateur; le déverrouillage sera toujours possible. Le relateur est contraint au niveau de ses états permis, mais pas de sa dynamique.

À partir de cette définition de la stabilisation, on démontre qu'il est toujours possible de transformer les axes principaux du relateur au moyen de réflexions d'environnement, de sorte que les axes modifiés soient ceux d'un relateur de base. Ce relateur de base, qui représente la structure sous-jacente du système, n'est pas nécessairement unique; il y a en général ambiguïté sur le type de symétrie interne du système.

¹ L'utilisation du conjugué $w \circ s \circ w^{-1}$ au lieu du simple produit $s \circ w^{-1}$ provient de l'approche géométrique adoptée; le réseau des états étant stable sous l'action du groupe d'environnement D , les deux formulations sont équivalentes.

Réciproquement, tout relateur stabilisé s'obtient en couplant un relateur de base "sous-jacent" et un relateur de base d'environnement, puis en transformant arbitrairement les axes principaux au moyen de réflexions d'environnement. On généralise ainsi en un théorème de structure unique les résultats de C. Vallet et M. Ferré. Ce théorème donne la forme des coefficients de couplage entre les variables principales et les variables d'environnement; la forme quadratique support d'un relateur stabilisé s'écrit, avant transformation des axes principaux:

$$Q = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j + \sum_{r,s} d_{rs} V^{or} V^{os} + \frac{1}{P} (\sum_i g_{ii} B_i X^i) (\sum_r d_{rr} C_r V^{or})$$

où (g_{ij}) et (d_{rs}) sont respectivement les matrices du BR sous-jacent et du BR d'environnement, P est le pgcd de g_{11}, \dots, g_{nn} , les B_i sont des entiers premiers avec P et les C_r des entiers pratiquement quelconques (nous ne détaillons pas ici les quelques contraintes auxquels ils sont soumis).

Cette forme remarquablement symétrique fait apparaître le couplage entre les variables principales et les variables d'environnement comme le produit de deux formes linéaires ne faisant intervenir qu'un type de variables. Si les deux relateurs de base sont non-dégénérés, hypothèse que nous ferons désormais, on peut écrire vectoriellement

$$Q = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle + \frac{1}{P} \langle \mathbf{B}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{C}, \mathbf{V}^o \rangle$$

où \mathbf{X} et \mathbf{V}^o sont respectivement les composantes de l'état du relateur dans l'espace des axes principaux et dans l'espace des axes d'environnement, \mathbf{B} et \mathbf{C} étant les vecteurs de composantes covariantes $g_{ii}B_i$ et $d_{rr}C_r$ dans ces mêmes espaces.

VARIABLES D'ENVIRONNEMENT ET OBSERVATION

Au cours de son fonctionnement, un relateur stabilisé utilise régulièrement des réflexions d'environnement pour éviter le verrouillage. Ces opérations, qui ne modifient que la valeur des variables V^r , sont interprétées comme des interactions du système à son environnement, nécessaires à la "survie" du système.

Considérons un système physique qui, lorsqu'il est isolé, est représenté par le relateur de base sous-jacent; et mettons-le en interaction avec un appareil de mesure, représenté par le relateur de base d'environnement. Les réflexions d'environnement représentent alors l'opération de mesure du système. Celui-ci n'est accessible à la mesure que lorsque sa dynamique propre, perturbée par la présence de l'appareil de mesure, l'oblige à interférer avec lui.

Dans cette optique, les variables d'environnement V^r sont les "observables" du système; les variables principales X^i ne sont pas accessibles directement à la mesure. L'ambiguïté qui existe sur le BR sous-jacent permet implique que des systèmes dont les symétries internes sont différentes peuvent être indiscernables par l'observation. Le degré d'ambiguïté dépend du BR d'environnement et des coefficients de couplage B_i, C_r ; il est donc concevable qu'un instrument de mesure adapté permette de lever l'ambiguïté.

Cette interprétation est suggérée par les relations qui existent entre les relateurs de base cycliques (BCR) et les algèbres de Lie semi-simples; l'ensemble des états d'un BCR est en fait le réseau des poids d'une algèbre de Lie, et les variables ne sont autres que les nombres quantiques habituels. Certains relateurs de base non cycliques correspondent de la même manière aux algèbres affines de Kac-Moody. Dans le cas du relateur stabilisé le plus général, il est encore possible de construire une algèbre de Lie associée [3]; mais la structure de cette algèbre est très compliquée et n'est pas encore totalement élucidée.

L'orbite d'un relateur stabilisé (l'ensemble des états qu'il engendre), est constituée d'une arborescence de sous-orbites isomorphes à celles qui seraient engendrées par le BR sous-jacent (voir figure 1). On passe de l'une à l'autre de ces sous-orbites au moyen de réflexions d'environnement. La "hauteur" de l'arbre, i.e. le nombre de ramifications successives à partir du point initial O, est directement liée à l'exposant de P dans les conditions initiales:

$$Z(0) = z_0 P^K \text{ où } z_0 \text{ n'est pas divisible par } P$$

Une telle arborescence est naturellement munie d'une topologie ultramétrique, qui, dans le cas d'une seule variable d'environnement, n'est autre que la topologie de la valuation P-adique. La dynamique du relateur se développe dans un espace ultramétrique, alors que les observations se font dans un espace euclidien ou pseudo-euclidien.

Cette différence entre les deux topologies se traduit par un comportement pseudo-aléatoire des observables. La succession des réflexions n'est, en effet, pas accessible à la mesure. La symétrie, complexe mais bien visible, du graphe des valeurs successives d'une variable d'environnement (figure 2), disparaît en général au niveau de la mesure. Seule la répartition statistique des valeurs est accessible; la figure 3 en donne un exemple. On ne peut retrouver la symétrie sous-jacente que dans des cas dégénérés [4], au voisinage de singularités.

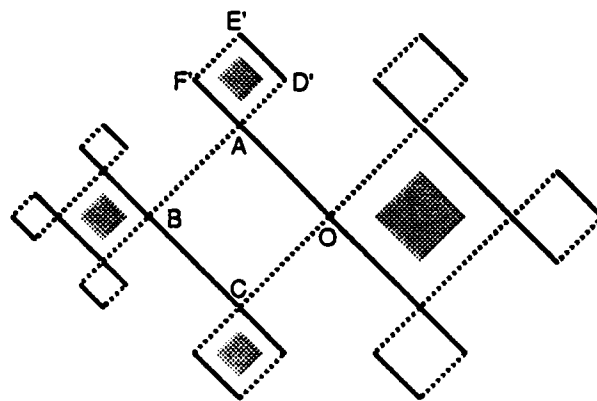


Figure 1 – Structure ramifiée des orbites d'un relateur, ici du type $P(X^2+Y^2)+D(AX+BY+V^0)V^0$. Les traits pleins représentent la réflexions principale s_X , les traits pointillés la réflexions principale s_Y ; on passe d'une sous-orbite grisée à une sous-orbite non grisée par un réflexions d'environnement s_Y .

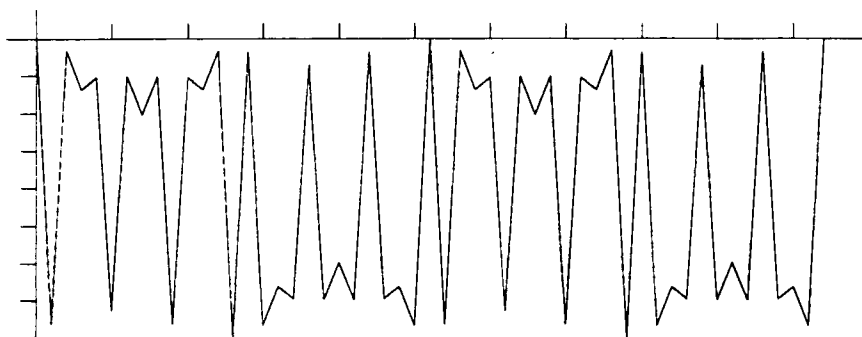


Figure 2 – Evolution de la valeur de la variable d'environnement (même relateur que sur la figure 1); $A = B = 3$, $D/P = 0,1$, $x_0 = y_0 = 1$, $v_0 = 0$, $K = 4$.

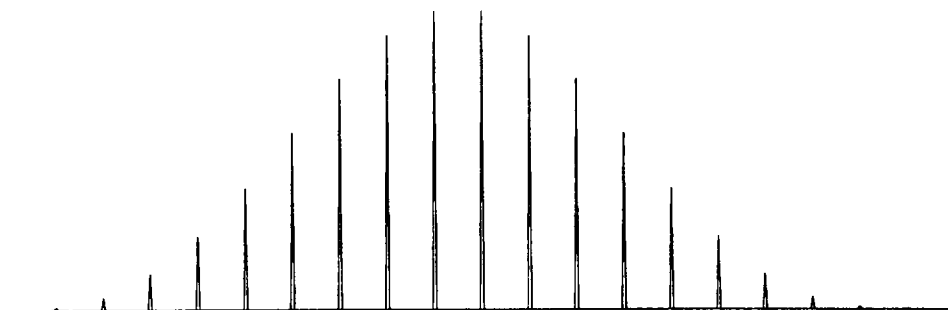


Figure 3 – Histogramme des valeurs de la variable d'environnement; mêmes paramètres que ci-dessus, excepté $D/P \rightarrow 0$ (valeur numérique 10^{-24}).

L'arborescence des sous-orbites est déterminée, d'une part, par la valeur de K , et d'autre part par certaines relations entre les coefficients de couplage; ces relations généralisent les "congruences exceptionnelles" usuelles. La condition pour que, à partir d'un point $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{V})$, on puisse passer à une autre sous-orbite au moyen d'un produit w de réflexions d'environnement, après avoir effectué la séquence de réflexions principales q (sur la figure 1, la condition pour que la sous-orbite AD'E'F' existe si l'on est passé du point O au point A) est:

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{C}, \mathbf{C} - w(\mathbf{C}) \rangle \times \frac{1}{2} \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} - q(\mathbf{B}) \rangle \times \langle \mathbf{C}, \mathbf{V}^0 \rangle \text{ est entier}$$

Les deux premiers facteurs, qui ne dépendent que des coefficients de couplage B_i , C_r et des deux relateurs de base (sous-jacent et d'environnement), sont des "nombres d'information virtuelle". Ils conditionnent l'arborescence des orbites du relateur, et par là les appels à l'environnement. Suivant la factorisation du dernier terme, ces appels à l'environnement seront effectués ou non, faisant émerger ou non l'information latente dans le relateur.

Enfin, on peut proposer un parallèle entre la construction d'un relateur stabilisé et l'opération de quantification d'un système physique. Un tel système est représenté par son espace de phases (coordonnées q^i, p_j) muni de sa structure symplectique naturelle par la 2-forme $\Omega = dq^i \wedge dp_j$, sur lequel un groupe de Lie (le groupe dynamique du système [5]) opère par action hamiltonienne.

Quantifier ce système, c'est construire un espace de Hilbert au-dessus de l'espace des phases, de sorte que la courbure de cet espace soit la forme Ω . On montre [6] que la seule solution consiste à placer au-dessus de chaque point de l'espace des phases le groupe commutatif $\mathbf{U}(1)$ des complexes de module 1, c'est-à-dire le cercle unité (techniquement, on parle de "fibration en cercles").

Mais le système décrit par un relateur stabilisé n'est pas en général hamiltonien; s'il l'était, les orbites obtenues à partir de différents états seraient isomorphes, et l'arborescence des sous-orbites serait indépendante de K . Sachant que les relateurs de base sont associés à des algèbres de Lie, un relateur stabilisé est obtenu en plaçant, au-dessus de chaque point de l'algèbre de Lie sous-jacente, l'algèbre de Lie d'environnement; la condition de stabilisation exprime alors qu'une certaine structure se conserve en passant d'une "fibre" à l'autre.

Dès lors qu'il y a effectivement des variables d'environnement, l'algèbre de Lie d'environnement n'est pas commutative. La construction d'un relateur stabilisé suggère ainsi une généralisation de la quantification géométrique aux systèmes non hamiltoniens. Cependant, cette correspondance s'effectuant au niveau des algèbres de Lie n'est que locale; on ne sait pas actuellement "intégrer" l'algèbre de

Lie associée à un relateur stabilisé pour remonter au groupe dynamique. La solution de ce problème ouvrirait de nouvelles perspectives en physique théorique.

RÉFÉRENCES

- [1] F. Chauvet, M. Ferré, T. Moulin, P. Riot, C. Vallet, Introduction aux relateurs arithmétiques, Note Technique ENSTA du 20 juin 1988 (ENSTA, 32, boulevard Victor, F-75015 Paris, France).
- [2] C. Vallet, L. Nottale, M. Ferré, T. Moulin, Stabilisation d'un relateur arithmétique, Cahiers Systema, n°9, 1982 (Association Systema, 30, rue Croix-Bosset, F-92310 Sèvres, France).
- [3] F. Chauvet, Structures algébriques et géométriques des relateurs arithmétiques, Note Technique ENSTA, 1992 (à paraître).
- [4] J. Chastang, F. Chauvet, Étirement d'un relateur arithmétique par adjonction d'une variable d'environnement, Cahiers Systema, n° 14, juillet 1992.
- [5] J.-M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1969.
- [6] B. Kostant, Quantization and unitary representations, Lect. Notes in Math. 170, pp. 87-208, Springer Verlag, 1970.
- [7] T. Moulin, Le relateur arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques, Revue Int. de Systémique, Vol. 3, N° 4, pp. 459-483, 1989.
- [8] T. Moulin, Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques, Revue Int. de Systémique, Vol. 5, n° 5, pp. 517-560, 1991.

RELATEURS ARITHMETIQUES, STRUCTURES DE LIE ET SINGULARITES

par Philippe RIOT

INTRODUCTION

Le formalisme des relateurs arithmétiques admet une interprétation dans le cadre mathématique des systèmes de racines dits de Kac-Moody. En faisant appel à des résultats établis vers 1970 qui mettent en évidence un lien étroit entre de tels systèmes de racines et les singularités de fonctions analytiques ou algébriques, il est alors aisé d'interpréter le fonctionnement d'un relateur arithmétique comme un système dynamique bouclé qui s'inscrit sur le lieu critique du déploiement de la singularité.

Ainsi le formalisme des relateurs arithmétiques interprété dans un cadre relevant de la topologie géométrique est relié à des concepts largement utilisés en physique. Cette constatation doit permettre de proposer l'emploi des relateurs arithmétiques pour rendre compte de certains phénomènes à invariance d'échelle, puisque cette caractéristique est l'un des traits marquants de ces mêmes relateurs.

STRUCTURE QUADRATIQUE ATTACHEE A UN RELATEUR ARITHMETIQUE

L'auteur de cette communication suppose de la part du lecteur une certaine familiarité avec le formalisme des relateurs arithmétiques (R.A.).

Nous nous contenterons de traiter le cas d'un relateur arithmétique mettant en jeu deux variables internes X et Y et une variable d'environnement, notée V. L'analyse que nous proposons se généralise sans difficulté si l'on augmente le nombre de variables internes. En revanche, l'introduction de nouvelles variables d'environnement impose de recourir à une autre interprétation géométrique.

Un R.A. à deux variables internes X et Y et une variable d'environnement V est caractérisé, en partie, par la donnée d'une forme quadratique que nous écrirons sous la forme canonique suivante :

$$Q(X,Y,V) = p (\lambda X^2 + v XY + \mu Y^2) + d (V + aX)(V + bY)$$

où les différents coefficients p, d, λ, μ, v, a et b sont des entiers relatifs, p étant non nul. Les coefficients λ, μ, v vérifient des contraintes, exposées par ailleurs, de façon que $(\lambda X^2 + v XY + \mu Y^2)$ soit identifiée à une forme attachée à un système de racines d'une algèbre de Lie.

Nous fixons en plus les conditions initiales :

$$X = X_0, Y = Y_0 \text{ et } V = V_0$$

Le point remarquable à souligner est que la forme quadratique se présente comme une combinaison linéaire à coefficients entiers, d'une première forme sur les seules variables internes et d'une seconde forme factorisée, autrement dit hyperbolique, où la variable d'environnement apparaît quadratiquement.

Le mécanisme des relateurs arithmétiques repose sur l'utilisation itérée de réflexions, autrement dit d'opérateurs linéaires idempotents. Nous ne rappellerons pas leur interprétation algébrique comme opérateurs de seconde racine.

La règle est de retenir seulement des solutions à valeurs entières pour l'équation :

$$Q(X, Y, V) = Q(X_0, Y_0, V_0)$$

grâce aux réflexions précédentes, étant entendu que l'on utilise une réflexion attachée à la variable V dans le seul cas où l'application d'une réflexion selon les axes X ou Y ne permet pas d'obtenir une solution à valeurs entières.

FLOT DYNAMIQUE D'UN RELATEUR ARITHMETIQUE

Supposons dans un premier temps que $d = 0$, ce qui exclut l'intervention de la variable d'environnement.

Les réflexions notées σ_X et σ_Y permettent de passer, d'un point du réseau associé à la forme $p(\lambda X^2 + v XY + \mu Y^2)$, à un autre point du réseau.

Considérons à présent la forme quadratique complète $Q(X, Y, V)$. La présence de la forme hyperbolique ajoute un terme supplémentaire à chaque opérateur de seconde racine. Par exemple, pour la variable X :

$$\sigma_X^* \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} \longrightarrow \sigma_X(\bar{X}) - da(\bar{V} + b\bar{Y}) / p\lambda \\ \bar{Y} \longrightarrow \bar{Y} \\ \bar{V} \longrightarrow \bar{V} \end{array} \right.$$

Donc, l'opérateur de réflexion modifié s'obtient à partir de l'opérateur de réflexion initial par une transformation affine qui consiste à ajouter un vecteur à composantes entières si l'opération est valide au regard de la règle de fonctionnement, selon le vecteur :

$$h_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

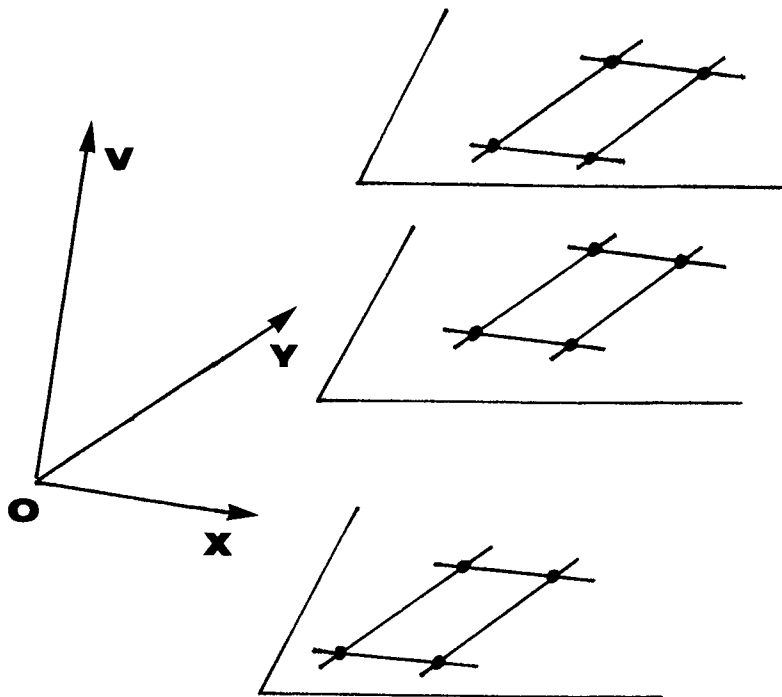
dans l'espace affine d'axes (OX, OY, OV). Nous écrivons synthétiquement :

$$\sigma_X^*(\xi) = \sigma_X(\xi) - k_X(\xi) \cdot h_X$$

où ξ représente l'état courant de coordonnées (X,Y,V) et $k_X(\xi) = da(V-bY)/p\lambda$

De la même manière :

$$\sigma_Y^*(\xi) = \sigma_Y(\xi) - k_Y(\xi) \cdot h_Y \quad \text{avec} \quad h_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'espace total des solutions s'inscrit dans un espace obtenu par une famille dénombrable de répliques parallèles du réseau dans l'espace de coordonnées (X,Y) lié à la forme $(\lambda X^2 + \nu XY + \mu Y^2)$.

Lorsque la variable d'environnement est appelée pour débloquent le cheminement par mise en défaut du caractère arithmétique des solutions, la réflexion σ_V permet de sauter d'un réseau à un réseau situé dans un plan parallèle par modification de la seule variable V.

Nous convenons d'appeler le terme $-k_X(\xi) \cdot h_X$ ou $-k_Y(\xi) \cdot h_Y$ la partie dynamique à l'étape courante du relateur arithmétique. La succession de ces termes constitue le flot dynamique du R.A.

INTERPRETATION EN TERMES D'ALGÈBRES DE LIE AFFINES ET DE THÉORIE DES SINGULARITÉS

1. Dans ce paragraphe, nous nous contenterons de mentionner les théories mathématiques en cause et de souligner comment le formalisme des R.A. s'y inscrit. Un exposé analytique nous conduirait en effet à un exposé hors de proportion avec la longueur autorisée pour cette communication.

La théorie des algèbres de Lie affines est exposée de manière complète par l'un de ses créateurs V. Kač dans un ouvrage désormais classique [1]. L'ouvrage de A. Pressley et G. Segal [2] est également conseillé.

Le réseau arithmétique mentionné au troisième paragraphe peut être identifié à un système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple dont la forme quadratique en X, Y constitue la forme de Killing. Le système réalisé par la famille dénombrable des copies parallèles s'identifie alors au système de racines d'une certaine algèbre, dite algèbre de Lie affine. Cette algèbre s'identifie à l'espace tangent à l'unité d'un groupe, ensemble des lacets du groupe de Lie associé à l'algèbre de Lie semi-simple de départ.

Autrement dit, le cadre de travail d'un R.A. est la structure infinitésimale des lacets tracés dans un groupe de Lie. Il convient de souligner que le système de racines de l'algèbre de Lie affine est muni d'une forme quadratique obtenue en adjoignant à la forme de Killing initiale une forme hyperbolique. Donc la structure quadratique d'un R.A. s'identifie à la structure quadratique d'une algèbre de Lie affine.

2. D'un autre côté, les structures de Lie interviennent de manière privilégiée pour décrire les singularités et leurs déploiements associés. L'article de P. Slodowy [3] et sa monographie [4] développent très clairement le sujet.

Certains types de singularité isolée sur une variété algébrique ou analytique sont caractérisés par une forme quadratique, d'origine topologique, appelée forme d'intersection. Dans les cas que nous considérons, ces formes sont exactement les formes de Killing d'algèbres de Lie semi-simples. Il est alors possible de décrire la singularité et un déploiement local grâce au groupe de Lie déterminé par la forme et à l'ensemble des représentations associées.

Il s'avère alors que le lieu critique du déploiement est mis en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble de systèmes de racines appelé le diagramme infinitésimal, ensemble formé par les hyperplans déterminés par un vecteur unitaire normal, qui est précisément l'un des vecteurs du type h_X ou h_Y introduits dans le troisième paragraphe.

Nous avons remarqué dans ce même paragraphe que le fonctionnement répété des réflexions sur un R.A. engendrait un terme dynamique colinéaire à l'un des vecteurs h_X ou h_Y . Si l'on effectue systématiquement le produit vectoriel par un vecteur unitaire orthogonal (au sens euclidien) au plan du réseau, nous obtenons un vecteur situé dans le diagramme infinitésimal. Intuitivement, cela signifie qu'après l'opération de produit vectoriel, le flot dynamique ainsi transformé décrit de manière infinitésimale un

cheminement le long du lieu critique du déploiement d'une singularité caractérisée par la forme quadratique $(\lambda X^2 + \nu XY + \mu Y^2)$.

EN GUISE DE CONCLUSION

La présente communication introduit la démarche qui interprète le formalisme des R.A. dans un cadre mathématique bien développé, celui des groupes continus de type de Lie et également celui de l'étude topologique et géométrique des singularités d'application. La justification complète fera l'objet d'une note à paraître.

Le point de vue développé permet de retrouver des concepts de la physique mathématique, tels que les flots dynamiques, les principes variationnels.

Cependant, au stade actuel, la propriété de similitude d'échelle qui apparaît lorsque l'on travaille sur des extensions de corps finis, n'est pas du tout abordée. Probablement, cet aspect relève de la dynamique chaotique.

REFERENCES

- [1] KAC V., *Infinite dimensional Lie algebras*, 2e éd., Cambridge Univ. Press, 1983.
- [2] PRESSLEY A., SEGAL G., *Loop groups*, Oxford Science Pub., 1986.
- [3] SLODOWY P., Platonic solids, Kleinian singularities and Lie groups, in *Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1008, Springer Verlag, 1983.
- [4] SLODOWY P., *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Lecture Notes in Mathematics 815, Springer Verlag, 1980.

UN APPORT POSSIBLE DES RELATEURS ARITHMETIQUES AUX MODELES CONNEXIONNISTES

par Serge GOLINSKY et Thiébaud MOULIN

INTRODUCTION

Une liaison entre relateurs arithmétiques et modèles connexionnistes a été ébauchée par Cl. Vallet, en 1989, au cours du XIIe Congrès International de Cybernétique [1]. Deux suggestions exprimées dans cette communication pourraient conduire à un apport des relateurs arithmétiques aux modèles connexionnistes; elles concernent :

- l'utilisation de "systèmes génériques" qui fournissent une description séquentielle cohérente et simplifiée d'une population de systèmes évoluant en parallèle,

- la prise en compte schématique non seulement des neurones d'un système cérébral (ce qui conduit à certains modèles connexionnistes), mais aussi des cellules gliales dont le rôle est réduit classiquement à des fonctions nutritionnelles, de support, d'isolement électrique...

C'est surtout le premier point qui sera abordé dans la présente communication. Les rappels sur les relateurs arithmétiques stabilisés (R.A. en abrégé) seront très brefs. Les lecteurs intéressés par ce formalisme trouveront en [2] une bibliographie commentée des principaux articles publiés de 1971 à 1986. Elle ne mentionne pas la liaison avec les structures de Lie, établie par Ph. Riot [3] en 1988. Deux articles de synthèse viennent d'être publiés récemment dans la Revue Internationale de Systémique [4], [5].

HYPOTHESES ADOPTEES

Utilisation d'un "R.A. générique". Un système de N neurones formels est représenté synthétiquement par N sous-amas d'un des amas engendrés par un "R.A. générique" (cf. [4], p. 478-479).

• Dans le cas le plus simple, ce R.A. a un support homogène à 2 variables principales X,Y et une variable d'environnement V. Tous les coefficients sont des entiers. Le relateur cyclique de base (BCR) sous-jacent appartient à la famille (I), les coefficients des termes carrés étant égaux à $P > 0$.

$$\{P(X^2+Y^2) + D(AX+V)(BY+V)\} = \{---\}_o \quad (1)$$

-
- Serge GOLINSKY, 138 rue Nationale, F-75013 PARIS (France).
 - Thiébaud MOULIN, Groupe SYSTEMA, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, F-75015 PARIS (France).

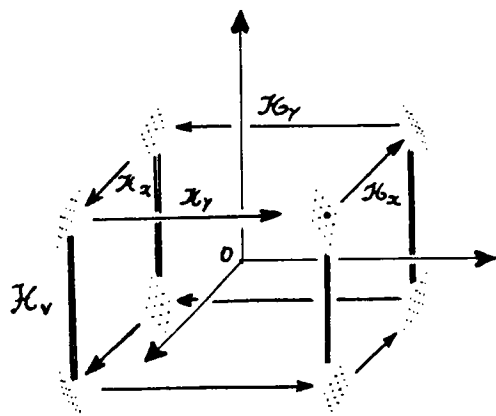
• L'état initial choisi : $X(0) = x_0 P^K$, $Y(0) = y_0 P^K$, $V(0) = v_0 P^K$, (2)
satisfait aux conditions de verrouillage de la classe de fonctionnement (0)
déterminées par J.-P. Luminet [6] et vérifient les conditions supplémentaires

$$0 < D(A^2+B^2)/P \ll 1 \quad \text{et} \quad \text{Max}(|Ax_0|, |By_0|) \ll |v_0| \quad (3)$$

de façon que le positionnement des sous-amas soit fixé au premier ordre par les paramètres entiers λ, ν et $s = \pm 1$ introduits par L. Nottale [7] (la première autorise la "linéarisation" du R.A.; la seconde élimine l'effet d'une troisième variable et la présence de termes du second degré en λ, ν).

• Les réflexions principales, notées i, r , sont régulièrement alternées (*). Un appel à l'environnement V est intercalé si et seulement si en son absence le résultat fourni par i ou r n'est pas entier. En raison de la première condition (3) et de l'influence exponentielle de K , le fonctionnement de ce

R.A. devrait imposer une arithmétique à très grand nombre de chiffres significatifs. En pratique, comme la classe de fonctionnement (c'est-à-dire la position des appels V dans la suite des i, r) est connue par hypothèse, il est préférable de faire fonctionner deux R.A. en synchronisme : l'un, qui est appelé "pilote" et fonctionne avec la valeur de P la plus faible, détermine la position des V ; l'autre calcule la position des états dans les différents sous-amas.



La vue cavalière ci-dessus ne respecte pas correctement la deuxième condition (3) mais montre les 8 amas composés chacun de K^2 sous-amas.

Projection parallèle à l'axe d'environnement. Si (3) est bien satisfaite, 4 amas sont situés approximativement à la cote $V/(v_0 P^K) \sim 1$ et 4 autres à la cote -1 . En projection sur le plan OX, OY , parallèlement à l'axe d'environnement, il n'y a que 4 amas plus ou moins imbriqués, chaque état projeté pouvant provenir du plan $s = +1$ ou du plan $s = -1$. Or un appel à l'environnement V peut toujours être effectué puisqu'il n'introduit pas de division. Chacun des états projetés peut donc basculer de s à $-s$ si un V supplémentaire est intercalé. En général cet appel perturbe le fonctionnement du R.A. Dans la projection considérée, les sous-amas des deux amas associés par un appel à l'environnement sont situés au noeuds d'un réseau cristallographique. Introduisons les variables réduites :

$$\xi = \frac{(Y/P^K - y_0)}{v_0(DB/P)} \quad ; \quad \eta = \frac{(X/P^K - x_0)}{v_0(DA/P)} \quad (4)$$

L. Nottale a exprimé $\xi^\diamond = (\xi + \eta)/2$ et $\eta^\diamond = (\xi - \eta)/2$ en fonction de $(Ax_0 + By_0)$, de $(-Ax_0 + By_0)$ et de v_0 au moyen d'une matrice donnée en [7, p. 64]. Compte tenu de la deuxième condition (3), les deux premières colonnes de cette matrice n'interviennent pas dans le calcul ξ^\diamond et de η^\diamond :

* Rappelons que i transforme X en la seconde racine X^* de l'équation du second degré en X^2 issue de (1) : $X^* = -X - DA(BY+V)/P$, Y et V restant inchangés. r fournit $Y^* = -Y - DB(AX+V^o)/P$, X et V étant inchangés. V n'introduit pas de division : $V^* = -V - AX - BY$, X et Y étant inchangés.

$$\xi^\diamond = -s\lambda + (1-s)/2 \quad ; \quad \eta^\diamond = -s v \quad (5)$$

Puisque $s = \pm 1$, et $\lambda, v \in \mathbb{Z}$, le réseau est à mailles carrées. Dans la suite, nous appellerons "spin" le paramètre s sans justifier cette appellation.

SYSTEME PARALLELE ISSU DU SYSTEME GENERIQUE

Par hypothèse le réseau de neurones formels est identifié au réseau en $\xi^\diamond, \eta^\diamond$ (*). Un noeud du réseau positionne un sous-amas appartenant à l'un des deux amas associés par V . Pour constituer un neurone formel $(\xi^\diamond, \eta^\diamond)$ au temps $t=0$, on sélectionne dans le cycle L_K des états ε_j appartenant au sous-amas $(\xi^\diamond, \eta^\diamond)$, $s=\pm 1$. Chacun de ces états est ensuite considéré comme état initial partiel pour un ensemble de R.A. fonctionnant en parallèle. ε_j est repérable au moyen du nombre τ_j de réflexions principales effectuées par le R.A. générique au cours de L_K , à partir de l'état initial canonique (2) ou au moyen de la séquence réduite $\$j$.

Fonctionnement d'un neurone. Soit t le nombre (**) de quadriséquences effectuées à partir des états initiaux. Au temps $t=1$, un état issu de $\varepsilon_j(0)$ peut appartenir au même neurone ou à un neurone voisin. Le voisinage est défini (dans le cas du BCR sous-jacent I) par les 7 quadriséquences $\$$ notées **0000, 001, 010, 100, 02, 11, 20** (et représentant respectivement **irir, iriVr, iVrir, irViVr, iVriVr, iVrVir** si les R.A. démarrent tous par **i**) et par celles construites avec la quadriséquence équivalente à V . A chaque $\$$ correspondent donc les 4 séquences : $\$, V\$, \$V$ et $V\$V$. Pour obtenir la position $\varepsilon_j(t)$ issue de $\varepsilon_j(0)$, il suffit de calculer l'effet des quadriséquences appliquées, au moyen de la règle de concaténation :

$$\begin{aligned} \lambda(t+\Delta t) &= \lambda(t) s(\Delta t) + \lambda(\Delta t), & v(t+\Delta t) &= v(t) s(\Delta t) + v(\Delta t), & s(t+\Delta t) &= s(t) s(\Delta t) \\ \xi^\diamond(t+\Delta t) &= \xi^\diamond(t) + s(t) \xi^\diamond(\Delta t), & \eta^\diamond(t+\Delta t) &= \eta^\diamond(t) + s(t) \eta^\diamond(\Delta t) \end{aligned} \quad (6)$$

L. Nottale donne en [7, p. 66] les valeurs de λ, v, s pour $\Delta t=1$. L'effet de s n'est pas le même pour λ, v et pour $\xi^\diamond, \eta^\diamond$: le voisinage engendré par une quadriséquence reste local dans un réseau en $\xi^\diamond, \eta^\diamond$ alors que cette propriété n'est pas vérifiée dans un réseau en λ, v . Si le fonctionnement en τ du R.A. générique est de classe (0), le fonctionnement en t d'un neurone formel est cyclique : $(\Delta t)_{\max} = |L_K|/4 = (3^K - 1)$. Pour $|L_K|$ factorisable, $(\Delta t)_{\max}$ peut éventuellement être réduit par un effet de type stroboscopique.

Fonctionnement d'un réseau de neurones. Pour K élevé et un nombre d'états $\varepsilon_{aj}(0)$ faible vis-à-vis de $|L_K|$, les $\varepsilon_{aj}(t)$ diffusent progressivement dans les autres amas. Chaque cheminement a une allure pseudo-aléatoire et peut être interprété comme la diffusion d'un signal dans l'arbre axonal du neurone a suivie de sa transmission dans l'arbre dendritique d'un neurone j . Le nombre des états peut donc représenter le nombre maximal de connexions à l'instant t et le nombre Δt de quadriséquences appliquées, une durée de propagation entre neurones.

Par définition, un neurone formel a se trouvant dans l'état E est transformé en l'état E^+ (resp. E^-) si d'éventuels V supplémentaires amènent tous les états en $s=+1$ (resp. $s=-1$). Soit $n_j^+(t)$ (resp. $n_j^-(t)$) le nombre d'états de spin

* Dans le cas d'un BCR sous-jacent (V), (Z) ou (M), si (3) est satisfaite, le réseau bidimensionnel est remplacé par un réseau à 4 dimensions.

** Dans le cas du BCR sous-jacent (I), des états ε_j appartiennent au même amas repéré par $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ si et seulement si $\tau_j = \alpha \pmod{4}$.

$s=+1$ (resp. $s=-1$) dans E. On peut proposer un règle à seuil dépendant du rapport $n_j^+(t) / (n_j^+(t) + n_j^-(t))$.

Appels à l'environnement supplémentaires. Revenons au R.A. générique. La suite "naturelle" des réflexions l, r , dans laquelle sont insérés les V indispensables, n'est jamais terminée par V . Par contre, une séquence réduite peut comporter un V final si le nombre k de $0, 1, 2$ qu'elle contient est inférieur à K . L'état $\varepsilon_{aj}(t)$ du neurone a est l'état du neurone générique en $\tau_{aj} + 4t$. On démontre que, si l'état en $\tau_{aj} + 4t$ appartient au premier demi-cycle et si la séquence réduite $\$_{aj}$ de longueur k n'est pas terminée par V , le R.A. prend l'état qui serait obtenu à l'étape *ultérieure* $\tau_{aj} + 4t + 2(3^k - 1)$. Au contraire, si $\$_{aj}$ est terminée par V , l'application d'un V supplémentaire annule l'effet du premier et le neurone a prend un état qui est repéré dans le R.A. générique par l'étape *antérieure* $\tau_{aj} + 4t - 2(3^k - 1)$. Si les V supplémentaires sont introduits avec une certaine régularité, dans certains cas les états engendrés peuvent correspondre à une partie de ceux qui proviendraient d'un R.A. générique ne fonctionnant pas en classe (0). Les congruences exceptionnelles qui définissent cette nouvelle classe (voir [6]) détermineraient un effet de potentialisation (ces travaux ont été ébauchés par J. Chastang en 1983 et n'ont pas encore été publiés). D'un point de vue physique, elles caractériseraient des molécules chimiques réalisant une *mémorisation à long terme*.

Règle de pondération. Dans un modèle connexionniste classique, "l'automate applique une fonction (généralement non linéaire) à la somme pondérées de ses entrées (les coefficients de pondération sont appelés le poids des connexions" (cf. par exemple F. Fogelman-Soulié [8, p. 278]). Il faut donc établir une correspondance entre la règle de basculement ($E \rightarrow E^+$ ou E^-) et la règle de pondération à seuil. Cette correspondance est possible en raison de la propriété suivante qui a été démontrée dans le cas du BCR (I) : pour K suffisamment élevé, on peut trouver dans les sous-amas voisins du centre de l'amas un nombre élevé d'états partiels $\varepsilon_{aj}(0)$ qui ont le même comportement "naturel" pendant une durée $(\Delta t)_{\text{eff}}$ suffisamment faible devant $|L_K|$. Les ω_{aj} états $\varepsilon_{aj}(0)$, ayant le même comportement durant $(\Delta t)_{\text{eff}}$, peuvent donc être remplacés par un seul état $\varepsilon_{aj}(0)$ affecté du poids ω_{aj} . Cet état représente une classe d'équivalence.

Utilisation de l'effet miroir. Dans le modèle le plus simple, l'état de chaque neurone formel est réinitialisé après la durée $(\Delta t)_{\text{eff}}$. Si l'on admet que les $\varepsilon_{aj}(t)$ décrivent des cheminements dans les arbres axonaux et dendritiques, il faut que les séquences réduites soient descriptibles au moyen d'arbres binaires. Or le fonctionnement de classe (0) engendre des imbrications en $(g-1)^k$, c'est-à-dire en $3^k, 5^k, 7^k$ et 11^k pour les BCR (I), (V), (Z), (M) respectivement (g est l'ordre du groupe du BCR sous-jacent). Dans le cas étudié, il faut donc sélectionner un arbre binaire dans un arbre ternaire. Pour réaliser ce choix, nous exprimons l'existence d'états communs à deux neurones dont les référentiels se transforment l'un en l'autre par "effet miroir" (cf. M. Ferré [9]). Cette propriété est issue d'une recherche de transformations laissant invariante la structure stabilisée d'un R.A. (cf. L. Nottale [10]) qui a débouché sur un modèle de ramification [9] applicable dans les domaines végétal et animal. Le raisonnement indiqué en [5, p. 519-528] explique les résultats constatés sur ordinateur [11, p. 258] : il y a émergence d'un arbre binaire indépendant du BCR sous-jacent.

1/2 pilotage d'un R.A. On peut retrouver ces résultats de façon approchée par sélection des séquences construites au moyen des quadriséquences 02, 11 et 20. (qui, en "linéarisé", produisent un déplacement $\xi^\diamond, \eta^\diamond$ non nul et ne

modifient pas le "spin" $s=+1$). Le pilote fonctionne en classe (0). Les états du pilote relatifs aux 4 amas sont pris en considération. Puis, à chaque séquence réduite $S_{1/2}$ du pilote on associe une quadriséquence en remplaçant dans $S_{1/2}$: 0 par 02, 1 par 11 et 2 par 20 (la même procédure est applicable au BCR (V); 5 hexaséquences sont privilégiées : 04, 13, 22, 31, 40). Il y a donc deux structures d'imbrication qui engendrent une structure fractale. Ce résultat semble rejoindre des travaux de D. Dubois [12]. Dans le cas du BCR (I), les différents amas sont représentables dans une portion tétraédrique d'un réseau tridimensionnel, l'un des axes repérant le niveau d'imbrication. Le R.A. générique fournit en classe (0) un histogramme trinomial et chacune des 3 faces sur lesquelles se manifestent les imbrications de niveaux ont la structure d'un triangle de Pascal (coefficients binomiaux).

CONCLUSION

En introduisant une structure de type fractal, le R.A. générique apporte une cohérence globale qui paraît absente dans les modèles connexionnistes. De nombreuses applications sont envisagées en reconnaissance des formes, exploitation automatique des données, linguistique,... Il semble possible d'appréhender la structure de mémorisation profonde diffuse et de décrire les molécules chimiques mises en oeuvre. Des aspects subjectifs sont associées au pilote ou au 1/2 pilote du R.A. générique dont les états ne sont pas descriptibles dans les référentiels spatio-temporels classiques. Il faudrait réexaminer le rôle des cellules gliales qui pourraient être sensibles à la structure informationnelle de ces pilotes.

REFERENCES

- [1] VALLET Cl., MOULIN Th., Relateurs arithmétiques et modèles connexionnistes, in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1208-1218.
- [2] GOLINSKY S., Travaux du groupe Systema, *Cahiers Systema n°12* (édités par l'Association Systema, 30 rue Croix Bosset, F-92310 Sèvres), avril 1986, p. 5-23.
- [3] RIOT Ph., Relateur arithmétique et théorie des catastrophes, in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1199-1207.
- [4] MOULIN Th., Le relateurs arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques, *Revue Internationale de Systémique*, Vol. 3, n° 4, 1989, p. 459-483.
- [5] MOULIN Th., Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques, *Revue Int. de Systémique*, Vol. 5, n° 5, 1991, p. 517-560.
- [6] LUMINET J.-P., Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification, *Revue du Cethedec*, n°62, 1980, p. 55-95.
- [7] NOTTALE L., Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *Revue du Cethedec*, n°67, 1981, p. 35-82.
- [8] FOGELMAN-SOULIE F., Méthodes connexionnistes pour l'apprentissage, in *Intelligence artificielle, Actes des Journées Nationales, Toulouse 14-15 mars 1988*, dir. D. Pastre, édité par Teknea, 1988, p 275-293.
- [9] LE GUYADER H., FERRE M., Organogenesis at the shoot apex : an attempt at modelization, *Acta Biotheoretica*, Vol. 37, 1988, p. 37-86.
- [10] NOTTALE L., Le relateur arithmétique dual, *Revue du Cethedec*, n° 70, 1982, p. 43-92.
- [11] VALLET Cl., MOULIN Th., Un nouveau moyen d'appréhender les niveaux d'organisation majeurs observés dans la nature, in *11e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1986*, p. 251-265.
- [12] DUBOIS D., *Le labyrinthe de l'intelligence : de l'intelligence naturelle à l'intelligence fractale*, 2e édition, InterEditions/Academia, Paris/Louvain-la-Neuve, 1990.

XIIIe Congrès International de Cybernétique, Namur, 24-28 août 1992
Symposium XXVII «Systèmes naturels»

EBAUCHE D'UN MODELE GENERIQUE DE "MILIEUX AQUEUX STRUCTURES"

par Thiébaud MOULIN

INTRODUCTION

L'esquisse de la modélisation d'un "milieu aqueux structuré" au moyen de relateurs arithmétiques (R.A.) a été proposée en 1987 au cours du VIIe Séminaire de Biologie Théorique [1]. A ce moment-là, Ph. Riot n'avait pas encore établi la liaison entre relateurs cycliques de base (BCR) et systèmes de racines d'algèbres de Lie. C'était l'idée d'une résonance structurelle entre la double hélice d'ADN et le milieu aqueux environnant qui avait déterminé le choix de la structure sous-jacente du R.A..

Grâce aux résultats de Ph. Riot [2], [3] et à ceux de Fr. Chauvet [4], une première interprétation de cette structure sous-jacente a été trouvée [5] : trois BCR à 4 variables de déterminant 5/16, sont associés au système de racines de l'algèbre de Lie A4 du groupe SU5. Les congruences (γ) établissent une filiation entre les 3 BCR [5, p. 530-531].

Au cours du XIIe Congrès International de Cybernétique [6], a été présenté un modèle à structure "parallèle" comportant un grand nombre de variables d'environnement. Cette "description parallèle" est un moyen de retrouver les descriptions quantiques classiques; mais elle ne montre pas la dynamique sous-jacente du champ d'interférences structurelles. Un R.A. générique, donnant une "description séquentielle" d'un "milieu aqueux structuré", a donc été recherché. Nous allons indiquer quelques résultats après avoir montré la cohérence du choix des BCR sous-jacents.

CHOIX DES BCR SOUS-JACENTS

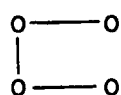
La structure sous-jacente du modèle proposé doit d'abord contenir le groupe de rotations SO(4) puisque l'eau est composée d'hydrogène et d'oxygène et que les fonctions d'onde non relativistes d'un atome d'hydrogène concernant les impulsions sont les fonctions ultrasphériques dans un espace euclidien réel à 4 dimensions (cette propriété est due à une symétrie cachée de l'hamiltonien ; les références des travaux de E. Hylleraas, V. Fock, J.-M. Souriau,... sont indiquées en [7, p. 1181 et 1189]). D'après A.O. Barut (cf. B.G.

Thiébaud MOULIN, Groupe SYSTEMA, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, F-75015 PARIS (France).

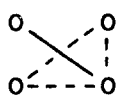
Wybourne [8, p. 311]), $SO(4,2)$ (*) est un groupe dynamique pour l'atome d'hydrogène (les opérateurs décrivent les transitions d'état quantique). Par conséquent, le BCR sous-jacent du R.A. doit contenir l'un de ceux associés à l'algèbre de Lie A_3 qui est isomorphe à celle de $SO(4,2)$. D'autres raisons trouvées par Fr. Chauvet [9] renforce encore cet argument.

Mais prendre en compte A_3 ne peut suffire car cette algèbre n'exprime pas la symétrie structurelle due à la présence de deux atomes d'hydrogène disposés symétriquement dans chaque molécule d'eau. Après A_3 , vient naturellement A_4 . Fr. Chauvet fait remarquer que le graphe de Dynkin de A_3 $o—o—o$ peut être extrait de celui de A_4 $o—o—o—o$ de deux façons différentes et symétriques (suppression de l'un des sommets situés aux extrémités du graphe). C'est un indice favorable, mais évidemment cela ne prouve pas que A_4 soit la bonne structure sous-jacente; A_4 est seulement la plus simple de celles qui sont envisageables. Enfin, le groupe de Lie $SU(5)$, dont l'algèbre de Lie est A_4 , joue un rôle important en théorie quantique des champs. Cette propriété préciserait un autre élément de la "filière" attachée au système de racines de A_4 (une "filière" est une suite de systèmes imbriqués, situés à des niveaux d'organisation différents, auxquels s'applique en première approximation le R.A. considéré).

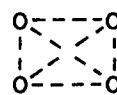
Rappelons qu'il y a trois BCR définis par ce système de racines. Ils sont représentés par les graphes de Coxeter suivants (dans lesquels un sommet représente un terme carré affecté du coefficient 1, un trait représente un terme croisé affecté de ± 1 et un trait pointillé, un terme croisé affecté de $+1$ ou de -1 avec contrainte de signe) :



(Eau I)



(Eau II)



(Eau III)

MODELE GENERIQUE

Support. Les modèles génériques les plus simples comportent une seule variable d'environnement. Chacun de ces BCR sous-jacents fournit plusieurs types de R.A. car il faut prendre en compte la partition (3+1) ou (2+2) des 4 variables principales dans les termes d'environnement et, dans le cas des deux premiers BCR, le rôle dissymétrique des variables. Il y a 5 types de R.A. pour "Eau I", 5 pour "Eau II" et 2 pour "Eau III", soit en tout 12 types différents. Par exemple, dans le cas de "Eau I" et d'une partition (2+2) voici l'une des formes supports dans laquelle $\varepsilon_{ij} = \pm 1$:

$$\{P(X^2 + \varepsilon_{12}XY + Y^2 + \varepsilon_{23}YZ + Z^2 + \varepsilon_{34}ZR + R^2) + D(AX+BY+CZ+V)(FR+V) = \{—\}o$$

Imbrication. Les produits de réflexions $(i \ddagger)$, $(r \ddagger)$ avec $i = \underline{zyx}$ (**) sont régulièrement alternés (l'ordre de ces réflexions \underline{x} , \underline{y} , \underline{z} , peut être différent, mais il est conservé au cours du fonctionnement). Le symbole \ddagger représente la réflexion \underline{V} le long du vecteur environnement si, et seulement si, elle est

* La forme invariante fondamentale de $SO(4,2)$ est la forme quadratique : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2$.

** Si la partition des variables dans les termes d'environnement était différente, par exemple $D(AX+BY+V)(CZ+FR+V)$, i représenterait \underline{xy} ou \underline{yx} et r correspondrait à \underline{zr} ou à \underline{rz} .

nécessaire; et dans les autres cas, l'identité. x, y, z, r sont les réflexions le long des axes OX, OY, OZ, OR respectivement. La longueur du cycle engendré par le BCR sous-jacent (Eau I, Eau II ou Eau III) est égale à 20. Les cellules de Luminet sont donc $(iVrV)^4 iVr$ et $(rViV)^4 rVi$. Chacune d'elles contient 9 V. En classe (0), la longueur du cycle croît proportionnellement à $(9^K - 1)$, K étant introduit dans les valeurs initiales canoniques : $X_\mu(0) = x_{\mu 0} P^K$, $V(0) = v_0 P^K$ (X_μ représente X,Y,Z,R pour $\mu = 1, 2, 3, 4$ respectivement).

Pilotage. Le modèle proposé est une généralisation de celui décrit dans la communication de S. Golinsky [10]. Le R.A. est "linéarisé", ce qui implique le choix d'un BCR limite et d'une classe de fonctionnement. Le pilote peut être l'un des RA de la classe qui fonctionnent avec la valeur de P la plus faible. Une solution différente sera proposée dans la suite.

Timing. Puisque la structure des cycles ne fait pas apparaître directement x, y, z, r , il suffit de compter le nombre τ' de produits i, r effectués. La longueur du cycle sous-jacent (en i, r) est égale à 10; comme les états considérés doivent appartenir au même amas, il faut les prélever pour $\tau \equiv \tau' \pmod{10}$. Pour qu'il puisse y avoir bouclage structurel (cf. communication de L. Saint-Paul [11]), le prélèvement doit être réalisé par un R.A., beaucoup moins compliqué que celui qui est "linéarisé". Aucun BCR à 2 ou 3 variables ne convient. La solution la plus simple est un RA à 2 variables principales, à BCR sous-jacent (I), fonctionnant en classe (α), pour $K=1$, car la longueur du cycle est égale à 20 [12, p. 88]. Il existe une autre possibilité valable quel que soit K : on exploite les cellules d'imbrication successives d'un R.A. à 2 variables principales, à BCR sous-jacent (V), fonctionnant en classe (0) ou (α) puisque chacune d'elles contient 5 V.

Base polynomiale. Le nombre maximal de dimensions de la base polynomiale n'a pas encore été déterminé; mais, dans le cas où le BCR limite est le BCR sous-jacent et pour les conditions particulières $|B_{\mu x_{\mu 0}}| \ll \ll |v_0|$, l'étude est considérablement simplifiée [10]. Cette hypothèse a été adoptée.

EXISTENCE DE SOUS-RESEAUX DEPHASES

1/2 pilotage. A partir d'une description séquentielle, s ont engendrées des descriptions parallèle \mathcal{D} selon la méthode indiquée en [10]. On doit d'abord vérifier que les fonctions d'onde d'un atome d'hydrogène sont bien retrouvées, ce qui implique une correspondance avec les amplitudes de probabilité complexes utilisées en mécanique quantique. Il est exclu d'introduire a priori de tels nombres; ils doivent émerger du modèle qui, apparemment, ne fournit que des histogrammes réels. Cette difficulté avait bloqué les applications des R.A. en physique. Elle vient d'être résolue dans le cas d'un R.A. à BCR sous-jacent (I), noté $\mathcal{R}_{(I)}$. Il faut d'abord sélectionner les états présentant un caractère "objectif" (états communs à deux R.A. conjugués [7, p. 523-528]). Cette opération est remplacée par un "1/2 pilotage" défini en [10] : le "1/2 pilote" fonctionne à partir de valeurs initiales calculées pour $K_{\text{pilote}} = K/2$, K étant pair et relatif à $\mathcal{R}_{(I)}$; à chaque état du "1/2 pilote" est associé (sous certaines réserves) un état "objectif" appartenant au cycle engendré par $\mathcal{R}_{(I)}$ (dans le raisonnement, les séquences réduites [13] ont un rôle fondamental).

Déphasage. Soit $\tau_{1/2}$ un entier repérant un nombre d'étapes effectuées "naturellement" par le "1/2 pilote" à partir d'un état initial canonique. On démontre que les états de $\mathcal{R}_{(I)}$ sont disposés aux noeuds de 4 sous-réseaux disjoints, selon la valeur de $\tau_{1/2} \pmod{4}$. Le morceau de plan sur lequel sont projetés les états est pavé de façon régulière; chaque pavé est un rectangle contenant 4 noeuds, chacun d'eux étant repéré différemment des autres par

$\tau_{1/2} \pmod{4}$. Les valeurs de $\tau_{1/2} \pmod{4}$ déterminent des déphasages réperables sur le BCR sous-jacent par $\phi \equiv 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2 \pmod{2\pi}$.

Statistique classique. Une description \mathcal{D} particulière est un histogramme calculable [10] à partir de $\mathcal{R}_{(I)}$. Au cours d'un cycle, le "1/2 pilotage" de $\mathcal{R}_{(I)}$ engendre un ensemble de répartitions trinomiales d'ordre k (avec $0 < k \leq K_{\text{pilote}}$), chacune d'elles étant représentée dans un morceau triangulaire de réseau plan, à la cote k [10], [14]. Ces répartitions constituent un morceau tétraédrique de réseau tridimensionnel. Sur chacune des 3 faces où k n'est pas constant, se trouve une suite de répartitions binomiales (constituant un triangle de Pascal); elles tendent, pour k très grand et pour un choix convenable des variables, vers une gaussienne.

Interférences quantiques. Pour tenir compte du déphasage des différents états, il suffit de multiplier le nombre d'états accumulés en chaque noeud par $\exp(j\phi)$, avec $j = \sqrt{-1}$, c'est-à-dire par 1, j , -1 , ou $-j$ selon la valeur de $\tau_{1/2} \pmod{4}$ qui tient compte des décalages introduits par \mathcal{D}_0 . La répartition affectée à chaque pavé est la somme des 4 valeurs obtenues : c'est donc un nombre complexe. A partir de ces nombres sont calculées les fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique. L'aspect quantique est donc associé à un déphasage temporel et à un cheminement dans une structure d'imbrication en 3^k alors que l'aspect statistique habituel provient d'un repérage dans un espace-temps "objectif", lié à une structure d'imbrication en 2^k . La coexistence de ces deux structures d'imbrication donne un caractère *fractal* au temps "interne" relativement au temps "objectif externe".

Tout semble indiquer que ces propriétés sont généralisables au cas des BCR (V), (Z), (M), le module 4 étant remplacé par l'ordre g du groupe engendré par le BCR sous-jacent, mais la preuve n'a pas encore été obtenue. On peut également espérer que ce résultat sera applicable aux R.A. à 4 variables principales et une variable d'environnement, proposés pour la modélisation d'un milieu aqueux structuré. L'étude de la dynamique sous-jacente devrait également introduire les entiers algébriques $x_0 + x_1\sqrt{2} + x_2\sqrt{5} + x_3\sqrt{10}$ envisagés en [1], [6] pour l'extension des domaines multiplicatifs.

PILOTAGE AU MOYEN DE R.A. A DEUX VARIABLES PRINCIPALES

Le bouclage structurel [11], décrivant des résonances structurelles entre un "milieu aqueux cellulaire" et une double hélice d'ADN, implique une possibilité de piloter un R.A. à 4 variables au moyen de R.A. à 2 variables, ainsi qu'une possibilité de faire émerger un référentiel sous-jacent quadridimensionnel à partir de ces mêmes R.A. Le problème du "timing" est résolu par un R.A. à BCR sous-jacent (V) noté $\mathcal{R}_{(V)}$. Le pilotage est également possible car un R.A. $\mathcal{R}_{(I)}$, à BCR sous-jacent (I), engendre une imbrication en $3^{K_{\text{pilote}}}$ qui peut déterminer celle en 9^k . L'algorithme suivant est utilisable en classe (0) : «prendre $K_{\text{pilote}} = 2K$; entre deux V successifs, remplacer les n réflexions i, r par $1+2 \text{ int}(n/4)$ réflexions si n est impair; et par $n/2$ si n est pair (ce deuxième cas se présente seulement au début d'un cycle ou entre les deux demi-cycles); respecter l'alternance régulière de la suite des réflexions i, r obtenue».

Pour $\varepsilon=0$, $\{P(X^2+\varepsilon XY+Y^2) + D(AX+V)(BY+V)\} = \{—\}_0$ est le support de $\mathcal{R}_{(I)}$, et, pour $\varepsilon=\pm 1$, celui de $\mathcal{R}_{(V)}$. Soit P_{\min} la valeur minimale de P en classe (0) : $P_{\min}=3$ pour $\mathcal{R}_{(I)}$ et $P_{\min}=5$ pour $\mathcal{R}_{(V)}$. Le choix de D, A, B est déterminé par l'angle θ que forment le vecteur environnement et la normale à l'un des plans BCR (cf. communication de M. Ferré [15]) : $\cos^2 \theta = 1 - DP^0/(D_c P)$ avec

$P^\circ = A^2 + \varepsilon AB + B^2$ et $D_c = 4 - \varepsilon^2$; dans le cas du BCR(I), 4θ est l'angle de rotation défini par le produit de réflexions $(iVr)^2$. Les différents $\mathcal{R}_{(V)}$ à support elliptique ont été répertoriés pour $P_{\min} = 5$. L'une des solutions est obtenue pour $\varepsilon = \pm 1$, $P=5$, $D=1$, $P^\circ = 7$ (et l'un des 12 couples A, B est : 1, 2ε); elle peut être associée à un $\mathcal{R}_{(I)}$ caractérisé par $\varepsilon = 0$, $P=15$, $D=14$, $A=1$, $B=1$. Dans les deux cas, la détermination principale θ_0 de θ est la même : $\theta_0 = \arcsin\sqrt{7/15} = 43^\circ,088733\dots$; $(90^\circ - \theta_0)/2 = 23^\circ,455633\dots = 23^\circ 27' 20''\dots$

CONCLUSION

Un raisonnement fondé sur la théorie des groupes montre l'intérêt d'une structure sous-jacente associée à $SU(5)$, via le système de racines de l'algèbre de Lie A_4 . Une interprétation nouvelle des amplitudes de probabilité en mécanique quantique est proposée (mais la vérification n'a été faite que dans un cas particulier); un point de vue fractal lui est associé. Un champ de résonances structurelles pourrait être lié aux R.A. pilotant le fonctionnement du R.A. générique.

REFERENCES

- [1] MOULIN Th., Tentative de modélisation de quelques constituants cellulaires au moyen d'un relateur arithmétique, in *Biologie Théorique - Solignac 1987*, Y. Bouligand dir., Editions du CNRS, Paris, 1989, p. 17-35.
- [2] RIOT Ph., Fondements mathématiques sous-jacents des relateurs arithmétiques, in *Congrès Européen de Systémique, CES1, Lausanne 1989*, édité par AFCET (156 bd Péreire, F-75017 Paris), p. 505-514. Reproduction dans ENSTA RR 241, déc. 1989.
- [3] RIOT Ph., Relateur arithmétique et théorie des catastrophes, in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1199-1207.
- [4] CHAUVET, Fr., Quelques applications de modèles associant algèbres de Lie et cheminements pseudo-aléatoires, in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1230-1237.
- [5] CHAUVET Fr., MOULIN Th., Vers une esquisse de langage systémique fondé sur des classes de fonctionnement, des types de singularités et des nombres d'information virtuelle, in *Congrès Européen de Systémique, CES1, Lausanne 1989*, édité par AFCET ([
- [6] MOULIN Th., Tentative de modélisation d'un "milieu aqueux structuré", in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1178-1189.
- [7] MOULIN Th., Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques, *Revue Int. de Systémique*, Vol. 5, n° 5, 1991, p. 517-560.
- [8] WYBOURNE B.G., *Classical Groups for Physicists*, J. Wiley & Sons, N.Y., 1974.
- [9] CHAUVET Fr., Structures de Lie associées à la modélisation d'un milieu aqueux structuré, in *Liens entre théorie des singularités, fractals et relateurs arithmétiques : applications en systémique*, Rapport de Recherche ENSTA 251 (ENSTA, 32 bd Victor, F-75015 Paris), nov. 1990, p. 71-79.
- [10] GOLINSKY S., MOULIN Th., Un apport possible des relateurs arithmétiques aux modèles connexionnistes, in *13e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*.
- [11] SAINT-PAUL L., MOULIN Th., Bouclages structurels dans des référentiels "espaces-temps-imbrications", in *13e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*.
- [12] LUMINET J.-P., Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification, *Revue du Cethedec*, n°62, 1980, p. 55-95.
- [13] NOTTALE L., Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *Revue du Cethedec*, n°67, 1981, p. 35-82.
- [14] VALLET Cl., Préliminaires pour une nouvelle approche de certains comportements humains, in *13e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*.
- [15] FERRE M., Cytosquelette de la cellule végétale : émergence d'un relateur arithmétique, in *13e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*.

CYTOSQUELETTE DE LA CELLULE VEGETALE: EMERGENCE D'UN RELATEUR ARITHMETIQUE.

par FERRE Michel

1 - LA NOTION DE SURFACE CELLULAIRE ET LE CHOIX DE LA STRUCTURE MATHÉMATIQUE.

Le but recherché étant de rendre compte d'une géométrie de l'espace physique, on fait appel à la structure d'espace vectoriel muni d'une métrique euclidienne où tout élément (ou processus) est décrit par (ou dans) un espace de même dimension que celui de l'espace réel dans lequel il évolue.

Toute morphogénèse cellulaire résulte de l'interaction entre un stimulus externe polarisant (SEP) et une structure cellulaire spécialisée.

Les structures morphogénétiquement actives de la cellule végétale ont donné naissance à la notion de "surface cellulaire" (SC). Une SC a trois composantes qu'on peut classer en 2 éléments dynamiques, qui sont:

1) la paroi externe, une structure en "contre-plaqué" composée de microfibrilles de cellulose (MFs); elle équilibre la pression interne considérée comme le moteur de l'élongation de la cellule (Brown 1985): elle en détermine donc la polarité et la forme. Avant intervention du SEP, elle est isotrope (cellule méristématique isodiamétrique) et représentée globalement par un espace, contenu dans un plan (P_0) donné par son vecteur normal e^0 , et constitué de 2 axes (e_1^0 , e_2^0) orthogonaux et dont la norme commune $g_{11} = g_{22}$ est un paramètre intrinsèque à la membrane (Figure 1).

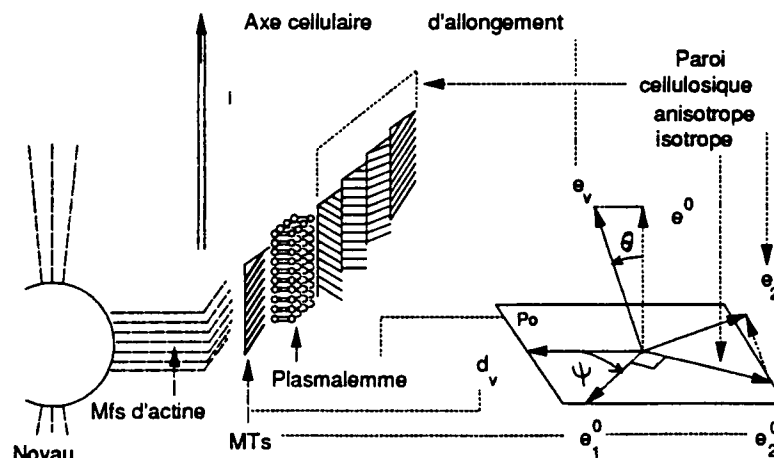


Figure 1.

2) le couple (plasmalemme + cytosquelette), une structure sous-jacente qui contrôle la paroi externe chaque fois qu'il est nécessaire; le plasmalemme (PI) est une bicouche lipidique représentée par le plan (P_0); il porte, organisées en réseau, les polymérase qui synthétisent les MFs; le cytosquelette est composé : i) de microtubules corticaux (MTs) disposés en hélice sous le PI; ii) de 2 réseaux de microfilaments d'actine dont l'un, transversal (Mfs), relie le noyau au PI sous lequel ils courent parallèlement aux MTs, et qui agit probablement comme "senseur" mécanique chargé de transmettre au noyau les contraintes externes appliquées à la cellule (Ingber

1991).

Pour traduire mathématiquement cette double structure de la SC, remarquons que sans SEP, elle se comporte comme une coque isotrope mais reste capable de répondre à ce stimulus, contradiction qui ne peut être levée qu'en admettant l'existence de 2 structures distinctes (Figure 1):

1) E^0 inclut le plan (Po) qui représente le PI, et les axes (e^0_1, e^0_2) de ce plan qui représentent le couple (MTs + réseau de polymérase du PI).

2) E^0_1 représente les MFs isotropes de la cellule isodiamétrique.

Leur position relative résulte du fait que les MTs ne sont pas tant nécessaires à la dynamique stationnaire qu'est l'auto-assemblage moléculaire des MFs (cas de la cellule isodiamétrique) qu'à une brusque variation de cette dernière, une brutale réorientation par exemple (Steen & Chadwick 1981; Roberts *et al.* 1985). Dans la cellule isodiamétrique, le modèle ne peut donc distinguer entre ces 2 espaces: ils coïncident.

Un SEP est représenté par un espace monodimensionnel E_v , la norme g_{vv} de son vecteur unique e_v étant un paramètre intrinsèque au stimulus. L'angle Θ que font les vecteurs e^0 et e_v est fonction des coefficients de couplage g_{1v} et g_{2v} des vecteurs (e^0_1, e_v) et (e^0_2, e_v) selon:

$$\cos^2 \Theta = 1 - \frac{g_{1v}^2 + g_{2v}^2}{g_{11}g_{vv}} \quad (1)$$

Après intégration du SEP, le résultat est représenté par l'espace tridimensionnel réunion (e^0_1, e^0_2, e_v) des deux espaces précédents.

A la double structure de la SC, correspond un SEP à 2 niveaux: i) e_v qui représente la direction de la force de turgescence ou d'élongation de la cellule; ii) le vecteur d_v porté par la projection de e_v sur le plan (Po), restriction du SEP e_v à la structure sous-jacente de la SC, et qui représente le "senseur" mécanique qu'est le réseau transversal d'actine (Mfs).

2 - LES TRANSFORMATIONS SUGGEREES PAR CETTE STRUCTURE.

2.1 - L'effet miroir: l'action du SEP e_v sur les MFs isotropes E^0_1 .

L'élongation de la cellule résulte d'une réorientation des MFs et d'un relâchement des contraintes dans la paroi qui devient anisotrope. Partant des 2 axes (e^0_1, e^0_2) de E^0_1 , orthogonaux et de même longueur, cette anisotropie peut être rendue en conservant leur longueur et en changeant leur angle: l'un des vecteurs, e^0_2 par exemple, devient e_2 , tel que:

$$|e_2|^2 = |e^0_2|^2 = g_{22} = g_{11} \quad (e^0_1, e_2) = \phi \neq \Pi/2 \quad (2)$$

Les MFs isotropes $E^0_1 = (e^0_1, e^0_2)$ deviennent les MFs anisotropes $E_1 = (e^0_1, e_2)$ et le vecteur $(e_2 - e^0_2)$ représente le relâchement global de E^0_1 ; il n'a aucune raison d'appartenir au plan (Po), et e^0_1 n'étant pas concerné par le mécanisme de relâchement, il peut être supposé commun aux 2 espaces. Par ailleurs, la transformation de e^0_2 en e_2 est unimodulaire et résulte de l'action du SEP e_v : c'est une symétrie de vecteur directeur e_v ou une rotation autour de ce vecteur. Les vecteurs e_v et $(e_2 - e^0_2)$ étant des représentations globales, ils peuvent être supposés parallèles, ce qui exclut la rotation: e^0_2 devient e_2 par une symétrie, notée H_v , de directeur e_v , selon (Ferré & Le Guyader, 1984):

$$e_2 = H_v e^0_2 = e^0_2 - 2 \frac{(e_v \cdot e^0_2)}{|e_v|^2} e_v \quad (3)$$

Les vecteurs $(e_1^0, e_2 = Hv e_2^0)$ forment un angle Φ en général différent de $\Pi/2$. L'effet miroir n'est autre que la traduction géométrique de la condition de stabilisation selon Cl. Vallet (1976).

Sans SEP, les MFs restent isotropes et la cellule ne s'allonge pas. C'est le cas lorsque $g_w = 0$ ou lorsque e_v est perpendiculaire à (Po) : ces situations sont équivalentes et se rencontrent chaque fois que le SEP est inactif:

$$g_w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0 \quad (4)$$

2.2 - La conjugaison-recalage: MTs E_0^0 et brusque variation de la direction d'élongation.

L'axe d , étant du même type que e_v , il est supposé avoir la même action c'est à dire une symétrie (suivie, dans ce cas, d'une permutation des axes qui conserve l'orientation initiale du repère). Partant de la configuration initiale $R = (e_1^0, e_2 = Hv e_2^0, e_v)$, la structure microtubulaire $E_0^0 = (e_1^0, e_2^0)$ devient la structure "conjuguée" E_0^{*0} selon:

$$E_0^{*0} = (e_1^{*0}, e_2^{*0}) = H_{d_v}(e_2^0, e_1^0) \quad (5)$$

A ces MTs correspondent les MFs anisotropes respectifs $E_1 = (e_1^0, e_2 = Hv e_2^0)$ et $E_1^* = (e_1^{*0}, e_2^* = Hv e_2^{*0})$ qui se trouvent être superposables. Leur mise en coïncidence entraîne un "recalage" de R sur $R' = (e_1^{*0}, e_2^*, e_v')$ dans lequel e_v disparaît et devient e_v' . Ces 2 directions font un angle γ dit de ramification, qui est fonction des rapports $t=B/A$ et $D=g_w/L$, selon:

$$\cos \gamma = 1 - \frac{1}{4} \frac{D(1-t)^2}{(1+t^2) - \frac{1}{2}Dt} \quad \gamma \in \left(0, \frac{\Pi}{2}\right) \quad (6)$$

quantité extrêmu pour $t=+1$ (cas invariant), $t = \pm \inf$ (le signe importe peu) et $t=-1$, c'est à dire qu'il existe 3 configurations extrémales, notées R_i , et 2 angles (non nuls) de ramification: si on associe un lattice à l'espace des MTs E_0^0 , ces configurations stables correspondent à des lattices globalement invariants dans la conjugaison (5).

2.3 - La transformation Te: la sélectivité de la surface cellulaire.

Jusqu'ici, l'aspect structural du modèle a seul été pris en compte, mais il existe une contrainte physiologique, qui traduit la sélectivité de la SC. En fait, l'action F du SEP dépend de sa norme g_w et la réponse G de la SC dépend de la quantité intrinsèque g_{11} et des coefficients de couplage g_{1v} et g_{2v} . De plus, G est fonction de F et on obtient finalement une relation (homogène car la géométrie de l'espace initial ne dépend pas de l'échelle) entre ces 4 quantités; elle concerne l'action du SEP sur les MFs isotropes et doit donc émerger de l'expression du premier paramètre qui apparaît avec le SEP, c'est à dire l'angle Θ dont l'expression (1) suggère la relation suivante:

$$S \equiv \frac{g_{1v}^2 + g_{2v}^2}{g_{11}g_w} = Cte \quad C \quad \text{avec:} \quad 0 \leq C \leq 1 \quad (7)$$

Selon (4), la fonction S s'annule avec g_w ; tout en restant a-dimensionnelle, elle doit être proportionnelle à une certaine puissance du paramètre g_w ; il en est de même des coefficients de couplage et on pose:

$$g_{1v} = \frac{1}{2} A g_w \quad g_{2v} = -\frac{1}{2} B g_w \quad D = \frac{g_w}{L} = 4C \quad \text{avec:} \quad 0 \leq D \leq 4 \quad (8)$$

En portant (8) dans (7), il vient la relation:

$$g_{11} = L(A^2 + B^2) \quad (9)$$

qui signifie que la surface cellulaire ne peut répondre au SEP que si ce dernier prend, dans l'espace de représentation, une orientation spécifiée par la relation (9). La transformation, notée T_e , qui transforme un couple (A,B) en un autre couple (A',B') doit donc jouer un rôle fondamental dans la morphogénèse.

Les relations (1) et (7) montrent que l'angle Θ reste constant dans cette transformation, qui se traduit par une rotation des axes (e_1^0, e_2^0) dans le plan (Po) et une variation de leur norme commune g_{11} et des quantités (g_{1v}, g_{2v}). Ces coefficients sont ceux de la forme quadratique construite sur la norme du vecteur courant M de composantes (X,Y,V) dans l'espace $R_t = (e_1^0, e_2, e_v)$, et qui, compte tenu de (2), (3) et (9), prend la forme biquadratique suivante (définie positive sous la condition (8)):

$$L(A^2 + B^2)(X^2 + Y^2) + g_w(AX + V)(BY + V) = m \quad (10)$$

dans laquelle on reconnaît la forme biquadratique associée au relateur arithmétique le plus simple (Vallet *et al.*, 1978).

La relation (7) ne peut, seule, déterminer la transformation T_e : une contrainte additionnelle est nécessaire et on peut supposer que le second membre m de la forme quadratique (10) reste constant (comme c'est déjà le cas dans l'opération fondamentale de symétrie). Toute configuration R_t est donc solution de l'équation (10) en variables (A,B,V). Par exemple, selon (5), la conjugaison se traduit, sur la forme quadratique, par une permutation des coefficients (A,B).

3 - LE FONCTIONNEMENT DU MODELE: RAMIFICATION ET ARCHITECTURE DE LA PLANTE.

Structures et transformations ainsi définies, le modèle utilise exclusivement celles de ces structures qui restent invariantes dans au moins l'une de ces transformations, comme déjà vu lors de la conjugaison. La tige sans ramification étant naturellement représentée par la configuration invariante R_{+1} , le phénomène de ramification est alors décrit par la séquence des états stables proposée sur la figure 2. Cette séquence possède 3 propriétés remarquables (Ferré & Le Guyader, 1990):

1) le recalage en R'_{inf} , de la configuration R_{inf} issue de R_{+1} , fait émerger, par un phénomène de relais assez inattendu, la troisième configuration R_{-1} construite sur la direction e'_v de R'_{inf} et l'espace E^0_0 de R_{+1} ;

2) issue d'un "relais", cette configuration nécessite, après sa conjugaison-recalage en R'_{-1} , un autre recalage, noté \mathfrak{R} , de mise en compatibilité de la nouvelle SC, selon le critère de parallélisme entre la direction e'_v et le nouveau vecteur variation [$\mathfrak{R} e^0_1(R'_{-1}) - e^0_1(R'_{inf})$]: c'est le phénomène de "restauration" de l'apex (Green 1985). Il se trouve que ce recalage implique une croissance: pour le modèle, la morphogénèse caulinaire est le passage, avec propagation, d'un état stable à un autre état stable.

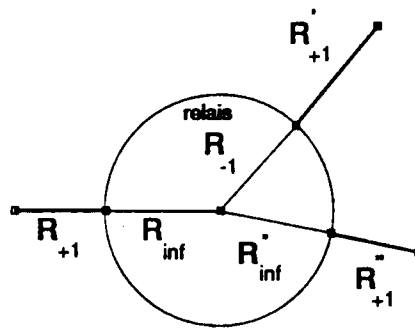


Figure 2.

3) après le recalage \mathfrak{R} , la configuration R'_{-1} fournit une direction e''_v dans le plan des deux précédentes e_v et e'_v .

Ce phénomène de ramification repositionne les espaces représentatifs suivants (c'est à dire R'_{+1} et R''_{+1}) de façon à rendre compte de la répartition hélicoïdale ou alterne des émergences latérales le long de la tige principale.

Parallèlement à l'identification des structures proposée par la figure 1, un isomorphisme peut être établi entre les transformations du modèle et les processus cytosquelettiques observés lors de l'émergence latérale et de la restauration de l'apex (Ferré & Le Guyader 1990).

4 - REFERENCES.

- Brown R.M. (1985). Cellulose microfibril assembly and orientation: recent developments. *J. Cell. Sci. Suppl.* 2:13-32.
- Ferré M. & Le Guyader H. (1984). The geometry of leaf morphogenesis: a theoretical proposition. *Acta Bioth.*, 33:85-132.
- Ferré M. & Le Guyader H. (1990). Plant morphogenesis: a geometrical model for the ramification. *Acta Bioth.*, 38:181-206.
- Green P.B. (1985). Surface of the shoot apex: a reinforcement field theory for phyllotaxis. *J. Cell Sci.*, Suppl. 2:181-201.
- Ingber D. (1991). Integrins as mechanochemical transducers. *Current Opinion in Cell Biology*, 3:841-848.
- Roberts I.N., Lloyd C.W. & Roberts K. (1985). Ethylene-induced microtubule reorientations: mediation by helical arrays. *Planta*, 164:439-447.
- Steen D.A. & Chadwick A.V. (1981). Ethylene effect in pea stem tissue, evidence of microtubule mediation. *Plant Physiol.*, 67:460-466.
- Vallet Cl., Lafrenière L., Moulin Th. (1976). Un exemple de relateur arithmétique stabilisé. *Overlapping Tendencies in Operations Res. Syst. Theory and Cybernetics*. Proc. of an Int. Symp., Univ. of Fribourg, Switzerland: 508-517. E. Billerter ed. Basel: Birkhausen Verlag.
- Vallet Cl., Le Guyader H., Moulin Th., Bouhou A. (1978). Natural Complexification of Systems by Integration of their Environment. *4th Int. Congr. of Cyb. and Syst.*:352-354. Springer Verlag.

XIIIe Congrès International de Cybernétique, Namur, 24-28 août 1992
Symposium XXVII «Systèmes naturels»

PRELIMINAIRES POUR UNE NOUVELLE APPROCHE DE CERTAINS COMPORTEMENTS HUMAINS

par Claude VALLET

INTRODUCTION

Le relateur arithmétique (R.A.) a été développé à partir d'idées simples reflétant des structures cérébrales primordiales. C'est pourquoi l'une des premières tentatives d'application de ce formalisme, effectuée dès 1976 [1], a concerné les systèmes neuronaux. Mais c'est seulement en 1989 [2] que l'application d'un même R.A. a pu être envisagée à plusieurs niveaux différents : représentation de molécules chimiques (du milieu aqueux cellulaire notamment), propagation d'un influx nerveux, ébauche de formes de neurones et de cellules gliales en tridimensionnel, ébauche d'une liaison avec les modèles connexionnistes.

Plusieurs points du modèle proposé étaient insatisfaisants : la "condition de bifurcation" qui est à la base du modèle de formes cellulaires n'avait pas été interprétée au niveau du fonctionnement neuronal (elle était seulement justifiée par des considérations d'hydrodynamique); la "description parallèle" adoptée conduisait à une prolifération de variables d'environnement qui devait être réduite au moyen d'une description séquentielle synthétique (c'est l'origine de la notion de "système générique"); les recherches orientées vers des applications en informatique, n'avaient pas tenu compte du fonctionnement cérébral inconscient.

Par ailleurs, afin d'appliquer les R.A. en socio-économie, nous avons recherché une modélisation de comportements humains fondamentaux, directement liée aux hypothèses de base utilisées (en particulier à l'expression structurelle de l'adaptation d'un système à son environnement) et s'appuyant sur des travaux de socio-psychologues, tels que Robert Pagès [3], et de spécialistes du sommeil et du rêve, M. Jouvet [4] et P. Etévenon [5] notamment. Il est heureux que cette recherche recoupe ce qui a été développé à propos des modèles connexionnistes [6], qu'elle fournisse une nouvelle interprétation de la "condition de bifurcation" et qu'en reflétant d'autres résultats obtenus en physique quantique [7], elle montre l'interdépendance des différents niveaux d'organisation dans un organisme humain.

APPORTS DE LA PHYLOGENESE ET DE L'ONTOGENESE

Concept de "noeud" en psychologie sociale. R. Pagès a introduit le concept de "noeud" [3, p. 2]. C'est un organisme ou un agrégat d'organismes qui «utilise des informations sensori-affectives (...) sur lui-même et sur le reste pour se conduire, c'est-à-dire guider son comportement». Ce concept s'applique essentiellement aux Mammifères homéothermes (cf. travaux de M. Jouvet [4] sur le sommeil et le rêve) qui diffèrent notablement des êtres poïkilothermes (à température variable) et des insectes ou des sociétés d'insectes. Outre l'homéothermie, qui est le facteur essentiel, R. Pagès retient l'absence de neurogénèse postnatale, la présence de sommeil paradoxal (phase découverte par M. Jouvet [4]), l'absence de régénération d'organes et l'absence de mue.

Utilisation d'un système générique. Le comportement d'êtres humains vivant en société est donc appréhendé, non pas localement dans une petite tranche d'espace et de temps, mais globalement dans un référentiel "espace-temps-imbrication" où les aspects phylogénétiques jouent un rôle essentiel. Dans le formalisme des R.A., c'est le type de référentiel associé à un "système générique" [10], [11]. Le R.A. comporte un nombre très faible de variables d'environnement puisque la description est obtenue séquentiellement et que les contraintes habituelles d'espace et de temps ne sont pas respectées (pour illustrer ce concept, on peut imaginer un stagiaire prenant successivement la place des différents employés (*) d'une entreprise). Les modèles à une seule variable d'environnement décrivent des structures d'imbrication idéales puisque le nombre de conditions de verrouillage (cf. J.-P. Luminet [9]) est indépendant de la valeur du paramètre K intervenant dans les valeurs initiales. Ils peuvent être appliqués au développement d'un foetus ou à la phase de gestation d'une entreprise car l'environnement est supposé idéal (ou idéalisé). Mais, ne prenant pas en compte les facteurs contraignants et aléatoirement fluctuants de l'environnement postnatal (ou socio-économique réel), ils ne conviennent pas pour une description de la vie extra-utérine. (ou celle d'une entreprise). Dans ce cas, le R.A. doit comporter au minimum 2 variables d'environnement.

Modélisation de la "condition d'homéothermie". Demandons nous d'abord si les conditions de "linéarisation" du R.A. doivent être satisfaites. La réponse est positive puisque la notion de "noeud" implique celle d'agrégat. Ensuite, il faut fixer le nombre de variables d'environnement. Dans une première phase, nous supposons que le R.A. fonctionne comme si ce nombre est égal à 1. Puisque la notion de température est issue de la physique, le modèle de type générique doit pouvoir fournir, à partir d'une description séquentielle, la répartition statistique des vitesses (cas d'un gaz parfait monoatomique, enfermé dans une enceinte isotherme, à la température T). Elle correspond approximativement à un cheminement pseudo-aléatoire isotrope sur un réseau tridimensionnel dans l'espace des quantités de mouvement. Ensuite, ce modèle est complété par une deuxième variable d'environnement. La température intervient à deux niveaux : dans un des coefficients du support et dans la factorisation des états initiaux. Nous proposons d'exprimer l'homéothermie par un bouclage entre ces deux niveaux. Voici une esquisse du raisonnement.

R.A. générique à 1 variable d'environnement. Le R.A. générique \mathcal{R} le

* Cette idée a été présentée le 20 mai 1992 dans le cadre du groupe de travail AFCET "Autonomie", lors d'un exposé sur une tentative de formalisation de la théorie de l'autonomie selon P. Vendryès.

plus simple, qui donne la répartition de chacune des 3 composantes de la quantité de mouvement, est un prolongement de celui décrit dans la communication de S. Golinsky [6]. Le support de \mathcal{R} est supposé biquadratique; autrement dit, le coefficient P des termes carrés X^2, Y^2 est de la forme : $P = L(A^2+B^2)$. Un fonctionnement en A, B, V est adopté :

$$\{L(A^2+B^2)(X^2+Y^2) + D(AX+V)(BY+V)\} = \{---\}_0 \quad (1)$$

L'état initial choisi : $A(0) = a_0 Q^H, B(0) = b_0 Q^H, V(0) = v_0 Q^H$, (2) avec $Q=L(X^2+Y^2)$ satisfait aux conditions de verrouillage de la classe de (0) et, après transposition, aux conditions supplémentaires indiquées en [6]. Afin de modéliser un gaz parfait monoatomique, on sélectionne certains états du cycle \mathcal{L}_H appartenant à l'amas initial. Les séquences réduites associées sont donc des suites de quadriséquences, chacune d'elles étant, par hypothèse, repérée par **02, 11** ou **20** afin que les règles de voisinage les plus simples soient utilisées (la signification des 3 symboles est donnée en [6]). Chaque mot contient au plus H chiffres $\in \{0, 1, 2\}$. Alors qu'un fonctionnement en X, Y, V simule un mouvement brownien, un fonctionnement en A, B, V donne une "description générique" dans l'espace des quantités de mouvement.

Il est utile d'associer à \mathcal{R} un "1/2 pilote" qui appartient à la même classe de fonctionnement que \mathcal{R} et qui fonctionne avec la valeur de Q la plus faible (en classe (0), $Q/D=3$), à partir de valeurs initiales caractérisées par $H_{\text{pilote}} = H/2$, H étant supposé pair. Chaque état engendré par le "1/2 pilote" au cours du premier demi-cycle est repéré par une séquence réduite $\mathcal{S}_{1/2}$ comportant au plus $H/2$ chiffres $\in \{0, 1, 2\}$, et éventuellement terminée par une réflexion V . Pour trouver tous les états de \mathcal{R} sélectionnés, il suffit de remplacer dans toutes les séquences $\mathcal{S}_{1/2}$: **0** par **02**, **1** par **11** et **2** par **20**; de calculer les états de \mathcal{R} au moyen des nouvelles séquences réduites obtenues; et d'enlever celles pour lesquelles le signe de V diffère de celui de $V(0)$.

Krel = 12

Kpilote=6

A=1 B=1 X0= Y0=0 U0=1

P = 1001 D = 1

Cycle : N=2912

			15	30	15	
		20	60	60	20	
		15	60	90	60	15
	6	30	60	60	30	6
1	6	15	20	15	6	1

Puisque le comportement "linéarisé" est décrit au moyen de variables adimensionnelles, les résultats obtenus en [6] dans le cas d'un fonctionnement en X, Y, V sont applicables : les états de \mathcal{R} sont positionnés sur différents plans selon la longueur des séquences réduites $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$. La répartition dans le plan $h/2=6$ ($h \leq H$) est présentée ci-contre. Elle est trinominale (seulement deux des opérateurs de déplacement associés à **02**, ou **11**, ou **20** sont linéairement indépendants). Sur chacun des côtés du triangle, l'histogramme tend, pour h élevé, vers une gaussienne, interprétée comme la fonction de distribution d'une des composantes des quantités de mouvement. *La température est proportionnelle à $h \leq H$.*

(\mathcal{R} , en raison de sa simplicité, pourrait paraître inadapté au problème étudié. Afin de convaincre le lecteur du contraire, rappelons seulement que ce type de R.A. peut fournir les configurations florales bidimensionnelles présentées en [12]. Il fonctionne en X, Y, V , sous l'effet de la séquence réduite **0000**. La complexité apparente de la forme provient d'un balayage en $L/D, v_0$).

R.A. générique à 2 variables d'environnement. Le plus simple a été défini en vue d'applications en thermodynamique. Le support exprimé dans le référentiel du BCR sous-jacent :

$$\{P_1 P_2 (X^2 + Y^2) + D_1 P_2 (A_1 X - B_1 Y + V^{\circ}_1) V^{\circ}_1 + D_2 P_1 (A_2 X - B_2 Y + V^{\circ}_2) V^{\circ}_2\} = \{---\}_0 \quad (3)$$

est dégénéré. Pour $A_2 = 0$, $P_1/D_1 = A_1^2 - B_1^2 (4 P_2/D_2) / (B_2^2 - 4 P_2/D_2)$ (4) on peut montrer que P_2/D_2 est proportionnel à la température de l'enceinte (pression et masse volumique sont déduits des valeurs propres du tenseur impulsion-énergie par rapport au tenseur métrique). Cette interprétation est conservée dans la généralisation de (3) et (4) fournissant des ébauches de formes neuronales [2, p. 1212]. L'homéothermie est modélisée par un bouclage entre l'exposant H et le paramètre P_2/D_2 . C'est un aspect du bouclage global envisagé dans la communication de L. Saint-Paul. La limitation du nombre de niveaux d'imbrication arrête la neurogénèse.

INTERPRETATION DES PHASES D'EVEIL ET DE SOMMEIL

Phase de sommeil paradoxal. Elle pourrait être modélisée par un fonctionnement en X, Y, V_2 (après activation de V°_2 par effet miroir). Diverses conditions sont requises : il faut notamment que P_2 soit suffisamment faible et que le fonctionnement en A, B, V_1 puisse être partiellement bloqué, ce qui implique une valeur de H faible. Une diminution de la température favorise donc cette situation, mais elle ne suffit pas car d'autres conditions doivent être satisfaites. Dans le cas le plus favorable, le R.A. en X, Y, V_2 peut fonctionner pour des valeurs de K_2 élevées et jouer le rôle d'un "pilote" agissant en symbiose avec le système. Si V_1 reste activée, les fonctionnements en V_1 et en V_2 sont imbriqués. Le "pilote" peut "reprogrammer" [3, p. 24] le fonctionnement associé à V_1 , c'est-à-dire modifier la classe de fonctionnement; ce processus implique des résonances qui évoquent des phénomènes quantiques et sont descriptibles dans des référentiels "espace-temps-imbrications".

Phases d'éveil, de sommeil profond, de suréveil. Pour décrire ces phases au moyen d'un R.A., même de la façon la plus schématique, il faut faire appel à la "bifurcation" d'un fonctionnement en X, Y, V_1 vers un fonctionnement en A, B, V_1 . Ce difficile problème a été abordé par M. Ferré et H. Le Guyader [12] en vue d'une application à la ramification. Il semble que la classe de fonctionnement doive être issue de la classe (α). Le module P peut être le produit de plusieurs facteurs de P_1, P_2 ; les conditions de bifurcation dépendent de la factorisation de X, Y, A, B, V_1, \dots . Malgré une méconnaissance du fonctionnement des R.A. biquadratiques, nous allons esquisser une interprétation de différentes phases d'éveil et de sommeil. Pour chacune d'elles, il y a imbrication de plusieurs modes de fonctionnement; seul, le plus typique est indiqué.

Au cours de *l'éveil*, V_1 serait activée et il y aurait possibilité de "bifurcation". V°_2 agirait par l'intermédiaire de sa valuation en P (les valuations faibles modifiant le fonctionnement libre en V_1). L'*endormissement* serait décrit par une diminution des capacités de "bifurcation" et une augmentation de la valuation de V°_2 . La phase de *sommeil profond* correspondrait à une modification des paramètres internes A, B accompagnée de régénérations énergétiques, à une diminution de P et à une valuation de V°_2 élevée. Au cours du *sommeil paradoxal*, V°_2 serait activée en V_2 par effet miroir. C'est dans cette phase que serait réalisé le couplage maximal avec "les champs de résonance structurelle". Le rôle des cellules gliales et du milieu aqueux cellulaire serait fondamental. Enfin le *suréveil* dont parle P. Etévenon [5] serait une mise en résonance des fonctionnements en V_1 et en V_2 avec blocage volontaire partiel en A, B, V_1 et X, Y, V_1

APPLICATION A L'ETUDE DE COMPORTEMENTS HUMAINS

Les R.A. génériques homogènes à 1 variable d'environnement les plus simples schématisent les relations harmonieuses d'un système vivant avec son environnement. Ces schémas mentaux paraissent profondément gravés dans le cerveau car ils rappellent la vie foetale. Ils engendrent des référentiels "espaces-temps-imbrications" et évoquent des sentiments *d'amitié sincère, de confiance, de paix,...*

Il y a formation d'agrégats, localisation,... si les conditions de "linéarisation" sont satisfaites. Cela implique la présence d'un "pilote " et par conséquent celle d'une deuxième variable d'environnement. Si les exposants K_{pilote} et K_{RA1} (intervenant dans les états initiaux) sont égaux, le comportement global est analogue au précédent. Pour $K_{pilote} > K_{RA1}$, le R.A. schématise une situation *de stress et de souffrance* puisque les possibilités du système piloté sont transgressées. Pour $K_{pilote} < K_{RA1}$, il y a sentiment de *frustration* parce que le système piloté est *sous-employé*.

Le raisonnement précédent présuppose l'existence d'un "noeud" donnant une signification à des classes d'équivalence. Dans un R.A., ce "noeud" peut être le bouclage structurel associant certains exposants et certains paramètres du support; les référentiels "espaces-temps-imbrications" se referment alors sur eux-mêmes et font émerger les référentiels spatio-temporels classiques. Chez les êtres humains, il se manifeste par l'homéothermie, l'absence de neurogénèse postnatale,... par la possibilité de comprendre, mais aussi par celle de bâtir des schémas qui font fi des imbrications naturelles...

Ce peut être un point de départ pour une nouvelle approche des comportements humains, notamment en vue d'application à des modèles socio-économiques. Elle pourrait conduire à une remise en cause profonde des concepts classiques et redonner *confiance et optimisme*.

REFERENCES

- [1] LE GUYADER H., VALLET Cl., MOULIN Th., Reconnaissance des formes et réseaux neuronaux, in *8e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1976*, p. 877-889.
- [2] VALLET Cl., MOULIN Th., Relateurs arithmétiques et modèles connexionnistes, in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1208-1218.
- [3] PAGES R., GERMAIN R., MBEDE R. SHALHANI L.P., *Rêve, rite, conversation : rythmes et tendances d'interactions*, Lab. de Psychologie Sociale CNRS et Univ. Paris VII, 1991.
- [4] JOUVET M., *Le sommeil et le rêve*, Editions Odile Jacob, Paris, 1992.
- [5] ETEVENON P., *L'homme éveillé - paradoxes du sommeil et du rêve*, Editions Tchou (Sand), Paris, 1990.
- [6] GOLINSKY S., MOULIN Th., Un apport possible des relateurs arithmétiques aux modèles connexionnistes, in *13e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*.
- [7] MOULIN Th., Ebauche d'un modèle générique de "milieux aqueux structurés", in *13e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*.
- [8] LUMINET J.-P., Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification, *Revue du Cethedec*, n°62, 1980, p. 55-95.
- [9] MOULIN Th., Le relateurs arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques, *Revue Internationale de Systémique*, Vol. 3, n° 4, 1989, p. 459-483.
- [10] MOULIN Th., Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques, *Revue Int. de Systémique*, Vol. 5, n° 5, 1991, p. 517-560.
- [11] VALLET Cl., LE GUYADER H., MOULIN Th., Signes naturels, formes du vivant et relateurs arithmétiques, in *Semiotics Unfolding* (actes du 2e Cong. Int. de Sémiotique, Vienne, 1979), Tasso Borbé éd., Mouton Pub., Berlin, 1984, p. 389-396.
- [12] LE GUYADER H., FERRE M., Organogenesis at the shoot apex : an attempt at modelization, *Acta Biotheoretica*, Vol. 37, 1988, p. 37-86.

TENTATIVE DE FORMALISATION DE CERTAINS CONCEPTS DE LA THEORIE DE L'AUTONOMIE SELON P.VENDRYES

par Guy MAUGE

UNE RECHERCHE APPLIQUEE A L'ENTREPRISE

La théorie de l'autonomie de Pierre Vendryès (1), part de la physiologie générale de Claude Bernard et la porte au niveau théorique : " l'être vivant acquiert son autonomie en même temps qu'il accède à l'existence".

Elle a un caractère si fondamental qu'il serait vain de chercher à la formaliser dans toute son ampleur. Mais la vie elle-même revêt des formes très variées pour s'exprimer, qui laissent deviner son ampleur, sans pouvoir la révéler totalement.

De la même manière, on cherche seulement ici à représenter certains concepts essentiels de la théorie de l'autonomie, appliqués à l'entreprise, et plus particulièrement à la création d'une entreprise.

Ces concepts se sont déjà révélés fructueux dans de nombreux domaines : médecine, biologie, éducation, recherche, économie, histoire, physique, aménagement du territoire..., souvent grâce aux travaux de P.Vendryès lui-même.

Il avait cependant un intérêt particulier pour la recherche d'applications à l'entreprise (2) parce qu'il ressentait, peut-être encore mieux que d'autres, le rôle décisif de l'entreprise dans les sociétés modernes : c'est dans l'entreprise que les hommes élaborent les produits, biens et services, dont ils ont besoin pour assurer leur vie.

L'entreprise, à la recherche de son autonomie, était pour lui un ensemble d'hommes en action, eux-mêmes à la recherche de leur propre autonomie, avec toutes les contradictions qui peuvent se présenter entre l'autonomie de l'entreprise et celle de l'individu. On voit bien qu'après cette recherche appliquée à l'entreprise, on pourrait, plus tard, chercher à aborder les contradictions politiques entre l'intérêt individuel et l'intérêt collectif, entre les affaires privées et les affaires publiques.

Une autre raison, très concrète, pour s'intéresser plus particulièrement à l'entreprise, est que son efficacité dans la compétition mondiale exigerait que cette contradiction naturelle se transforme en convergence des efforts de tous les membres de l'entreprise.

La réflexion et la méthode proposées ont donc aussi pour ambition d'aider l'entreprise à mieux se comprendre pour tendre vers une telle convergence.

Une renaissance de l'Europe ne pourrait-elle favoriser le développement du nouveau type d'entreprise où chacun de ses membres, et d'abord de ses responsables, dispose d'une nouvelle ouverture, d'une nouvelle capacité "d'écoute des autres", selon la belle expression de Michel Crozier (3) ?

ACQUISITION D'AUTONOMIE ET CREATION D'ENTREPRISE

"En acquérant son autonomie, à partir de son environnement et par rapport à lui, l'homme acquiert la possibilité d'avoir avec lui des relations aléatoires".

En opposition avec la relation déterministe des systèmes physiques, la relation aléatoire, propre aux êtres vivants, comporte deux étapes : la première, réversible, offre diverses possibilités futures, seulement probables ou potentielles, la seconde, irréversible, offre une seule issue, qui surgit dans la réalité.

L'homme, et l'entreprise à un niveau supérieur, toujours à la recherche d'une meilleure autonomie, est, à chaque instant, intrinsèquement lié à son environnement. Contrairement aux systèmes physiques, les êtres vivants ne peuvent être isolés de l'environnement dans lequel ils se développent.

Le jumelage des réserves qu'ils constituent et des mécanismes de régulation qu'ils mettent en place et en oeuvre a un effet "contre aléatoire", qui leur permet de faire face aux aléas.

Lorsqu'on cherche à appliquer la théorie de l'autonomie à l'entreprise à la place de l'homme, il a été proposé (4-5) que l'autonomie métabolique de l'homme soit remplacée par l'autonomie structurelle de l'entreprise, caractérisée par ses communications. L'autonomie motrice de l'homme serait remplacée par l'autonomie d'action de l'entreprise caractérisée par sa valeur ajoutée. Enfin l'autonomie mentale de l'homme serait remplacée par l'autonomie de création de l'entreprise, caractérisée par son innovation.

La création et le développement de l'entreprise seraient liés à une acquisition et un accroissement d'autonomie; ceux-ci permettent à l'enfant d'accéder plus tard au grand avantage du libre arbitre, mais ils ne se font jamais sans efforts, et sont sans cesse remis en cause.

Ainsi, la création d'une nouvelle entreprise est toujours délicate, malgré les soutiens divers qu'elle reçoit : les aléas sont alors si nombreux, et l'autonomie encore si insuffisante, que beaucoup de nouvelles entreprises disparaissent avant la fin de leur première année.

Une nouvelle entreprise a été comparée à une jeune plante dans une forêt de grands arbres, un peu dénudés, envahie d'épais taillis; son ou ses créateurs doivent lui insuffler une grande énergie pour qu'elle trouve une place au soleil; le rôle des parents est toujours essentiel.

A sa naissance, grâce à ses parents, la nouvelle entreprise a une réserve de connaissances et d'argent, la réserve la plus fluide, bientôt un nom baptisé à la Chambre de Commerce, des locaux, du matériel; une équipe se constitue et se donne des règles pour jouer son rôle au sein du marché et de la société : sa structure, son autonomie structurelle se mettent en place, pour bientôt produire et innover.

Un tel schéma simplifié, où le rôle des hommes est toujours décisif, servira de base pour tenter de formaliser l'acquisition de l'autonomie.

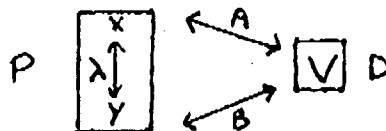
LES AUTRES ET LES RELATEURS ARITHMETIQUES

P. Vendryès (6) a toujours suivi avec beaucoup d'intérêt les travaux du groupe SYSTEMA (7-8), qui a créé et développé les relateurs arithmétiques, nouvel outil mathématique, pour formaliser les systèmes complexes naturels en physique, neurosciences, biologie, sciences humaines, économie... une approche parallèle à la sienne. Mais l'être vivant lui semblait relever seulement d'une conception globale comme la théorie de l'autonomie, alors que n'importe quel outil mathématique lui semblait trop réducteur. La recherche de formalisation entreprise sera réductrice à coup sûr, mais pourquoi à l'aide des relateurs arithmétiques ?

L'enfant, l'homme, l'entreprise, ne sont pas seuls face à leur environnement : les autres, auxquels pensent Michel Crozier, à l'intérieur comme à l'extérieur de l'entreprise, les collègues, les clients, les fournisseurs, les pouvoirs publics, les banques... jouent un rôle privilégié pour bâtir l'image que nous nous faisons de notre environnement et de nous mêmes.

La relation spéculaire de Jean-Louis Vullierme (9) exprime le mieux cette intervention inévitable des autres : "ma relation avec autrui est médiatisée par nos relations respectives avec les tiers"; au lieu "d'être portés à nous imiter... vers une impossible fusion ou une rivalité", la relation spéculaire résulte d'un jeu de miroir au niveau des psychés, qui aboutit à une relation stable. Et "ma différence avec autrui est préservée, lors même que nous coordonnons nos deux schèmes".

Dans la relation entre deux individus X et Y intervient la relation A de X avec l'environnement V et la relation B de Y avec V.



V est comparable, non pas à X ou Y, mais au produit AX ou BY; c'est donc une variable de synthèse. (Une transposition en physique éclaire ce point : si X représente une longueur et A une quantité de mouvement, V a la dimension d'une action; c'est la dimension de la constante de Planck h. En d'autres termes, ΔX et ΔA représentant des écarts quadratiques moyens, la relation d'Heisenberg stipule que le produit $\Delta X \Delta A$ est supérieur à une quantité de l'ordre de h, plus précisément $\geq h/4\pi$)

Le relateur arithmétique (R.A.) est un moyen d'associer étroitement à deux principes de base de la physique, le principe de relativité et le principe d'incertitude, un troisième principe à caractère systémique qui exprime "l'adaptation d'un système à son environnement" et introduit un aspect informationnel et décisionnel. Pour arriver à cette synthèse, il faut abandonner l'idée de décrire un phénomène au moyen d'équations et de valeurs initiales et prendre en compte ab initio trois données indissociables : un support qui est une expression quadratique dans le cas le plus simple, un ensemble potentiel de valeurs initiales pouvant être résumé par le second membre de cette expression, et un ensemble de processus qui donne le moyen de concrétiser certaines valeurs particulières de l'ensemble potentiel.

Pour des raisons évoquées dans la suite, paramètres et variables intervenant dans le support d'un relateur arithmétique doivent être des entiers.

Dans le cas d'une entreprise, l'expression quadratique peut avoir de nombreuses interprétations, par exemple exprimer un équilibre financier. Une des nouveautés provient de l'usage du quadratique, qui, si la forme est elliptique, introduit un aspect angulaire; c'est un moyen d'intégrer "à l'intérieur" des prix, des éléments d'appréciation qui habituellement ne sont pas pris en compte. Ce procédé est voisin de celui qui est utilisé en mécanique quantique. En pratique, il faut prendre soin de choisir des variables et des paramètres adéquats. Souvent leur dimension est celle de la racine carrée des grandeurs utilisées dans les modèles classiques.

Voici comment peut être choisi le support du relateur arithmétique. X, dans son référentiel, a le point de vue particulier P (autrement dit, P est le coefficient du terme carré X^2); et Y, dans le sien, a le point de vue P'. Admettons pour simplifier que P_0 , P' . Soit D un facteur caractérisant l'environnement (c'est le coefficient du terme en V^2). La relation de X avec Y est caractérisée par λ (qui est le coefficient du terme croisé en XY). DA représente la relation de X et de V (c'est le coefficient du terme croisé en XV); et DB celle de Y et de V. Le "principe de specularité" signifie que λ est déterminé, modulo P, par la relation de X avec V et par celle de Y avec V, compte tenu de D, ce qui s'écrit :

$$\lambda \equiv DAB \text{ (modulo } P) \quad (1)$$

Cl. Vallet (7) a établi cette relation par voie arithmétique. Puis M. Ferré (7) lui a donné une interprétation géométrique (ayant beaucoup d'applications en morphogénèse végétale (10)). (1) peut être obtenue par "effet miroir" à partir d'un réseau cristallographique; il suffit de transformer l'un des vecteurs de base de ce réseau par une réflexion parallèlement à l'axe d'environnement.

Le support du relateur arithmétique exprime simplement ^{le carré de} la longueur d'un vecteur de composantes X, Y, V dans le système de référence obtenu :

$$\{ P(X^2 + \varepsilon XY + Y^2) + D(AX + V)(BY + V) \} = \{ \text{---} \}.$$

EVOLUTION DU RELATEUR ET DE LA NOUVELLE ENTREPRISE

Le fonctionnement du relateur arithmétique privilégie les transformations de X et de Y vis à vis des appels à l'environnement relatifs à V. Dans le cas le plus simple, la structure des valeurs initiales introduit un exposant K. Ici intervient une propriété essentielle des relateurs arithmétiques démontrée par J.P. Luminet (8) : ce fonctionnement engendre une structure d'imbrication à K niveaux (pour K infiniment grand, elle peut d'ailleurs se manifester par un aspect fractal des configurations obtenues).

Ainsi, en raison de l'adaptation à l'environnement, les différents états d'une entreprise sont reflétés différemment à ces niveaux. Il y a plus que l'image habituelle car, réciproquement, les idées, les attitudes, les actions de chacun des membres de l'entreprise ont des conséquences au niveau de l'entreprise elle-même.

De même que les hommes, qui jouent le principal rôle dans l'entreprise, sont uniques et indivisibles, les variables et coefficients des relateurs arithmétiques ne peuvent être qu'entiers.

Ouvert, dynamique, fini, discontinu, informationnel, le fonctionnement des R.A va faire apparaître des lois propres à la structure considérée, par exemple, pour le choix d'un terrain où installer la nouvelle entreprise.

Les communications du créateur d'entreprise avec ses collaborateurs, ses clients, ses fournisseurs, ses banques..., et d'autre part, les communications de ses collaborateurs, se conjuguent pour constituer les communications de la nouvelle entreprise caractérisant son autonomie structurelle en cours d'acquisition.

L'ensemble des R.A obtenus fonctionnent en séquentiel, à partir de conditions initiales différentes, représentant l'état de l'environnement. Le R.A évolue sous l'effet de transformations internes et d'appels à l'environnement pour que les résultats restent toujours entiers.

Par la suite, de la même façon, à différents niveaux, en parallèle et en séquentiel, le même R.A permettra de représenter la valeur ajoutée caractérisant l'autonomie d'action de la nouvelle entreprise puis, l'innovation caractérisant son autonomie de création et leurs évolutions.

Dans l'ensemble des relateurs obtenus, certaines variables pourront restées constantes pendant une unité de temps commune, mais de nombreux coefficients de couplage et de voisinage devront être modifiés : des classes ou familles de R.A apparaîtront, comme de nouvelles lois propres à la nouvelle entreprise.

Enfin, toutes les variables utilisées ne sont pas nécessairement objectives, c'est à dire faisant l'objet d'observations communes, parce que, dans les R.A, le référentiel spatio-temporel n'est pas donné a priori mais émerge du fonctionnement. Certaines variables peuvent donc rester subjectives, comme la satisfaction et la créativité de chaque membre de l'entreprise, l'ambiance de travail...

Les R.A permettront donc de prendre en compte des potentialités très importantes, qu'ignorent les modèles économiques traditionnels, en même temps que les réalisations de l'entreprise : chiffre d'affaire, compte d'exploitation, résultats, bilans, financier,

social, d'environnement, de performances.... ratios....

A coup sur, beaucoup de travail reste à faire...

Cependant, cette première réflexion sur l'utilisation des R.A pour représenter la création d'une nouvelle entreprise, permet d'entrevoir, en même temps, une nouvelle voie pour étudier le fonctionnement de l'entreprise et rechercher ses structures les plus efficaces, et une première méthode pour représenter et pouvoir encore mieux mettre en oeuvre certains concepts de la théorie de l'autonomie de P.Vendryès, à la fois si fondamentale et si féconde.

REFERENCES

- 1 - VENDRYES.P - Vie et probabilité, préface de Louis de Broglie, A.Michel 1942
 - Vers la théorie de l'homme PUF 1973
 - L'autonomie du vivant, Maloine 1981
 - Les fondements de la théorie de l'autonomie, Cybernetica Vol 17, N° 1 1984
- 2 - VENDRYES.P - L'autonomie de l'entreprise industrielle
 Congrès de l'AF CET, Versailles Nov 1979 et
 Bulletin de l'ACADI Fev 1980
- 3 - CROZIER.M - L'entreprise à l'écoute, Interédition, 1989
- 4 - VENDRYES.P, MAUGE.G - L'entreprise et l'autonomie, un exemple : la gestion des stocks. EAMA ISMEA Paris, mars 1988
- 5 - MAUGE.G - L'homme et l'entreprise à la recherche de leur autonomie, Groupe de travail sur l'autonomie, AF CET, Paris Fév 1991
- 6 - VENDRYES.P - Qu'est-ce que l'autonomie ? Cahier Systéma N° 10, Mai 1983
 Pages 5 à 44 (Association SYSTEMA, 30, rue Croix Bosset F - 92310 Sèvres)
- 7 - VALLET.CI, NOTTALE.L, FERRE.M, MOULIN.Th, Stabilisation d'un relateur arithmétique, cahier Systéma N° 9, Nov 1982, pages 41 -117
- 8 - LUMINET.J.P, CHASTANG.J.P, MOULIN.Th, Structures des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, Cahier Systéma N° 10, Mai 1983, Pages 69 - 149
- 9 - VULLIERME.J.L - Le concept de système politique PUF 1989
- 10 - FERRE.M - Cytosquelette d'une cellule végétale : émergence d'un relateur arithmétique, XIII ème Congrès International de Cybernétique Namur 1992
- 11 - GOLINSKY.S , MOULIN.Th - Un apport possible des relateurs arithmétiques aux modèles connectionnistes, XIII ème Congrès International de Cybernétique, Namur 1992
- 12 - VALLET.CI - Préliminaires pour une nouvelle approche de certains comportements humains. XIII ème congrès International de Cybernétique, Namur Août 1992.

Les entiers p-adiques pourraient-ils appréhender certaines régulations en économie?

Frédéric BOCCARA*

Introduction : relier quantitatif et qualitatif

L'économie est le lieu de régulations [1], parfois brutales voire aveugles. Ne prendre de ces régulations que leurs résultats quantitatifs apparents sans s'intéresser aux processus sous-jacents, souvent liés à des changements qualitatifs (cf [2] et [3]), entraîne une intervention "en aveugle" : on ne maîtrise pas la portée systémique liée à l'articulation de rythmes (hommes, machines, nature) et de niveaux très différents (de 1 à 6.10^{12} F en France). Or les besoins de maîtriser ces régulations pour dégager des degrés de liberté sont terriblement impérieux. Pour cela, la nécessité de langages aidant à "**penser et dire le changement**" sous sa double face qualitative et quantitative se fait ressentir [4]. Outils conceptuel d'un de ces langages en devenir, les entiers p-adiques et la métrique associée complèteraient l'approche traditionnelle qui utilise la métrique réelle. Ils permettraient ainsi d'appréhender, de façon non dissociée, description qualitative (forme, structure, ...) et quantitative (grandeurs, taille,...), dépassant une vision en termes de causalités linéaires [5].

La régulation : utilisation à rebours d'un potentiel d'action

Changement de formes et de grandeurs se retrouvent au niveau élémentaire de la production et de l'échange de marchandises par une firme F. De façon schématique, une même marchandise M peut être décrite:

- par son *prix de production* (coût c en heures de travail directes et indirectes et un bénéfice b)
- par l'*usage* qu'on peut en faire, lié à ses propriétés plutôt qualitatives ("forme", par la suite)
- enfin, le marché joue un rôle d'objectivation relative, par la confrontation des points de vue interdépendants à un niveau d'ensemble (plusieurs firmes, acheteurs,...). Le "résultat" de cette confrontation se traduit par la valeur d'échange -en économie capitaliste- à laquelle correspond le *prix de marché*.

Soit p le prix de marché, la firme¹ pourra récupérer plus ou moins que $p=c+b$, le prix qu'elle souhaitait pratiquer. Vu sous l'angle de la firme, cet écart entre p et p' donne lieu à plusieurs types de régulations. Quand $p=p'$, elle peut, avec le chiffre d'affaires pQ qui en résulte², rémunérer ses salariés, renouveler ses équipements et assurer une croissance de sa capacité de production (salariés et équipements) correspondant à la

* Administrateur de l'Insee, 18 Bd A.Pinard 75014 Paris, France, communication présentée à titre personnel.

¹ Considérée comme un système qui transforme des revenus latents, sous forme de "capacités", en revenus absorbables par les hommes.

² Q est assimilé ici à V, le volume vendu, la quantité à qualité constante; soit, en comptabilité nationale, la valeur en francs constants.

croissance du marché, par lequel elle perçoit son environnement. En réponse à une baisse du prix de marché p' , pour des causes qu'on suppose inaccessibles, elle peut baisser le sien de manière à assurer la progression de son chiffre d'affaires par un surcroît de volume vendu. C'est une première régulation R1 : on peut dire de façon simplifiée qu'elle joue sur la *compétitivité-prix*. Mais de cette façon, elle peut mettre en cause la poursuite de l'opération qu'elle assure si, par exemple, sa rentabilité est atteinte. Une des possibilités de poursuite de cette opération va alors dépendre de sa capacité à réaliser un second mode de régulation R2 qui peut porter sur les procédés de fabrication. R2 peut porter aussi sur le type de produit et déboucher sur une régulation de type R3. Dans ces deux cas, R2 et R3, on peut dire qu'elle joue sur des éléments dits de *compétitivité "hors-prix"* (cf [6] et [7]).

On peut concevoir la régulation de type R2 -changement de procédé de fabrication- comme l'utilisation d'un potentiel d'action sur des dimensions qualitatives par un cheminement à rebours le long du processus de fabrication. Ce temps de la régulation est une sorte de "réflexion du système sur lui-même". *In fine*, le prix de vente p a certes changé comme dans le cas R1, mais, contrairement au cas R1, c'est parce que les coûts -grandeurs sous-jacentes- ont changé, suite à des transformations qualitatives. C'est la prise en compte de ce cheminement à rebours qui pose problème et que l'utilisation des entiers p -adiques faciliterait.

Les p -adiques adaptés aux processus, les réels aux coûts

Soit la production d'une automobile, les différentes phases d'assemblage peuvent être ordonnées suivant un arbre : chaque niveau i dans le sens vertical correspond à un stade d'assemblage de plus en plus intégré, jusqu'à la voiture assemblée. A chaque noeud de l'arbre se situe un type d'élément qui, au noeud supérieur, est assemblé avec ses voisins du même "faisceau". Dans le sens horizontal, par contre, au lieu d'avoir une simple succession d'étapes, on décrit le processus de fabrication, sous-jacent. Le sens vertical est adapté à une description par une métrique réelle : plus on monte, plus un élément est coûteux, et il contient le coût passé des éléments qui le composent (inégalité triangulaire

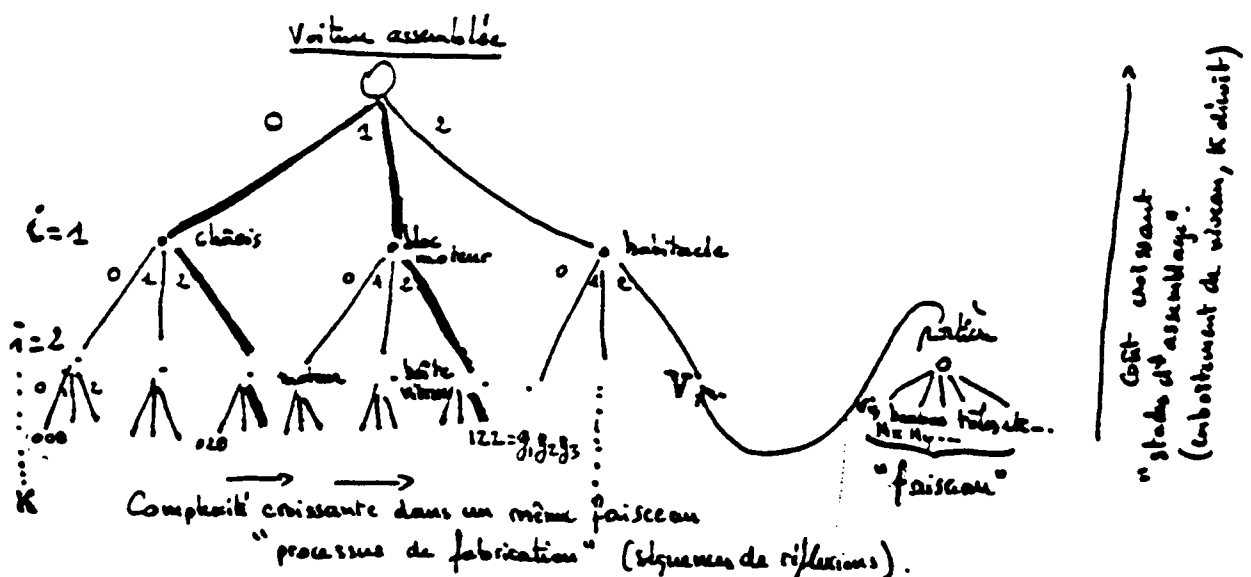


Figure 1 : Arbre de fabrication simplifié d'une automobile

classique). De façon complémentaire, le sens horizontal se prête à une description p-adique. En effet, le choix subjectif d'un processus de fabrication peut s'interpréter comme le choix d'un chemin dans le sens horizontal (à un niveau i donné) : un ordre de passage par des points extraits du faisceau "total" idéal (comprenant toutes les étapes possibles, infini³ On peut formaliser ceci par l'extraction d'un sous-arbre que M.R.Schroeder ([8] p 325-326) apparente d'ailleurs à la construction d'un ensemble de Cantor, dans le cas de l'extraction régulière d'un arbre binaire dans un arbre ternaire. Le passage du niveau i au niveau $i-1$ (cf planche 1) peut être interprété comme une diminution de la valuation d'un entier p-adique : en attachant à la séquence $g_1 g_2 \dots g_i$ l'entier p-adique

$g_1 p^{K-1} + g_2 p^{K-2} + \dots + g_i p^{K-i} = p^{K-i} \{ \}$ où $\{ \}$ est une unité de l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (cf[9]). Alors les éléments voisins sont repérés par le même cheminement vertical en commençant par le bas de l'arbre : ils appartiennent au même sous-faisceau, puis au même faisceau etc... Il resterait à établir une généralisation dans le cas d'une extraction irrégulière. Dans le cas de l'automobile, on distinguerait ainsi deux voitures de même coût (confondues suivant une métrique réelle) mais différentes ou construites différemment. Ainsi, lorsque jouerait le temps de la régulation sur les coûts de revient, les réactions des deux firmes productrices pourraient être éloignées, ce que permet de prendre en compte la métrique p-adique.

Relateurs arithmétiques et p-adiques : ouverture

Dans la mesure où les entiers p-adiques sont définis par des imbrications de congruences [9], ils permettent de manipuler les **compatibilités** (congruences) et les **imbrications** de niveau. Le formalisme des Relateurs Arithmétiques (RA) est un cadre adapté à ces notions (cf [10] et [11]): on a pu montrer, dans un cas schématique [12], que le facteur PK intervient comme un facteur de **normalisation monétaire** dans les processus (H_x et H_y) de la firme F . C'est à dire qu'il réintroduit localement le niveau d'ensemble.

Dans le cadre des relateurs arithmétiques, les p-adiques, interviennent d'abord pour décrire les processus. Si on reprend l'arbre de la figure 1, il faut disposer de K symboles g_i pour décrire les rameaux par des entiers p-adiques. Des travaux préliminaires [12] ont montré que les séquences de réflexions d'un RA devraient correspondre au processus de fabrication, lu ici dans le sens horizontal sur le même faisceau. Pour un relateur de classe (0) à trois variables (X , Y et V), dont une d'environnement (V), on peut construire une correspondance entre séquences réduites $\$$ et entiers p-adiques : on utilise la propriété selon laquelle ou bien $\$$ comprend $p=g-1$ symboles (cf [13] et [4] p 525-528), où g est l'ordre du groupe engendré par le BCR sous-jacent, ou bien $\$$ comporte en plus une réflexion V , mais équivaut, lue à rebours, à une séquence $\$$ ne comportant pas de V . On effectuerait, dans ce dernier cas, l'équivalent d'un changement de signe sur le nombre p-adique obtenu à partir de $\$$. **V peut être interprétée comme une simplification des processus de fabrication par l'utilisation d'un sous-ensemble déjà assemblé apporté de l'extérieur, remplaçant une suite d'opérations que F n'a plus besoin d'effectuer (sous-traitance, nouvelle machine effectuant plusieurs opérations,...).** Dans la mesure où le fonctionnement d'un RA est *ouvert* on enrichit la description par les seuls p-adiques en introduisant des possibilités "d'invention", à l'intérieur de certaines contraintes liées aux congruences exceptionnelles

³ Il y a ici un problème très profond lié à "l'invention". Le cadre du formalisme des relateurs arithmétiques permet de prendre en compte cet aspect crucial de façon beaucoup plus satisfaisante (cf plus loin).

susceptibles d'être rencontrées. La topologie que les p-adiques introduisent est adaptée à un type de description non classique: la suite (x_i) de terme général $x_i = \dots \underbrace{12\dots 20}_{i} \dots \underbrace{0}_{K-i}$ ne

converge pas vers $x = \dots \underbrace{20\dots 0}_K$, alors que la suite de terme général $x'_i = \dots \underbrace{10\dots 02}_{K-i} \dots \underbrace{2}_i$

converge vers $x' = \dots 12\dots 2$. Cela signifie que, de ce point de vue, ce sont les i dernières opérations de F qui comptent. On remonte la séquence à rebours, ce qui revient à se situer dans le temps de la régulation, qui se produit ici par un feedback affectant d'abord les *dernières* opérations et remontant de proche en proche. Si on se plaçait du point de vue de la vente d'une automobile, et non plus de sa fabrication, la dernière opération pourrait représenter l'essai du véhicule par le client, de coût négligé (topologie réelle), mais déterminante pour l'achat.

Information globale et action changeant l'efficacité

Une seconde voie d'utilisation des nombres p-adiques réside dans la description d'une **information globale sur le système** (cf [14]) Il est possible de repérer certaines possibilités d'action à partir de la connaissance de la variable V . Pour cela, il faut effectuer un recalage du RA [15]. Dans le cas du recalage défini par le "référentiel propre" (e_v, L_o, L_i) , le support du relateur s'écrit :

$$Q = L(BX + AY)^2 + \left(L - \frac{P}{4}\right)(AX - BY)^2 + \frac{P}{4}(2V + AX + BY)^2 \quad \text{avec } P = L(A^2 + B^2), L \text{ pouvant être fractionnaire}$$

on pose $\eta = BX + AY$, $\nu = 2V + AX + BY$

Si $A=B$, connaissant V et ν , il est possible de calculer $X+Y$, ce qui correspond à un "résultat de mesure" sur le système. La valuation de la quantité $(A^2 + B^2)Q - P\eta$ fournit h tel que $(rVi)^h$ laisse cette quantité invariante⁴, de cette façon sont obtenues les séquences réduites [16]. Ainsi, comme la distance p-adique est construite sur les valuations, on peut constituer des voisinages de "comportement" entre différents relateurs, dont les valeurs des variables peuvent être par ailleurs de niveaux très éloignés. C'est de cette manière qu'on associe un RA et son pilote, ce dernier fournissant l'alternance des réflexions (les séquences). **Dans la métrique p-adique, les systèmes voisinent selon leur forme, déterminée par les opérations dont ils sont issus et non selon leur grandeur.** Dans un cas particulier de relateur dégénéré, il semblerait que la valuation de Q , puisse déterminer le type cyclique ou non du relateur (hypothèse dans [14]). Une action sur la valuation changerait alors l'efficacité du système.

En définitive, on est amené à **Interpréter un même nombre Z de deux façons**. Suivant une optique de métrique réelle, on tient compte des termes de degré le plus élevé, suivant une optique p-adique, on se donne P , lié aux propriétés qualitatives de "l'objet" représenté par Z (notamment ses "compatibilités", dans le cas des RA) et ce sont les termes de plus bas degré en P qui importent le plus. Dans un premier cas, on s'intéresse à la taille, dans le second, c'est la façon dont a été constitué Z -sa forme ou sa structure issue de certains processus- et l'utilisation qu'on peut en faire qui importe, avec tout un choix de subjectivités différentes concrétisé par le choix de différents P possibles. En particulier, dans le cas du relateur biquadratique [17], qui fonctionne en X et Y ou en A et B si certaines conditions sont vérifiées, on peut modifier $P = L(A^2 + B^2)$. Ce point introduit une ouverture fondamentale du formalisme. On est en outre amené à

⁴ i est la réflexion Hx , qui laisse V et Y invariants, r est la réflexion Hy qui laisse V et X invariants [16].

point introduit une ouverture fondamentale du formalisme. On est en outre amené à apparier, en suivant une métrique p-adique, des objets qui pouvaient être très éloignés en taille. Enfin l'intérêt de cette double approche réside dans le fait qu'on ne sépare pas les différents aspects parce qu'il s'agit d'un même nombre Z, les transformations de taille pouvant rejaillir sur la "forme", au sens où on l'entend ici (par l'intermédiaire d'un changement de la décomposition du nombre Z).

Conclusion

Les cas évoqués ici restent relativement schématiques. En particulier, l'introduction d'une dissymétrie par la prise en compte de deux environnements -nature et société humaine- paraît nécessaire pour décrire les phénomènes économiques. Cela permettrait notamment d'envisager une dynamique propre de l'environnement (régénération des hommes et de la nature) qui devrait être influencée par le fonctionnement du système "économique" (ses "rejets"), influence qui devrait entraîner en retour des modifications dans les conditions de déroulement des opérations. C'est cette modification des conditions qui est insuffisamment prise en compte dans les modèles économétriques classiques, on a supposé ici l'une d'entre elles (p', le prix du marché) modifiée de façon "exogène". On a néanmoins indiqué ici une voie permettant de relier croissance et forme. Or c'est bien la croissance des "rejet" (pollutions, mais aussi revenus,...) qui appelle, à partir d'un certain seuil de cumul, des changements de structure ("forme"). Sous l'effet de son *fonctionnement* apparemment répétitif, le système change et se *développe* lui-même pour déboucher sur de véritables *crises* récurrentes dans lesquelles s'expriment des cercles vicieux nécessitant de véritables "**Inventions systémiques**" pour en sortir. Le temps de la crise serait celui où jouent les régulations entre taille et recherche de forme, au sens large du terme.

- [1] P.Boccarda, Théories de la régulation et suraccumulation-dévalorisation du capital, *Issues* n°32-33-34, Cahiers de recherche de la revue Economie et Politique, 1988.
- [2] R.Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, 1972, W.A.Benjamin, Reading, Massachussets.
- [3] H.Laborit, *L'inhibition de l'action*, Masson, 2è Edition 1986.
- [4] Th.Moulin, Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques, *Revue Internationale de Systémique*, Vol.5, n°5, 1991, p 517 à 560.
- [5] B.Paulré, *La causalité en économie*, Presses Universitaires de Lyon, Lyon, 1985.
- [6] P.Krugman, *Re-thinking International Trade*, MIT Press.
- [7] Insee, *Innovation technologique, croissance et compétitivité*, ouvrage à paraître.
- [8] Schroeder,
- [9] Z.I.Borevitch, I.R.Chafarevitch, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris 1967.
- [10] G.Maugé, Tentative de formalisation de certains concepts de l'autonomie selon P.Vendryès, *13è congrès international de systémique*, Namur, 1992.
- [11] Th.Moulin, Le relateur arithmétique : un moyen d'associer localement des notions d'espace, de temps et de niveaux d'imbrication dans les systèmes naturels, in *Perspectives Systémiques*, Colloque de Cérisy 1986, B.Paulré éd., Editions "l'interdisciplinaire", 480, rue de la Glante, 69760 Limonest, 1989, p 89-104.
- [12] F.Boccarda, Une tentative d'utilisation des relateurs arithmétiques en économie pour formaliser les crises de régulation aveugle par suraccumulation-dévalorisation, *Mémoire de stage Ensaé-Ensta*, 1989.
- [13] L.Nottale, Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *revue du Cethedec*, n°67, p35 - 82, Paris 1981.
- [14] F.Chauvet, Th.Moulin, Vers une esquisse de langage systémique fondé sur des classes de fonctionnement, des types de singularités et des nombres d'information virtuelle, *Congrès européen de systémique CES1*, Lausanne, 3 - 6 octobre 1989, Afcet éd. p525-534.
- [15] M.Ferré, Le théorème de l'effet-miroir, *Cahiers Systema n°9*, Association systema, 30, rue Croix-Bosset, 92310 Sèvres, France, p87-109, 1989.
- [16] JP Luminet, J.Chaetang, Th Moulin, Structure de séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *Cahiers Systema n°10*, 1983, p69-149.
- [17] Th.Moulin, Présentation sommaire des relateurs arithmétiques, *Cahiers Systema n°12*, p25-113, 1986.

BOUCLAGES STRUCTURELS DANS DES REFERENTIELS "ESPACES-TEMPS-IMBRICATIONS"

par Lionel SAINT-PAUL et Thiébaud MOULIN

INTRODUCTION

La modélisation des systèmes vivants pose des problèmes qui, parfois, sont difficilement résolus au moyen d'approches classiques. B. Paulré met en évidence l'un d'eux dans son étude de la «Causalité en Economie», en introduisant «l'idée de structure causale»; il rappelle [1, p. 429] que la causalité «demeure une opération par laquelle un observateur attribue une capacité d'action à des objets réels et ne constitue pas une qualité intrinsèque aux objets ainsi désignés». Pour prendre en compte les bouclages structurels associés à cette structure causale, il faudrait utiliser de nouveaux outils et, peut-être, abandonner les référentiels spatio-temporels classiques au profit d'autres référentiels intégrant des aspects structurels.

A l'avis de J.-L. Vullierme, un bon nombre de phénomènes socio-économiques relève du «principe de spécularité» [2, p. 232]. Ce principe s'applique notamment à l'étude des fluctuations boursières [3] qui présentent un caractère fractal prononcé; ces fluctuations sont la manifestation d'une «structure causale» où interviennent fondamentalement des imbrications de niveaux. Le relateur arithmétique (R.A.), qui est un moyen de prendre en compte ce principe (cf. communication de G. Maugé), engendre effectivement des configurations fractales. Il semble donc être un outil adéquat pour l'étude des bouclages structurels en socio-économie.

ADAPTATION A L'ENVIRONNEMENT ET IMBRICATION DE NIVEAUX

La notion de "système générique". Un relateur arithmétique est défini (de façon incomplète) par trois données indissociables : son *support* qui est une expression quadratique ou multiquadratique ne faisant intervenir que des coefficients et des variables entières; un *état initial* (ou *plusieurs états initiaux*) qui détermine le second membre du support (ou qui sont compatibles avec lui); enfin, un *ensemble de transformations* appelées réflexions, qui laissent le support inchangé. La condition d'adaptation à l'environnement

-
- Lionel SAINT-PAUL, Consultor, 2 bis rue Turgot, F-78100 SAINT-GERMAIN-EN-LAYE France).
 - Thiébaud MOULIN, Groupe SYSTEMA, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, F-75015 PARIS (France).

particularise certains coefficients et privilégie les transformations internes vis-à-vis des appels à l'environnement.

Un R.A. définit donc un ensemble potentiel d'états, à composantes entières, qui sont solutions de l'équation diophantienne définie par le support et son second membre. On peut prélever dans cet ensemble un certain nombre d'états vérifiant des contraintes de voisinage spatial et constituant une description initiale \mathcal{D}_0 (chacun d'eux peut préciser, par exemple, la position spatiale des différents employés d'une entreprise au temps t_0); puis, après un certain nombre $\Delta\tau$ d'étapes de fonctionnement du R.A., est déterminée au temps $t=t_0+\Delta t$ (avec Δt fonction de $\Delta\tau$) une nouvelle configuration d'états $\mathcal{D}(t)$ vérifiant les contraintes spatiales imposées ($\mathcal{D}(t)$ représente, par exemple, la nouvelle répartition des employés au temps t). C'est la démarche classique, transposée dans le cas d'un formalisme arithmétique.

On peut aussi partir d'un seul état initial (ou d'un nombre réduit d'états initiaux) et faire fonctionner séquentiellement le R.A. C'est un moyen de résoudre partiellement l'équation diophantienne de base. Pour être sûr de retrouver ainsi tous les états initiaux constituant \mathcal{D}_0 , il suffit de choisir a priori ces états dans la description séquentielle; dans cette hypothèse, les descriptions suivantes $\mathcal{D}(t)$ sont également retrouvées. Ce mode de description, qui ne respecte pas les voisinages spatio-temporels classiques, fournit une description séquentielle d'une population de systèmes évoluant en parallèle : nous disons que c'est un *système générique*. [4, p. 478-479] (l'état initial particulier choisi peut représenter la position d'un stagiaire qui, au cours de son stage, prend temporairement la place de chacun des employés de l'usine)*.

Imbrications de niveaux. Si certains paramètres du support (par exemple D/P dans le cas du R.A. utilisé en [5]) sont suffisamment petits, il est possible de "linéariser" le R.A. ou de le "développer à l'ordre k ". Les états se groupent en amas, eux-mêmes constitués de sous-amas, et ainsi de suite. Chaque sous-amas peut constituer une classe d'équivalence.

Prenons le cas d'un R.A. à une seule variable d'environnement V , qui démarre à partir d'un seul état initial et auquel s'applique le théorème d'imbrication de J.-P. Luminet [6]. Le fonctionnement est cyclique; le nombre d'états dans le cycle croît exponentiellement avec l'exposant K introduit dans les valeurs initiales canoniques tandis que le nombre de sous-amas est une fonction puissance. Pour K de l'ordre de quelques dizaines, il y a un grand nombre d'états dans chaque sous-amas. Il est donc possible de constituer de nombreuses descriptions initiales \mathcal{D}_0 , qui paraissent équivalentes au temps t_0 et qui peuvent avoir des comportements très différents au temps t (cette propriété est à la base d'une possibilité de liaison avec la dynamique chaotique). Ce théorème introduit plusieurs propriétés remarquables : en particulier, si les composantes entières X_μ, V de chaque état sont remplacées par les nombres rationnels $X_\mu/P^K, V/P^K$, tous les états "rationalisés" du cycle \mathcal{L}_K se retrouvent dans le cycle \mathcal{L}_{K+1} . Il existe une hiérarchisation sous-jacente; elle est déterminée par la valeur minimale $k \leq K$ pour laquelle l'état rationalisé se manifeste (ce point, abordé dans la communication de F. Boccara, conduit à l'utilisation d'entiers p -adiques).

S'il y a plusieurs variables d'environnement V_α , le fonctionnement du R.A. (c'est-à-dire la position des appels à l'environnement dans la suite des réflexions principales) est généralement imprévisible pour des K_α élevés car

* Cet exemple a été développé en collaboration avec G. Maugé.

le nombre de conditons de verrouillage dépend des K_α alors qu'il est généralement indépendant de K s'il n'y a qu'une seule variable d'environnement. Toutefois, si tous les K_α sont égaux, le fonctionnement du R.A. peut être identique à celui d'un R.A. \mathcal{R}_1 à une seule variable d'environnement V , vérifiant le théorème de Luminet.

PROBLEME DU BOUCLAGE STRUCTUREL

Référentiels "espaces-temps-imbrications". Un R.A. générique qui se comporte comme \mathcal{R}_1 fournit une description globale dans un référentiel non réductible à l'espace-temps habituel. En effet, cette description prend en compte non seulement le passé mais également un certain "futur idéalisé", qui provient de la structure d'imbrication rigide associée à \mathcal{R}_1 . Pour saisir ce point, il faut faire appel à la notion de séquence réduite introduite par L. Nottale [7] (cf. communication de S. Golinsky). Ce "futur" ne se manifeste pas si un observateur-acteur cherche à exploiter arbitrairement les prévisions, car il déforme alors la structure d'imbrication (les différents K_α n'étant plus égaux, le fonctionnement du R.A. ne peut plus être identique à celui de \mathcal{R}_1). Une action dans un référentiel "espace-temps-imbrications" ne relève donc pas du mode opératoire adopté habituellement en physique. Dans le domaine social, et plus généralement dans toutes les sciences du vivant, la notion d'observateur devrait être remplacée par celle "d'observateur-acteur pacifique" (il est "pacifique" s'il accorde ses rythmes à ceux du système). Ce point de vue rejoint celui exprimé par M. Mendès-France [8]. En pratique, les variables réelles sont insuffisantes; on doit utiliser un autre type de nombres afin de décrire localement une imbrication de congruences arithmétiques (cf. communication de F. Boccara); il s'agit des entiers p -adiques déjà mentionnés et de leurs extensions algébriques.

Par ailleurs, une description $\mathcal{D}(t)$ peut généralement être présentée au moyen d'un ensemble hiérarchisé de descriptions $\mathcal{D}_N(t)$, N repérant un niveau d'organisation. La structure d'imbrication d'un système se manifeste donc de deux façons différentes au moins : par l'intermédiaire des niveaux $k \leq K$ dans un R.A. générique fonctionnant séquentiellement en τ et par l'enchaînement de niveaux d'organisation à l'instant t : ..., $\mathcal{D}_{N-1}(t)$, $\mathcal{D}_N(t)$, $\mathcal{D}_{N+1}(t)$,... A notre avis, un système reste vivant tant que ces deux modes de description sont compatibles. Dans le cas d'un organisme pluricellulaire, cette compatibilité peut être réalisée si le système générique est présent sous une forme directement exploitable à l'intérieur de la plupart des cellules qui le constituent : c'est le rôle des rubans d'ADN, auquel correspond dans le domaine socio-économique celui des documents définissant la structure, les relations et le fonctionnement d'un organisme (statuts, contrats, règlements,...). Ce point de vue n'est pas classique. Il faut donc expliciter ce qui réalise les bouclages structurels. Dans la suite, nous mentionnons seulement quelques problèmes liés à la représentation d'un changement de niveau d'organisation.

EXPRESSION D'UN CHANGEMENT DE NIVEAU

Niveaux de description et niveaux d'organisation. Une définition d'un niveau d'organisation est proposée en [9]. En bref, on distingue d'abord plusieurs types de niveaux de description : les niveaux de *structuration* auxquels émergent les états communs à deux R.A. conjugués et recalés (c'est un prolongement de la notion «d'observateur-acteur pacifique» [8]), les niveaux de *fonctionnement* qui résultent de la compatibilité "locale" des descriptions séquentielles et parallèles, les niveaux de *synthèse*. Un niveau d'organisation émerge s'il y a cohérence [10, p. 303-316] des trois types de

niveaux de description. En général, cette cohérence est accompagnée d'optimisations [10, p. 25-45].

On peut essayer de réaliser un changement de niveau de synthèse en considérant les variables d'environnement du niveau N (ou des combinaisons linéaires de ces variables) comme des variables principales du niveau N+1 (*). Si cette procédure est convenable, elle doit résumer non seulement l'anatomie du système au niveau N, mais aussi la dynamique et les processus de commande,... Or, il existe un outil mathématique classique présentant des propriétés analogues : c'est la théorie des groupes de Lie (et ses extensions) qui est fondamentale dans de nombreuses branches de la physique et en théorie de la commande (cf. travaux de M. Fliess [12] sur la «réalisation locale» des systèmes non linéaires). Elle fait intervenir, à un *premier niveau* de synthèse, une forme invariante (qui est simplement la forme quadratique $x_1^2 + \dots + x_n^2$ pour le groupe SO(n) des rotations dans l'espace euclidien réel n-dimensionnel) et, à un *deuxième niveau* de synthèse, une forme quadratique appelée forme de Killing. Le système de racines associé à cette forme, qui présente un caractère très abstrait, possède une structure de type cristallographique qui, elle, est très concrète. Cette propriété surprenante préfigure un bouclage structurel fondamental et incite à approfondir les liaisons entre relateurs arithmétiques et structures de Lie.

Première liaison avec les structures de Lie. Ph. Riot [13] et Fr. Chauvet [14] ont établi une première liaison avec les structures de Lie ; elle concerne les relateurs cycliques de base (BCR) et des "systèmes de racines". Les relateurs arithmétiques stabilisés, qui comportent une ou plusieurs variables d'environnement, fournissent un autre niveau de synthèse. En bref, un R.A. est considéré comme un couplage particulier de deux systèmes de racines. L'un est défini par le BCR sous-jacent; l'autre, par le BCR d'environnement. Si le R.A. est "linéarisé" au voisinage du BCR sous-jacent [14], sous certaines réserves on peut associer un système de poids [9, p. 534-537] aux amas engendrés. La linéarisation est étudiée dans un module sur \mathbb{Z} à base polynomiale. Dans le cas étudié par L. Nottale [13], il y a 3+1 dimensions alors que le R.A. comporte seulement 2 variables principales et une variable d'environnement (BCR sous-jacent 1). La quatrième dimension correspond à une variable de "spin" (cf. communication de S. Golinsky). Le produit des matrices définies en [7, p. 65] traduit une multiplication de quaternions (à condition de faire intervenir un opérateur nilpotent convenable). La norme de ces quaternions est une forme quadratique qui définit un *troisième niveau* de synthèse par rapport à la forme de Killing (niveau 2) et à la forme invariante associée au groupe de Lie (niveau 1).

Si le BCR sous-jacent appartient aux familles (V), (Z) ou (M), le nombre de dimensions est plus élevé (7+1 dans le cas le plus complexe). Il faudra probablement faire appel à l'algèbre de Clifford de l'espace euclidien à 3 dimensions (qui est une algèbre réelle de dimension 8, isomorphe à l'algèbre des quaternions complexes, cf. R. Deheuvels, [15, p. 313-315]).

Deuxième liaison avec les structures de Lie. Le passage du deuxième au troisième niveau présente une certaine analogie avec la procédure associant une algèbre de Lie à un groupe de Lie (transformations proches de l'identité, utilisation de commutateurs, base vectorielle,...). Une autre liaison avec les structures de Lie est donc envisageable. Si le BCR limite impliqué dans la "linéarisation" ne produit pas de dégénérescence, la forme invariante du premier niveau est le support du R.A. à n variables (principales et

* Le changement de niveau étudié par L. Nottale [11] pourrait être interprété comme un passage du niveau N au niveau N+2.

d'environnement). Il semble que la "linéarisation" du R.A. puisse fournir une partie de l'algèbre de Lie de $SO(n)$; de délicats problèmes de connexité sont posés. Si le BCR limite est le BCR sous-jacent, les résultats sont beaucoup plus riches : il est possible que la forme de Killing émerge partiellement au niveau du BCR d'environnement. Certains R.A. décriraient un changement de niveau analogue au passage «groupe de Lie \rightarrow système de racines» et d'autres, au passage «système de racines \rightarrow système générique de poids». Pour les enchaîner, il suffirait de faire jouer au BCR d'environnement du premier R.A. le rôle du BCR sous-jacent du deuxième. Une possibilité de bouclage structurel en résulterait. D'autres bouclages couplent des espaces vectoriels issus de "linéarisations" à des R.A. ayant un support dégénéré [16].

CONCLUSION

Les bouclages structurels que suggère l'étude de certains phénomènes socio-économiques paraissent associés à des référentiels "espace-temps-imbrications" qui diffèrent profondément de ceux utilisés classiquement en physique. De nouveaux types de nombres, prenant en compte "localement" des imbrications de niveaux, devraient être utilisés. Il faudrait également trouver de nouveaux protocoles expérimentaux. Les relateurs arithmétiques, qui sont associés aux structures de Lie de deux façons différentes, semblent être un outil adéquat pour l'étude de ces bouclages.

REFERENCES

- [1] PAULRE B., *La Causalité en Economie*, Presses Universitaires de Lyon, 1985.
- [2] VULLIERME, J.-L., *Le concept de système politique*, P.U.F., Paris, 1989.
- [3] GLAUD P., Elliott... et le reste in *Les cahiers du Laboratoire d'Analyses Financières*, n° 161, 24 février 1992.
- [4] MOULIN Th., Le relateurs arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques, *Revue Internationale de Systémique*, Vol. 3, n° 4, 1989, p. 459-483.
- [5] GOLINSKY S., MOULIN Th., Un apport possible des relateurs arithmétiques aux modèles connexionnistes, in *13e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*.
- [6] LUMINET J.-P., Relateurs arithmétiques stabilisés : imbrication des cycles et méthode de classification, *Revue du Cethedec*, n°62, 1980, p. 55-95.
- [7] NOTTALE L., Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *Revue du Cethedec*, n°67, 1981, p. 35-82.
- [8] MENDES-FRANCE M., Compte rendu de lecture : Biologie Théorique, Solignac 1987, *Pour la Science*, n° 154, août 1990, p. 102.
- [9] MOULIN Th., Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques, *Revue Int. de Systémique*, Vol. 5, n° 5, 1991, p. 517-560.
- [10] LE GALLOU F., BOUCHON-MEUNIER B., Systémique, Théorie et applications, (avec la collaboration de E. Andreevsky, P. Auger, E. Bernard-Weil, G. Chauvet, S. Frontier, J. Fuexer, J.-L. Le Moigne, Th. Moulin, B. Paulré, D. Pichod-Viale, J.-F. Quilici-Pacaud, L. Saint-Paul, R. Vallée, J.-L. Vullierme), Editions Lavoisier, Paris, 1992, 341 pages.
- [11] NOTTALE L., Le relateur dual, *Revue du Cethedec*, n° 70, 1982, p. 43-92.
- [12] FLIESS M., Réalisation locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives, *Invent. Math.*, 71, 1983, p. 527-537.
- [13] RIOT Ph., Relateur arithmétique et théorie des catastrophes, in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1199-1207.
- [14] CHAUVET, Fr., Quelques applications de modèles associant algèbres de Lie et cheminements pseudo-aléatoires, in *12e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, p. 1230-1237.
- [15] DEHEVELS R., *Formes quadratiques et groupes classiques*, P.U.F., Paris, 1981.
- [16] SAINT-PAUL L., Un concept nouveau applicable en systémique : l'élément structuré de déplacement, *Congrès Européen de Systémique CES1*, AFCET éd., 1989, p. 515-524.

CONCLUSION

«SYSTEMES NATURELS : NOUVEAUX FORMALISMES ET VERIFICATIONS EXPERIMENTALES»

par Thiébaud MOULIN *

A la fin d'un symposium, il est habituel de dire que les exposés et les discussions ont fait émerger des problèmes très fondamentaux. Mais il est beaucoup plus rare de constater une clarification de ces problèmes et une convergence de solutions embryonnaires.

1) D'après J. Benveniste, plusieurs types d'expérience mettent en évidence, de façon parfaitement reproductible, l'effet de très hautes dilutions sur des systèmes vivants (au niveau d'une cellule et au niveau d'un organe isolé). Les précautions méthodologiques les plus rigoureuses sont prises. Mais, n'étant pas biologiste et sachant que le pollen en suspension dans l'air peut agir sur certains individus allergiques, j'ai demandé naïvement au cours d'un entretien privé si certaines émanations ou certaines pollutions ne pourraient pas être des facteurs perturbant les expériences. Si effectivement de telles sources d'erreur ont toutes été éliminées ou neutralisées -ce que J. Benveniste garantit-, il faut prendre conscience de la révolution scientifique qu'entraînent ces expériences.

2) Le test développé par J.-P. Garel, qui est bien reproductible, montre également qu'une reformulation profonde des théories physiques classiques est nécessaire. Certes, il est très utile de pouvoir décrire les arborescences dendritiques et leurs modifications au moyen de modèles mathématiques simples; mais cela ne suffit pas. Il faudra comprendre au plan fondamental pourquoi des traitements chimiques ou physiques non détectables par les méthodes classiques imprègnent de façon durable la structure organisationnelle de certains milieux.

3) Toutes les tentatives d'explication envisagées font appel à des structures d'imbrication. D. Dubois fait remarquer que ses modèles de réseaux neuronaux à structure fractale mettent en évidence des effets de phase qui pourraient être interprétés en physique quantique. Un résultat analogue est obtenu au moyen de relateurs arithmétiques "linéarisés", engendrant des descriptions "objectives". De ce point de vue, la structure organisationnelle que révèlent les expériences de J. Benveniste (et al.) ou celles de J.-P. Garel (et al.) ne paraît pas descriptible dans le cadre des concepts classiques d'espace et de

* Thiébaud MOULIN, Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 32 boulevard Victor, F-75015 PARIS (France).

temps. Très probablement, il faudra faire appel à des référentiels «espaces-temps-imbrications», ce qui impliquera de nouveaux protocoles expérimentaux.

4) Il est important de constater que les modèles proposés par des spécialistes de mesures électro-encéphalographiques, tels que P. Etevenon qui utilise des imbrications d'hypercubes, rejoignent les modèles de type connexionniste à structure fractale, développés notamment par D. Dubois en Belgique et par G. Langlet en France. La tentative de Cl. Vallet rejoint, elle aussi, celles de ces informaticiens puisque la modélisation du sommeil paradoxal au moyen de relateurs arithmétiques fait intervenir fondamentalement des niveaux d'imbrication. En bref, Cl. Vallet suppose que des régénérations énergétiques réalisées au cours du sommeil profond autorisent des cheminements inconscients dans des référentiels "espaces-temps-imbrications". Ces cheminements provoqueraient des régénérations informationnelles et seraient privilégiés progressivement par l'activité cérébrale consciente.

5) On peut se demander si les ethnologues et les spécialistes des sciences humaines ont décelé la manifestation d'un "champ organisateur sous-jacent" qui n'est pas décrit convenablement par les modèles classiques issus de la physique. A mon avis, la réponse est positive. Ce "champ" pourrait être associé à l'un des pôles de la structure bipolaire observée par Madame M. Cl. Dupré (son exposé sur les Tsayi a passionné l'auditoire). Ce "champ" serait également pris en compte dans l'approche socio-économique de F. Boccara, fondée sur l'usage conjoint de nombres réels et de nombres p-adiques. Dans le cas de la structure bipolaire précédente, ces nombres p-adiques (et leurs extensions) fourniraient des "développements mathématiques à rebours" décrivant des structures informationnelles montantes, celles qui privilégient les actions les plus banales et donnent un «pouvoir sur les gens», alors que les nombres réels seraient associés à des structures informationnelles descendantes, celles qui donnent un «pouvoir sur les choses».

6) Ces préoccupations semblent rejoindre celles de G. Maugé qui attache beaucoup d'importance au comportement contre-aléatoire des systèmes autonomes (selon la théorie de P. Vendryès). Elles se manifestent sous des formes qui sont variées mais qui paraissent convergentes. En ce qui me concerne, elles conduisent aux bouclages structurels envisagés dans la dernière communication. L'explicitation de ces bouclages devrait aboutir à une physique du vivant qui influencerait favorablement le comportement des humains car elle leur rappellerait que le cerveau de l'homme n'est pas au centre du monde... Voilà pourquoi, malgré toutes les difficultés du présent, il est raisonnable d'avoir bon espoir!

TROISIEME PARTIE :
UNE SYNTHESE RECENTE

**Le relateur arithmétique : un nouvel outil
pour une nouvelle approche en systémique**

par Thiébaud MOULIN.

LE RELATEUR ARITHMETIQUE : UN NOUVEL OUTIL POUR UNE NOUVELLE APPROCHE EN SYSTEMIQUE

**Arithmetical relators :
a new tool for a new approach in systems science**

Thiébaud MOULIN

Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
32 boulevard Victor, 75015 PARIS

ABSTRACT : An arithmetical relator expresses in a structural way the adaptation of a system to its environment. It gives rise to multilevelled space-time reference frames which contain fractal aspects. The underlying structures, called basic cyclic relators (BCR), are associated to Lie algebras, catastrophe theory, knots theory,... The differential element is replaced by an elementary structured displacement (ESD) containing a description of the global system in which it is included. This formalism may be applied in various domains : physics, biology, medicine, computer science, psychology, economy,... New points of view are due to structural resonance fields which are excluded by a classical approach and require the use of p-adic integers. We suppose that these structural resonance fields interact in the aqueous media, at the brain level through glial cells,... Several examples will be presented.

INTRODUCTION

Alors que les outils mathématiques utilisés classiquement en systémique reflètent un souci de physicien ou d'informaticien : décrire un système comme «une boîte noire n'ayant qu'un petit nombre d'échanges bien limités et bien contrôlés avec son environnement», le relateur arithmétique (R.A.) exprime au contraire l'adaptation structurelle d'un système vivant à son environnement, en ne privilégiant pas le quantitatif, l'objectif et les processus de fermeture aux dépens du qualitatif, du subjectif et des processus d'ouverture. Le continuum spatio-temporel des physiciens ne peut donc pas être adopté ab initio; il émerge de référentiels internes discrets, après abandon de tout ce qui ne peut pas être appréhendé objectivement par des systèmes individualisés en relation les uns avec les autres.

Dans une telle approche, un système ouvert est considéré comme un artifice qui est engendré par le cerveau humain afin de faciliter la compréhension du perçu et fournir des moyens d'action. Les systèmes paraissant les plus simples sont donc ceux qui, par suite d'un manque d'informations, sont schématisés le plus facilement au niveau cérébral; citons notamment les systèmes dont la taille diffère beaucoup de celle des êtres humains, par exemple les amas de galaxies ou les particules dites "élémentaires". Par contre, il est pratiquement impossible de modéliser un homme!

Le formalisme, qui est développé depuis 1971 par le groupe Systema [S1], respecte trois règles primordiales [S8] :

- il est ouvert et exploite une source naturelle de structures mathématiques, l'arithmétique;
- les notions de "naissance-vie-mort" peuvent apparaître structurellement à tous les niveaux d'organisation;
- l'imbrication de nombreux niveaux peut être décrite simplement.

La clef de voûte du formalisme est la relation d'adaptation à l'environnement, découverte par Cl. Vallet en 1975 [S2] par voie arithmétique et interprétée géométriquement par M. Ferré en 1981 [S5], [S6 n° 9]. Elle est exprimée, non pas dans un référentiel spatio-temporel classique, mais dans un réseau de type cristallographique. Sa signification diffère selon le domaine scientifique (physique, biologique, informatique, socio-économique), le type de description et le niveau d'organisation considérés.

1. GENERALITE DES STRUCTURES ADOPTEES

Liaison avec les structures de Lie. Jusqu'en 1988, les relateurs arithmétiques (R.A.) ont été présentés à partir de considérations systémiques. C'est notamment le cas de la présentation faite en 1986 à Cerisy-La-Salle, lors du colloque "Perspectives Systémiques I" organisé par B. Paulré [S8, p. 89-104]. Au cours de ce colloque [1], R. Thom a incité le groupe Systema à établir un lien entre cet outil et les structures de Lie qui jouent un rôle fondamental dans la physique actuelle (*). Un jeune mathématicien, Ph. Riot [3, p. 505-514], [S10], [S6, n° 13], a établi cette jonction en montrant que les structures de base des R.A., directement liées aux groupes cristallographiques et appelées BCR (Basic Cyclic Relators), peuvent être mises en relation avec les systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples. Par ailleurs, des mathématiciens ont montré que ces systèmes de racines étaient en relation étroite avec les plus simples des singularités des applications différentiables et avec la théorie des noeuds (**). Il est amusant et réconfortant de constater que deux approches théoriques nouvelles applicables en biologie, la théorie des catastrophes fondée sur le continu [4] et les R.A. fondés sur le discret, reposent toutes les deux sur les mêmes structures sous-jacentes! C'est une preuve du caractère primordial de ces structures.

Principe de spécularité et adaptation à l'environnement. J.-L. Vullierme énonce en [7, p. 232] le "principe de spécularité" suivant : «... *non seulement ma relation avec les choses est médiatisée par ma relation avec autrui, mais surtout ma relation avec autrui est médiatisée par nos interactions respectives avec les tiers*». Voici la formalisation que propose G. Maugé [8] au moyen des R.A. :

"Dans la relation entre deux individus X et Y intervient la relation A de X avec l'environnement V et la relation B de Y avec V. L'environnement V est comparable, non pas à X ou à Y, mais au produit AX ou BY; c'est donc une variable de synthèse. (Une transposition en physique éclaire ce point : si X représente une longueur et A une quantité de mouvement, V a la dimension d'une action; c'est la dimension de la constante de Planck h. En d'autres termes,

* Une algèbre de Lie est "tangente" à un groupe de Lie. Ces groupes ont une grande importance en physique moderne, quantique ou non quantique, car ils expriment l'invariance d'une structure. Par exemple, les notions d'isospin et d'hypercharge, qui interviennent dans la théorie des quarks, sont directement issues du "système de racines" de l'algèbre de Lie du groupe SU3 (groupe des transformations unitaires et unimodulaires conservant la norme $\psi^\dagger\psi$ d'une fonction d'onde ψ à 3 composantes complexes). Un très bref rappel sur les systèmes de racines est donné en [S9]. Le BCR sous-jacent de (1), pour $\varepsilon=-1$, est associé au système de racines de l'algèbre de Lie de SU3 [S12].

** La démonstration a été établie par E. Brieskorn vers 1970; voir P. Slodowy [5], V. Arnold et al. [6, p. 154].

pour ΔX et ΔA représentant des écarts quadratiques moyens, la relation d'Heisenberg stipule que le produit $\Delta X \Delta A$ est supérieur à une quantité de l'ordre de h , plus précisément $\geq h/4\pi$."

"Le relateur arithmétique est un moyen d'associer étroitement à deux principes de base de la physique, le principe de relativité et le principe d'incertitude, un troisième principe à caractère systémique qui exprime «l'adaptation d'un système à son environnement» et introduit un aspect informationnel et décisionnel (*). Pour arriver à cette synthèse, il faut abandonner l'idée de décrire un phénomène au moyen d'équations et de valeurs initiales et prendre en compte ab initio trois données indissociables : un *support* qui est une expression quadratique dans le cas le plus simple, un *ensemble potentiel de valeurs initiales* pouvant être résumé par le second membre de cette expression, et un *ensemble de processus* qui donne le moyen de concrétiser certaines valeurs particulières de l'ensemble potentiel. Paramètres et variables intervenant dans le support d'un relateur arithmétique doivent être des entiers. "

"Dans le cas d'une entreprise, l'expression quadratique peut avoir de nombreuses interprétations, par exemple exprimer un équilibre financier. Une des nouveautés provient de l'usage du quadratique qui, si la forme est elliptique, introduit un aspect angulaire; c'est un moyen d'intégrer "à l'intérieur" des prix des éléments d'appréciation qui habituellement ne sont pas pris en compte. Ce procédé est voisin de celui qui est utilisé en mécanique quantique. En pratique, il faut prendre soin de choisir des variables et des paramètres adéquats. Souvent, leur dimension est celle de la racine carrée des grandeurs utilisées dans les modèles classiques."

"Voici comment peut être choisi le support du relateur arithmétique. X , dans son référentiel, a le point de vue particulier P (autrement dit, P est le coefficient du terme carré X^2); et Y , dans le sien, a le point de vue P' . Admettons pour simplifier que $P = P'$. Soit D un facteur caractérisant l'environnement (c'est le coefficient du terme en V^2). La relation de X avec Y est caractérisée par λ (qui est le coefficient du terme croisé en XY). DA représente la relation de X et de V (c'est le coefficient du terme croisé en XV); et DB , celle de Y et de V . Le «principe de spécularité» signifie que λ est déterminé, modulo P , par la relation de X avec V et par celle de Y avec V , compte tenu de D , ce qui s'écrit : "

$$\lambda \equiv DAB \pmod{P} \quad (0)$$

C'est la relation établie par Cl. Vallet [2].

2. NOTIONS DE BASE

"**Définition**" du relateur arithmétique stabilisé (R.A.) le plus simple : Il est bâti à partir de trois données :

- Le *support* du R.A. qui est une relation quadratique particulière à $(N+h)$ variables entières et à coefficients entiers. Les N variables principales notées X_μ caractérisent l'état du système; les h variables V_α , l'environnement. Voici un exemple à $(2+1)$ variables vérifiant la congruence (0) :

$$\left\{ \underbrace{P(X^2 + \epsilon XY + Y^2)}_{\text{Structure sous-jacente du système}} + \underbrace{D(AX+V)(BY+V)}_{\text{termes de couplage et d'environnement}} \right\} = \{ \text{---} \}_o \quad (1)$$

P est un entier non nul; D, A, B sont des entiers premiers avec P ; $\epsilon = 0, +1$ ou -1 .

- Un *état initial* $(X_\mu(0), V_\alpha(0))$ ou un *ensemble d'états initiaux* donnant tous la même valeur du second membre. Dans le cas de (1), un état initial canonique s'écrit :

* phrase soulignée par nous.

$$X(0) = x_0 P^K, \quad Y(0) = y_0 P^K, \quad V(0) = v_0 P^K \quad (2)$$

• Un ensemble d'opérations appelées "*réflexions*". Chacune d'elles consiste à calculer la seconde racine d'une des équations en X, Y ou V, les deux autres variables restant inchangées. Les trois réflexions associées à X, Y et V sont notées respectivement x, y, V :

$$\begin{cases} x & : & X^* = -X - \varepsilon Y - DA(BY+V) / P & ; & Y, V \text{ inchangés} \\ y & : & Y^* = -Y - \varepsilon X - DB(AX+V) / P & ; & X, V \text{ inchangés} \\ V & : & V^* = -V - AX - BY & ; & X, Y \text{ inchangés} \end{cases} \quad (3)$$

Fonctionnement d'un R.A. et interprétations concrètes : Par hypothèse, le résultat d'une réflexion doit toujours être entier. Cela signifie qu'une entité non entière n'a pas de sens dans le cadre du modèle (dans une population d'êtres humains vivant naturellement, la notion de "demi-homme" est exclue).

Les réflexions relatives aux variables d'environnement (en abrégé, appels à l'environnement) sont toujours réalisables; dans le cas examiné, (3) montre que le résultat de V est toujours entier. Cela signifie que l'environnement est supposé très stable vis-à-vis du système.

Par contre, les réflexions H_μ relatives aux variables principales (en abrégé, réflexions principales) font généralement intervenir une division (par P, dans le cas de x et de y). Si le résultat fourni par une de ces réflexions n'est pas entier, l'opération n'est pas effectuée : il y a blocage local du R.A.

Supposons qu'il y ait blocage au cours de H_μ . Le R.A. est stabilisé s'il est toujours possible de trouver des appels à l'environnement tels que, après leur application, H_μ ne provoque plus de blocage. Voici une interprétation : supposons que le système modélisé soit un atelier de production et que certains facteurs de $m' = (X'^2 + \varepsilon X'Y' + Y'^2)$ déterminent (*) un nombre de produits en cours d'assemblage. Le reste α de la division de X' par P (on écrit : $X' \equiv \alpha \text{ modulo } P$) caractérise un type particulier de pièces du produit considéré. Quand X' n'est pas divisible par P, il y a manque de la pièce de type α . L'atelier demande au magasin central de renouveler le stock de ces pièces, autrement dit, il fait appel à son environnement. Si la demande est automatiquement satisfaite, le système est "adapté à son environnement". La congruence (0) formalise de façon idéale cette adaptation dans la mesure où D, A et B sont des entiers premiers avec P. Mais si cette dernière condition n'est pas satisfaite, des blocages irréductibles peuvent survenir. De cette façon, sont modélisées les extrémités d'une molécule chimique non cyclique, la fin d'un message, l'inadaptation d'un sous-système ou la mort d'un système.

Les réflexions principales sont régulièrement alternées. Un appel à l'environnement est intercalé si et seulement si il est nécessaire.

La "définition" d'un R.A. est volontairement incomplète afin que le formalisme soit ouvert. Ce qui manque est obtenu par classification [S3].

Les Relateurs Cycliques de Base (BCR) : Ils engendrent cycliquement un nombre fini d'états et ne provoquent jamais de blocage. En général, plusieurs BCR sont directement associés au système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple. Par exemple, les BCR ayant

* m' résulte d'une orthogonalisation partielle de (1), justifiée mathématiquement par la théorie des poids de Cl. Chevalley (cette théorie exploite une structure de groupe de Weyl affine). On utilise "l'effet miroir" relatif au premier plan BCR (obtenu pour $\eta=+1$) ou au deuxième (obtenu pour $\eta=-1$). $X'=(4-\varepsilon^2)XP-\eta D(2A+\varepsilon B)V^\circ$, $Y'=(4-\varepsilon^2)YP+\eta D(\varepsilon A+2B)V^\circ$ avec $V^\circ=V+(1+\eta)AX/2+(1-\eta)BY/2$. Selon la valeur de η , $V^\circ=AX+V$ ou $BY+V$.

pour support $(X^2 + \epsilon XY + Y^2)$ avec $\epsilon = \pm 1$ sont directement associés au système de racines de l'algèbre de Lie A_2 du groupe SU_3 (rappelons que ce groupe est à la base de la théorie des quarks). La "catastrophe élémentaire" qui leur est associée est "le pli" (cf. T. Poston et I. Stewart [9, p 121]). Voici un autre exemple : à la suite d'une recherche effectuée en collaboration avec L. Saint-Paul [3, p. 515-524], a été proposée une modélisation d'un milieu aqueux structuré [3, p. 525-534] qui pourrait avoir de nombreuses applications en biologie : trois BCR, appelés Eau I, Eau II, Eau III, sont associés à l'algèbre de Lie A_4 du groupe SU_5 (qui est à la base d'une théorie unificatrice en théorie quantique des champs); la "catastrophe" correspondante est la "queue d'aronde". Comme ces BCR interviennent également dans la modélisation d'un brin d'ADN, il est naturel de rechercher un langage fondé sur ces structures (cf. Fr. Chauvet [3, p. 525-534]); ce point de vue recoupe celui de R. Thom [9] qui, au moyen des "catastrophes élémentaires", exploite les mêmes structures sous-jacentes.

Théorème d'imbrication et séquences réduites : Si le R.A. comporte une seule variable d'environnement, son fonctionnement engendre généralement une structure d'imbrication régulière qui se manifeste au niveau des rythmes internes, dans l'aspect fractal de certaines configurations d'états, dans la factorisation des variables et de certains groupements de paramètres appelés *nombre d'information virtuelle*. Un théorème, établi par J.-P. Luminet [S3], donne un moyen de classer certains R.A. au moyen d'un ensemble (éventuellement vide) de *congruences exceptionnelles* et d'un ensemble de *conditions de verrouillage* (une condition de verrouillage transgressée devient une congruence exceptionnelle). Ainsi, à certaines caractéristiques physiques évaluées dans un environnement donné peut être attachée une classe de fonctionnement. Ces concepts, complétés par d'autres dus à L. Nottale [S4], pourraient avoir de multiples applications en chimie, biologie, pharmacologie, neurophysiologie, informatique (pour la traduction automatique, le traitement des données,...). Ainsi, à un état particulier du R.A. obtenu après une longue séquence de réflexions, L. Nottale associe une *séquence réduite* dont la longueur est, "en moyenne", proportionnelle au logarithme de la longueur de la première. Une séquence réduite résume donc un long processus d'apprentissage, en exploitant la structure d'imbrication définie par la classe de fonctionnement du R.A.

3. INVARIANCE SOUS L'EFFET DE CHANGEMENTS DE NIVEAUX

La présentation des R.A. à partir des algèbres de Lie paraît imposer la mise en oeuvre d'outils mathématiques compliqués alors qu'en réalité les R.A. ont été développés à partir de bases mathématiques simples avec l'idée qu'ils représentaient des structures mentales primordiales. D'après les hypothèses faites [S1], [S8], un R.A. doit donc pouvoir s'appliquer à différents niveaux d'organisation allant de l'échelle subquantique (définition d'un système d'unités physiques privilégié où apparaît la longueur de Planck, égale à $1.6 \cdot 10^{-35}$ m) à l'échelle planétaire ou cosmique, en passant par la modélisation d'atomes, de structures moléculaires hélicoïdales et même de configurations florales.

Configurations florales. Ce modèle dû à Cl. Vallet (1979, [S6, n° 9]) est une sorte d'automate cellulaire : un grand nombre de R.A. à $(3+1)$ variables, différant par les valeurs initiales, sont mis en oeuvre simultanément. Le fonctionnement séquentiel de chacun d'eux, s'il était relativement libre, décrirait une sorte d'évolution à l'échelle géologique (aspect phylogénétique); il est remplacé par une séquence réduite imposée (aspect ontologique) qui schématise un brin d'ADN. Le temps habituel des physiciens ne se manifeste pas par un

enchaînement de processus, mais «statiquement» au moyen d'un paramètre T qui est proportionnel à la racine carrée du second membre $\{-\}_0$. En fait, le R.A. possède 4 variables principales et une variable d'environnement; la forme support en X, Y, Z, T définit une métrique locale relativiste qui varie en fonction de la valeur locale de la variable d'environnement. Une modification de T provoque généralement une évolution progressive de la configuration; mais pour certaines valeurs particulières, apparaissent des transformations brutales au voisinage de singularités métriques : certaines pièces florales qui étaient à l'état virtuel deviennent visibles : on peut suggérer l'image d'une fécondation [S9, p. 474-475].

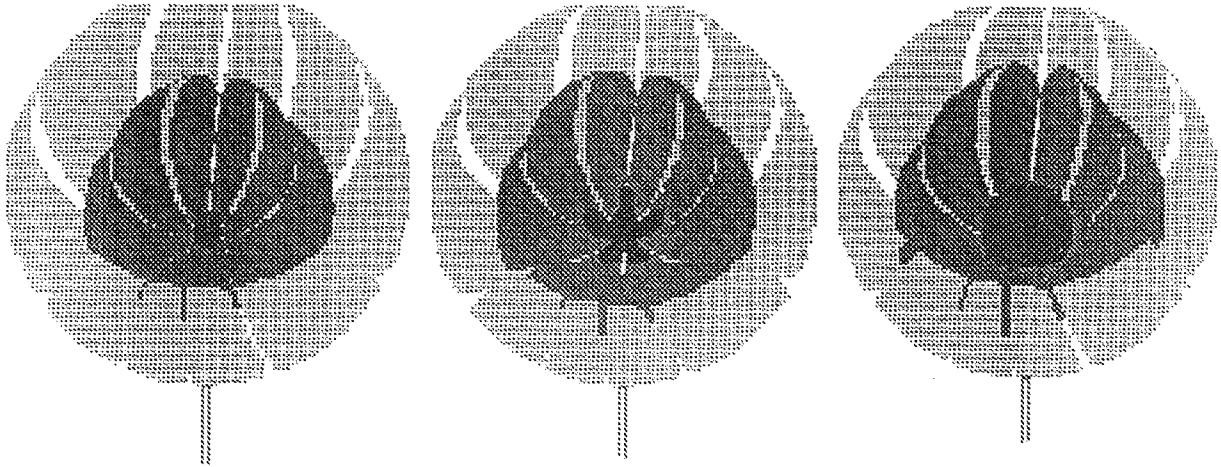


Figure 1

Applications à d'autres niveaux d'organisation. Le même type de R.A. s'applique à des systèmes situés à des niveaux d'organisation très différents. Le point de départ est une modélisation de «grains de matière» et de «grains de lumière». Puis ont été décrits : l'effet d'une mesure quantique, une interaction électrostatique simplifiée, un atome d'hydrogène (avec calcul des fonctions d'onde dans l'espace des impulsions). Le passage aux quatre bases de l'ADN n'est pas achevé. Ensuite viennent les formes cellulaires (neurones et cellules gliales, cf. fig. 2).

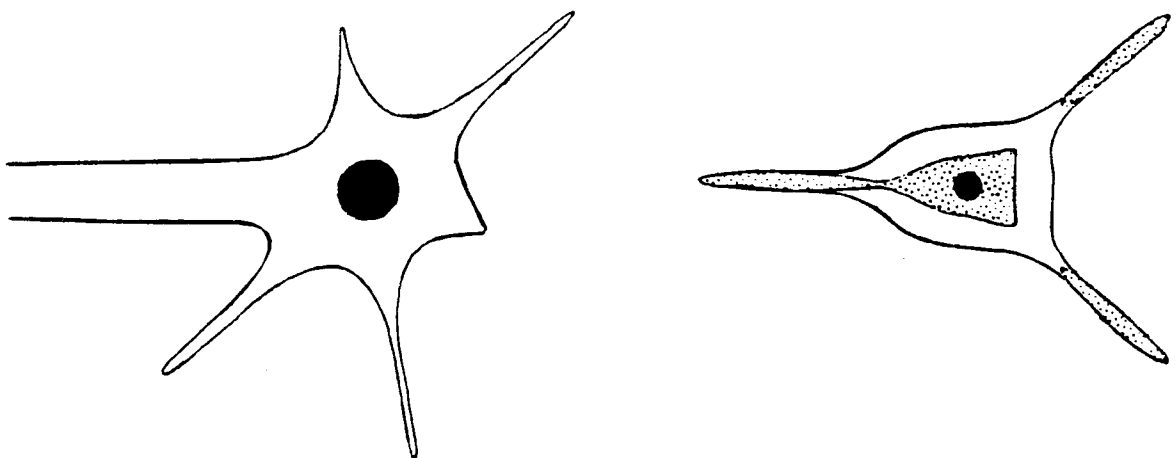


Figure 2

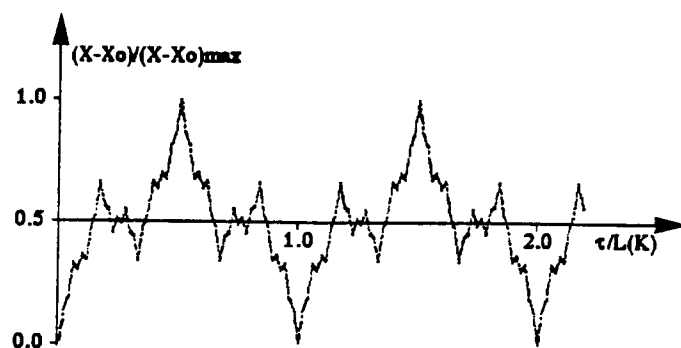
Enoncé d'un principe d'invariance approchée lié aux changements d'échelle. Compte tenu de toutes les vérifications partielles effectuées, de la mise en oeuvre de transformations réalisant des changements de niveaux (cf. travaux de L. Nottale sur le "relateur dual", de M. Ferré [S5], [S11] sur la ramification,...) et de la possibilité d'inclure un R.A. gérant le développement d'un système naturel dans des parties de ce système (à la manière des chromosomes existant dans les cellules d'un organisme pluricellulaire), le principe suivant a été adopté :

Un système vivant possède une structure qui paraît approximativement invariable sous l'effet de certains changements de niveaux si un outil convenable de description est utilisé. Le gain de connaissance apporté par l'imbrication des niveaux est compensé, à chacun de ces niveaux, par des restrictions sur le domaine d'applicabilité des modèles et sur le degré d'applicabilité des connaissances obtenues.

4. ELEMENT STRUCTURE DE DEPLACEMENT (ESD)

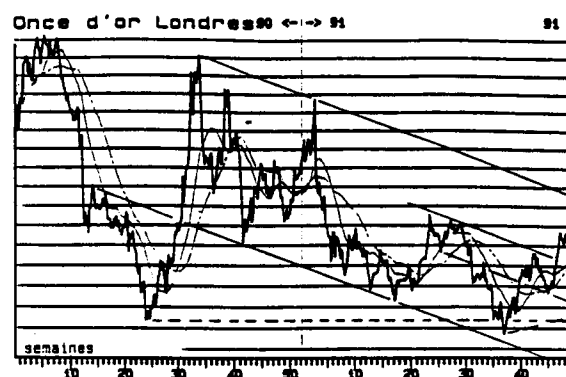
Le concept d'ESD remplace celui d'élément différentiel. Grâce à des changements d'échelle, un ESD peut être rendu arbitrairement petit; un passage à la limite peut redonner globalement l'élément différentiel ordinaire. Mais alors que la structure des niveaux d'organisation inférieurs est gommée dans cet élément, cette structure persiste dans un ESD. Un aspect linguistique est associé à un ESD (des détails sont donnés en [S12]).

Allure fractale de certains ESD. Les ESD sont engendrés par des R.A. bâtis autour d'une forme support dégénérée. On peut obtenir cette dégénérescence au moyen d'un "étirement du R.A." par une variable d'environnement (dans le cas de (1), remplacement de V par $V-U$) ou au moyen d'un étirement par une des variables principales (dans le cas de (1), remplacement de X par $X-Z$ et de V par $W+AZ$). Voici un exemple d'étirement par X , réalisé à partir de (1) dans le cas de $\varepsilon=0$. Sur la figure 3, sont portées, en abscisse et en ordonnée, des quantités proportionnelles respectivement au nombre τ de réflexions principales effectuées et à $X(\tau)$; par hypothèse, la configuration est stationnaire ($ESD = 0$). L'évolution, qui dépend de la classe de fonctionnement du R.A., présente une allure fractale; elle a été étudiée par J. Chastang [S6, n° 13]. De façon plus précise, le "contenu" de cet ESD peut être représenté par un "Iterated Function System" (IFS), concept défini par M. Barnsley [10]; il est donc assimilable à un *attracteur fractal*.



$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0, P = 1001, D = 1, A = B = 1, \\ x_0 &= z_0 = y_0 = 0, v_0 = 1 \\ K &= 6, L_6 = 6(3^6 - 1) \end{aligned}$$

Figure 3 : R.A. étiré



Evolution boursière typique donnée dans le Cahier n° 161 du Laboratoire d'Analyses Financières (24/2/1992)

Figure 4

Il faut noter que le principe de spécularité de J.-L. Vullierme s'applique aux fluctuations boursières qui généralement présentent un aspect fractal (cf. figure 4). Cet aspect, qui se manifeste également dans certains ESD, apporte un élément de justification à la formalisation du principe de spécularité, proposée dans le paragraphe 1.

D'autres applications des ESD sont données dans des publications du groupe Systema (non citées en référence) :

a) Deux constantes adimensionnelles fondamentales de la physique (la constante de structure fine et le rapport de la masse d'un atome d'hydrogène à celle d'un électron) sont calculées (*) au moyen d'un R.A. ayant un BCR sous-jacent lié au système de racines du groupe SU3.

b) La forme de certaines feuilles et le premier niveau de nervuration peuvent être déduits d'un angle extrémal de ramification (cf. figure 5). Il est amusant de constater que le modèle fournit aussi la taille approximative de systèmes physiques (atomes d'hydrogène et système solaire) qui sont impliqués par la production d'énergie chimique dans une feuille à partir du rayonnement solaire! Cet exemple montre bien le caractère systémique de la description obtenue.

c) A condition de prendre pour variables certains paramètres du modèle et d'effectuer un passage à la limite convenable pour $K \rightarrow \infty$, on peut calculer à partir de l'ESD le plus simple la transformée de Fourier d'un signal rectangulaire ou les franges de diffraction d'une fente étroite. Selon une suggestion de Fr. Chauvet, cette propriété pourrait provenir d'une relation entre ESD et "caractère d'une représentation" d'un groupe de Lie; mais la démonstration n'a pas encore été établie.

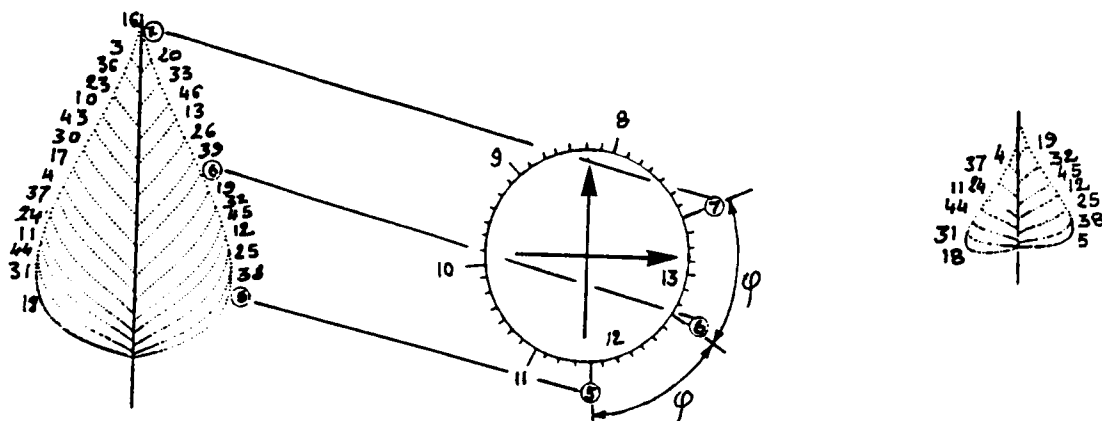


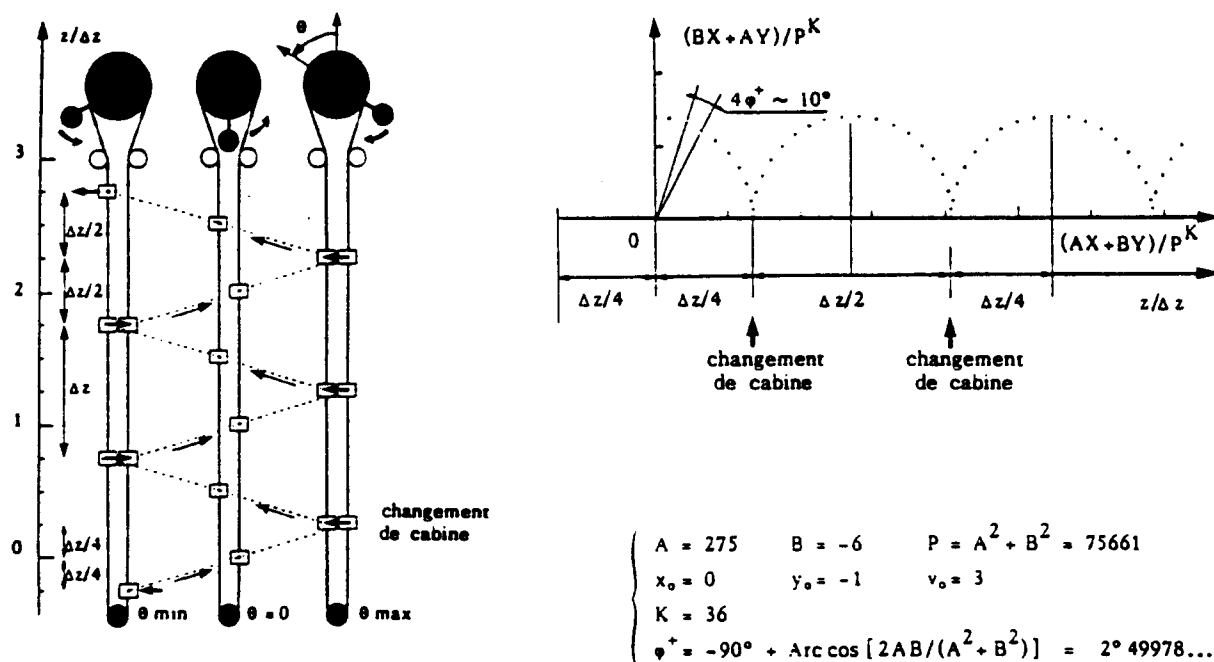
Figure 5 : représentation simplifiée d'une structure foliaire au moyen d'ESD

Autre type d'ESD. Certains ESD n'ont pas une allure fractale. Ils sont utilisés pour une jonction avec certaines théories classiques de la physique ou pour la recherche de la structure sous-jacente de certains systèmes. L'exemple suivant, étudié en collaboration avec L. Saint-Paul [3, p. 515-524], [S10] met clairement en évidence l'effet des appels à l'environnement : il concerne le déplacement d'un passager empruntant un "ascenseur à balancier". Cet appareil, utilisé autrefois dans certaines mines, est constitué de deux ensembles de cabines équidistantes, disposées verticalement et reliées par un câble inextensible (cf. fig. 6). Ce câble passe sans glisser sur une poulie solidaire d'un balancier. Écarté de sa position d'équilibre, le balancier communique à l'ensemble un mouvement oscillatoire. Par hypothèse, l'amplitude du

* Normalement, il ne faut pas introduire dans un R.A. la valeur numérique des constantes physiques qui interviennent; ces constantes doivent être calculées dans le cadre du modèle adopté. Améliorer une valeur numérique à la suite de vérifications expérimentales implique l'amélioration de l'ensemble de la modélisation.

mouvement est telle que certaines cabines sont face à face aux instants où le balancier est le plus écarté de sa position d'équilibre. A ces instants, un passager peut passer d'une cabine dans une autre située au même niveau. Pour monter ou descendre d'une hauteur notable vis-à-vis de l'amplitude de l'oscillation, il doit changer de cabine à chaque demi-période. Si aucun changement n'est oublié, le sens de déplacement reste celui choisi initialement.

Ce système peut être modélisé par un R.A. dégénéré, supporté par (1) et ne faisant pas appel à un étirement. Le déterminant de la forme quadrique en X, Y, V est nul. Il en résulte, pour $\varepsilon=0$: $P=A^2+B^2$ et $D=4$. Le support du R.A. exprime, en première approximation, la conservation de l'énergie (on suppose que le nombre de passagers qui montent est égal au nombre de ceux qui descendent). Les appels à l'environnement correspondent aux changements de cabine.



Ce R.A., après une complexification convenable, fournit différents modèles de propagation : déplacement par bonds, cheminement de globules le long de microtubules, structures hélicoïdales moléculaires. Il est aussi à l'origine du modèle de milieu aqueux structuré (associé à l'algèbre de Lie du groupe SU_5 et à la catastrophe "queue d'aronde") mentionné précédemment; pour exploiter certaines propriétés multiplicatives caractérisant un *champ d'interférences structurelles*, on doit utiliser une extension algébrique convenable [S9, p. 479], [S13, p. 1187], c'est-à-dire remplacer un entier, tel que X , par l'entier algébrique $X_0 + X_1\sqrt{5} + X_2\sqrt{2} + X_3\sqrt{10}$. Signalons que l'extension $X_0 + X_1\sqrt{5}$ est classiquement utilisée dans la théorie des quasi-cristaux.

5. LES SYSTEMES GENERIQUES

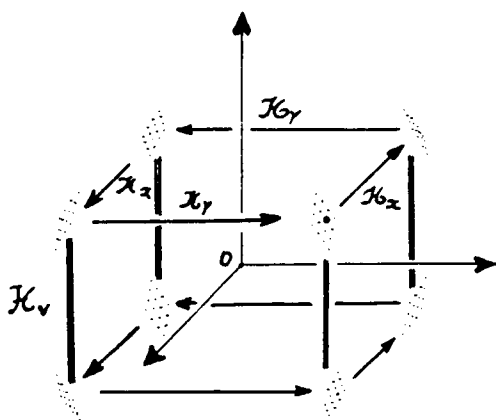
A la suite de réflexions sur différents aspects de la notion de temps, sur les phénomènes ergodiques, sur les imbrications de niveaux..., a été introduit le concept de *système générique*. Il provient de la linéarisation d'un R.A. (et, plus généralement, de son développement à l'ordre k) au voisinage d'une singularité. Un système générique décrit de façon séquentielle le

comportements d'un ensemble de systèmes évoluant en parallèle. La description obtenue est atemporelle et ne respecte pas toutes les contraintes habituelles (notamment les contraintes de voisinage). Des tentatives d'application ont été proposées dans différents domaines : physique, biologie, informatique (réseaux connexionnistes), psycho-sociologie et économie [S14], lors du XIIIe Congrès International de Cybernétique, en août 1992.

"Linéarisation" d'un R.A. Cette notion est issue de travaux effectués en 1980. L. Nottale [S4] recherchait une liaison avec les structures de Lie en étudiant le comportement de familles de transformations au voisinage d'une transformation identité (cette liaison diffère de celle établie en 1988 par Ph. Riot; nous reviendrons sur ce point au paragraphe 6 car ces deux modes de liaison pourraient décrire un bouclage structurel modélisant le caractère vivant d'un système). Le plus simple des R.A. a été choisi : dans (1), ε est choisi égal à 0 et on suppose que le paramètre $D(A^2+B^2)/P$ est très petit. La situation la plus simple est obtenue pour $|Ax_0| \ \& \ |By_0| \ \ll \ |v_0|$: les états engendrés par le R.A. se rassemblent au voisinage de 8 amas, 4 étant situés approximativement à la cote v_0 et 4 autres, à la cote $-v_0$ (cf figure 7).

La configuration obtenue dépend du paramètre K introduit dans les valeurs initiales (2). Afin que celle relative à $K+1$ et celle relative à K puissent être aisément comparées, on remplace les composantes entières X, Y, V par les composantes rationalisées $X/P^K, Y/P^K, V/P^K$. En effet, d'après le théorème d'imbrication [S3], l'ensemble des points rationalisés du cycle \mathcal{L}_{K+1} contient tous ceux du cycle \mathcal{L}_K . Ces nouvelles composantes sont utilisées dans la suite.

Chaque amas est constitué de K^2 sous-amas, K étant le paramètre; chaque sous-amas contient des sous-sous-amas et ainsi de suite... En classe de fonctionnement (0), la longueur du cycle [S3] est égale à $4(3^K - 1)$. Le nombre d'états appartenant à un sous-amas croît donc très rapidement avec K , grosso modo comme $3^K / K^2$ dans le cas des sous-amas les plus peuplés. Le cas présenté sur la figure 6 est particulièrement simple car, dans un amas, les sous-amas sont situés aux noeuds d'un réseau cristallographique bidimensionnel. Dans un cas plus général, il faut utiliser une base polynomiale : à 3 dimensions pour $\varepsilon=0$ et très probablement à 5 dimensions pour $\varepsilon=\pm 1$ (l'étude n'est pas terminée; nous avons seulement démontré que ce nombre est inférieur ou égal à 7). La situation est très différente si la "linéarisation" n'est pas effectuée au voisinage du BCR sous-jacent (par exemple pour $\varepsilon=0, A=1, B=1, D/P$ très voisin de 1, cf. figure 8)!



Vue cavalière des états engendrés

Figure 7

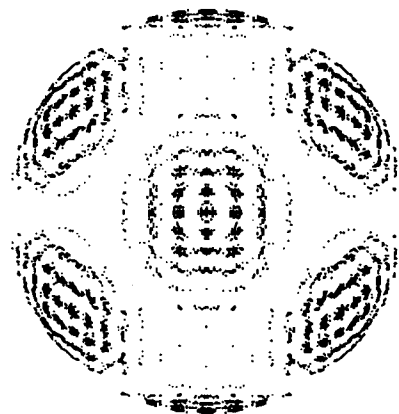


Figure 8

Pilotage du R.A. "linéarisé". La nécessité d'utiliser de grandes valeurs de P devrait imposer normalement l'usage d'un ordinateur muni d'une arithmétique à très grand nombre de

chiffres significatifs. Par exemple, pour $P=10^6+1$ et $K = 20$, il faudrait pouvoir traiter des entiers dépassant 10^{120} . En fait, cette contrainte ne s'applique pas si la classe de fonctionnement du R.A. est connue car il suffit de faire fonctionner deux R.A. en synchronisme : l'un, appelé *pilote*, fonctionne avec la valeur de P positive la plus faible (fixée par les conditions de verrouillage de la classe) et détermine la position des appels à l'environnement dans la suite des réflexions principales; l'autre positionne les états dans les différents sous-amas. Pour les R.A. de classe (0) ayant (1) pour support, la valeur minimale de P est égale à 3 si $\varepsilon=0$ et à 5 si $\varepsilon=\pm 1$. Dans l'exemple considéré précédemment et pour $\varepsilon=0$, les entiers intervenant dans le pilote ne dépassent pas, en valeur absolue, une borne qui est de l'ordre de 3^{20} ; il suffit donc de disposer d'une arithmétique à base 10 comportant seulement une dizaine de chiffres significatifs, ce qui ne pose aucun problème pour les micro-ordinateurs actuels.

Champ informationnel associé à un système générique. Plusieurs significations physiques peuvent être attribuées aux réseaux obtenus par "linéarisation" d'un R.A. L'une d'elles peut être définie dans l'espace des positions ou dans l'espace des impulsions. Un état particulier du R.A. positionne un sous-système à un noeud du réseau considéré. Dans le modèle le plus simple, l'évolution de la position de ce sous-système est fixée par le comportement naturel du R.A., le temps t repérant le nombre de passages dans l'amas qui détermine ce réseau. Au cours d'un cycle, si K est suffisamment élevé, le sous-système revient généralement un grand nombre de fois dans le même sous-amas, en des temps $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ différents. Le comportement qui suit un passage au temps t_i dans ce sous-amas dépend de la séquence réduite $\$i$; elle est fournie par l'algorithme de L. Nottale [S4] à partir de t_i dans la mesure où la classe de fonctionnement est connue.

Soient $\$i$ et $\$j$ deux séquences réduites relatives à des passages dans le même sous-amas, l'un au temps t_i , l'autre au temps t_j . Si $\$i$ et $\$j$ se terminent par la même suite de symboles (chacun d'eux représentant un produit de réflexions), les comportements ultérieurs sont les mêmes pendant une durée Δt (fonction, notamment, de la longueur de cette suite). Au lieu de vouloir connaître exactement le comportement d'un sous-système après passage dans un sous-amas, on peut chercher à le connaître seulement de façon limitée, pendant une durée Δt plus ou moins grande. De ce point de vue, il est souhaitable de disposer de deux développements limités complémentaires : l'un donnant approximativement la position, et l'autre, l'amorce du comportement.

Si la position du sous-système pouvait être connue avec une extrême précision et si, de plus, K et P étaient également connus, les composantes entières X, Y, V pourraient être déduites des valeurs rationalisées. Mais ce n'est le cas, ni pour un système physique, ni pour le R.A. qui le modélise! Il est donc naturel d'exploiter les composantes entières du pilote. Exprimons les composantes X_π, Y_π, V_π du pilote en base P_π (c'est-à-dire en base 3 dans le cas étudié par L. Nottale). Le dernier symbole d'une séquence réduite $\$i$ est fourni par les termes de plus bas degré, l'avant dernier par les termes de degré supérieur, et ainsi de suite... (*) Au contraire, si les composantes X, Y, V sont écrites en base P , la position du sous-système dans un amas est donnée par les termes de degré le plus élevé en P , (le terme en P^K détermine l'amas, et celui en P^{K-1} , le sous-amas). Le R.A. piloté fournit une "position géométrique" alors que le pilote fournit une "position informationnelle". Dans le premier cas, les développements utilisés concernent des nombres réels alors que les développements à rebours, qui caractérisent un

* Les entiers p -adiques et les nombres p -adiques ont été introduits par K. Hensel vers 1913; cf., notamment, le début de la "Théorie des nombres" de Z.I. Borevitch et I.R. Chafarevitch [11], "Les nombres p -adiques" de Y. Amice [12].

emboîtement de congruences modulo $P_\pi, P_\pi^2, P_\pi^3, P_\pi^4$, concernent des entiers p-adiques (*) (du moins dans l'hypothèse simplificatrice où P_π est un nombre premier).

Or, depuis une cinquantaine d'années, certaines équations de diffusion sont résolues au moyen de marches au hasard sur des réseaux (la répartition des neutrons dans un réacteur nucléaire a été l'un des premiers domaines d'application). Récemment, les spécialistes de la théorie quantique des champs ont développé et transposé ces méthodes afin de décrire des "champs en interaction" (un ouvrage de synthèse a été publié récemment par Cl. Itzykson et J.-M. Drouffe [13]). Par ailleurs, un R.A. "linéarisé" modélise de façon approximative certaines marches au hasard (la projection $X/P^K, Y/P^K$ d'un état, effectuée parallèlement à l'axe d'environnement, se déplace sur le réseau associé à un amas de façon apparemment (**)) pseudo-aléatoire). Mais établir cette correspondance élimine l'aspect informationnel fourni par le développement p-adique précédent. Pour aller au delà des descriptions aléatoires, il est donc naturel d'introduire un *champ informationnel*, associé au pilote du système générique.

Descriptions parallèles associées à un système générique. Dans un cycle engendré par le R.A. générique, prélevons un ensemble d'états X, Y, V et considérons le comme un ensemble d'états initiaux pour différents R.A. fonctionnant en parallèle. Un sous-système n'est plus représenté par un seul état mais par un ensemble d'états localisés au même noeud du réseau considéré. S. Golinsky [S14] applique ce modèle à un système de neurones formels après avoir exprimé le caractère "objectif" d'une description. On définit d'abord "l'observation pacifique" d'un système. Puis le rôle du système observé et celui de *l'observateur-acteur pacifique* sont permutés. Les états communs aux systèmes observé et à cet observateur constituent une description "objective". C'est une notion beaucoup plus ouverte que celle habituellement adoptée puisque l'observateur-acteur pacifique cherche à s'adapter au mieux au système observé. La sélection exprimant le caractère objectif d'une description fait émerger une structure d'imbrication binaire alors que la structure d'imbrication engendrée naturellement par le R.A. considéré est ternaire (la longueur du cycle du pilote croît comme 3^K).

Cette sélection peut être obtenue simplement au moyen *d'un 1/2 pilotage* du R.A. En bref, le 1/2 pilote fournit une suite de séquences réduites, chacune d'elles comportant au plus $K/2$ symboles particuliers (***) éventuellement précédés et/ou suivis par une réflexion V . Chaque symbole est ensuite remplacé par un doublet (****). La structure binaire se manifeste à la périphérie d'un morceau tétraédrique de réseau tridimensionnel (la dimension supplémentaire est définie par K). Le fonctionnement du 1/2 pilote induit un "temps interne" caractérisé par une structure d'imbrication ternaire alors que le temps "objectif" correspond à une structure d'imbrication binaire. Par rapport au temps objectif, le temps interne se présente donc comme un *temps fractal*. A notre avis, ce résultat recoupe des préoccupations d'autres physiciens, en particulier de L. Nottale [14] et de A. Le Méhauté [15].

* Voir renvoi au bas de la page précédente.

** Le caractère "pseudo-aléatoire" d'un cheminement peut être évalué de façon précise. Cette étude n'a pas encore été effectuée.

*** Dans le cas simple considéré, il y a 3 symboles différents, notés 0, 1, 2. Ils représentent respectivement x ou y , xV ou yVx , $xVyVx$ ou $yVxVy$. Les chiffres utilisés représentent le nombre de réflexions V (ce codage est justifié par le théorème de L. Nottale [S4]). Dans une séquence réduite, l'alternance de x et de y doit être respectée. K est supposé pair. Enfin, rappelons que les réflexions x , y et V sont définies au début du paragraphe 2.

**** L'opération est simple; c'est une complémentarité. 0 est remplacé par 02, 1 par 11 et 2 par 20. Cette procédure est généralisable dans le cas où $\varepsilon = \pm 1$. Il y a 5 symboles notés 0, 1, ..., 4. La somme des chiffres d'un doublet doit être égal à 4. Ce codage est étudié en vue d'application aux "milieux aqueux structurés" et à une modélisation de l'ADN.

Par rapport au temps interne, il y a répartition des états sur des *sous-réseaux disjoints, régulièrement déphasés* les uns par rapport aux autres. Pour prendre en compte ce déphasage, on utilise des nombres complexes. Cela conduit à une interprétation nouvelle des amplitudes de probabilité de la mécanique quantique qui engendrent les phénomènes d'interférence. Le modèle le plus simple fournit les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique quantique [S14].

R.A. génériques comportant deux variables d'environnement. Les systèmes physiques non quantiques font souvent apparaître le caractère irréversible du temps qui ne se manifeste pas dans les R.A. à une seule variable d'environnement étudiés dans les paragraphes précédents. Par contre, les R.A. à 2 variables d'environnement peuvent faire apparaître ce caractère car le nombre de conditions de verrouillage croît avec les paramètres K_1 et K_2 intervenant dans les valeurs initiales, sauf si $K_1=K_2$ (une augmentation de K_1 et de K_2 produit une suite de changements de la classe de fonctionnement à partir d'un certain seuil). En pratique, les modèles génériques applicables en thermodynamique et en physique macroscopique sont fondés sur de tels R.A. La plus sérieuse difficulté provient de l'absence actuelle d'étude mathématique approfondie (passer de 1 à 2 variables d'environnement est aussi difficile que passer des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles!).

Néanmoins, des applications en biologie et dans les sciences humaines sont envisagées dès à présent. Fr. Chauvet assimile les phénomènes de vieillissement d'un organisme vivant à des désynchronisations produites par une augmentation de K_1 et de K_2 . Cl. Vallet [S14] compare un R.A. à 1 variable d'environnement à une vie foetale idéalisée alors que les R.A. à deux variables évoquent la vie postnatale.

Mais Cl. Vallet fait également remarquer que les R.A. quadratiques sont insuffisants et que l'utilisation de R.A. *bi- et multi-quadratiques* est indispensable. Ce point de vue n'est pas étonnant puisque les formes de "neurones" et de "cellules gliales" présentées sur la figure 2 sont obtenues à partir d'une *condition de bifurcation* (*) entre deux modes de fonctionnement : l'un généralise celui en X,Y,V; l'autre est un fonctionnement en A,B,V (dans le cas le plus simple, il suffit de remplacer P par $L(A^2+\epsilon AB+B^2)$ dans (1), ce qui confère au support une structure biquadratique (**); X et Y sont considérés comme des constantes; les réflexions x, y sont remplacées par des réflexions a, b). En faisant émerger de deux façons différentes la notion de température (par l'exposant H, défini dans les valeurs initiales en fonctionnement A,B,V₁, et par certains coefficients du support en fonctionnement X,Y,V₁,V₂), Cl. Vallet propose une modélisation de la condition d'homéothermie qui, d'après les travaux de M. Juvet [16], est essentielle pour la compréhension du fonctionnement cérébral humain. Puis il ébauche [S14] une modélisation des phases d'éveil, de sommeil et de sommeil paradoxal (au cours duquel les sujets rêvent).

* Cette bifurcation joue également un rôle fondamental dans la description de la ramification (cf. travaux de M. Ferré et H. Le Guyader [S5], [S11], [S14]. En mécanique, elle exprime la possibilité de modification des quantités de mouvement et, plus généralement, celle des variables conjuguées.

** Cette expression de P n'est pas introduite a priori. Elle provient de la généralisation d'une congruence exceptionnelle dite de classe (γ) ou de la condition de dégénérescence du support. Pour obtenir les formes neuronales, on fait appel aux congruences quadratiques de classe (β) qui se manifestent clairement si le R.A. possède au moins 3 variables principales. Dans le cas d'une seule variable d'environnement, l'ensemble des conditions de verrouillage quadratiques de la classe (0) peut être obtenu par un théorème de Fr. Chauvet, fondé sur le groupe de Weyl du système de racines associé au BCR sous-jacent (rappelons que les conditions de verrouillage transgressées deviennent des congruences exceptionnelles). La généralisation de ce résultat au cas d'un R.A. à plusieurs variables d'environnement est ébauchée.

En s'appuyant sur les travaux de P. Vendryès [17], G. Maugé [8] propose d'appliquer les R.A. aux entreprises. Un système générique à une variable d'environnement peut représenter la structure idéalisée qui se manifeste durant la phase de gestation d'une entreprise (c'est l'analogie d'une vie foetale); les conditions de verrouillage de la classe de fonctionnement représentent les statuts de la société. Dès que la nouvelle entreprise est créée, elle est confrontée à l'environnement réel; il faut donc introduire une deuxième variable d'environnement. Si la structure a été bien choisie, K_1 est égal à K_2 ; et, du point de vue des rythmes internes, le R.A. se comporte comme s'il n'y avait qu'une seule variable d'environnement.

Cette application fournit aussi une interprétation simple d'un système générique. Le sous-système "baladeur" peut être représenté par un *stagiaire* qui prend successivement la place des différents membres de l'entreprise, sans respecter les contraintes d'espace et de temps qui se manifestent dans le fonctionnement "en parallèle"...

Enfin, nous mentionnerons une autre tentative d'application des R.A. dans le domaine socio-économique, présentée au cours du XIIIe Congrès International de Cybernétique par F. Boccara [S14] : elle concerne l'utilisation des nombres p-adiques en économie et complète l'esquisse de G. Maugé [8].

6. BOUCLAGES STRUCTURELS

Un problème fondamental concerne le bouclage structurel des descriptions séquentielles et parallèles. L. Saint-Paul [S14] fait remarquer que ce problème recoupe les préoccupations de certains économistes. Dans un ouvrage intitulé "La Causalité en Economie" [18], B. Paulré introduit «l'idée de structure causale» en rappelant que la causalité «demeure une opération par laquelle un observateur attribue une capacité d'action à des objets réels et ne constitue pas une qualité intrinsèque aux objets ainsi désignés»; et il poursuit : «avec cette ... approche de la causalité,... s'impose une autre conception de la notion de système, conçue comme un ensemble d'objets "réels" faisant apparaître des rapports de nécessité et de causalité "internes". Autrement dit des rapports qui n'expriment pas des liaisons de nécessité logique ou empirique (lois entre observables) pour l'observateur, mais qui sont "internes" au phénomène étudié...».

Référentiels "espaces-temps-imbrications". A notre avis, la causalité "interne" implique l'usage de référentiels "espaces-temps-imbrications" qui ne peuvent pas être réduits à l'espace-temps habituel. En effet, la description fournie par un R.A. générique à une variable d'environnement prend en compte non seulement le passé mais également un certain *futur idéalisé*, qui provient de la structure d'imbrication rigide associée au R.A. générique. Ce futur ne peut pas se manifester si un observateur-acteur cherche à exploiter *arbitrairement* les connaissances déduites de la structure d'imbrication, car il déforme alors cette structure. Une action dans un référentiel "espace-temps-imbrications" ne relève donc pas du mode opératoire adopté habituellement en physique.

Niveaux de description et niveaux d'organisation. Le problème du bouclage structurel rejoint le principe "d'invariance approchée sous l'effet de changements d'échelle" (exprimé au paragraphe 3), dans la mesure où certains niveaux d'imbrication correspondent effectivement à des niveaux d'organisation. Voici comment ce problème est abordé en [S12]. Les niveaux d'organisation sont définis à partir d'une réflexion sur les niveaux de description. En bref, on distingue plusieurs types de niveaux de description : les niveaux de structuration, les niveaux de fonctionnement qui résultent de la compatibilité "locale" des descriptions séquentielles et

parallèles, et les niveaux de synthèse. Un niveau d'organisation émerge s'il y a cohérence [2, p. 303-316] des trois types de niveaux de description. En général, cette cohérence est accompagnée d'optimisations (cf. L. Saint-Paul in [2, p. 25-45]).

Changement de niveaux. Il peut être réalisé pas à pas de la façon suivante :

- 1) dans une première étape, le R.A. est "linéarisé", ce qui implique le choix d'un BCR limite et d'un pilote; on obtient ainsi un *espace vectoriel tangent*, qui est à base polynomiale;
- 2) ensuite, une partie de cet espace vectoriel est muni d'une *métrique* adéquate;
- 3) la troisième étape concerne l'introduction de *propriétés affines*.

Un changement de niveau est réalisé si la forme quadratique obtenue peut être considérée comme la partie d'un R.A. stabilisé dégénéré où n'interviennent que des variables principales et s'il est possible de lui adjoindre un environnement qui le stabilise.

La "linéarisation" fait apparaître des variables adimensionnelles; elle présente une grande analogie avec la procédure associant une algèbre de Lie à un groupe de Lie. Le choix d'une métrique adéquate est apparenté à la détermination de la forme de Killing; elle doit d'ailleurs déboucher sur un BCR sous-jacent (compte tenu d'un éventuel "effet miroir). Enfin, l'introduction de propriétés affines évoque les systèmes de racines associés aux algèbres de Kac-Moody. Mais il s'agit seulement d'analogies car il faut prendre en compte plusieurs points de vue (la linéarisation peut concerner un fonctionnement en X,Y,V ou en A,B,V dans le cas le plus simple); on doit passer d'un fonctionnement séquentiel à un fonctionnement parallèle (ce qui implique un dénombrement des états, le choix de références temporelles, l'expression des contraintes de voisinage,...); et le pilote ne doit pas être oublié car c'est lui qui assure la cohérence de l'ensemble en faisant intervenir fondamentalement les imbrications de niveaux.

Un premier bouclage se manifeste dans les ESD du nouveau R.A., qui reflètent la structure des autres niveaux. Mais comme la procédure de changement de niveaux esquissée ci-dessus peut être appliquée à plusieurs reprises, il existe des bouclages structurels plus profonds qui mettent en coïncidence des parties de R.A. relatifs à des niveaux d'organisations différents.

Liaison R.A. - systèmes de racines d'algèbres de Lie. En fait, le raisonnement précédent fait intervenir deux types de liaison avec les structures de Lie. Il y a la coorespondance établie par Ph. Riot : elle se situe au niveau du BCR sous-jacent qui est interprété comme un système de racines; la forme invariante du groupe de Lie ne se manifeste pas au niveau du R.A. Le deuxième type de liaison est différent : il se situe au niveau du BCR d'environnement et correspond aux recherches menées antérieurement par le groupe Systema; dans le cas des groupes de Lie SO(n), la forme quadratique invariante est liée au support du R.A. Le changement de niveaux esquissé précédemment revient donc à considérer le BCR d'environnement du niveau N comme une partie du BCR sous-jacent du niveau N+1.

Bouclage le plus simple. Soit \mathcal{R} un R.A. et $\mathcal{R}^{(1/2)}$ celui qui est obtenu par le changement de niveau indiqué ci-dessus. Effectuons une nouvelle fois l'opération; le nouveau R.A. est noté $\mathcal{R}^{(1)}$. Dans le cas le plus simple, $\mathcal{R}^{(1)}$ décrit les transformations laissant invariante la structure stabilisée de \mathcal{R} . C'est le R.A. appelé "relateur dual" par L. Nottale car le bidual $\mathcal{R}^{(2)}$ peut être le R.A. initial \mathcal{R} . Les transformations décrites par $\mathcal{R}^{(1)}$ sont directement liées aux transformations de ramification. Des applications en thermodynamique ont été envisagées.

CONCLUSION

Le R.A. est un outil mathématique développé spécifiquement pour l'étude des systèmes naturels. Il exprime de façon très générale un principe d'adaptation d'un système à son environnement et s'appuie sur des structures sous-jacentes associées, notamment, aux algèbres de Lie et aux catastrophes élémentaires.

Le concept d'ESD est fondamental pour les applications en systémique car il ne gomme pas la structure des sous-systèmes et introduit une description du système global à l'intérieur des éléments de description. Penser en terme d'ESD revient à remplacer mentalement les petits parallélépipèdes du calcul intégral-différentiel par des cellules vivantes!

Les systèmes génériques apportent une cohérence globale et de nouvelles idées sur les notions d'espace et de temps qui doivent être étroitement couplées aux imbrications de niveaux.

Un langage de description, fondé sur des types de singularités, des classes de fonctionnement et des nombres d'information virtuelle, devrait exprimer des relations de voisinages et le développement de dynamiques dans un champ morphogénétique. La première vérification concernera le niveau cellulaire (construction d'une protéine à partir d'un brin d'ADN). Ensuite, ce langage devrait devenir un langage de communication utilisable simultanément à différents niveaux, en comportant flou et ambiguïtés.

A notre avis, les R.A. formalisent des idées mentionnées par plusieurs physiciens actuels. Il existe d'ailleurs des liens étroits entre R.A. et d'autres outils, notamment la théorie des singularités, la dynamique chaotique, les fractals,... Les nombres p-adiques (et leurs généralisations) joueront dans l'avenir un rôle très important. Mais aucun de ces outils ne peut prétendre englober les autres; ils sont comme des cellules d'un organisme pluricellulaire que le cerveau humain ne peut appréhender globalement. En fait, l'homme est en train de comprendre que son cerveau n'est pas au centre du monde...

BIBLIOGRAPHIE TRES SOMMAIRE ET REFERENCES

Relateurs arithmétiques (heuristiques; formalisme)

- [S1] Th. MOULIN, Cl. VALLET, D. VERNEY, Sur la possibilité de représenter le réel au moyen de relateurs arithmétiques, *Revue du Cethedec*, 1971 (122 pages).
 [S2] Cl. VALLET, Emergence et imbrication de niveaux d'organisation dans les systèmes complexes, in *8e Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1976*, p. 187-199.
 [S3] J.-P. LUMINET, Relateurs arithmétiques stabilisés : Imbrication des cycles et méthode de classification, *Revue du Cethedec*, n° 62, 1980, p. 55-95.
 [S4] L. NOTTALE, Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *Revue du Cethedec*, n° 69, 1981, p. 117-155.
 [S5] M. FERRE, The geometry of leaf morphogenesis : A theoretical proposition, *Acta Biotheoretica* 33 : 85-132 (1984).
 [S6] J. CHASTANG, M. FERRE, S. GOLINSKY, J.-P. LUMINET, Th. MOULIN, L. NOTTALE, Ph. RIOT, Cl. VALLET, *Cahiers Systema* n° 9 (1982, p. 5-117), n° 10 (1983, p. 45-149), n° 11 (1983, p. 54-137), n° 12 (1986, p. 5-113), n° 13 (1991, p. 1-144), édités par Association Systema, 30 rue Croix Bosset, F-92310 Sèvres.

Relateurs arithmétiques (documents de synthèse récents)

- [S7] F. CHAUVET, M. FERRE, Th. MOULIN, Ph. RIOT, Cl. VALLET, *Introduction aux relateurs arithmétiques*, Note ENSTA (32 bd Victor, 75015, Paris), 20 juin 1988 (60 pages).
 [S8] Th. MOULIN, Le relateurs arithmétique : un moyen d'associer localement des notions d'espace, de temps et de niveau d'imbrication dans les systèmes naturels, in *Perspectives Systémiques*, P. Paulré, dir., l'Interdisciplinaire (480, rue de la Glanée, 69760 Limonest), 1989, p. 89-104.
 [S9] Th. MOULIN, Le relateurs arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques, *Revue Int. de Systémique*, Vol. 3, n° 4, 1989, p. 459-483.
 [S10] F. CHAUVET, Th. MOULIN, Ph. RIOT, L. SAINT-PAUL, Cl. VALLET, *Travaux du groupe Systema publiés en 1989*, Rapport de recherche ENSTA n° 241 (32 bd Victor, 75015 Paris), décembre 1989 (101 pages).
 [S11] M. FERRE, H. LE GUYADER, Plant morphogenesis : a geometrical model for the ramification, *Acta Bioth.*, Vol. 38, n° 3/4, 1990, p. 181-206.
 [S12] Th. MOULIN, Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques, *Revue Int. de Systémique*, Vol. 5, n° 5, 1991, p. 517-560.

[S13] Fr. CHAUVET, Th. MOULIN, Ph. RIOT, Cl. VALLET, Quatre communications concernant des applications des relateurs arithmétiques en physique, biologie, neuroscience, in *Actes du XIIIe Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1989*, «Symposium XXIII, Systèmes naturels», p. 1178-1189, 1199-1218, 1230-1237.

[S14] F. BOCCARA, Fr. CHAUVET, M. FERRE, S. GOLINSKY, Th. MOULIN, Ph. RIOT, L. SAINT-PAUL, Cl. VALLET, Huit communications concernant des applications des relateurs arithmétiques en physique, biologie, neuroscience, psycho-sociologie, économie, in *Actes du XIIIe Congrès Int. de Cybernétique, Namur 1992*, «Symposium XXVII, Systèmes naturels», 24-28 août 1992 (à paraître).

Autres références

[1] B. PAULRE (dir.), *Perspectives Systémiques*, l'Interdisciplinaire (480, rue de la Glante, 69760 Limonest), 1989, 318 pages.

[2] F. LE GALLOU, B. BOUCHON-MEUNIER (dir.), *Systémique - Théorie & applications*, éd. par TecDoc-Lavoisier (11 rue Lavoisier, F-75384 Paris Cedex 08), 1992, 341 pages.

[3] B. BOUCHON-MEUNIER (dir.), *Congrès Européen de Systémique CES1, Tome I*, Lausanne Oct. 3-6 1989, édité par AFCET (176 boulevard Péreire, F-75017 Paris), 1989, 580 pages.

[4] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, W.A. Benjamin Inc., Mass., 1972, 362 pages.

[5] P. SLODOWY, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Lect. Notes in Math. n° 815, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[6] V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADE, *Singularités des applications différentiables, Tome I*, Editions Mir, Moscou, 1986 (original en russe, 1982).

[7] J.-L. VULLIERME, *Le concept de système politique*, P.U.F., Paris, 1989, 576 pages.

[8] G. MAUGE, Tentative de formalisation de certains concepts de l'autonomie selon P. Vendryès, in *Actes du XIIIe Congrès International de Cybernétique, Namur (Belgique), 24-28 août 1992*, 5 pages (à paraître).

[9] R. THOM, *Esquisse d'une sémiophysique*, InterEditions, Paris, 1988, 285 pages.

[10] M. BARNESLEY, *Fractals everywhere*, Academic Press, N.Y., 1988, 394 pages.

[11] Z.I. BOREVITCH, I.R. CHAFAREVITCH, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1967, 489 pages.

[12] Y. AMICE, *Les nombres p-adiques*, P.U.F., Paris, 1975, 189 pages.

[13] Cl. ITZYKSON, J.-M. DROUFFE, *Théorie statistique des champs, Tomes I et II*, InterEditions, 1989, 392+394 pages.

[14] L. NOTTALE, Fractals and the quantum theory of spacetime, *Int. Journal of Modern Physics A*, Vol. 4, n° 19, 1989, p. 5047-5117.

[15] A. LE MEHAUTE, *Les géométries fractales*, Hermes, Paris, 1990, 198 pages.

[16] M. JOUVET, *Le sommeil et le rêve*, Editions Odile Jacob, Paris, 1992, 220 pages.

[17] P. VENDRYES, *Vers la théorie de l'homme*, P.U.F., Paris, 1973, 283 pages.

[18] B. PAULRE, *La Causalité en Economie*, Presses Universitaires de Lyon, 1985, 440 pages.