



HAL
open science

Sélection et classement d'actions en avenir incertain

Michel Rizzi

► **To cite this version:**

Michel Rizzi. Sélection et classement d'actions en avenir incertain. [Rapport de recherche] Centre national de l'entrepreneuriat(CNE); Laboratoire d'analyse et modélisation de systèmes pour l'aide à la décision (LAMSADE). 1981, 162 p., figures, tableaux. hal-02185333

HAL Id: hal-02185333

<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02185333v1>

Submitted on 16 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DEG
2262

DOCUMENT DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université de Paris-Dauphine)

Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N° 656

SELECTION ET CLASSEMENT D'ACTIONS

EN AVENIR INCERTAIN

DOCUMENT N° 14
mars 1981

Michel RIZZI

1.4
~~1.4~~

LABORATOIRE D'ANALYSE ET MODELISATION DE SYSTEMES
POUR L'AIDE A LA DECISION (LAMSADE)

RESPONSABLE : B. ROY

PUBLICATIONS DISPONIBLES (*)

CAHIERS

- N° 1 - H. KHOUADJA, B. ROY - Comment choisir la localisation d'une grande école d'ingénieurs : l'exemple de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille.
- N° 2 - J. MOSCAROLA, B. ROY - Procédure automatique d'examen de dossiers fondée sur un classement trichotomique en présence de critères multiples.
- N° 3 - B. ROY - A conceptual framework for a normative theory of "decision-aid".
- N° 4 - M.C. PORTMANN - Notes d'après le livre de BAKER : "Introduction to sequencing and scheduling".
- N° 5 - E. JACQUET-LAGREZE - Explicative models in multicriteria preference analysis.
- N° 6 - A. BILLIONNET - Un modèle d'aide à la décision visant à adapter la politique de personnel aux besoins prévisionnels.
- N° 7 - J.L. GIORDANO, J.C. SUQUET - Aide à la décision en matière d'organisation d'atelier : compromis entre les composantes humaines et économiques. Cas d'une chaîne.
- N° 8 - B. ROY - Optimisation et aide à la décision.
- N° 9 - Ph. VINCKE - Quasi-ordres généralisés et modélisation des préférences.
- N° 10 - J. ABADIE, F. MESLIER - Présentation synthétique de modèles de prévision à très court terme de l'énergie journalière produite par Electricité de France et de la température moyenne journalière relevée à Paris-Montsouris.
- N° 11 - J. MOSCAROLA - Multicriteria decision-aid : Two applications in education management.
- N° 12 - H. WALLENIUS, J. WALLENIUS, P. VARTIA - An approach to solving multiple criteria macroeconomic policy problems and an application.
- N° 13 - E. JACQUET-LAGREZE, B. ROY, J. MOSCAROLA, G. HIRSCH - Description d'un processus de décision - I : Quelques concepts.
- N° 14 - R. CANONNE, J.L. DAMRET, J.P. KIEFFER - Etude des contraintes liées à la prise de décision en gestion de production.
- N° 15 - B. ROY, G. CHAUVIN, M.C. PORTMANN - La catégorie des modèles d'ordonnancement : Un essai de définition.
- N° 16 - E. JACQUET-LAGREZE, J. SISKOS - Une méthode de construction d'une fonction d'utilité additive, explicative d'une préférence globale.
- N° 17 - G. HIRSCH, E. JACQUET-LAGREZE, J.C. MARCHET - Description d'un processus de décision - II : Illustration : Le cas de la raffinerie de Brest.
- N° 18 - E. JACQUET-LAGREZE - De la logique d'agrégation de critères à une logique d'agrégation-désagrégation de préférences et de jugements.
- N° 19 - C. DUPONT-GATELMAND - Un modèle de décomposition additive des préférences : Le programme BENITO.

(*) Pour se les procurer, s'adresser au LAMSADE, Université de Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, F-75775 PARIS CEDEX 16 (Bureau P 617, Téléphone : 505 14 10 poste 24 34).

- N° 20 - C. DUPONT-GATELMAND - Une méthode de Codage Adaptatif en Typologie : Le programme CATY.
- N° 21 - E. JACQUET-LAGREZE, J.C. MARCHET - Description d'un processus de décision - Extension d'une station d'épuration d'eaux usées.
- N° 22 - W. MAJOR, J. MOSCAROLA - Analyse d'un processus de décision - Quelques conclusions à partir d'une étude de cas sur la sélection de projets d'expérience en physique des hautes énergies.
- N° 23 - J.C. MARCHET, J. SISKOS - Aide à la décision en matière d'environnement : Application au choix de tracé autoroutier.
- N° 24 - J. SISKOS - Les programmes UTA - Manuel d'utilisation.
- N° 25 - C.J. MAESTRE - A propos de la notion de réseau.
- N° 26 - J. ABADIE, D. TRAVERS - Une approche simplifiée de la méthode de Box et Jenkins pour l'analyse et la prévision des séries temporelles unidimensionnelles.
- N° 27 - Ph. VINCKE - Vrais, quasi, pseudo et précritères dans un ensemble fini : Propriétés et algorithmes.
- N° 28 - B. ROY, Ph. VINCKE - Pseudo-critères et systèmes relationnels de préférence : Nouveaux concepts et nouveaux résultats en vue de l'aide à la décision.
- N° 29 - J.L. RICHARD - Vers une méthodologie multicritère de l'aide à la décision stratégique.
- N° 30 - Y.A. BERNABEU - Discrétisation d'un pavé de \mathbb{R}^n soumis à des contraintes linéaires et énumération des actions efficaces : le programme ENUMEF.
- N° 33 - E. JACQUET-LAGREZE - Processus de décision et de comportement en matière de déplacements privés - Concepts et modèles théoriques.
- N° 34 - E. JACQUET-LAGREZE, B. ROY - Aide à la décision multicritère et systèmes relationnels de préférences.
- N° 35 - Y.A. BERNABEU - Manuel d'utilisation du programme ELECTRE III.

LABORATOIRE D'ANALYSE ET MODELISATION DE SYSTEMES
POUR L'AIDE A LA DECISION (LAMSADE)
RESPONSABLE : B. ROY

PUBLICATIONS DISPONIBLES (*)

DOCUMENTS

- N° 4 - B. ROY - De quelles décisions s'agit-il ? Qui aider et comment ? (Partie introductive d'un livre en préparation : "L'aide à la décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger").
- N° 5 - B. ROY - Comment appréhender les possibles et en quels termes formuler un problème ? (1ère partie d'un livre en préparation : "L'aide à la décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger").
- N° 6 - B. ROY, Ph. VINCKE - L'analyse multicritère.
- N° 9 - B. ROY - Comment appréhender les préférences et jusqu'où aller dans leur modélisation ? (2e partie d'un livre en préparation : "L'aide à la décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger").
- N° 10 - J. MOSCAROLA - La contribution des travaux empiriques allemands à la théorie du processus de décision dans les organisations.
- N° 11 - F. GARDES - L'individu et son environnement - Analyse critique de quelques théories du choix individuel, apport d'un questionnement philosophique (Heidegger) pour une critique du cadre conceptuel de la micro-économie.
- N° 12 - Activités du LAMSADE - Bilan 1976-1980 et perspectives.
- N° 13 - H.M. WINKELS - Complete efficiency analysis for linear vector maximum systems : Theoretical background and an algorithm.
- N° 14 - M. RIZZI - Sélection et classement d'actions en avenir incertain.
- N° 15 - B. ROY - Comparaison des actions et évaluation de leurs conséquences (2e partie d'un livre en préparation : "L'aide à la décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger").
- N° 16 - Y.A. BERNABEU, H.M. WINKELS - MIRACLE : Une Méthode Interactive de Réduction, d'Amélioration et de Classification Evolutive.

(*) Pour se les procurer, s'adresser au LAMSADE, Université de Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, F-75775 PARIS CEDEX 16 (Bureau P 617, Téléphone : 505 14 10 poste 24 34).

ABSTRACT

This paper is concerned with decision-making problems under uncertainty. A new selection and ranking method is propounded, that allows to take into account the whole information available about the future. The model worked out is based upon the construction of scenarii which are "possible futures" representative of the states of the nature, and the definition of a "plausibility area" inside which the alternatives are compared.

RESUME

Ce document traite des problèmes de décision en avenir incertain. Il propose une nouvelle méthode de sélection et de classement d'actions qui permet de prendre en compte au mieux la quantité d'information disponible sur l'avenir. Le modèle développé repose sur la construction de scénarios qui sont des "futurs possibles" représentatifs des états du monde à venir, et la détermination d'un "domaine de plausibilité" à l'intérieur duquel on se place pour comparer les projets candidats.

S O M M A I R E

		<u>Page</u>
	<u>INTRODUCTION</u>	7
I	- <u>UNE VUE D'ENSEMBLE DES PROBLEMES DE DECISION EN AVENIR INCERTAIN</u>	13
	1. <u>Univers déterminé, aléatoire et incertain</u>	16
	2. <u>Modélisation globale d'un problème de décision en avenir incertain</u>	18
	2.1 Représentation de l'avenir incertain au moyen de scénarios contrastés	18
	2.2. Caractère évolutif des actions potentielles	22
	3. <u>Les modèles de choix en avenir incertain</u>	28
	3.1 Evaluations nominales et utilités conditionnelles	29
	3.2 L'approche objectiviste	32
	3.3 L'approche subjectiviste	34
	3.4 La méthode proposée	40
II	- <u>EVALUATION DES ACTIONS AU MOYEN D'UTILITES CONDITIONNELLES</u>	41
	1. <u>Transformation d'une évaluation brute en utilité conditionnelle</u>	43
	1.1 Théorème d'existence et d'unicité d'une fonction d'utilité	43
	1.2 Construction de la fonction d'utilité	46
	1.3 Valorisation des branches de l'arbre de décision	51

		4.
		<u>Page</u>
	2. <u>Mode de traitement des évaluations imprécises</u>	52
	2.1 Les facteurs d'imprécision	52
	2.2 Quelques rappels sur la théorie des sous-ensembles flous	55
	2.3 Imprécision et nombres flous	59
	2.4 Valorisation des branches de l'arbre de décision dans le cas flou	64
III	- <u>RECUEIL DE DONNEES ET CONSTRUCTION DU DOMAINE DE PLAUSIBILITE</u>	69
	1. <u>Définition d'un ensemble de jeux de poids admissibles</u>	71
	1.1 Quel type d'information recueillir ?	71
	1.2 Formulation mathématique des contraintes de plausibilité	73
	2. <u>La collecte initiale des données</u>	82
	2.1 Les trois phases de la collecte	83
	2.2 Les relations contradictoires et leur mise en évidence	88
	3. <u>Réduction interactive du domaine de plausibilité</u>	94
IV	- <u>SELECTION ET CLASSEMENT D'ACTIONS PAR SOUS-AGREGATION</u>	103
	1. <u>Discrétisation du polyèdre \mathcal{P} et calcul des sommes pondérées</u>	105
	2. <u>Application de critères objectivistes au polyèdre \mathcal{P}</u>	107

	<u>Page</u>
3. <u>Proposition d'un nouveau critère de choix</u>	110
3.1 Surclassement trivial et surclassement flou partiels	111
3.2 Construction d'une relation de surclassement global à partir des J relations partielles	115
3.3 Recherche du sous-ensemble flou des actions non-dominées	118
4. <u>Comparaison de différents critères de choix</u>	125
<u>CONCLUSION</u>	129
<u>ANNEXES :</u>	135
<u>Annexe 1</u> : Quelques exemples de fonctions d'apparance pour des nombres flous	137
<u>Annexe 2</u> : Relations de plausibilité \mathbb{I} , \mathbb{P} , \mathbb{R} et conditions d'existence d'une mesure de probabilité	139
<u>Annexe 3</u> : Algorithme de recherche d'une borne supérieure pour le seuil δ	143
<u>Annexe 4</u> : Méthode de discrétisation d'un polyèdre convexe par quadrillage	149
<u>Annexe 5</u> : Propriétés du critère de non-dominance floue	153
<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	157



I N T R O D U C T I O N

Notre époque est marquée par l'accélération du changement et son corollaire direct : l'accroissement de l'incertitude. Ces phénomènes ont pour effet immédiat de compliquer la gestion des systèmes en démultipliant le nombre de conséquences possibles d'une même action et en restreignant la prévision à une période toujours plus courte.

Qu'il s'agisse de problèmes d'investissement à long terme, du choix de conditions d'exploitation, du lancement de produits nouveaux ou de la diversification des activités d'une entreprise, les décideurs se trouvent toujours davantage confrontés à un environnement mouvant dont ils savent mal apprécier l'évolution. Cette situation appelle le développement de procédures permettant de conférer aux décisions en avenir incertain un minimum de rationalité, et c'est dans ce but qu'a été élaborée la méthode présentée dans ce document.

Cette méthode vise à utiliser l'information disponible sur le futur auprès d'un ensemble d'experts afin de fournir au décideur un certain nombre d'outils qui lui serviront à forger ses choix.

Le modèle développé s'inspire largement dans sa conception des travaux de FOURGEAUD, LENCLUD, SENTIS ([17] et [18]) et des recherches effectuées à la SEMA ([45]) ; il

repose sur la construction de scénarios qui sont des "futurs possibles" représentatifs des états du monde à venir, et la détermination d'un "domaine de plausibilité" à l'intérieur duquel on se place pour comparer les actions potentielles, c'est-à-dire les projets candidats.

Une hypothèse fondamentale implicite dans cette formalisation est l'indépendance entre, d'une part la définition des actions, et d'autre part les états de la nature à prendre en considération et leurs plausibilités respectives. Ceci ne signifie pas pour autant que nous ayons évacué la possibilité pour le décideur d'infléchir au bout d'une certaine période sa stratégie initiale en intégrant les informations rassemblées entre temps (ce caractère évolutif des actions sera au contraire toujours présent dans le modèle), mais cette hypothèse rend la méthode inopérante pour le traitement de problèmes où les choix du décideur sont susceptibles de modifier l'environnement. Ce faisant, est-ce que nous réduisons de façon sensible le champ d'application de la méthode ? Il nous semble que non, une investigation rapide nous ayant montré qu'un grand nombre de cas concrets satisfaisaient à cette hypothèse de non-interaction, comme on pourra d'ailleurs le vérifier au travers de quelques exemples, et qu'il y avait là un domaine suffisamment vaste pour justifier l'élaboration d'un modèle spécifique.

Dans la mesure où nous étions avant tout concernés par la prise en compte des phénomènes d'incertitude, nous avons volontairement laissé de côté tout ce qui a trait à la construction et à l'agrégation des critères de jugement des actions. Nous nous sommes donc limités dans notre exposé à envisager le cas où la comparaison des actions ne fait intervenir qu'un seul critère, mais nous pensons qu'en tout état de cause, il n'y a aucun obstacle à ce que les résultats fournis par notre méthode soient utilisés comme inputs de certaines procédures d'agrégation dans une éventuelle phase ultérieure de la modélisation.

L'objectif que nous nous sommes fixés est de répondre aux deux questions suivantes :

- On veut déterminer la (ou les) meilleure(s) action(s) ; comment sélectionner ?
- On veut positionner les actions les unes par rapport aux autres ; comment les classer ?

Le lecteur averti reconnaîtra là les problématiques " α " et " γ " au sens où B. ROY les a définies (cf. [38]).

Dans ce document, nous nous sommes efforcés de décrire la méthode proposée pas à pas, de la façon la plus détaillée possible et en suivant le cheminement logique des idées ; en particulier, nous avons pris le parti de traiter

dans le cours de l'exposé - et non en annexe - de certains points secondaires, mais qui nous paraissaient néanmoins importants pour la bonne compréhension de l'ensemble.

Dans le premier chapitre, nous essaierons de caractériser de manière plus précise une décision en situation d'avenir incertain ; nous ferons un bref tour d'horizon critique des modèles en vigueur à ce jour et nous esquisserons les grandes lignes de notre méthode. Le chapitre II sera consacré aux problèmes de valorisation des actions ; nous détaillerons les raisons qui font de l'imprécision des évaluations un problème-clé de la modélisation et nous étudierons comment la théorie des nombres flous peut nous aider à y faire face. Dans le chapitre III, nous verrons comment rassembler et utiliser l'information disponible sur l'avenir dans le but de réduire l'incertitude ; nous nous placerons dans le cas le plus général où l'homme d'étude est confronté à plusieurs experts aux avis éventuellement contradictoires. Dans le chapitre IV enfin seront présentés plusieurs critères de choix que l'on comparera ensuite aux critères traditionnels.

CHAPITRE I

UNE VUE D'ENSEMBLE DES PROBLEMES

DE DECISION EN AVENIR INCERTAIN

Prendre une décision, c'est opérer un choix sur un ensemble A d'actions potentielles $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$. Ce choix peut relever de problématiques différentes : choix de l'action la plus satisfaisante, de toutes les bonnes actions ou de quelques-unes parmi les meilleures, mais, en tout état de cause, il suppose que l'on sache comparer les éléments de A et donc apprécier les conséquences de chacun d'eux. La plupart du temps, ces conséquences seront complexes et multiples, ce qui nécessitera la prise en compte de plusieurs critères d'évaluation (*). Bien que, rappelons-le, ce problème ne nous intéresse pas directement ici, il faut souligner que la construction de ces critères n'est généralement pas aisée. Mais il ne s'agit pas là de l'unique difficulté rencontrée par le modélisateur ; en effet, pour chacun

(*) : On parlera de "critère d'évaluation" et non de "critère" tout court, afin d'éviter toute confusion avec la notion de "critère de choix" à laquelle il est fait référence par la suite.

des critères ainsi définis, le calcul proprement dit de l'évaluation de chaque action est bien souvent très délicat. A cet égard, nous proposons de distinguer trois catégories de situations largement différentes les unes des autres.

1. - UNIVERS DETERMINE, ALEATOIRE ET INCERTAIN (*)

1) Univers déterminé : Dans ce cas, le calcul des conséquences ne fait intervenir que des facteurs bien définis. Des décisions comme l'achat d'une voiture ou l'acceptation ou le refus d'un étudiant à un examen se rattachent à cette situation: les performances des modèles de véhicule en concurrence, les notes de l'étudiant peuvent être connues sans ambiguïté.

2) Univers aléatoire : Ici, les paramètres intervenant dans le calcul des évaluations sont incertains, mais leurs fluctuations peuvent être prévues dans une large mesure en faisant appel à des techniques d'échantillonnage. Un exemple-type relevant de ce cas est le problème de détermination du niveau optimal des stocks de rechange dans une entreprise : Pour évaluer les différentes politiques de gestion possibles, on a besoin de connaître le volume périodique des sorties du

(*) Ce découpage est inspiré du livre de J. MOTHES, "Incertitudes et décision industrielles". L'auteur y distingue une quatrième situation, dite d'"univers hostile", où, parmi les éléments à prendre en considération pour évaluer les conséquences de chacun des actes possibles, figurent des variables en partie contrôlées ou contrôlables par des adversaires. Nous préférons pour notre part rattacher ce cas aux décisions en situation d'avenir incertain.

stock ; or, ce volume n'est pas constant, mais le caractère répétitif des opérations de déstockage fournit une base de données suffisante pour permettre de le caractériser par une distribution de probabilité. Cette distribution sera construite à partir des fréquences observées attachées aux différents niveaux du volume des sorties :

Nombre de pièces de rechange sorties des stocks chaque mois	Fréquence observée (total : 1 000 observations)	Probabilité correspondante
0	50	0,050
1	286	0,286
2	372	0,372
3	248	0,248
4	44	0,044

Les éléments entrant dans le calcul des conséquences se présentant sous forme de distribution et non plus sous la forme d'un nombre unique , les évaluations des actions seront également de nature distributionnelle. Cependant, dans la plupart des cas, on pourra faire appel à la loi des grands nombres pour remplacer ces distributions de probabilité par leur espérance mathématique, simplifiant ainsi considérablement les problèmes de comparaison.

3) Univers incertain : Lorsqu'on ne dispose pas

d'informations objectives sur les fluctuations des paramètres, ou lorsque la qualité et la quantité de ces informations sont insuffisantes, il n'est plus possible de considérer les éléments du calcul comme des variables aléatoires. On est alors en situation d'univers (ou d'avenir) incertain. D'une manière très générale, on peut dire que la plupart des décisions dont les effets se mesurent sur une longue période se rattachent à ce type de situation, car le comportement des actions y est largement dépendant de facteurs extérieurs et le caractère non répétitif de ces décisions rend toute démarche statistique inopérante.

2. - MODELISATION GLOBALE D'UN PROBLEME DE DECISION EN AVENIR INCERTAIN

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous nous limiterons dans toute la suite de notre exposé à considérer un seul critère d'évaluation. Nous supposerons sans perte de généralité que les préférences du décideur sont une fonction croissante des évaluations sur ce critère. (Pour simplifier, on pourra imaginer que ce critère représente un bénéfice).

2.1. Représentation de l'avenir incertain au moyen de scénarios contrastés

Nous venons de voir que, contrairement au cas où l'univers est aléatoire, il n'existe en situation d'avenir

incertain aucune base statistique objective permettant de nous guider dans notre problème d'évaluation. La manière la plus intuitive et la plus répandue pour tourner cette difficulté est de considérer l'ensemble des états de la nature réalisables, et de chercher à évaluer le comportement des actions sur chacun de ces états, selon celui des états de la nature qui se réalise.

Un état de la nature est caractérisé par la description d'une situation future et par le cheminement des événements qui ont conduit à cette situation. Or, la multiplicité des événements et de leurs combinaisons dans le temps fait que le nombre d'états de la nature envisageables est souvent infini. Lorsque l'on veut adopter une attitude opérationnelle vis-à-vis de l'avenir, il est alors nécessaire de chercher à réduire cet ensemble ; c'est pourquoi nous proposons de rendre compte de l'incertitude au moyen d'un petit nombre de scénarios contrastés, c'est-à-dire de quelques grandes hypothèses d'évolution mutuellement exclusives à la fois représentatives et suffisamment "distantes" les unes des autres (*). Donnons quelques exemples volontairement très simplifiés :

a) Dans le cadre du développement agricole d'une région semi-désertique, on souhaite l'équiper d'un certain nombre de réservoirs d'alimentation en eau à des fins d'irrigation (**).

(*) : Ce procédé a déjà été utilisé à de multiples reprises (voir entre autres [6], [11], [19], [20], [45]).

(**) : Cet exemple est inspiré de [30].

L'incertitude porte sur le volume d'eau annuel nécessaire et donc sur l'étendue des terres à irriguer. On peut construire trois scénarios de la façon suivante :

- * 1° scénario : l'irrigation portera sur environ
100 000 ha ;
- * 2° scénario : l'irrigation portera sur environ
150 000 ha ;
- * 3° scénario : l'irrigation portera sur environ
200 000 ha.

b) On veut construire un entrepôt de stockage dont on cherche à déterminer la capacité optimale. L'incertitude porte sur l'évolution des besoins de stockage. On peut envisager quatre scénarios :

- * 1° scénario : ces besoins demeureront à leur niveau
actuel ;
- * 2° scénario : ces besoins s'accroîtront de 10 %
par an ;
- * 3° scénario : ces besoins s'accroîtront de 25 %
par an ;
- * 4° scénario : ces besoins augmenteront légèrement

pendant les cinq années à venir, puis se stabiliseront.

c) On recherche la solution architecturale la plus satisfaisante pour la construction d'un aéroport. L'incertitude porte sur le rythme d'évolution du trafic qu'on pourra représenter par les scénarios suivants :

* 1° scénario : le nombre de voyageurs atteindra 1,5 million la première année de mise en service, puis restera constant ;

* 2° scénario : le nombre de voyageurs atteindra 1 million la première année, puis progressera de 10 % par an ;

* 3° scénario : le nombre de voyageurs atteindra 700 000 la première année, puis progressera de 15 % l'an.

Bien entendu, en pratique, la construction des scénarios sera fondée sur des procédures plus sophistiquées que dans ces quelques exemples (*), mais l'important est de retenir que deux préoccupations doivent guider l'homme d'étude :

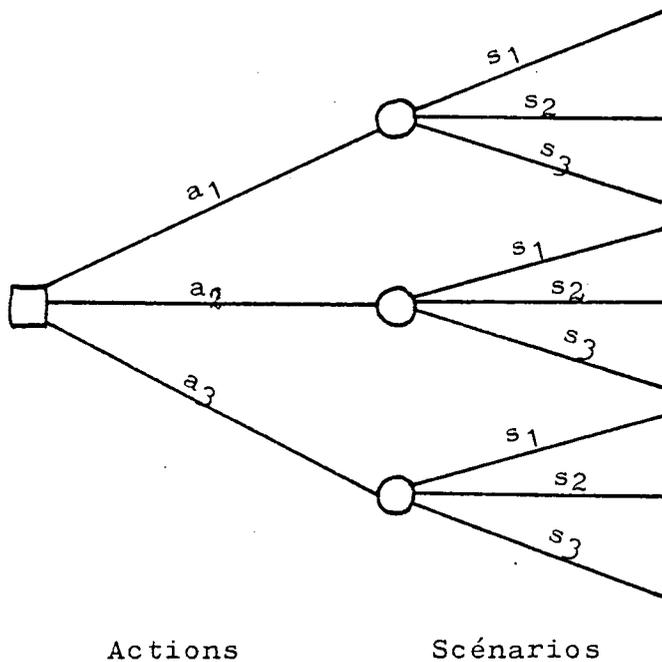
- ne pas privilégier certaines éventualités par rapport à d'autres ;

(*) : voir notamment [41].

- assurer une bonne représentativité des évènements.
 Nous reviendrons au chapitre II sur les problèmes posés par ce mode de représentation de l'incertitude.

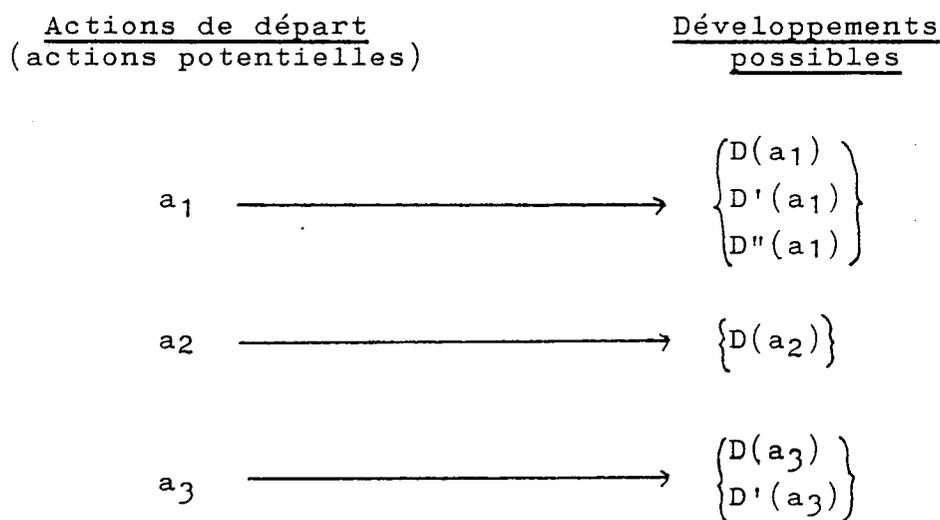
2.2. Caractère évolutif des actions potentielles

L'ensemble \mathcal{S} des scénarios $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_K$ étant ainsi déterminé, nous pouvons représenter notre problème à l'aide d'un arbre de décision de ce type (un carré \square symbolise une décision, et un cercle \circ le hasard) :



Cette représentation est cependant incomplète, car elle néglige un aspect fondamental des problèmes de choix en avenir incertain : la capacité d'adaptation des décisions

initiales à des contextes différents. On conçoit bien en effet que, plus l'environnement est fluctuant, plus le décideur sera porté à effectuer des choix qui lui ménagent une marge de réversibilité. En général, les actions sur lesquelles il doit se prononcer ne sont donc pas complètement définies au moment de la décision ; on peut simplement les caractériser dans ce qu'elles ont d'irréversible. On conviendra par conséquent d'appeler action potentielle a_i ($i = 1 \dots n$) la partie irréversible de l'une des décisions immédiates qui s'offrent au décideur. Au-delà, et pour chacune de ces possibilités de départ, un certain nombre de développements futurs sont envisageables : poursuite de la décision prise dans sa ligne originelle ou bien reconversion dans une direction différente.



Pour illustrer ce point, nous nous référerons à deux exemples ayant chacun fait l'objet d'une étude approfondie.

Dans le premier exemple, il s'agit de sélectionner une stratégie de développement des moyens de production d'énergie électrique (cf. DOBLES [12]). Les alternatives parmi lesquelles on doit choisir sont définies par les programmes de développement $X = (X_1, \dots, X_t, \dots, X_T)$ où X_t est l'accroissement en mW de la capacité du système de production à mettre en service l'année t . Du fait de la longue vie des équipements, l'horizon T est fixé à une trentaine d'année. L'élément X_t du vecteur X est lui-même un vecteur

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^h \\ \vdots \\ X_t^H \end{pmatrix}, \text{ où } X_t^h \text{ est la puissance en mW de l'équipement}$$

de type h à mettre en service l'année t . Or, il est illusoire de vouloir prendre toutes les décisions de développement X_t^h ($h = 1, H$; $t = 1, T$) actuelles et futures au même moment en raison de la situation d'incertitude dans laquelle on se trouve. Avec le temps en effet, de nouvelles informations apparaîtront et auront un effet décisif sur les développements X_t^h plus lointains. Il n'est donc pas convenable de se fixer pour objectif de sélectionner aujourd'hui la meilleure séquence des décisions d'expansion X_t^h jusqu'à l'horizon T . Mais d'autre part, en raison de la forte interdépendance de la production et de la longue vie des équipements, les choix portant sur les

périodes les plus éloignées sont conditionnés par les décisions antérieures. Il est donc naturel de segmenter le problème en distinguant des stratégies de départ qui sont des développements immédiats jugés relativement irréversibles du parc d'équipements et notés $X_a = (X_1, \dots, X_{t^0})$ (t^0 étant fixé), et un certain nombre de développements ultérieurs propres à chaque stratégie notés $D(X_a) = (X_{t^0+1}, \dots, X_T)$. Tel que le problème est formulé, les comparaisons concernent tous les développements futurs X_t^h possibles jusqu'à l'horizon T , mais le choix ne porte réellement que sur les stratégies X_a , c'est-à-dire sur la partie non réversible de la décision.

Le second exemple concerne la construction d'une unité de steam-cracking (cf. [45]). Le problème posé est le suivant : quelle doit être la capacité de cette unité - mesurée en tonnes d'éthylène produites - sachant que les limites habituelles sont de 200 000 t et 400 000 t ? On peut envisager de procéder à une augmentation de capacité de l'unité au bout de quelques années mais le terrain nécessaire à la construction étant situé dans une zone industrielle, une telle extension future ne sera possible que si l'on dispose dès le début de la surface nécessaire. On a donc distingué l'ensemble des actions immédiates et irréversibles engageant une grande partie de l'investissement, et l'ensemble des développements possibles de chaque action immédiate pour lesquels la décision est reportée à plus tard, après deux ans d'exploitation et en

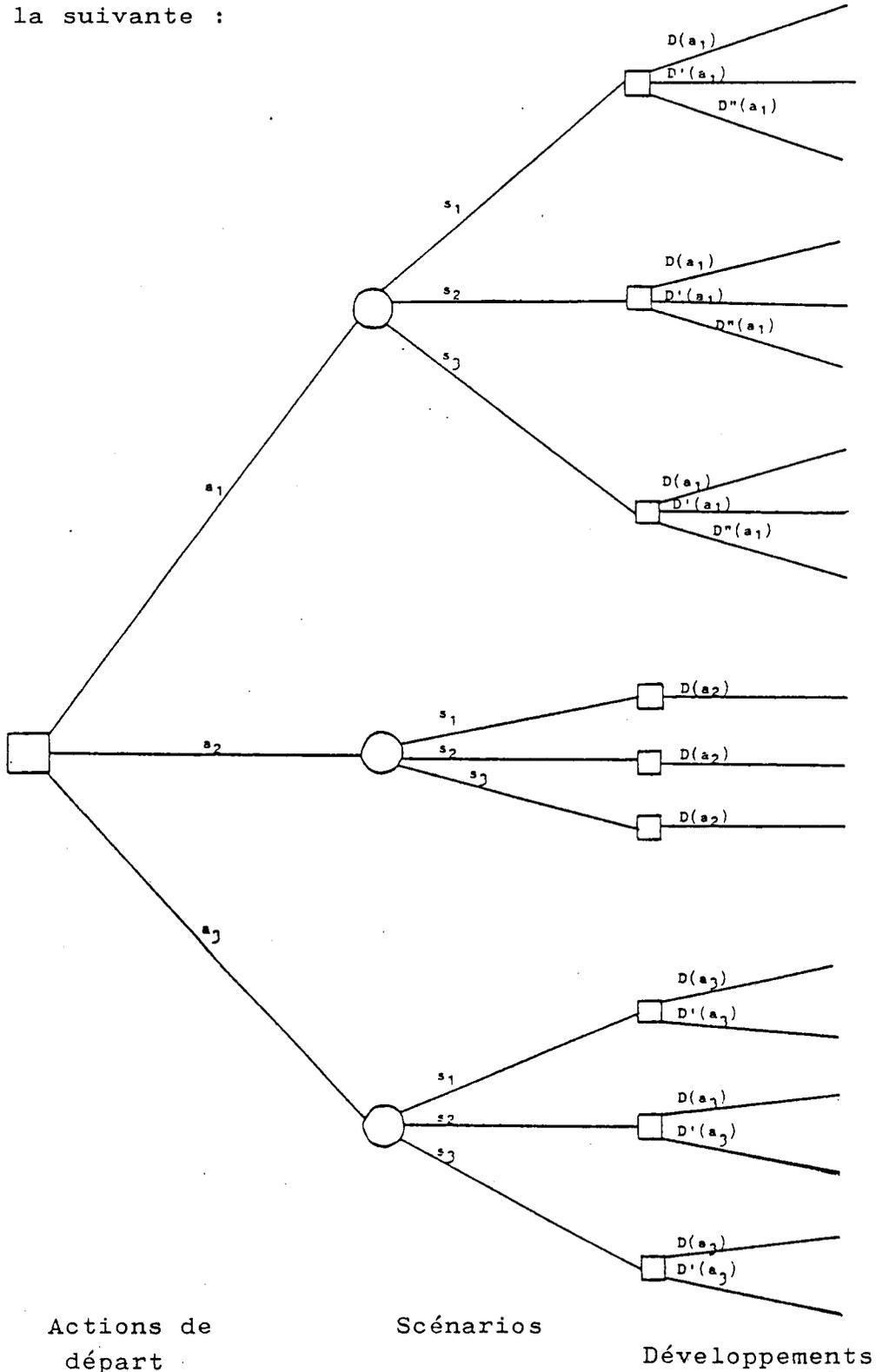
fonction de la conjoncture. Les six actions immédiates retenues sont :

- a₁ : construction d'un steam-cracking d'une capacité de 200 000 t et achat du terrain nécessaire à la production de 200 000 t.
- a₂ : construction d'un steam-cracking d'une capacité de 200 000 t et achat du terrain nécessaire à la production de 300 000 t.
- a₃ : construction d'un steam-cracking d'une capacité de 200 000 t et achat du terrain nécessaire à la production de 400 000 t.
- a₄ : construction d'un steam-cracking d'une capacité de 300 000 t et achat d'un terrain nécessaire à la production de 300 000 t.
- a₅ : construction d'un steam-cracking d'une capacité de 300 000 t et achat du terrain nécessaire à la production de 400 000 t.
- a₆ : construction d'un steam-cracking d'une capacité de 400 000 t

Pour chacune de ces actions, un certain nombre de développements ultérieurs sont envisageables ; ainsi, si on a choisi a₂, on peut, au bout des deux ans, soit maintenir la production à un niveau de 200 000 t, soit passer de 200 000 t à 300 000 t. De même que dans l'exemple précédent, les comparaisons entre

actions se font sur la base de l'investissement initial et de ses développements possibles, mais la décision de départ ne porte que sur a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 .

La structure réelle de l'arbre de décision est donc la suivante :



Avant de poursuivre, il nous paraît utile d'aborder ici la question suivante : quelle période doivent couvrir les scénarios ?, ou autrement dit, quel doit être l'horizon de l'étude ? Il est clair que la réponse dépend de la nature du problème posé ; cependant, on peut faire deux remarques d'ordre général :

- Premièrement, cet horizon ne doit pas être trop rapproché, sous peine de pénaliser les actions les mieux adaptables et donc les plus performantes dans un futur lointain ;

- Inversement, il ne doit pas être trop éloigné du moment où la décision est prise, afin de ne pas compliquer inutilement la construction des scénarios, compte tenu du fait qu'au-delà d'une période donnée, il devient impossible de dégager des hypothèses d'évolution réalistes de l'environnement pour lesquelles on puisse analyser le comportement des actions. C'est en s'efforçant de concilier ces deux exigences qu'homme d'étude et experts doivent fixer leur choix.

3. - LES MODELES DE CHOIX EN AVENIR INCERTAIN

Dans cette section, nous reprenons le schéma simplifié de la page 22.

3.1. Evaluations nominales et utilités conditionnelles

Intéressons-nous au cas d'un industriel qui désire étendre la capacité de son entreprise (*). L'incertitude à laquelle il est confronté porte sur les débouchés pour le produit qu'il fabrique : si leur progression est importante, il aura intérêt à procéder à des investissements massifs afin d'accroître ses bénéfices et de conserver sa part de marché, mais, dans le cas contraire, une telle décision peut le conduire à supporter des charges excessives sans contrepartie. Supposons qu'on a identifié trois scénarios caractérisant l'évolution du marché : progression de la demande nulle (s_1), progression égale à 10 % (s_2) et progression égale à 40 % (s_3). Les décisions possibles sont au nombre de trois :

a_1 : ne rien faire ;

a_2 : accroître la capacité existante de 15 % ;

a_3 : accroître la capacité existante de 50 %.

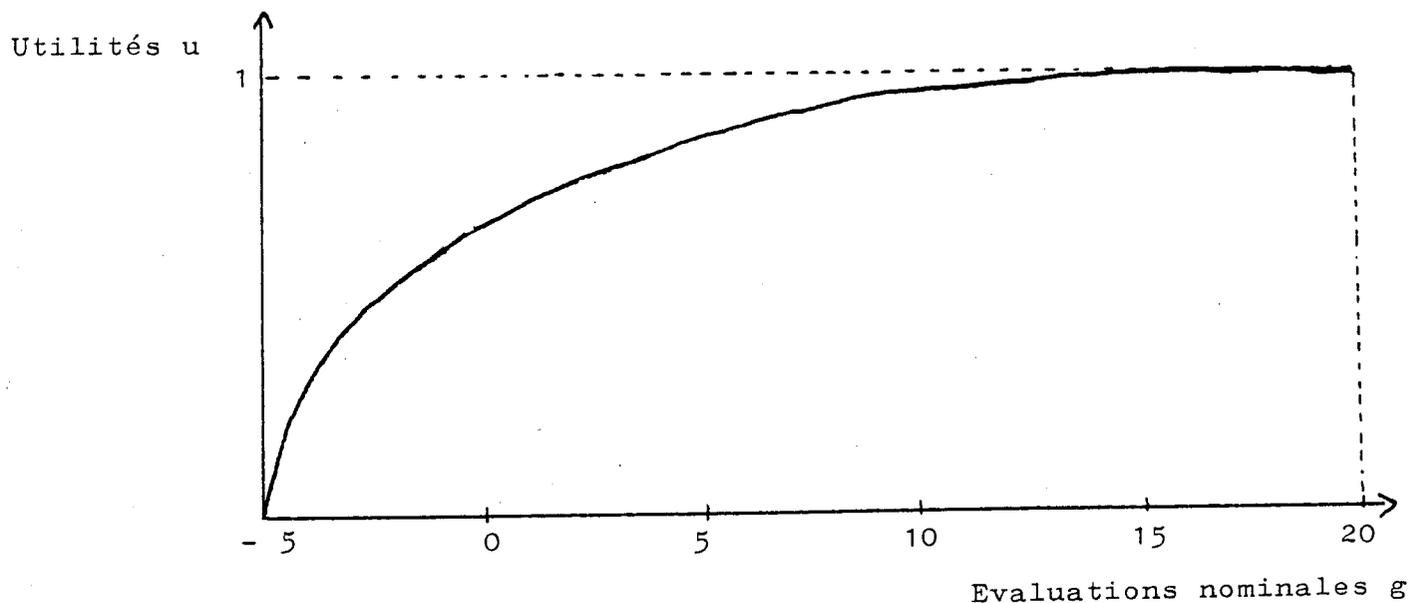
Pour chaque action, on a calculé un bénéfice actualisé en millions de francs dans les trois situations (Pour ne pas compliquer le problème, on estimera que ces valeurs ont été calculées avec toute la précision nécessaire).

(*) : Cet exemple est inspiré de J.MOTHES ([28]).

Tableau des évaluations $g_k(a_i)$

Scénarios Actions	s_1	s_2	s_3
a_1	20	10	5
a_2	4	12	18
a_3	- 5	14	19

A ce stade, il est légitime de soulever la question suivante : Est-il juste de prendre en considération ces évaluations nominales telles qu'elles se présentent, ou bien est-il nécessaire d'y substituer des évaluations subjectives ? Cette question peut se poser si, par exemple, une perte de 5 millions est susceptible de conduire notre industriel à la faillite. On voit bien alors qu'en termes de perception, l'écart entre - 5 et 0 n'a pas la même importance que l'écart entre 0 et 5 millions ; il faut donc changer d'échelle si l'on veut modéliser correctement le comportement de notre décideur, et transformer les évaluations nominales en utilités. On notera $u_k(a_i)$ l'utilité conditionnelle de l'action a_i pour le scénario s_k .



Nous reviendrons au chapitre III sur les fondements de la théorie de l'utilité, et sur la manière de construire une telle fonction ; pour l'heure, supposons que l'on a calculé les utilités partielles des trois actions pour chacun des scénarios :

Tableau des utilités conditionnelles $u_k(a_i)$

Scénarios Actions	s_1	s_2	s_3
a_1	1	0,679	0,500
a_2	0,458	0,750	0,938
a_3	0	0,813	0,969

Comment prendre une décision au vu de ce tableau ?

C'est ici que les points de vue divergent, et que s'opposent deux écoles : les objectivistes et les subjectivistes. Le désaccord entre objectivistes et subjectivistes porte sur l'opportunité d'introduire ou non dans la modélisation des degrés de croyance dans la réalisation des différentes hypothèses, possédant les propriétés des probabilités. Ce point renvoie à un débat plus général sur la nature fondamentale des probabilités qui n'entre pas directement dans notre propos (on trouvera une analyse complète sur ce sujet dans le livre de B. DE FINETTI : "Teoria delle probabilità" [9]) ; nous voulons simplement ici examiner ces deux approches à la lumière de l'exemple précédent et présenter à leur suite les grandes lignes d'une nouvelle méthode .

3.2. L'approche objectiviste

Les objectivistes, appelés encore théoriciens de l'échantillonnage, n'admettent que les probabilités fondées sur l'observation d'un échantillon et la notion de fréquence relative. En situation d'avenir incertain où l'échantillonnage n'est pas possible, ils refusent donc d'affecter aux différents scénarios des probabilités a priori fondées sur de simples suppositions. Voici quelques-uns des critères de choix qui se rattachent à cette conception (cf. [11]) :

a) le critère dit du maximin ou critère de WALD (*),

(*) : En fait, WALD parle de règle du minimax, car il raisonne en termes de minimisation des pertes et non de maximisation des gains, mais cela revient évidemment au même (cf. [50])

où l'on cherche à se prémunir contre l'éventualité la moins favorable en maximisant le gain minimum : $\text{Max}_i \left[\text{Min}_k u_k (a_i) \right]$. Si l'on adopte ce critère dans l'exemple de l'industriel, on trouve que a_1 est la meilleure action, suivie de a_2 puis a_3 .

- b) Un point de vue à peu près similaire consiste à minimiser la perte relative maximale : c'est le critère dit du minimax regret ou critère de SAVAGE : $\text{Min}_i \left[\text{Max}_k \left(\text{Max}_i u_k (a_i) - u_k (a_i) \right) \right]$. On obtient alors le classement suivant : 1°) a_1 2°) a_2 3°) a_3 . Notons que cet ordre de préférence peut être modifié par l'adjonction d'une nouvelle action, puisque l'on raisonne ici en termes d'écart à la meilleure alternative.

- c) Si maintenant on choisit d'adopter un comportement optimiste, on pourra appliquer le critère du maximax ou critère de HURWICZ où les actions sont comparées en fonction de leur utilité maximale : $\text{Max}_i \left[\text{Max}_k u_k (a_i) \right]$. On aura alors : 1°) a_1 2°) a_3 3°) a_2 .

La critique que l'on peut faire à ces règles de décision tient dans leur refus d'intégrer les connaissances intuitives dont on dispose sur le futur. Si l'on estime en effet que,

dans l'exemple évoqué, l'hypothèse s_1 de non-progression de la demande a une chance infime de se vérifier, il peut paraître absurde de laisser les capacités de production en état, comme le commandent les trois critères que nous venons d'examiner.

3.3. L'approche subjectiviste

La démarche adoptée par les subjectivistes (ou bayésiens) permet d'éviter ce genre d'incohérences. Elle consiste à affecter à chacun des scénarios retenus une probabilité subjective a priori qui mesure le degré de confiance qu'on attache à celui-ci. Ce point de vue a été considérablement développé depuis 1950, et on en trouvera une illustration chez SAVAGE [42], SCHLAIFER [43], PRATT, RAIFFA, SCHLAIFER [31] et RAIFFA [32]. Dans cette théorie, on suppose que les probabilités subjectives possèdent les propriétés des probabilités usuelles et vérifient notamment l'axiome d'additivité. Reprenons notre exemple et admettons que l'on retienne pour les trois scénarios les probabilités a priori suivantes :

- Scénario s_1 : probabilité $p_1 = \frac{1}{5}$;
- Scénario s_2 : probabilité $p_2 = \frac{2}{5}$;
- Scénario s_3 : probabilité $p_3 = \frac{2}{5}$;

Une fois fixée cette distribution, on peut calculer pour chaque action son utilité espérée égale à la somme des utilités conditionnelles : $U(a_i) = \sum_{k=1}^3 p_k u_k(a_i)$. Appliquons ici ce critère de l'espérance (ou critère de BERNOUILLI) ; on a :

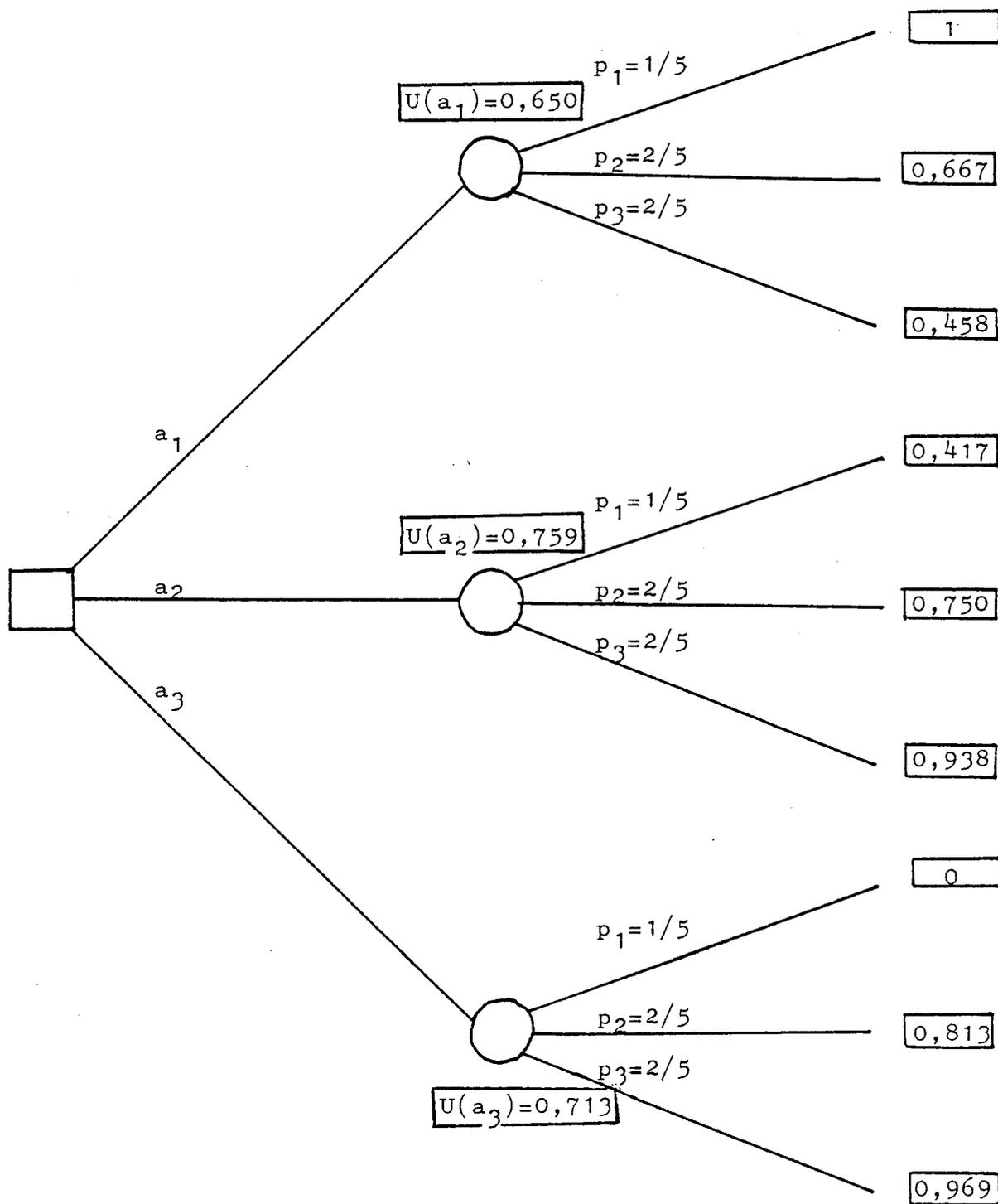
$$\text{- Pour } a_1 : 1/5 \times 1 + 2/5 \times 0,667 + 2/5 \times 0,458 = 0,650 ;$$

$$\text{- Pour } a_2 : 1/5 \times 0,417 + 2/5 \times 0,750 + 2/5 \times 0,938 = 0,759 ;$$

$$\text{- Pour } a_3 : 1/5 \times 0 + 2/5 \times 0,813 + 2/5 \times 0,969 = 0,713 ;$$

a_2 est donc classée première, devant a_3 puis a_1 .

Arbre de décision pour l'exemple de l'industriel



Les fondements axiomatiques de l'approche subjective ont été établis par L.J. SAVAGE dans son livre "The foundations of statistics". SAVAGE a recherché un corps d'axiomes conduisant à l'existence d'une utilité espérée unique pour comparer les actions de A (*) ; ces axiomes sont au nombre de sept (les scénarios sont considérés comme des sous-ensembles de la σ -algèbre \mathcal{A} des événements) :

{ Axiome 1 : Il existe un préordre complet de préférence } sur
A.

{ Axiome 2 : $\forall a_1, a_2 \in A$ et \mathcal{E} un sous-ensemble de \mathcal{A} (c'est-à-dire un ensemble de scénarios), on a soit "a₁ préférée à a₂ sur \mathcal{E} " (noté $a_1 \succ_{\mathcal{E}} a_2$), soit "a₂ préférée à a₁ sur \mathcal{E} " (noté $a_2 \succ_{\mathcal{E}} a_1$), soit "a₁ et a₂ indifférentes sur \mathcal{E} " (noté $a_1 \sim_{\mathcal{E}} a_2$).

{ Axiome 3 : Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ avec $\mathcal{E} \neq \emptyset$ et $a_1, a_2 \in A$. Si a₁ a pour conséquence g et a₂ a pour conséquence g' $\forall s_k \in \mathcal{E}, a_1 \succ_{\mathcal{E}} a_2$
} \iff g est meilleure que g'.

{ Axiome 4 : Soit $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{A}$, et $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$. On suppose que a₁ vaut g sur \mathcal{E}_1 et g' sur $\int_{\mathcal{A}} \mathcal{E}_1$, a₂ vaut g sur \mathcal{E}_2 et g' sur $\int_{\mathcal{A}} \mathcal{E}_2$, a₃ vaut g'' sur $\int_{\mathcal{A}} \mathcal{E}_1$ et g''' sur $\int_{\mathcal{A}} \mathcal{E}_1$, a₄ vaut g'' sur $\int_{\mathcal{A}} \mathcal{E}_2$ et g''' sur $\int_{\mathcal{A}} \mathcal{E}_2$. Alors, si g est meilleure que g' et si g'' est meilleure que g''', on a $a_1 \succ a_2 \iff a_3 \succ a_4$.

(*) : Ces axiomes impliquent notamment ceux de la théorie de l'utilité de VON NEUMANN-MORGENSTERN (cf. SAVAGE p. 99).

Axiome 5 : Parmi toutes les conséquences possibles des actions, il en existe au moins deux g et g' telles que g est meilleure que g' .

Axiome 6 : Si a_1 est préférée à a_2 , il existe une partition finie de \mathcal{A} telle que, si ξ est un élément de cette partition, une action a_3 indifférente à a_1 sur $\int_{\mathcal{A}} \xi$ vérifie $a_3 \succ a_2$, et une action a_4 indifférente à a_2 sur $\int_{\mathcal{A}} \xi$ vérifie $a_1 \succ a_4$.

Axiome 7 : Si a_1 est préférée à a_2 sur tout scénario $s_k \in \xi$ ($\xi \subseteq \mathcal{A}$), a_1 est préférée à a_2 sur ξ .

Si ces sept axiomes sont vérifiés, on a le théorème suivant :

Théorème : Soit la relation \succ^* ainsi définie sur \mathcal{A} :

$\forall \xi_1, \xi_2 \subseteq \mathcal{A}, \xi_1 \succ^* \xi_2 \iff a_1 \succ a_2$ avec a_1 valant g sur ξ_1 et g' sur $\int_{\mathcal{A}} \xi_1$, a_2 valant g sur ξ_2 et g' sur $\int_{\mathcal{A}} \xi_2$,

et g meilleure que g' . Alors il existe sur \mathcal{A} une mesure de probabilité unique P vérifiant :

$$\cdot \forall \xi_1, \xi_2 \subseteq \mathcal{A}, \xi_1 \succ^* \xi_2 \iff P(\xi_1) > P(\xi_2)$$

$$\cdot \exists \rho \text{ avec } 0 < \rho < 1 \text{ tel que } \forall \xi_1 \subseteq \mathcal{A} \text{ et } \xi_2 \subseteq \xi_1, P(\xi_2) = \rho P(\xi_1).$$

D'autre part, P étant ainsi déterminée, il existe une fonction

réelle u sur l'ensemble des conséquences Ω , unique à une transformation linéaire près, telle que $\forall a_1, a_2 \in A$,
 $a_1 \succ a_2 \iff E(u [g(a_1)] / P) > E(u [g(a_2)] / P)$, $E(u [g(a_i)] / P)$
 représentant l'utilité espérée de l'action a_i .

Cette axiomatique a été très critiquée par de nombreux auteurs qui ont souligné son caractère très contraignant. En fait, chercher à représenter l'avenir au moyen d'une mesure de probabilité unique peut sembler tout aussi irréaliste que l'attitude qui consiste à ne pas introduire d'information de nature subjective dans la modélisation. Lorsque l'on analyse les problèmes concrets de décision en avenir incertain, on s'aperçoit que l'on se trouve dans l'immense majorité des cas en situation d'information incomplète, c'est-à-dire une situation caractérisée à la fois par l'absence d'une base de données "objective" et expérimentale et par une masse plus ou moins confuse d'impressions subjectives dérivées de l'expérience accumulée et de la connaissance que les experts ont pu acquérir de l'environnement.

En fonction de ces considérations, d'autres modèles ont été avancés reposant sur des hypothèses moins restrictives que celles de SAVAGE ; citons EGLE et MUNIER [16], FOURGEAUD, LENCLUD et SENTIS [17], repris par SCHWARTZ [44] et VEDDER [48]. C'est de ce dernier modèle que nous nous sommes inspirés ici.

3.4. La méthode proposée

L'idée générale de la méthode est la suivante : au lieu de rechercher les conditions nécessaires à l'existence d'une mesure de probabilité P unique, on admet la multiplicité des mesures de probabilité et donc des utilités espérées U.

Par rapport au modèle de SAVAGE, on va donc :

- Conserver tout ce qui a trait à l'existence et à l'unicité d'une fonction d'utilité (voir chapitre II)
- Remplacer les conditions d'existence et d'unicité de P par de simples conditions d'existence (voir chapitre III).

Une fois déterminé l'ensemble des mesures de probabilité "admissibles", on calculera pour chaque action les utilités espérées correspondantes, puis on recherchera un critère de comparaison entre actions (cette procédure sera appelée sous-agrégation).

CHAPITRE II

EVALUATION DES ACTIONS AU MOYEN

D'UTILITES CONDITIONNELLES

Dans ce chapitre sont abordés les problèmes posés par la valorisation des actions sur les scénarios au moyen d'utilités partielles. Nous étudierons tout d'abord comment on peut passer d'une évaluation brute sur un critère donné à une évaluation exprimée en terme d'utilité. Puis nous verrons ce que deviennent ces utilités partielles lorsque l'on fait intervenir dans la modélisation les phénomènes d'imprécision.

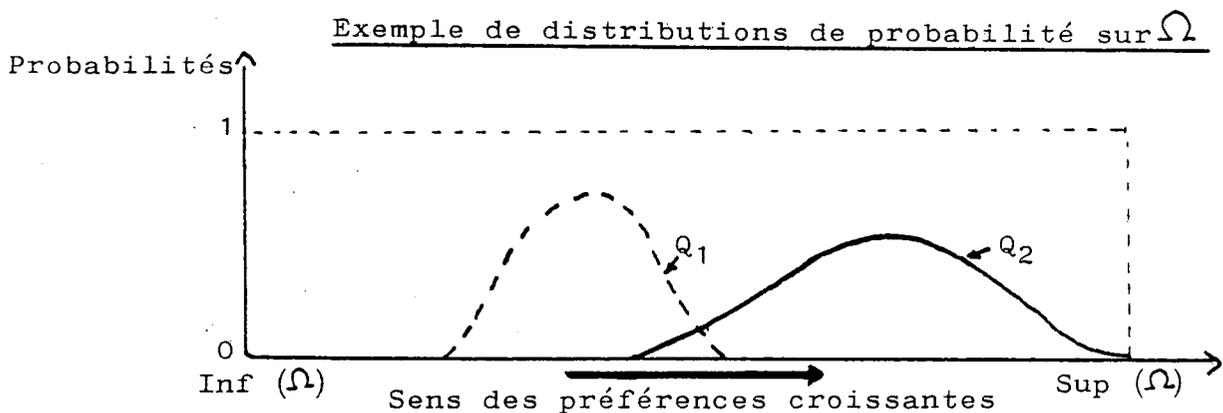
1. - TRANSFORMATION D'UNE EVALUATION BRUTE EN UTILITE CONDITIONNELLE

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il était nécessaire de transformer les évaluations conditionnelles nominales $g_k(a_i)$ en évaluations subjectives $u_k(a_i)$ si l'on voulait refléter le comportement du décideur vis-à-vis du risque. VON NEUMANN et MORGENSTERN ont étudié des conditions suffisantes d'existence et d'unicité d'une telle fonction u (cf. [49]).

1.1. Théorème d'existence et d'unicité d'une fonction d'utilité

On s'intéresse à l'ensemble Ω des conséquences possibles des actions pour le critère d'évaluation considéré.

Ω peut être inclus dans \mathbb{N} ou dans \mathbb{R} (comme c'est le cas dans l'exemple de l'industriel), ou bien encore regrouper un ensemble d'échelons s'il s'agit d'un critère qualitatif ; en général, Ω pourra toujours être considéré comme un ensemble borné, avec une évaluation maximale et une évaluation minimale. On note par ailleurs \mathcal{Q} l'ensemble des distributions de probabilité Q_1, Q_2, \dots sur Ω . La première condition de VON



NEUMANN-MORGENSTERN nous dit que l'on peut classer selon un ordre de préférence croissant les distributions de probabilité.

Axiome UT1 : Il existe un préordre complet \succsim de préférence sur \mathcal{Q} .

Les autres conditions sont :

Axiome UT2 : Soit $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{Q}$, et α vérifiant $0 < \alpha < 1$.
Alors Q_1 est strictement préférée à Q_2 (noté $Q_1 \succ Q_2$) si et seulement si $(\alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_3) \succ (\alpha Q_2 + (1-\alpha)Q_3)$.

Axiome UT3 : Si $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{Q}$ Si $Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3$, il existe un nombre unique α avec $0 < \alpha < 1$ tel que Q_2 soit indifférent à $(\alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_3)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de VON NEUMANN-MORGENSTERN :

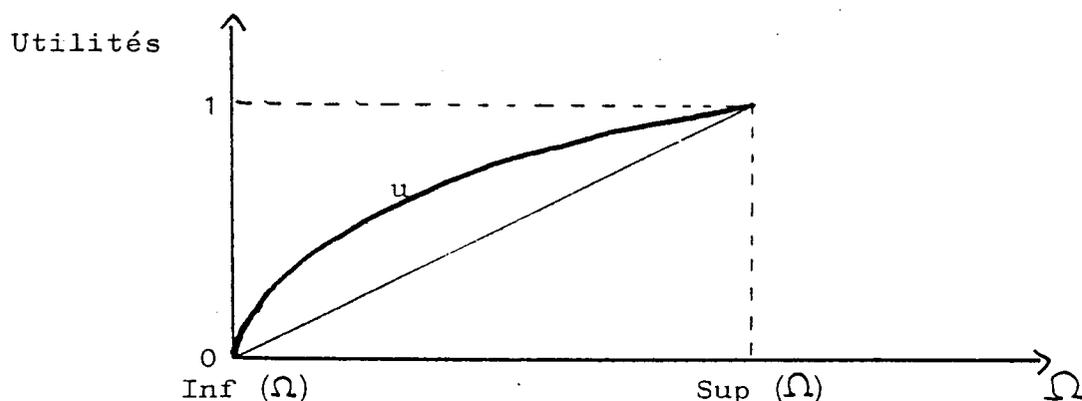
Théorème : Si UT1, UT2, UT3 sont vérifiés, il existe sur Ω une fonction u -unique à une transformation linéaire près- telle que, Q_1 et Q_2 étant deux distributions de \mathcal{Q} , $Q_1 \succ Q_2$ si et seulement si $E(u/Q_1) > E(u/Q_2)$, $E(u/Q)$ représentant l'utilité espérée attachée à la distribution Q .

On peut immédiatement déduire de ce théorème les deux propriétés suivantes :

- . Si g et g' sont deux évaluations de Ω , et si u et u' sont les utilités respectives attachées à g et g' , $g \preceq g' \iff u \preceq u'$.
- . Si u est une fonction d'utilité sur Ω , toute combinaison linéaire v de u ($v=au + b$, où a et b sont des constantes et $a \neq 0$) est également une fonction d'utilité sur Ω .

C'est cette dernière propriété qui permet de restreindre u à l'intervalle $[0 ; 1]$, Ω étant par ailleurs borné.

La plupart du temps, la fonction d'utilité d'un décideur sera concave, traduisant ainsi son aversion au risque :



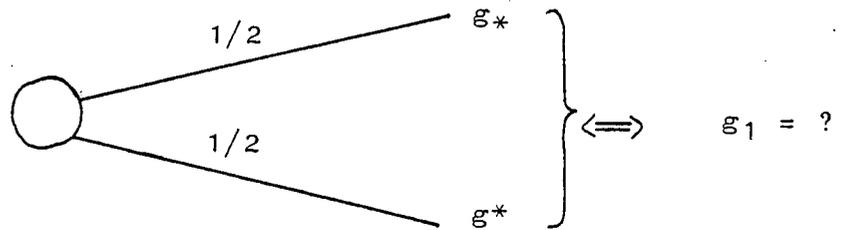
1.2. Construction de la fonction d'utilité

M.H. DE GROOT ([10]) a proposé un mode de construction d'une fonction d'utilité par comparaison de loteries dites "50-50".

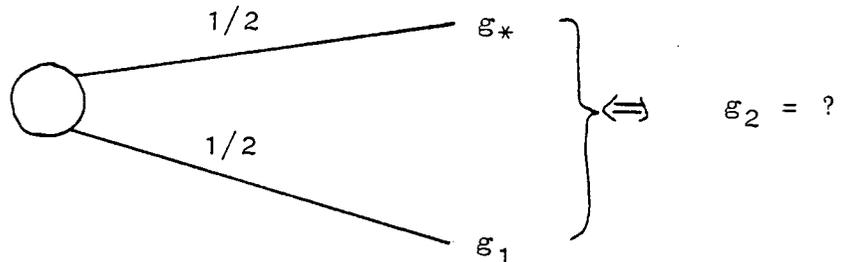
Pour cela, on commence par déterminer une valeur inférieure g_* et une valeur supérieure g^* pour Ω (il est commode de prendre pour notre problème $g_* = \min_i \min_k g_k(a_i)$ et $g^* = \max_i \max_k g_k(a_i)$), et on pose $u[g_*] = 0$ et $u[g^*] = 1$. Puis on exécute la séquence de tests suivante :

* Test 1 : Quelle est la valeur g_1 de Ω telle que le décideur soit indifférent entre, d'une part obtenir g_1 de façon certaine, et d'autre part avoir une

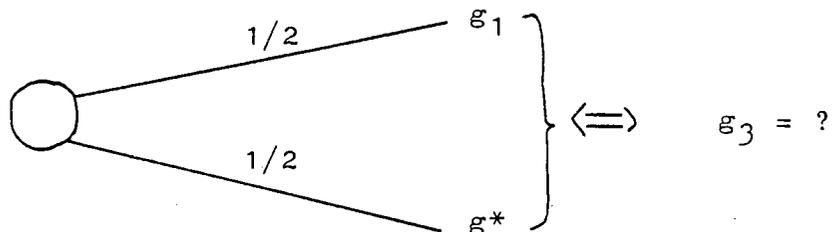
chance sur deux d'obtenir g_* et une chance sur deux d'obtenir g^* ? Autrement dit, quel est l'équivalent certain de la loterie " g_* avec une probabilité de $1/2$ et g^* avec une probabilité de $1/2$ " ?



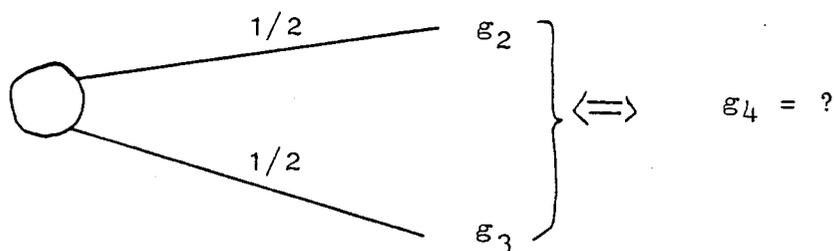
* Test 2 : Quel est l'équivalent certain g_2 de la loterie " g_* avec une probabilité de $1/2$ et g_1 avec une probabilité de $1/2$ " ?



* Test 3 : Quel est l'équivalent certain g_3 de la loterie " g_1 avec une probabilité de $1/2$ et g^* avec une probabilité de $1/2$ " ?

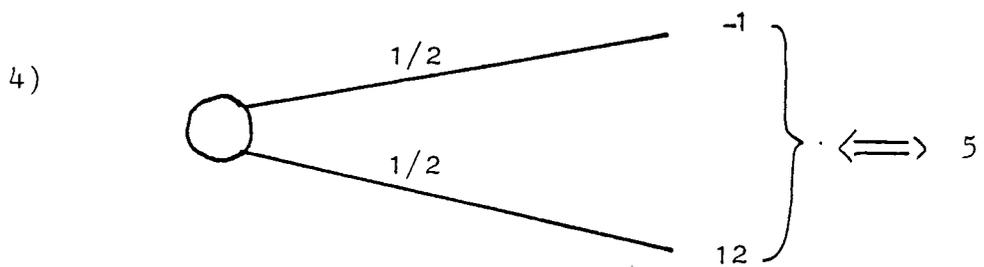
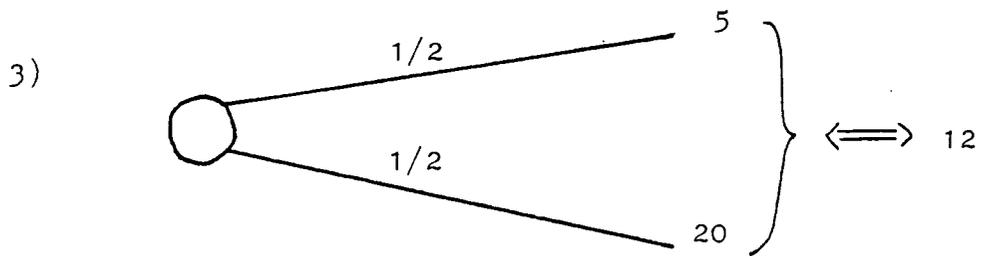
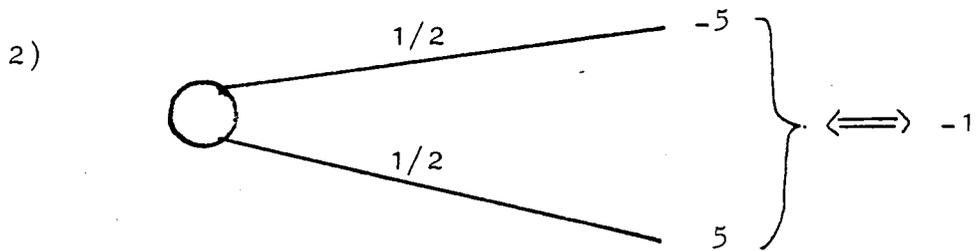
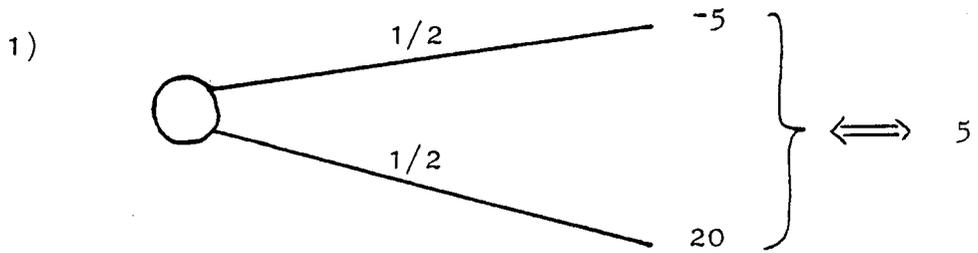


* Test 4 : Quel est l'équivalent certain g_4 de la loterie " g_2 avec une probabilité de $1/2$ et g_3 avec une probabilité de $1/2$ " ?

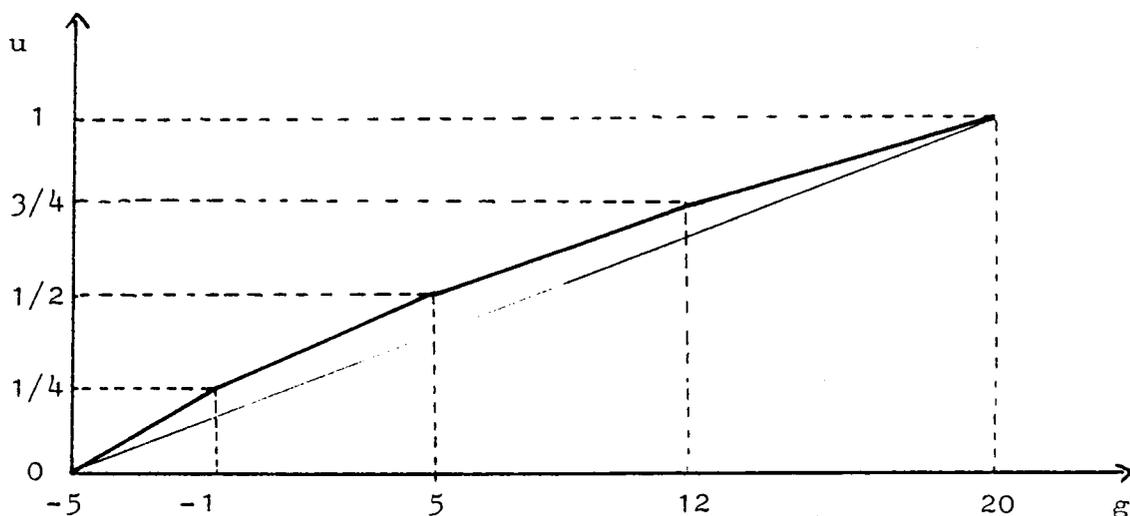


Ces tests nous permettent de dire que $u[g_1] = 1/2$, $u[g_2] = 1/4$, $u[g_3] = 3/4$ et $u[g_4] = 1/2$. Par conséquent, on doit avoir $g_1 = g_4$. Cependant, il peut arriver que g_4 soit différent de g_1 ; en étudiant l'écart entre g_1 et g_4 , et en répétant la séquence de tests avec différentes valeurs autant de fois qu'il est nécessaire, on peut alors arriver à déterminer la valeur de Ω pour laquelle $u = 1/2$. On connaît donc cinq points de la fonction d'utilité : g^* , g_2 , g_1 , g_3 , g^* , à partir desquels on peut approximer u au moyen d'une fonction linéaire par morceaux. Reprenons l'exemple étudié au chapitre I et supposons

que l'on obtient les équivalents certains suivants :



d'où l'on tire une fonction linéaire par morceaux :

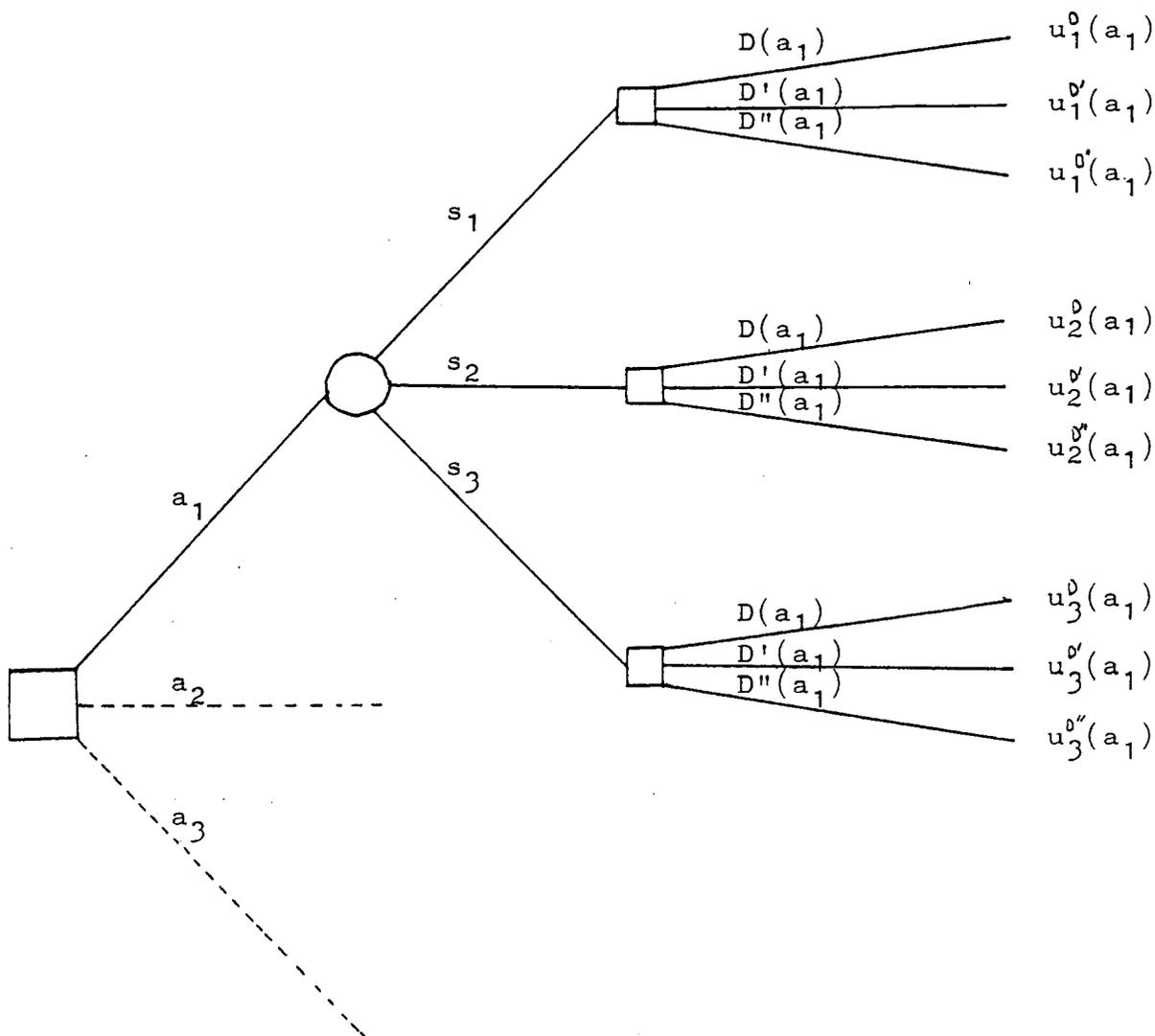


On peut alors déduire par interpolation les utilités conditionnelles $u_k(a_i)$ attachées à chaque évaluation $g_k(a_i)$.

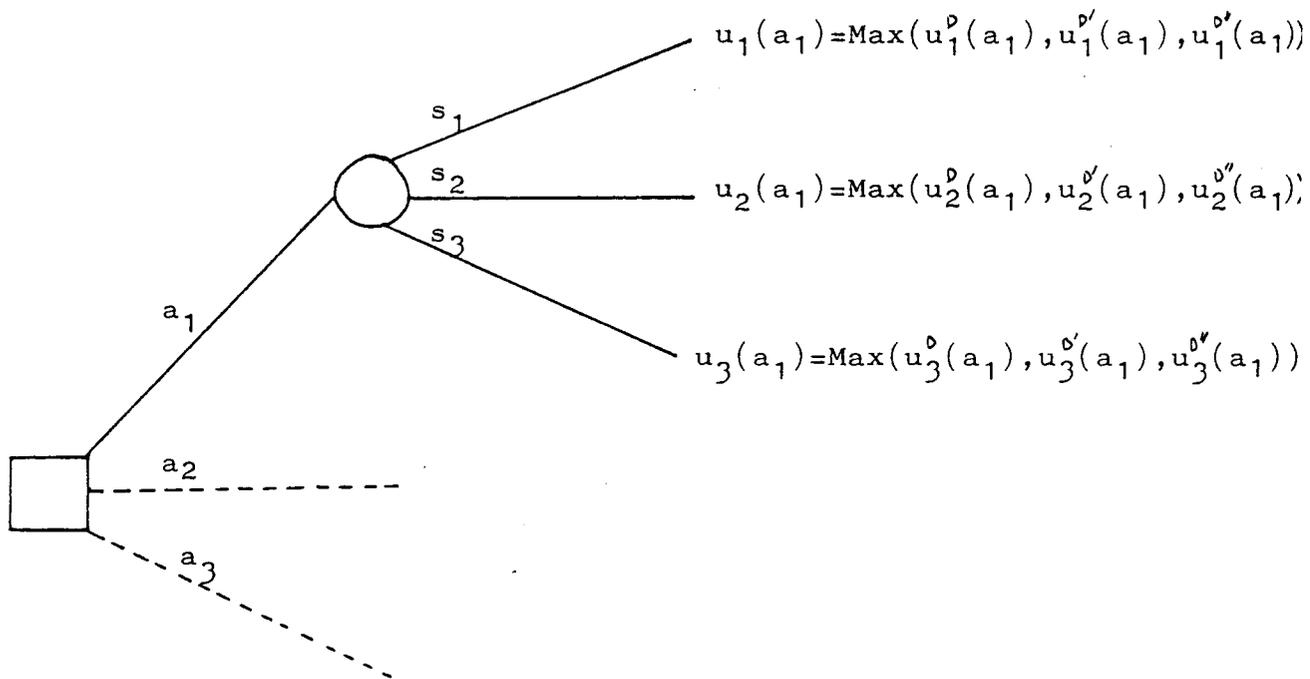
Précisons qu'il est toujours possible, dans le cas d'un critère d'évaluation quantitatif, de ne pas raisonner en termes d'utilités et de conserver les évaluations nominales ; mais cela revient à supposer la linéarité de la fonction d'utilité du décideur et à associer à toute distribution de probabilité son espérance mathématique, en négligeant ainsi les phénomènes d'aversion au risque.

1.3. Valorisation des branches de l'arbre de décision

Dans le cas où, à une action donnée, correspondent plusieurs développements possibles (voir § I.2.2.), on ne retiendra bien entendu sur chaque scénario que le meilleur de ces développements dans la comparaison des actions. Si $u_k^D(a_i)$, $u_k^{D'}(a_i)$, $u_k^{D''}(a_i), \dots$ sont les utilités conditionnelles respectives des développements D, D', D'', \dots de a_i sur s_k , on posera $u_k(a_i) = \text{Max}(u_k^D(a_i), u_k^{D'}(a_i), u_k^{D''}(a_i), \dots)$, et l'on pourra alors substituer à l'arbre de décision suivant ...



... un nouvel arbre sous forme "standard" :



2. - MODE DE TRAITEMENT DES EVALUATIONS IMPRECISES

2.1. Les facteurs d'imprécision

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des évaluations et des utilités associées de caractère ponctuel. Or, dans la réalité, il est rare que les conséquences d'une action pour un scénario donné puissent être estimées de façon totalement non ambiguë; l'imprécision sera toujours présente, à des

degrés divers selon les cas. L'imprécision est un phénomène distinct de l'incertitude ; l'incertitude en effet découle de la multiplicité des hypothèses d'évolution de l'environnement, tandis que l'imprécision prend sa source dans la difficulté à évaluer le comportement d'une action dans une hypothèse donnée.

Parmi les facteurs d'imprécision, on peut citer :

- Les simplifications effectuées dans le calcul des évaluations : utilisation de valeurs mal dégrossies pour limiter les coûts de recueil des données, ignorance volontaire de l'impact de paramètres considérés comme secondaires, emploi de formules approximatives, etc ... ;
- La méconnaissance du comportement de certaines actions potentielles, présentant pour les experts un caractère de nouveauté ;
- Les problèmes d'estimation pour les périodes les plus éloignées dans le temps ;
- La nature de certains scénarios, recouvrant des situations très particulières (scénario "catastrophe" par exemple) ;

- L'aspect vague dans la définition des scénarios, chacun d'eux traduisant une hypothèse forcément générale telle que "surface à irriguer égale à environ 100 000 ha", ou "besoins de stockage stables", ou bien encore "nombre de voyageurs constant".

Lorsque les phénomènes décrits ici deviennent trop importants, il est courant de procéder à une analyse de sensibilité sur les résultats, en faisant varier, les uns après les autres, les paramètres intervenant dans le calcul. Cette pratique est utile car elle permet d'apprécier les liens existant entre ces paramètres et les résultats obtenus, mais elle ne rend pas compte de façon globale de l'imprécision. Il nous a semblé que, dans les situations où l'on a affaire à une grande imprécision, il était irréaliste de conserver à tout prix une utilité $u_k(a_i)$ ponctuelle, pour deux raisons : en premier lieu parce que les variations autour de $u_k(a_i)$ seraient alors trop importantes pour que l'unique valeur ainsi retenue soit réellement représentative ; et secondement parce que les évaluations sont affectées par l'imprécision à des degrés différents selon les actions, ce qu'un indicateur ponctuel ne permet pas de mettre en évidence. Ces considérations nous ont conduits à envisager une modélisation où les utilités conditionnelles $u_k(a_i)$ sont floues.

Dans les sous-sections qui suivent, nous rappellerons brièvement les fondements de la théorie des sous-ensembles flous, puis les principaux résultats du calcul flou, et nous examinerons pour finir comment les actions peuvent être valorisées sur chaque scénario par des nombres flous.

2.2. Quelques rappels sur la théorie des sous-ensembles flous

Le concept de sous-ensemble flou a été introduit vers 1965 par L.A. ZADEH ([52]) pour modéliser des situations marquées par l'imprécision, et où la transition entre les notions d'appartenance et de non-appartenance d'un élément à un ensemble n'est pas brutale, mais progressive. Une théorie des sous-ensembles flous a été ainsi bâtie, qui englobe la théorie classique des ensembles ; nous en reprenons ici les points essentiels, en nous référant au livre de A. KAUFMANN, "Introduction à la théorie des sous-ensembles flous" ([24]), qui est à ce jour le seul ouvrage français de caractère général sur ce sujet.

a) Notions d'appartenance et de sous-ensemble flou

Soit E un ensemble appelé "référentiel", B un sous-ensemble de E et x un élément de E . Pour indiquer l'apparte-

nance de x à B , on utilise la "fonction caractéristique" $\mu_B(x)$, avec $\mu_B(x) = 1$ si $x \in B$ et $\mu_B(x) = 0$ si $x \notin B$. Supposons à présent que μ_B puisse prendre des valeurs dans $[0 ; 1]$ autres que 0 ou 1, traduisant le fait que l'on se trouve dans une situation intermédiaire entre l'appartenance et la non-appartenance. Si E comprend cinq éléments x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , on aura par exemple :

$\mu_{\tilde{B}}(x_1) = 0,2$; $\mu_{\tilde{B}}(x_2) = 0$; $\mu_{\tilde{B}}(x_3) = 0,3$; $\mu_{\tilde{B}}(x_4) = 1$;
 $\mu_{\tilde{B}}(x_5) = 0,8$; et on notera comme L.A. ZADEH $\tilde{B} = 0,2/x_1 + 0/x_2 + 0,3/x_3 + 1/x_4 + 0,8/x_5$. \tilde{B} sera appelé sous-ensemble flou de E et $\mu_{\tilde{B}}(x_i)$ degré (ou fonction) d'appartenance de x_i dans \tilde{B} . Ces notations sont bien entendu généralisables aux cas où E est infini dénombrable et infini non dénombrable ; on aura alors $\tilde{B} = \int_E \mu(x)/x$.

On appelle support d'un sous-ensemble flou \tilde{B} l'ensemble des éléments x du référentiel tels que $\mu_{\tilde{B}}(x) \neq 0$.

Un sous-ensemble V de E tel que $\forall x \in E \quad \mu_V(x) = 0$ ou 1 sera appelé sous-ensemble vulgaire de E .

b) Sous-ensemble flou convexe

Un sous-ensemble flou \tilde{B} d'un référentiel E convexe est dit convexe si $\forall x, y \in \tilde{B}, \forall \lambda \in [0; 1], \mu_{\tilde{B}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$. Cette définition n'implique pas la convexité de la fonction d'appartenance μ .

c) Opérations sur les sous-ensembles flous

* Inclusion : Soit \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 deux sous-ensembles flous de E ; on dit que $\tilde{B}_1 \subseteq \tilde{B}_2$ si $\forall x \in E \mu_{\tilde{B}_1}(x) \leq \mu_{\tilde{B}_2}(x)$. On a donc en particulier $E \subseteq E$ car $\mu_E(x) = 1 \forall x \in E$.

* Egalité : Deux sous-ensembles flous \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 sont égaux si et seulement si $\forall x \in E \mu_{\tilde{B}_1}(x) = \mu_{\tilde{B}_2}(x)$.

* Complémentation : Deux sous-ensembles flous \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 sont dits complémentaires si $\forall x \in E \mu_{\tilde{B}_1}(x) = 1 - \mu_{\tilde{B}_2}(x)$ et on note $\tilde{B}_1 = \int_E \tilde{B}_2$. Remarquons que l'on a $\int_E \left(\int_E \tilde{B} \right) = \tilde{B}$.

* Intersection : On définit l'intersection $\tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2$ de deux sous-ensembles flous de E comme le plus grand sous-ensemble flou contenu à la fois dans \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 , c'est-à-dire $\forall x \in E \mu_{\tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2}(x) = \text{Min}(\mu_{\tilde{B}_1}(x), \mu_{\tilde{B}_2}(x))$.

* Réunion : On définit la réunion $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$ de deux sous-ensembles flous de E comme le plus petit sous-ensemble flou contenant à la fois \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 , c'est-à-dire $\forall x \in E \mu_{\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2}(x) = \text{Max}(\mu_{\tilde{B}_1}(x), \mu_{\tilde{B}_2}(x))$.

Toutes les propriétés des parties vulgaires de la théorie classique des ensembles (commutativité de \cap et \cup , associativité de \cap et \cup , idempotence de \cap et \cup , distribu-

tivité de \cap par rapport à \cup et de \cup par rapport à \cap , intersection et réunion avec \emptyset et E , lois de DE MORGAN) sont valables pour des parties floues, sauf deux : $B \cap \bigcup_E B = \emptyset$ et $B \bigcup_E B = E$, qui ne sont pas vérifiées.

d) Principe d'extension de ZADEH ([53])

On note X le produit cartésien d'ensembles de référence X_1, X_2, \dots, X_r : $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$. $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_r$ sont des sous-ensembles flous de X_1, X_2, \dots, X_r respectivement. Le produit cartésien \tilde{B} est alors défini comme égal à $\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2 \times \dots \times \tilde{B}_r = \int_X \text{Min} (\mu_{\tilde{B}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{B}_r}(x_r)) / (x_1, \dots, x_r)$.

Soit f une application de X dans un référentiel Y telle que $y = f(x_1, \dots, x_r)$. Le principe d'extension de ZADEH nous permet de définir la fonction d'appartenance de l'image \tilde{C} de $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_r$ par f de la façon suivante :

$$\mu_{\tilde{C}}(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} [\text{Min}(\mu_{\tilde{B}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{B}_r}(x_r))]$$

Ceci peut s'interpréter comme la plus grande valeur de possibilité pour un r -tuple (x_1, \dots, x_r) de l'image réciproque de y d'appartenir à \tilde{B} ; en particulier, si $f^{-1}(y) = \emptyset$, $\mu_{\tilde{C}}(y) = 0$. Dans le cas où f est fonction d'une seule variable, on a

$$\mu_{\tilde{C}}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{B}}(x).$$

Il existe d'autres principes d'extension, mais celui-ci est le plus couramment utilisé, notamment en algèbre réelle où $X_1=X_2= \dots=X_r=Y= \mathbb{R}$ et $X=\mathbb{R}^r$.

2.3. Imprécision et nombres flous

Un nombre flou \tilde{m} est un sous-ensemble flou convexe de \mathbb{R} dont la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{m}}$ vérifie :

- $\mu_{\tilde{m}}$ est continue, sauf éventuellement pour un nombre fini de points ;

- $\mu_{\tilde{m}}$ est normalisée, c'est-à-dire

$$\sup_{x \in \text{support}(\tilde{m})} \mu_{\tilde{m}}(x) = 1.$$

\tilde{m} peut être représenté au moyen de deux fonctions continues en cloche de \mathbb{R} dans $[0 ; 1]$ notées L et R et vérifiant :

$$- L(0) = R(0) = 1$$

$$- L(-x) = L(x) \text{ et } R(-x) = R(x)$$

$$- L \text{ et } R \text{ sont non décroissantes sur }]-\infty ; 0]$$

$$- L(-\infty) = R(-\infty) = 0$$

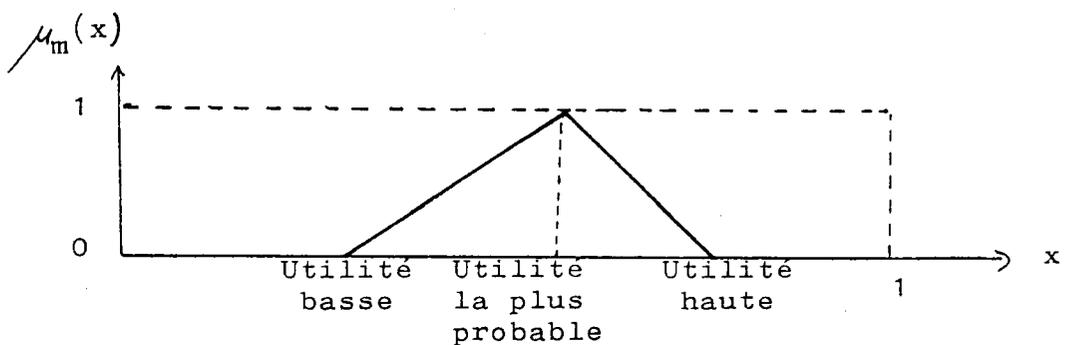
$$\text{On posera } \mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{pour } x \leq m \text{ noté } L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{pour } x \geq m \text{ noté } R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) \end{cases}$$

où m est telle que $\mu_{\tilde{m}}(m)=1$, et α et β sont les étalements à

gauche et à droite de \tilde{m} . Cette représentation reste valable pour les nombres vulgaires où $\alpha = \beta = 0$. Le nombre flou \tilde{m} , qui vaut "environ m ", sera noté $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ et on dira que \tilde{m} est de type LR.

Nous nous limiterons ici aux nombres flous "triangulaires", c'est-à-dire pour lesquels $L_-(\frac{m-x}{\alpha}) = 1 - \frac{m-x}{\alpha}$ et $R_+(\frac{x-m}{\beta}) = 1 - \frac{x-m}{\beta}$. Pour chaque utilité partielle, on calculera une valeur "haute", une valeur "basse" et une valeur "la plus probable", et on construira un nombre flou à partir de ces trois valeurs : la valeur "la plus probable" sera égale à m , la valeur "basse" à $(m-\alpha)$ et la valeur "haute" à $(m+\beta)$.

Exemple de modélisation de l'imprécision au moyen d'un nombre flou de type triangulaire



On conviendra d'appeler m valeur modale de \tilde{m} , l'ensemble des x tels que $m-x \leq x < m$ ensemble des valeurs inférieures et l'ensemble des x tels que $m < x \leq m+\beta$ ensemble des valeurs supérieures ; $(m-\alpha)$ et $(m+\beta)$ seront respectivement les valeurs limite inférieure et limite supérieure.

L'hypothèse de linéarité de la fonction d'appartenance entre $(m-\alpha)$ et m comme entre m et $(m+\beta)$ semble très naturelle et apporte nombre de simplifications. Cependant, d'autres modélisations sont envisageables au moyen de nombres flous de types différents. A. KAUFMANN propose ainsi (t.1,p.170) un certain nombre de fonctions d'appartenance parmi lesquelles l'homme d'étude peut choisir celle correspondant le mieux à la nature de l'imprécision rencontrée dans son problème (voir annexe 1). Ajoutons simplement que tous les résultats qui suivent sont aisément transposables aux cas où $L \neq R$ et où L et R ne sont pas linéaires.

La différence entre l'optique "nombres flous" et la modélisation probabiliste apparaît clairement dans le schéma ci-dessus, où l'aire comprise entre la fonction d'appartenance et l'axe des abscisses n'est pas égale à 1. Ceci découle de la non-existence dans la théorie des sous-ensembles flous de l'axiome d'additivité caractéristique des probabilités. En généralisant ainsi la théorie des probabilités, la théorie des sous-ensembles flous offre une plus grande souplesse

dans la prise en compte de l'imprécision ; on le voit ici, où poser $\mu_{\tilde{m}}(m)=1$ pour la valeur modale et choisir les fonctions L et R sont deux moments de la modélisation totalement indépendants l'un de l'autre.

Nous allons étudier quelques résultats, tirés de DUBOIS-PRADE ([13], [14]), concernant des opérations sur les nombres flous utilisées par la suite.

* Addition de deux nombres flous

Soit $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ et $\tilde{n} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$ deux nombres flous de même type et de fonctions d'appartenance respectives $\mu_{\tilde{m}}$ et $\mu_{\tilde{n}}$. La fonction d'appartenance de leur somme floue $\tilde{m} \oplus \tilde{n}$ est égale à :

$$\mu_{\tilde{m} \oplus \tilde{n}}(z) = \sup_{x+y=z} \left[\min (\mu_{\tilde{m}}(x), \mu_{\tilde{n}}(y)) \right]$$

$$\iff \mu_{\tilde{m} \oplus \tilde{n}}(z) = \sup_x \left[\min (\mu_{\tilde{m}}(x), \mu_{\tilde{n}}(z-x)) \right]$$

\tilde{m} et \tilde{n} étant convexes et continus, cette valeur est atteinte pour $\mu_{\tilde{m}}(x) = \mu_{\tilde{n}}(z-x)$. Pour $x \geq m$ et $z-x \geq n$ ($\implies z \geq m+n$), on a :

$$R_+ \left(\frac{x-m}{\beta} \right) = R_+ \left(\frac{z-x-n}{\delta} \right)$$

$$\implies \frac{x-m}{\beta} = \frac{z-x-n}{\delta}$$

$$\implies x = \frac{(z-n)\beta + m\delta}{\beta + \delta},$$

$$\text{d'où } \mu_{\tilde{m} \oplus \tilde{n}}(z) = R_+ \left(\frac{\frac{(z-n)\beta + m\delta}{\beta + \delta} - m}{\beta} \right) = R_+ \left(\frac{z - (m-n)}{\beta + \delta} \right) \text{ pour } .$$

$z \gg m+n$. De la même façon, on peut montrer que $\mu_{\tilde{m} \oplus \tilde{n}}(z) =$

$$L_- \left(\frac{(m+n)-z}{\alpha + \gamma} \right) \text{ pour } z \ll m+n.$$

Donc, on a $(m, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m+n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$. On voit que l'addition possède comme élément neutre $(0, 0, 0)$. D'autre part, si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, on retrouve la somme classique de deux nombres vulgaires (c'est-à-dire d'étalements nuls).

* Soustraction de deux nombres flous

On montre facilement que si (m, α, β) est de type LR et (n, γ, δ) de type RL, on a $(m, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (n, \gamma, \delta)_{RL} = (m-n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$. Ce résultat indique que les opérations sur les nombres flous accroissent le degré d'imprécision, du fait de leur caractère de convolution. Cas particulier : si $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)$ est de type LR, $-\tilde{m} = (-m, \beta, \alpha)$ est de type RL, mais $-\tilde{m}$ n'est pas le symétrique de \tilde{m} pour \oplus , car $\tilde{m} \oplus (-\tilde{m}) = (0, \alpha + \beta, \alpha + \beta) \neq (0, 0, 0)$.

* Multiplication d'un nombre flou par un scalaire positif

Soit $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)$ un nombre flou de type LR et λ un scalaire positif. Alors la fonction d'appartenance de $\lambda \tilde{m}$ est donnée par $\mu_{\lambda \tilde{m}}(z) = \sup_{z = \lambda x} \mu_{\tilde{m}}(x) = \mu_{\tilde{m}}\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, d'où :

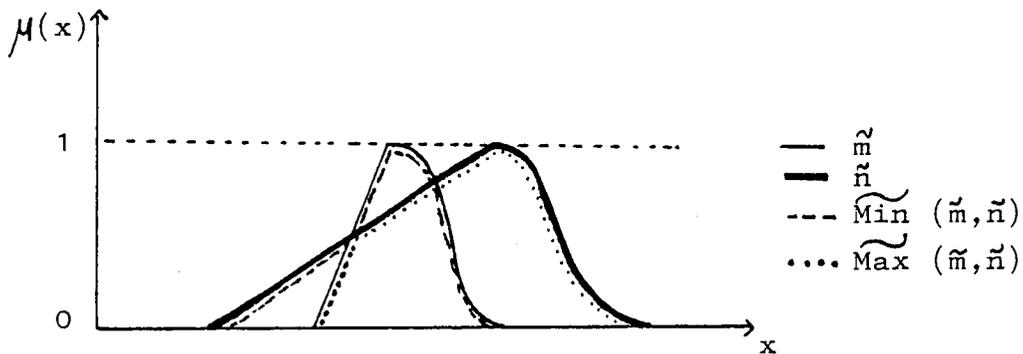
$$\mu_{\lambda \tilde{m}}(z) = \begin{cases} L_{-} \left(\frac{\lambda m - z}{\lambda \alpha} \right) & \text{pour } z \leq \lambda m \\ R_{+} \left(\frac{z - \lambda m}{\lambda \beta} \right) & \text{pour } z \geq \lambda m \end{cases}$$

Donc $\lambda \tilde{m} = (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta)$ de type LR.

2.4. Valorisation des branches de l'arbre de décision dans le cas flou

De même que dans le cas non flou, il s'agit de prendre en compte, parmi la multiplicité des développements possibles d'une même action, celui qui est le meilleur pour le scénario considéré. Or, l'opérateur $\widetilde{\text{Max}}$ - qui est l'équivalent flou du "Max" de la théorie des nombres vulgaires - ne permet pas de savoir quelle utilité conditionnelle parmi $\widetilde{u_k^p(a_i)}$, $\widetilde{u_k^{p'}(a_i)}$, $\widetilde{u_k^{p''}(a_i)}$, ... est la meilleure. En effet, comme le montre la figure ci-dessous, si \tilde{m} et \tilde{n} sont deux nombres flous de type LR, $\widetilde{\text{Max}}(\tilde{m}, \tilde{n})$ n'est pas forcément LR et peut être construit à partir de morceaux de \tilde{m} et de \tilde{n} (*). (La même remarque est d'ailleurs valable pour l'opérateur $\widetilde{\text{Min}}$).

(*) : ce qui se produit dès que \tilde{m} et \tilde{n} se coupent en plus d'un point.



On est donc amené à rechercher d'autres moyens de comparaison pour déterminer $\widetilde{u}_k(a_i)$. Nous proposons à cet effet un opérateur non flou Max_E , fondé sur le calcul d'un écart E entre deux nombres flous ; en tant qu'extérieur à la théorie des sous-ensembles flous, cet opérateur contient une part d'arbitraire, mais celle-ci est inévitable dès que l'on cherche à ordonner des nombres flous de façon déterministe. E est une application à valeurs dans \mathbb{R} définie par :

$$E(\tilde{m}, \tilde{n}) = \int_0^1 \mu [(\gamma - \alpha)L_-^{-1}(\mu) + (m-n)] d\mu + \int_0^1 \mu [(\beta - \delta)R_+^{-1}(\mu) + (m-n)] d\mu,$$

où L_-^{-1} et R_+^{-1} sont les fonctions réciproques de L_- et R_+ ,

et où α, β et γ, δ sont les étalements à gauche et à droite de \tilde{m} et \tilde{n} respectivement (pour \tilde{m} et \tilde{n} tous deux de type LR).

Cet écart E s'interprète comme la valeur pondérée par μ de l'aire séparant \tilde{m} et \tilde{n} . On voit rapidement que E est compatible avec la différence entre deux nombres vulgaires,

puisque alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et $E = 2 \int_0^1 \mu(m-n) d\mu = m-n$.

Vérifions que E est transitif ; Soient $m_1 = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$, $m_2 = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$ et $m_3 = (m_3, \alpha_3, \beta_3)$ trois nombres flous de type LR ;

on a :

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) + E(\tilde{m}_2, \tilde{m}_3) &= \int_0^1 \mu [(\alpha_2 - \alpha_1) L^{-1}(\mu) + (m_1 - m_2)] d\mu \\
 &+ \int_0^1 \mu [(\beta_1 - \beta_2) R_+^{-1}(\mu) + (m_1 - m_2)] d\mu \\
 &+ \int_0^1 \mu [(\alpha_3 - \alpha_2) L^{-1}(\mu) + (m_2 - m_3)] d\mu \\
 &+ \int_0^1 \mu [(\beta_2 - \beta_3) R_+^{-1}(\mu) + (m_2 - m_3)] d\mu \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) + E(\tilde{m}_2, \tilde{m}_3) &= \int_0^1 \mu [(\alpha_3 - \alpha_1) L^{-1}(\mu) + (m_1 - m_3)] d\mu \\
 &+ \int_0^1 \mu [(\beta_1 - \beta_3) R_+^{-1}(\mu) + (m_1 - m_3)] d\mu
 \end{aligned}$$

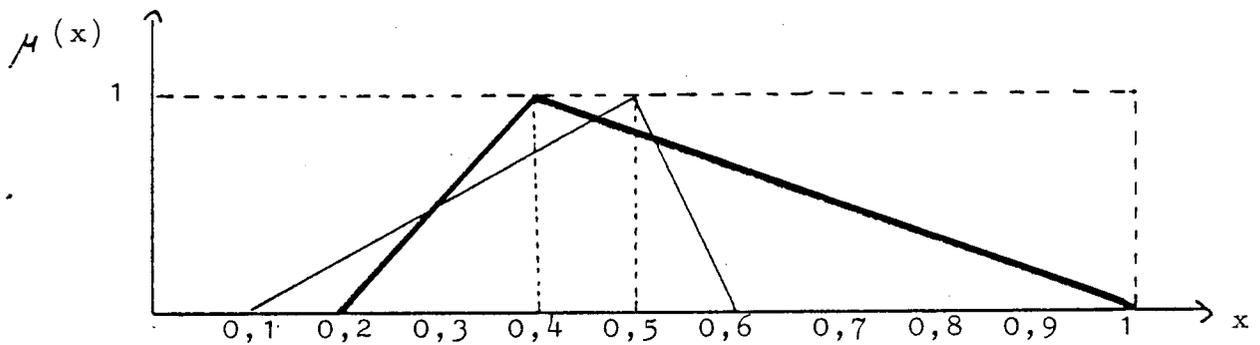
$E(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) + E(\tilde{m}_2, \tilde{m}_3) = E(\tilde{m}_1, \tilde{m}_3)$. Du fait de cette propriété de transitivité, E permet de classer un ensemble de nombres flous selon un préordre complet. Pour des nombres flous triangulaires, on a $L^{-1}(\mu) = R_+^{-1}(\mu) = 1 - \mu$, et $E(\tilde{m}, \tilde{n}) =$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \mu [(\gamma - \alpha)(1 - \mu) + (m - n)] d\mu + \int_0^1 \mu [(\beta - \delta)(1 - \mu) + (m - n)] d\mu \\
 &= \int_0^1 [2\mu(m - n) - \mu^2(\gamma - \alpha) + \mu(\gamma - \alpha) - \mu^2(\beta - \delta) + \mu(\beta - \delta)] d\mu = \\
 &(m - n) - \left(\frac{\alpha - \gamma}{6}\right) + \left(\frac{\beta - \delta}{6}\right)
 \end{aligned}$$

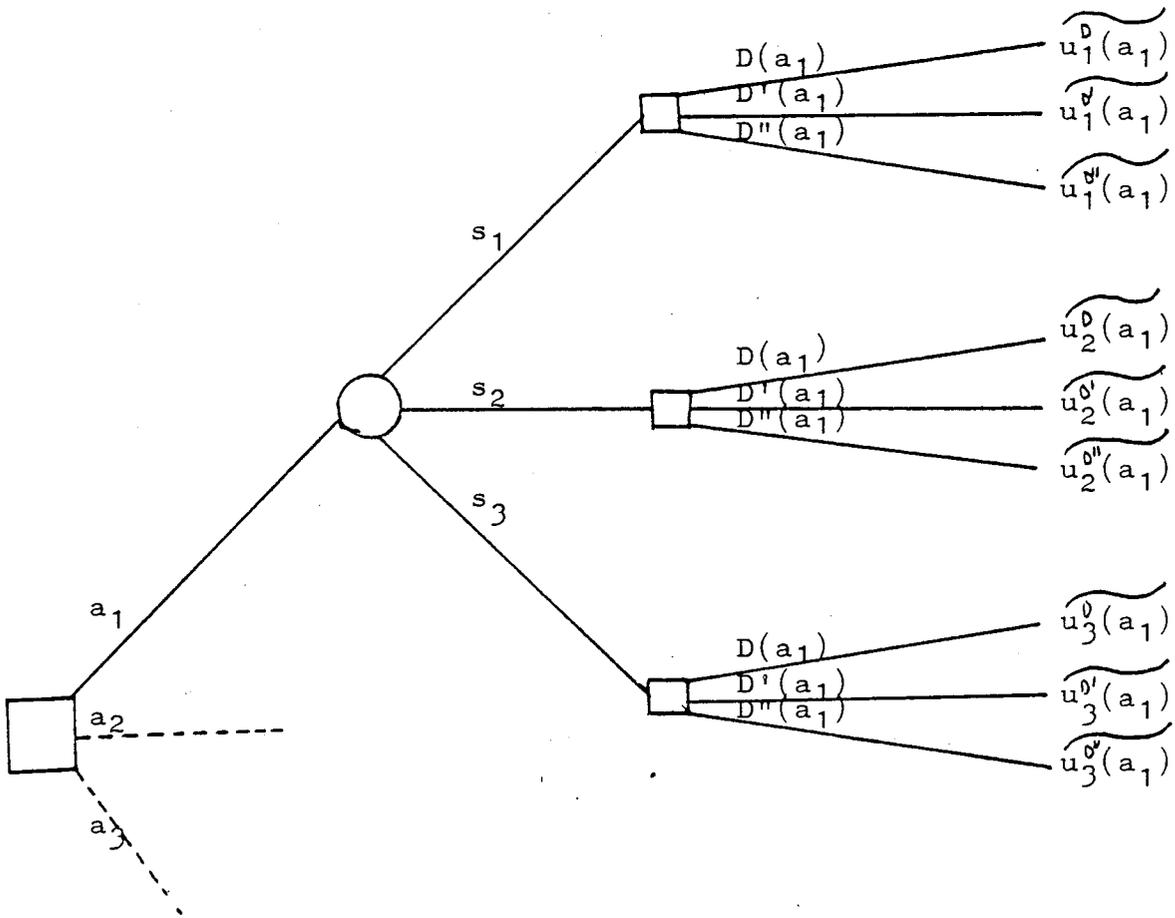
L'utilité conditionnelle floue de a_i pour s_k sera donc

donnée par $\widetilde{u}_k(a_i) = \text{Max}_E [u_k^0(a_i), u_k^{p'}(a_i), u_k^{p''}(a_i), \dots] = u_k^{p^*}(a_i)$
 telle que $E(u_k^{p^*}(a_i), u_k^{p^*}(a_i)) \geq 0 \forall y$. Notons que cette utilité n'est
 pas forcément celle de valeur modale maximum, puisque par
 exemple $\text{Max}_E [(0,4, 0,2, 0,6), (0,5, 0,4, 0,1)] =$
 $(0,4, 0,2, 0,6)$ car $E[(0,4, 0,2, 0,6), (0,5, 0,2, 0,1)] =$
 $+\frac{1}{60} > 0$:

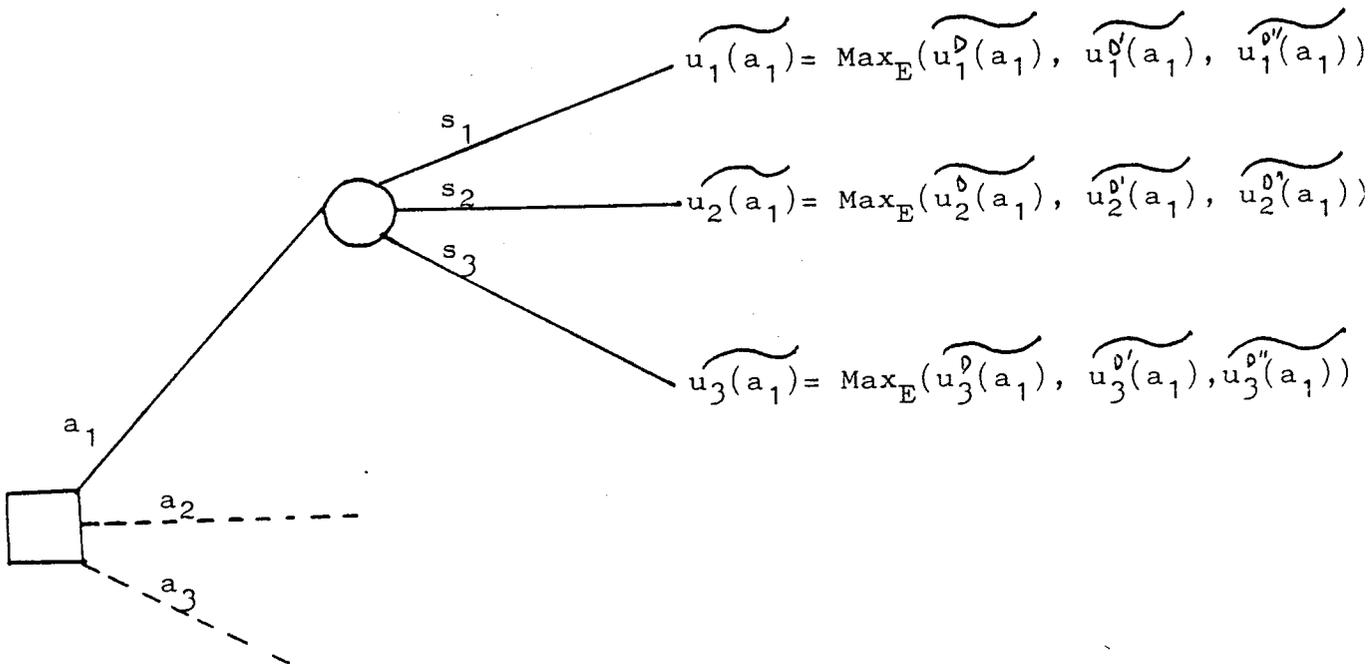
(en trait gras $(0,4, 0,2, 0,6) = \text{Max}_E [(0,4, 0,2, 0,6),$
 $(0,5, 0,4, 0,1)]$).



Donc, en résumé, le schéma suivant



..... est transformé de la sorte :



CHAPITRE III

RECUEIL DE DONNEES ET CONSTRUCTION

DU DOMAINE DE PLAUSIBILITE

Nous avons caractérisé notre problème comme un problème multicritère où les K critères sont les utilités conditionnelles des actions pour chaque scénario. Or, les poids de ces critères sont naturellement liés aux plausibilités d'occurrence des scénarios. Nous allons étudier dans ce chapitre quel type d'information on peut recueillir sur ces plausibilités, et comment cette information peut être exploitée pour rendre compte de l'incertitude. (Rappelons que l'on suppose qu'il n'y a pas interaction entre les actions et les états du monde, les niveaux de vraisemblance respectifs des scénarios étant par conséquent indépendants des choix effectués).

1. - DEFINITION D'UN ENSEMBLE DE JEUX DE POIDS ADMISSIBLES

1.1. Quel type d'information recueillir ?

Nous avons vu que, dans les décisions en univers incertain, la connaissance qu'on a de l'avenir est généralement partielle. Il est rare en effet que l'on ne puisse rien dire sur la vraisemblance de chacun des scénarios, ou qu'au contraire on soit capable de leur affecter avec précision des probabilités

d'occurrence ; la plupart du temps, on est dans une situation intermédiaire entre ces deux cas limites.

Il s'agit par conséquent pour l'homme d'étude d'avoir à sa disposition une procédure de recueil de données où l'information demandée aux experts ne soit ni trop riche, ni trop pauvre par rapport à la quantité d'information réellement disponible. Dans ce but, nous allons nous intéresser au cas où les scénarios sont comparés deux à deux en termes de plausibilité au moyen des trois relations \textcircled{I} , \textcircled{P} et \textcircled{R} , avec :

- . $s_1 \textcircled{I} s_2$ si et seulement si s_1 a même plausibilité que s_2 ;
- . $s_1 \textcircled{P} s_2$ si et seulement si s_1 est plus plausible que s_2 ;
- . $s_1 \textcircled{R} s_2$ si et seulement si s_1 et s_2 sont incomparables (*).

Comme on peut souhaiter également comparer des groupes de scénarios (par exemple s_1 et s_2 ensemble par rapport à s_3), nous allons étendre ces trois relations à l'algèbre \mathcal{A} engendrée par l'ensemble \mathcal{S} des scénarios. \mathcal{A} est définie comme regroupant \mathcal{S} , l'ensemble vide (\emptyset) et toutes les unions possibles d'éléments de \mathcal{S} : $s_1 \cup s_2$, $s_1 \cup s_3, \dots, s_1 \cup s_2 \cup s_3, \dots$. \mathcal{A} compte $C_K^0 + C_K^1 + C_K^2 + \dots + C_K^K = 2^K$ sous-ensembles que l'on notera A_1, A_2, A_3, \dots

(*) On utilise ici les notations \textcircled{I} , \textcircled{P} , \textcircled{R} , \textcircled{S} , afin de distinguer les relations de plausibilité sur les scénarios des relations de préférence usuelles I (indifférence), P (préférence stricte), R (incomparabilité) et S (surclassement).

(sur la notion d'algèbre engendrée, voir [19]).

1.2. Formulation mathématique des contraintes de plausibilité

Pour qu'il existe au moins une mesure de probabilité π sur \mathcal{S} muni de son algèbre \mathcal{A} , c'est-à-dire une fonction non négative dont la valeur est définie pour chaque sous-ensemble de \mathcal{A} et telle que :

$$\pi(\mathcal{S})=1$$

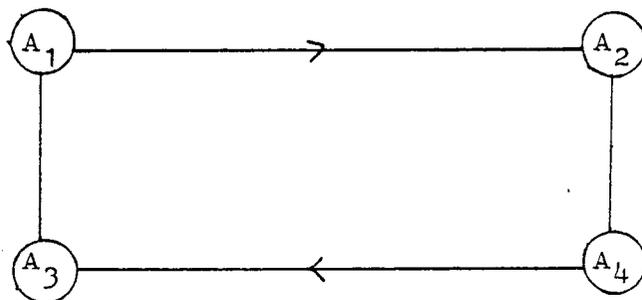
$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \text{ disjoints, } \pi(A_1 \cup A_2) = \pi(A_1) + \pi(A_2),$$

il faut que les relations \textcircled{I} , \textcircled{P} , \textcircled{R} vérifient un certain nombre de conditions.

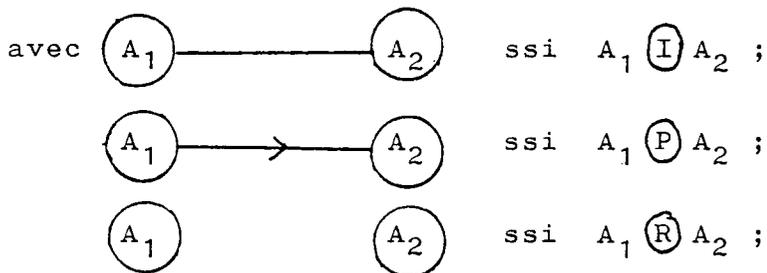
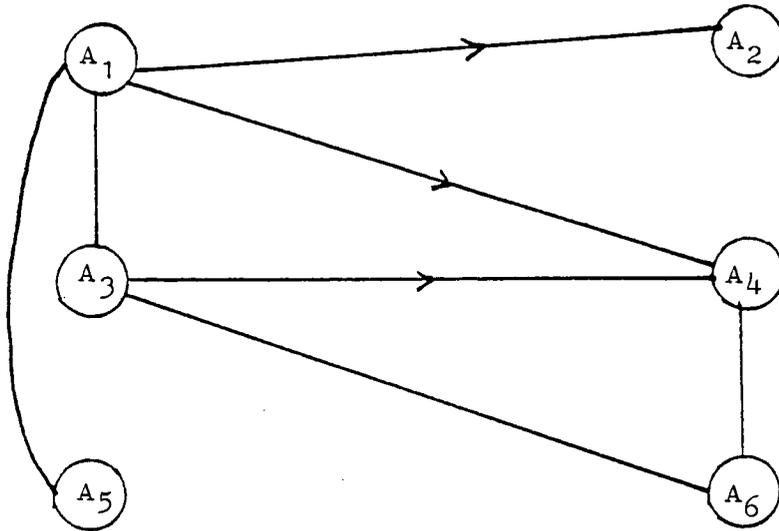
Ces relations doivent en particulier posséder certaines propriétés de cohérence. Ainsi, il est assez naturel de penser que si un groupe de scénario A_1 est plus plausible qu'un autre groupe A_2 , l'inverse n'est pas vrai (autrement dit, \textcircled{P} est asymétrique). De même, il est logique de poser $A_1 \textcircled{I} A_1 \forall A_1 \in \mathcal{A}$, et de dire que si A_1 a même plausibilité que A_2 , alors A_2 a même plausibilité que A_1 (\textcircled{I} réflexive et symétrique). \textcircled{R} ne peut, quant à elle qu'être irréflexive (A_1 non $\textcircled{R} A_1$) et symétrique ($A_1 \textcircled{R} A_2 \iff A_2 \textcircled{R} A_1$). Enfin, on aimerait ne pas avoir des situations où $A_1 \textcircled{P} A_2 \textcircled{P} A_3 \textcircled{P} A_1$, mais on est prêt en revanche à admettre des cas où deux groupes de scénarios A_1 et A_2 ont chacun même plausibilité qu'un troisième A_3 ,

sans qu'on ait pour autant $A_1 \textcircled{I} A_2$, en raison du caractère approximatif de la notion d'équiplausibilité. Une structure très générale possédant ces propriétés est la structure de quasi-ordre partiel définie par B. ROY dans [34]. Un quasi-ordre partiel est engendré par un système relationnel $(\textcircled{I}, \textcircled{P}, \textcircled{R})$, où \textcircled{I} est réflexive et symétrique, \textcircled{P} asymétrique, \textcircled{R} irreflexive et symétrique, et où la relation $\textcircled{S} = \textcircled{P} \cup \textcircled{I}$ possède la propriété de pré-transitivité hyper-forte, ce qui revient à dire que le graphe associé au quasi-ordre partiel ne comporte aucun circuit comprenant un nombre d'arcs \textcircled{P} $(\circ \longrightarrow \circ)$ égal ou supérieur au nombre d'arcs \textcircled{I} $(\circ \longleftarrow \circ)$. On peut montrer qu'alors, \textcircled{P} est forcément transitive.

Exemple de circuit ne vérifiant pas la propriété de pré-transitivité hyper-forte :

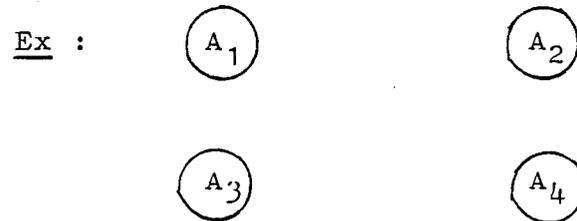


Exemple de graphe associé à une structure de quasi-ordre partiel :

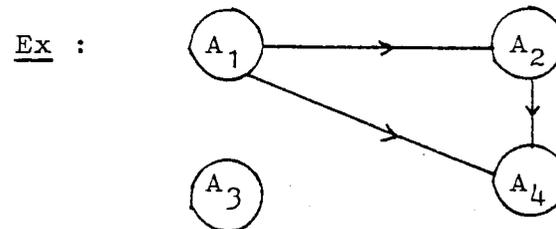


Par son caractère de généralité, la structure de quasi-ordre partiel nous permet de prendre en compte des situations très différentes quant à la richesse des informations disponibles sur \mathcal{C} . En particulier, elle englobe toutes les relations binaires traditionnelles :

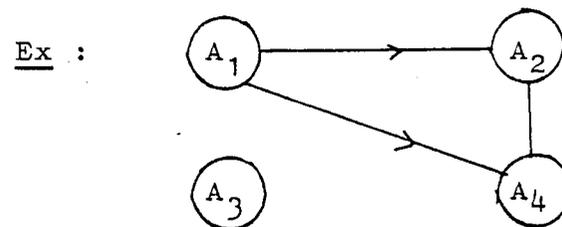
- Complète incomparabilité avec $\textcircled{I} = \emptyset$ et $\textcircled{P} = \emptyset$
 (correspondant à la situation de totale incertitude)



- Ordre partiel avec $\textcircled{I} = \emptyset$

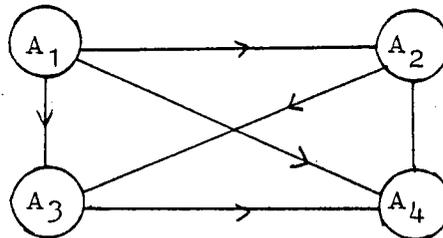


- Préordre partiel avec $\textcircled{S} = \textcircled{P} \cup \textcircled{I}$ transitive
 ($\implies \textcircled{I}$ transitive).



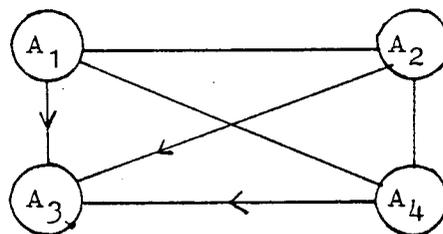
- Ordre total avec $\textcircled{\text{I}} = \emptyset$ et $\textcircled{\text{R}} = \emptyset$

Ex :



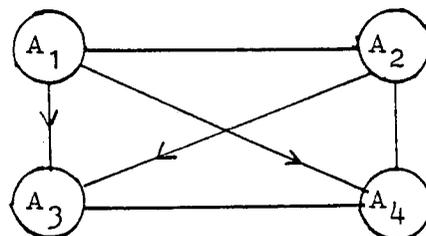
- Préordre complet avec $\textcircled{\text{R}} = \emptyset$ et $\textcircled{\text{S}} = \textcircled{\text{P}} \cup \textcircled{\text{I}}$ transitive ($\implies \textcircled{\text{I}}$ transitive)

Ex :



- Quasi-ordre avec $\textcircled{\text{R}} = \emptyset$

Ex :



{ Axiome PR1 : $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \textcircled{P} A_2$ ou $A_2 \textcircled{P} A_1$ ou $A_1 \textcircled{I} A_2$ ou $A_1 \textcircled{R} A_2$ ("ou" exclusif), et $(\textcircled{I}, \textcircled{P}, \textcircled{R})$ définit sur \mathcal{C} un quasi-ordre partiel.

La condition suivante exprime le fait que, quelque soit le scénario ou le groupe de scénarios A que l'on considère, A a une plausibilité supérieure à celle de l'ensemble vide \emptyset de plausibilité nulle.

{ Axiome PR2 : $\forall A \in \mathcal{C}$ et $A \neq \emptyset$, $A \textcircled{P} \emptyset$.

Si ces deux conditions sont remplies, alors il existe une fonction π de \mathcal{C} dans \mathbb{R} et deux nombres réels δ et δ^+ vérifiant $0 < \delta < \delta^+$, tels que l'on ait :

- . $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \textcircled{P} A_2 \Rightarrow \pi(A_1) - \pi(A_2) \geq \delta^+$ (assertion I)
- . $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \textcircled{I} A_2 \Rightarrow |\pi(A_1) - \pi(A_2)| \leq \delta$ (assertion II)
- . $\forall A \in \mathcal{C}$ et $A \neq \emptyset$, $\pi(A) \geq \delta^+$ (assertion III),
- . $\pi(\mathcal{Y}) = 1$ (assertion IV).

(On trouvera la démonstration de ce théorème en annexe).

Il reste alors à trouver les conditions pour que π soit une fonction additive :

$$\cdot \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \text{ disjoints, } \pi(A_1 \cup A_2) = \pi(A_1) + \pi(A_2)$$

(assertion V).

Pour cela, il est assez logique d'imposer que, pour A_1, A_2 et A_3 sous-ensembles disjoints de \mathcal{A} et A_1 plus plausible que A_2 , on ait A_1 regroupé avec A_3 plus plausible que A_2 regroupé avec A_3 et réciproquement. De même, si A_1 a même plausibilité que A_2 , alors A_1 et A_3 ensemble doivent avoir même plausibilité que A_2 et A_3 ensemble et réciproquement:

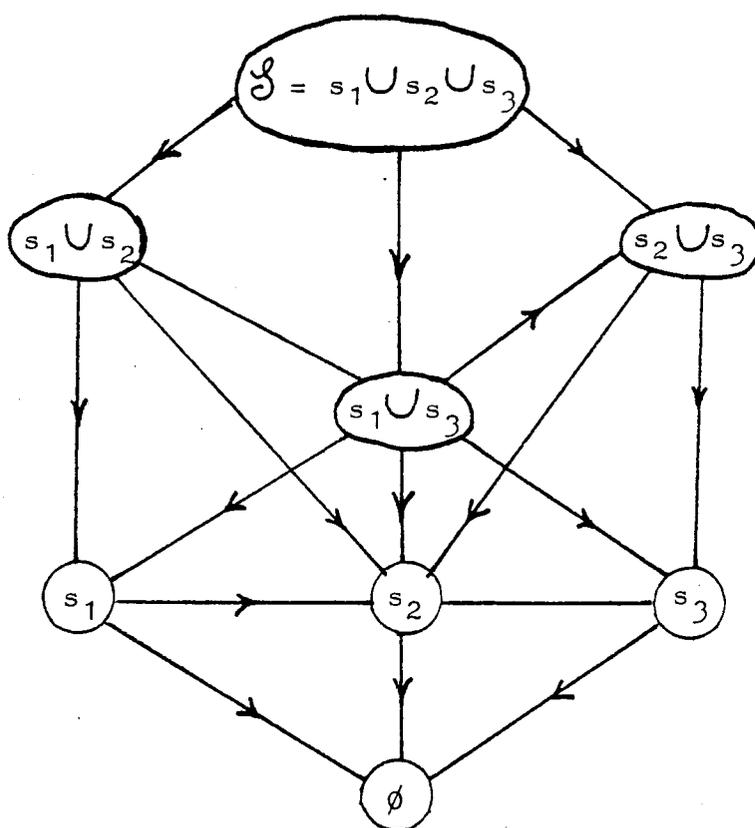
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Axiome_PR3 : } \forall A_1, A_2, A_3 \text{ sous-ensembles disjoints de } \mathcal{A}, \\ A_1 \textcircled{P} A_2 \iff (A_1 \cup A_3) \textcircled{P} (A_2 \cup A_3). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Axiome_PR4 : } \forall A_1, A_2, A_3 \text{ sous-ensembles disjoints de } \mathcal{A}, \\ A_1 \textcircled{I} A_2 \iff (A_1 \cup A_3) \textcircled{I} (A_2 \cup A_3). \end{array} \right.$$

Cependant, ces deux axiomes ne suffisent pas à assurer l'additivité de π , comme nous le prouve un exemple simple mentionné en annexe, et le problème reste donc ouvert. Nous verrons plus loin dans ce chapitre comment on peut malgré tout parvenir à définir un ensemble de relations de plausibilité qui soit compatible avec l'existence d'une fonction π additive.

Lorsque les relations \textcircled{I} , \textcircled{P} , \textcircled{R} définissent sur \mathcal{A} une structure représentable par une forme additive, comme dans l'exemple ci-dessous, on peut associer à chaque scénario s_k

Exemple de graphe sur \mathcal{C}_G (avec $\mathcal{G} = \{s_1, s_2, s_3\}$) pour lequel il existe une mesure de probabilité :



(les arcs de transitivité de \mathbb{P} ont été omis)

une variable $\pi(s_k) = p_k$ pour $k=1 \dots K$, qui a les propriétés d'une probabilité. Chaque relation \textcircled{I} ou \textcircled{P} sur les s_k peut être interprétée comme une contrainte limitant les mesures de probabilité possibles et leur imposant d'appartenir à un domaine de plausibilité donné que l'on notera \mathcal{S} :

$- p_k \gg \delta^+ \quad \forall k=1 \dots K$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{contraintes de structure}$
$- \sum_{k=1}^K p_k = 1$	
$- s_k \textcircled{P} s_{k'} \implies p_k - p_{k'} \gg \delta^+$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{contraintes sur des paires de scénarios}$
$- s_k \textcircled{I} s_{k'} \implies p_k - p_{k'} \leq \delta$	
$- (s_k \cup \dots \cup s_{k'}) \textcircled{P} (s_{k''} \cup \dots \cup s_{k'''})$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{contraintes sur des groupes de scénarios}$
$\implies p_k + \dots + p_{k'} - p_{k''} - \dots - p_{k'''} \gg \delta^+$	
$- (s_k \cup \dots \cup s_{k'}) \textcircled{I} (s_{k''} \cup \dots \cup s_{k'''})$	
$\implies p_k + \dots + p_{k'} - p_{k''} - \dots - p_{k'''} \leq \delta$	

(on remarquera qu'il suffit d'écrire les contraintes induites par la relation \textcircled{P} portant sur les seuls paires ou groupes de scénarios (A_1, A_2) tels que $\frac{1}{2} A_3 / A_1 \textcircled{P} A_3 \textcircled{P} A_2$, du fait de la transitivité de \textcircled{P}).

δ sera appelé seuil d'équiplausibilité et $\delta^+ = \delta + \varepsilon$ (avec ε petit) seuil de dominance en probabilité (*).

Ces contraintes, toutes linéaires, définissent \mathcal{S} comme un polyèdre convexe inclus dans le simplexe de l'espace \mathbb{R}^K . Cet ensemble, qui est d'autant plus restreint que l'information apportée par les relations \textcircled{I} et \textcircled{P} est riche, regroupe ainsi tous les jeux de poids $P^j = (p_1^j, p_2^j, \dots, p_K^j)$ admissibles, c'est-à-dire cohérents avec les relations de plausibilité. On pourra ainsi limiter à \mathcal{S} la procédure de sous-agrégation.

2. LA COLLECTE INITIALE DES DONNEES

Les deux sections qui suivent sont consacrées à la procédure de recueil de données sur la plausibilité des scénarios. On peut distinguer deux grandes parties dans cette procédure (**):

-
- (*) : On trouvera en annexe un algorithme permettant de trouver une borne supérieure pour δ .
 - (**) : Le tableau situé à la fin de ce chapitre donne une vue d'ensemble de la procédure de recueil de données.

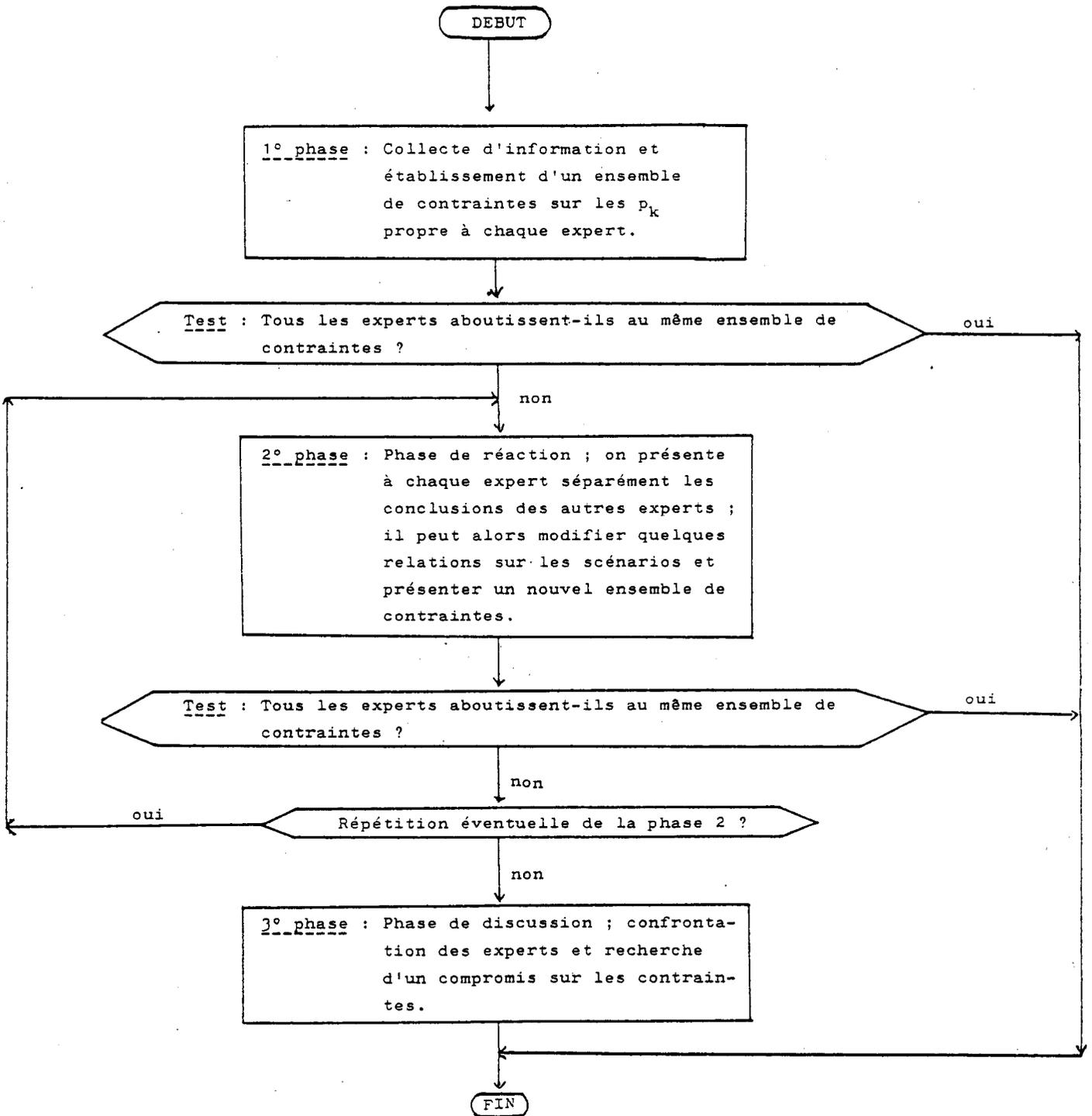
- 1) La collecte initiale de données au moyen de relations \textcircled{I} , \textcircled{P} , \textcircled{R} , qui est abordée dans cette section ;
- 2) La réduction du domaine de plausibilité par adjonction de nouvelles contraintes dans le cadre d'un dialogue experts-machine, qui fait l'objet de la section 3.

2.1. Les trois phases de la collecte

Lorsque l'on cherche à rassembler des données sur la plausibilité des scénarios, on est confronté aux deux problèmes suivants :

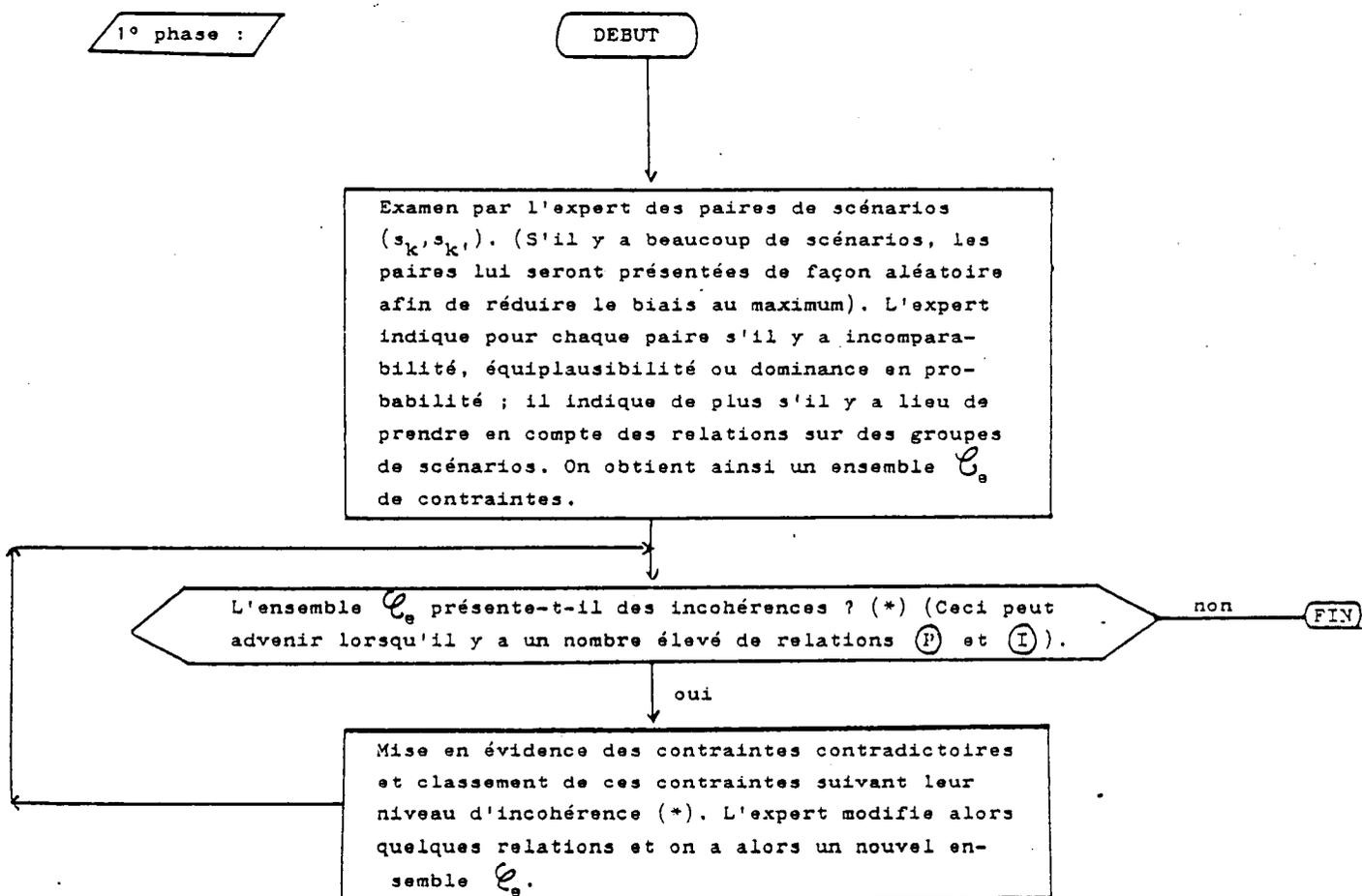
- Comment collecter de l'information expert par expert
- Comment passer de cette information à des données cohérentes communes à l'ensemble des experts ?

Nous proposons ici un recueil d'informations en trois phases qui s'articulent de la façon suivante :

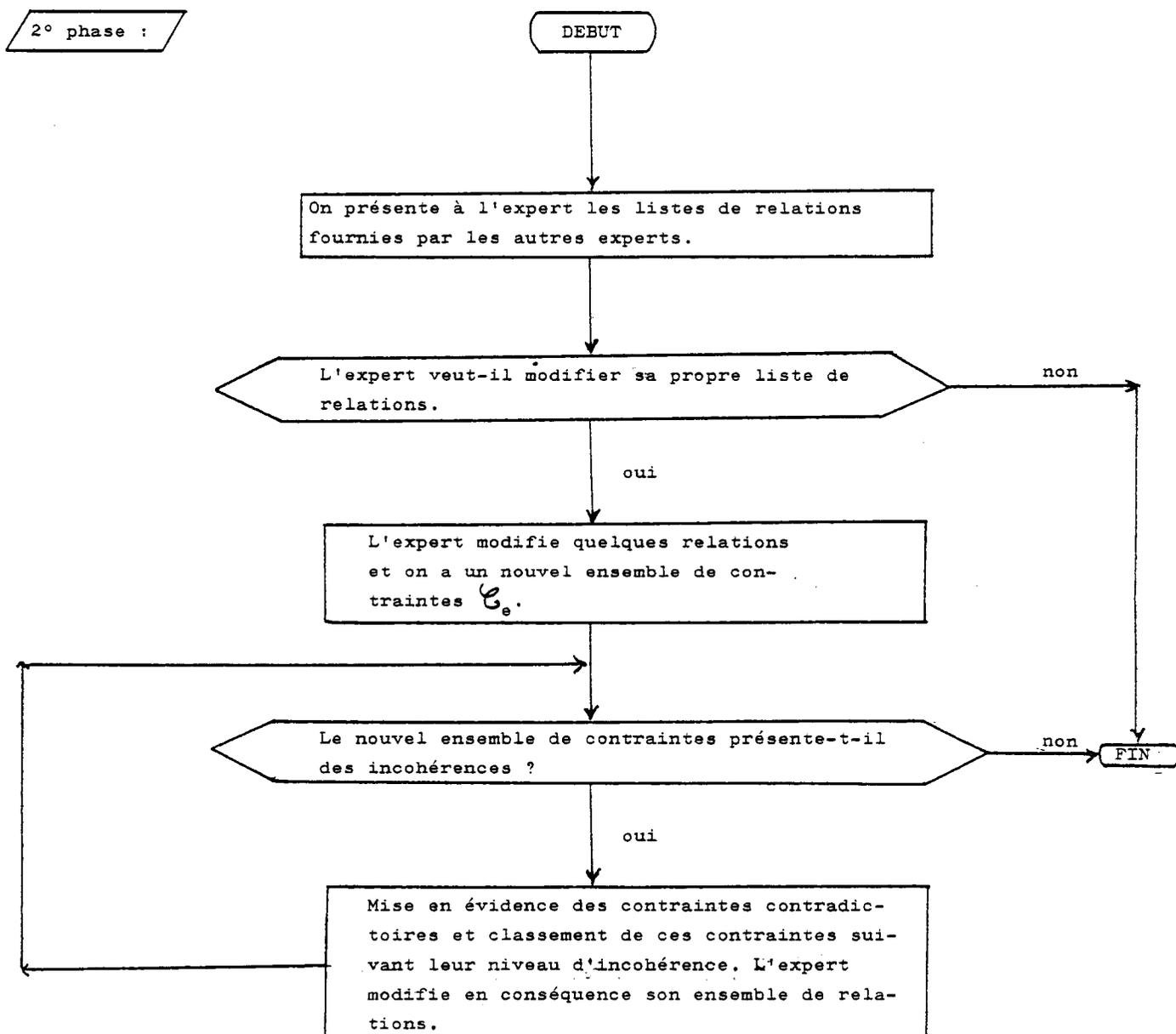


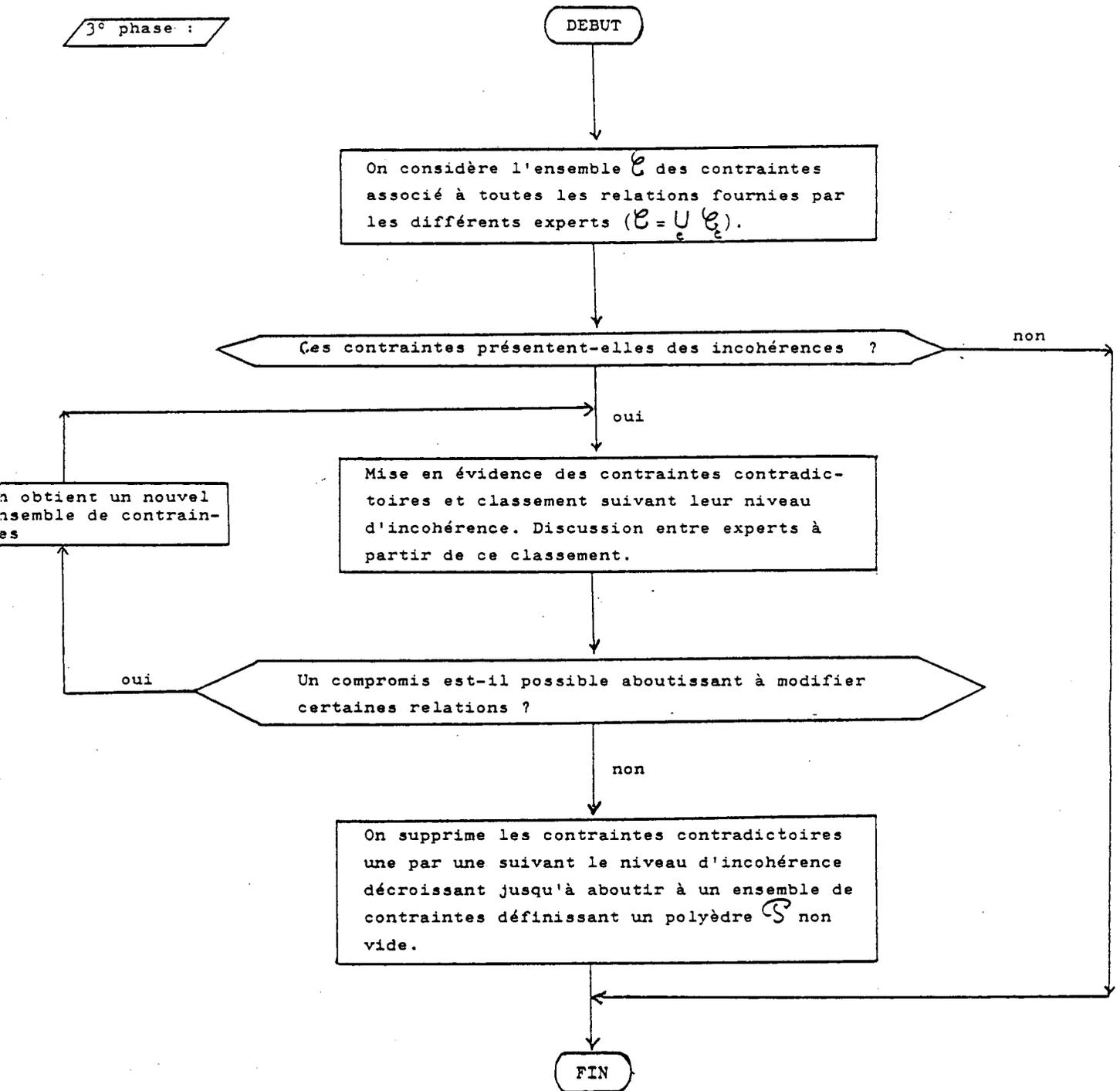
Cette procédure est évidemment très générale, et elle englobe notamment le cas où l'homme d'étude n'est confronté qu'à un seul expert, la collecte de données se limitant alors à la phase 1. La phase 2 ne revêt quant à elle qu'un caractère facultatif et pourra être négligée, dans la mesure où elle ne constitue qu'une étape de préparation à la discussion entre experts.

Examinons plus en détail chacune des trois phases :



(*) : Sur cette notion, voir le § III.2.2.



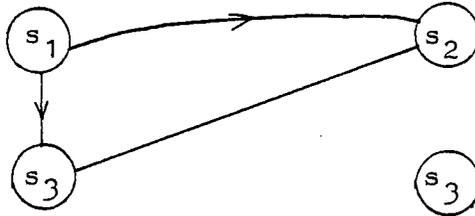


2.2. Les relations contradictoires et leur mise en évidence

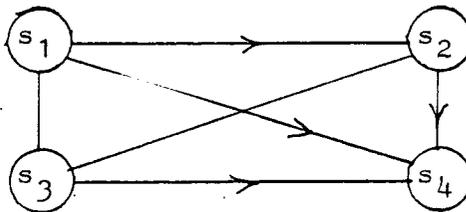
Comme on le voit, le problème principal que l'on retrouve à chacune des étapes de la procédure, et plus particulièrement dans la phase 3, est celui de la cohérence des relations sur la plausibilité des scénarios.

Voyons rapidement un exemple avec trois experts e_1 , e_2 et e_3 et quatre scénarios s_1 , s_2 , s_3 et s_4 (on suppose qu'il n'y a que des relations entre paires de scénarios, que l'on peut représenter par un graphe) :

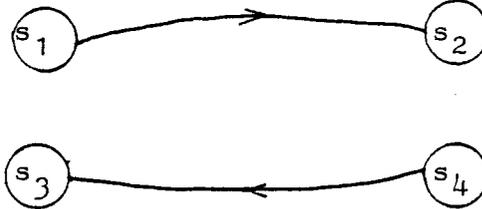
Graphe de l'expert e_1 :



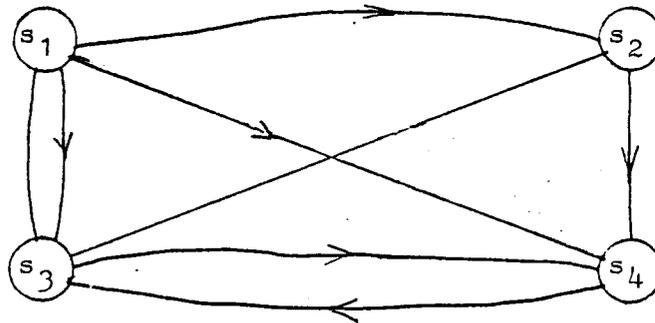
Graphe de l'expert e_2 :



Graphe de l'expert e_3 :



Le graphe-réunion est donc le suivant :



On constate qu'il n'existe manifestement aucun jeu de poids (p_1, p_2, p_3, p_4) compatible avec la structure de ce graphe. Or, tous les arcs du graphe ne contribuent pas de façon identique à créer cette situation d'incohérence ; ainsi dans notre exemple, la relation $s_4 \textcircled{P} s_3$ viole la structure de quasi-ordre partiel bien davantage qu'aucune autre relation. Il est donc intéressant de savoir ordonner les relations en fonction de ce que nous avons appelé leur niveau d'incohérence, afin d'être en mesure de dire laquelle ou lesquelles il convient de modifier ou de supprimer en priorité pour aboutir à un en-

Si les contraintes sont contradictoires, il n'existe pas de vecteur P satisfaisant cette inéquation. On introduit alors des variables d'erreur $z_1, \dots, z_m, \dots, z_M$ (M étant le nombre de contraintes) et on résoud le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min CZ} \\ \text{S.A. } \left| \begin{array}{l} AP-Z \leq B \\ Z \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ \vdots \\ z_M \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \infty \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$] relations structurelles
 $(p_k \geq \delta^+ \forall k \text{ et } \sum_k p_k = 1) (*)$
] relations entre paires de scénarios
] relations entre groupes de scénarios
} M composantes

avec $\alpha > \beta > 0$, afin que les contraintes sur les groupes de scénarios soient modifiées prioritairement par rapport aux contraintes sur les paires de scénarios. La solution Z^* de ce programme linéaire permet de classer les contraintes suivant leur niveau d'incohérence, les plus contradictoires étant celles qui correspondent aux composantes de Z^* les plus élevées. Ainsi imaginons l'ensemble des relations incompatibles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 \textcircled{P} s_2 \\ s_2 \textcircled{P} s_3 \\ s_1 \textcircled{P} s_3 \\ s_3 \textcircled{P} (s_1 \cup s_2) \end{array} \right.$$

(*) ce qui revient à imposer $z_m = 0$ pour les contraintes associées aux relations structurelles.

avec les contraintes associées (sous forme standard) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -p_1 + p_2 \leq -\delta^+ \\ -p_2 + p_3 \leq -\delta^+ \\ -p_1 + p_3 \leq -\delta^+ \\ -p_3 + p_1 + p_2 \leq -\delta^+ \end{array} \right. ,$$

ce qui donne en écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -\delta^+ \\ -\delta^+ \\ -\delta^+ \\ 1 \\ -1 \\ -\delta^+ \\ -\delta^+ \\ -\delta^+ \\ -\delta^+ \end{pmatrix}$$

de Z^* est non nulle, ce qui signifie que la relation $s_3 \textcircled{P} (s_1 \cup s_2)$ à laquelle est associée la neuvième contrainte du P.L. est l'unique relation contradictoire mise en évidence.

3. - REDUCTION INTERACTIVE DU DOMAINE DE PLAUSIBILITE

Une fois construit le polyèdre de départ au moyen de relations \textcircled{I} , \textcircled{P} , \textcircled{R} sur les scénarios, on peut chercher à réduire encore davantage et autant qu'il est possible l'incertitude en amorçant un processus interactif d'introduction de nouvelles contraintes par les experts. Jusqu'ici en effet, nous nous sommes limités à déterminer un domaine de plausibilité au moyen de relations de type ordinal. Cette pratique présente un grand avantage : elle permet de recueillir des informations auprès des experts en les faisant raisonner uniquement en termes de plausibilité sur les scénarios, sans jamais faire appel aux probabilités dans la collecte des données ; cependant il est clair que le polyèdre ainsi défini peut contenir des jeux de poids incohérents ou irréalistes au regard des experts. En laissant les choses en état, on risquerait alors de négliger une part importante de l'information disponible et d'hypothéquer du coup la crédibilité des résultats. Il est donc bon de se ménager la possibilité d'adjoindre aux contraintes déjà définies de nouvelles contraintes, de type car-

dinal cette fois, afin d'affiner le modèle de représentation de l'incertitude (*). Examinons quelques-unes de ces dernières :

- $\frac{1}{K} \leq p_k \leq \frac{1}{2}$, traduisant le fait que le scénario s_k appartient à l'ensemble des scénarios les plus plausibles, sans toutefois être à lui seul plus plausible que tous les autres réunis;
- $\delta^* \leq p_k \leq \frac{1}{K}$, signifiant que s_k a une plausibilité inférieure à la moyenne;

ou bien, de façon plus générale :

- $q_{k*} \leq p_k \leq q_k^*$, avec $q_{k*}, q_k^* \in [0 ; 1]$ (p.ex. $0,2 \leq p_k \leq 0,4$) ;

et encore :

- $p_k \gg a \cdot p_{k'}$, où $a \in \mathbb{Q}_+^*$ c'est-à-dire s_k a au moins "a" fois plus de chances de se produire que $s_{k'}$;
- $p_k - p_{k'} \leq r$, ou $p_k - p_{k'} \gg r$ avec $r \in [0 ; 1]$
(p. ex. $p_1 - p_2 \leq 0,3$);
- $s_* \leq p_k + \dots + p_{k'} \leq s^*$, avec $s_*, s^* \in [0 ; 1]$
(p. ex. $0,5 \leq p_1 + p_2 \leq 1$).

(*) : Voir B. ROY [36]).

Cette introduction de nouvelles contraintes ne peut pas se faire ex nihilo, dans la mesure où les experts sont ici tenus de se prononcer directement sur les probabilités p_k . Il s'agit par conséquent de les faire réagir sur quelques jeux de poids exhibés à partir de l'exploration de \mathcal{P} de la manière suivante :

- Jugez-vous ce jeu de poids cohérent et réaliste ?
- S'il ne l'est pas, quelle est la relation entre les p_k qui n'est pas vérifiée par ce jeu de poids ?

Cette phase de réduction systématique du polyèdre est donc bien séparée de la collecte initiale des données où il s'agit d'avantage de cerner la nature de l'incertitude dans ses grandes lignes, et de fournir une base de départ au processus interactif décrit ici.

Chaque expert e , par enrichissement progressif de l'ensemble des contraintes, pourra ainsi définir un nouveau polyèdre \mathcal{P}_e inclus dans le polyèdre de départ. Il est bien entendu possible que tous les experts ne concordent pas sur l'ensemble des contraintes ; on pourra alors rechercher un compromis en s'aidant de la méthode de goal-programming vue précédemment, de manière à aboutir à un domaine de plausibilité non vide.

Il nous reste à voir plus précisément comment s'articule la phase de réaction et surtout quels algorithmes peuvent être mis en oeuvre pour exhiber un petit nombre de jeux de poids du polyèdre de départ. Puisque nous cherchons à traquer les jeux de poids irréalistes, il est logique que nous nous intéressions avant tout aux points situés sur la frontière de \mathcal{S} . Plusieurs algorithmes d'exploration permettent de répondre à ce problème, fondés soit sur la méthode simplexe inverse (cf [47]), soit sur des méthodes de labyrinthe (CHARNES-COOPER [7], MANAŠ-NEDOMA [26]) pour déterminer les coordonnées des sommet du polyèdre. On peut également envisager de rechercher les jeux de poids correspondant aux valeurs extrémales des probabilités $p_1, \dots, p_k, \dots, p_K$, en faisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{k=1}^K p_k p_k \\ \text{pour l'ensemble} \\ \text{des contraintes } \mathcal{E} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{k=1}^K p_k p_k' \\ \text{pour } \mathcal{E} \end{array} \right.$$

où $p_k = 0$ ou $1 \quad \forall k=1 \dots K$. Illustrons cette idée avec un exemple

Exemple d'application : On a un polyèdre \mathcal{S} de départ défini par les relations $s_1 \textcircled{P} s_2$, $s_2 \textcircled{P} s_3$ et $s_3 \textcircled{I} s_4$. Le seuil d'équiplausibilité δ est égal à 0,09 et le seuil de dominance $\delta^+ = 0,10$.

Les contraintes initiales s'écrivent donc :

$$\left. \begin{array}{l}
 \cdot 0,10 \leq p_1 \leq 1 \\
 \cdot 0,10 \leq p_2 \leq 1 \\
 \cdot 0,10 \leq p_3 \leq 1 \\
 \cdot 0,10 \leq p_4 \leq 1 \\
 \cdot p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\
 \cdot p_1 \geq p_2 + 0,10 \\
 \cdot p_2 \geq p_3 + 0,10 \\
 \cdot |p_3 - p_4| \leq 0,09
 \end{array} \right\}$$

1° itération : La détermination des jeux de poids correspondant au calcul des valeurs extrémales donne :

OBJECTIF	p_1	p_2	p_3	p_4	JEU DE POIDS COHERENT ?
Min p_1	0,36	0,26	0,16	0,22	oui
Max p_1	0,60	0,20	0,10	0,10	non
Min p_2	0,60	0,20	0,10	0,10	non
Max p_2	0,45	0,35	0,10	0,10	non
Max p_3	0,39	0,29	0,19	0,13	oui
Max p_4	0,36	0,26	0,16	0,22	oui

Ayant observé ces jeux de poids, l'expert estime que la valeur maximale de p_1 doit être abaissée à 0,50 et que d'autre part, l'écart entre p_2 et p_4 ne doit pas dépasser 0,20. Les contraintes additionnelles s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \cdot p_1 \leq 0,50 \\ \cdot p_2 - p_4 \leq 0,20 \end{cases}$$

2° itération : Les nouveaux jeux de poids exhibés sont les suivants :

OBJECTIF	p_1	p_2	p_3	p_4	JEU DE POIDS COHERENT ?
Max p_1	0,50	0,30	0,10	0,10	oui
Min p_2	0,48	0,24	0,14	0,14	oui
Max p_2	0,44	0,32	0,12	0,12	oui

Tous ces jeux de poids étant jugés cohérents, la partie interactive de la procédure est terminée en ce qui concerne cet expert.

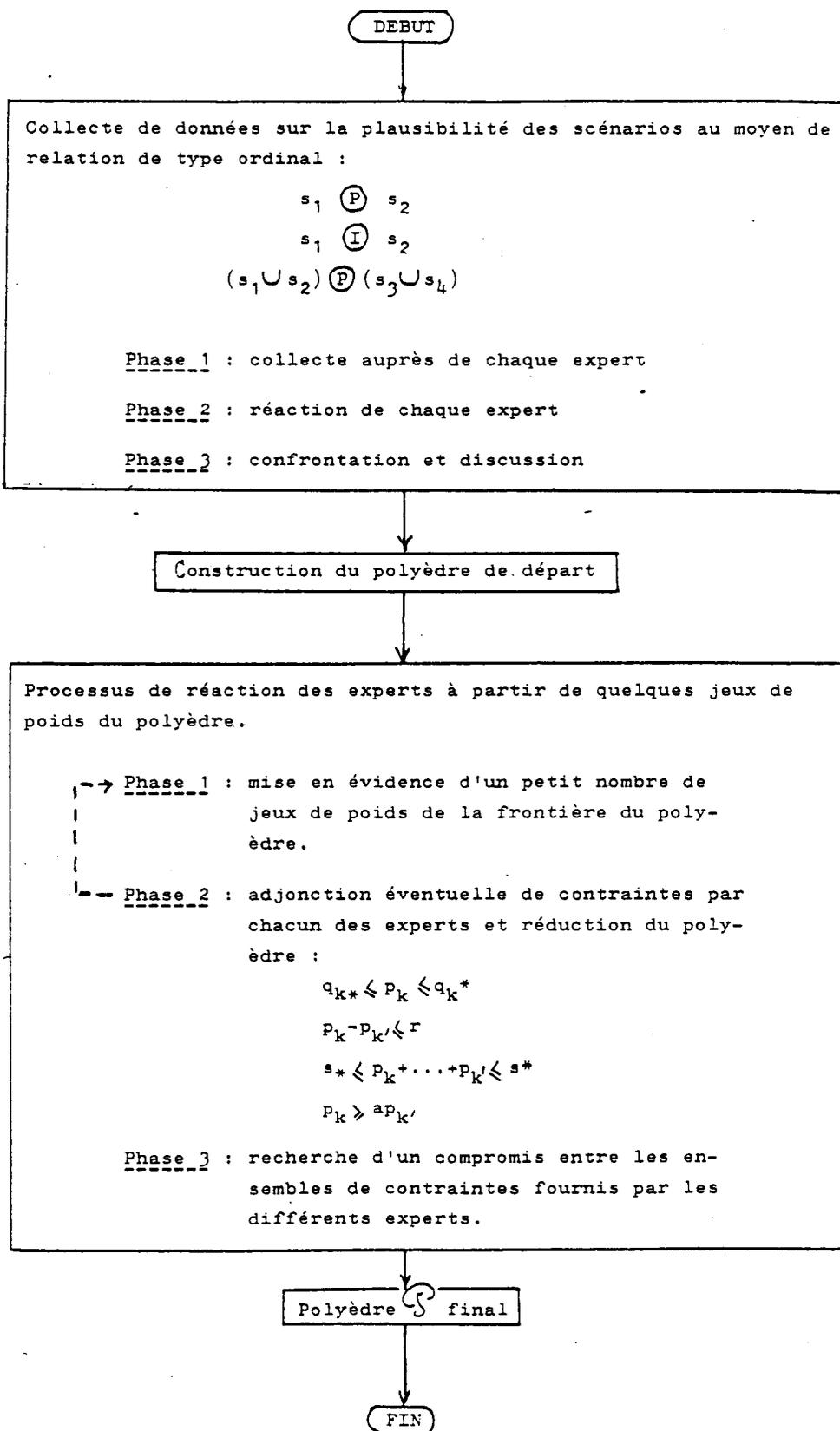
Comme on peut le constater en conclusion de ce chapitre, le recueil d'informations par le biais de relations cherchant à cerner au mieux les probabilités attachées aux

SCHEMA GENERAL DE LA PROCEDURE DE

RECUEIL DE DONNEES

COLLECTE
INITIALE

PARTIE
INTERACTIVE



scénarios permet de couvrir une grande diversité de situations. En particulier, cette approche englobe les deux situations extrêmes de totale incertitude et d'avenir complètement probabilisable : La première correspond à l'absence de contrainte sur les p_k , et la seconde au cas où le polyèdre \mathcal{S} se réduit à un jeu de poids P unique.

CHAPITRE IV

SELECTION ET CLASSEMENT D' ACTIONS

PAR SOUS-AGREGATION

Nous venons de voir dans le chapitre précédent comment la notion d'incertitude pouvait être modélisée par un ensemble de mesures de probabilité admissibles. Dans ce quatrième chapitre, il s'agit de rechercher des moyens de comparaison des actions en partant du domaine de plausibilité ainsi défini. Comme on le verra, chaque action peut être caractérisée par un certain nombre de valeurs, floues ou non, qui ont le sens d'une utilité espérée. Nous examinerons comment on peut construire des critères de choix à partir de ces valeurs, et nous proposerons notamment un critère original fondé sur la recherche du sous-ensemble flou des actions non dominées. La dernière partie sera consacrée à la confrontation de notre méthode avec d'autres modèles de décision sur la base d'un exemple numérique.

1. - DISCRETISATION DU POLYEDRE \mathcal{S} ET CALCUL DES SOMMES PONDEREES

Une fois établi de façon définitive l'ensemble \mathcal{C} des contraintes, la sous-agrégation proprement dite peut commencer.

Pour des raisons de commodité et pour des impératifs liés aux procédures de comparaison étudiées plus loin, il nous

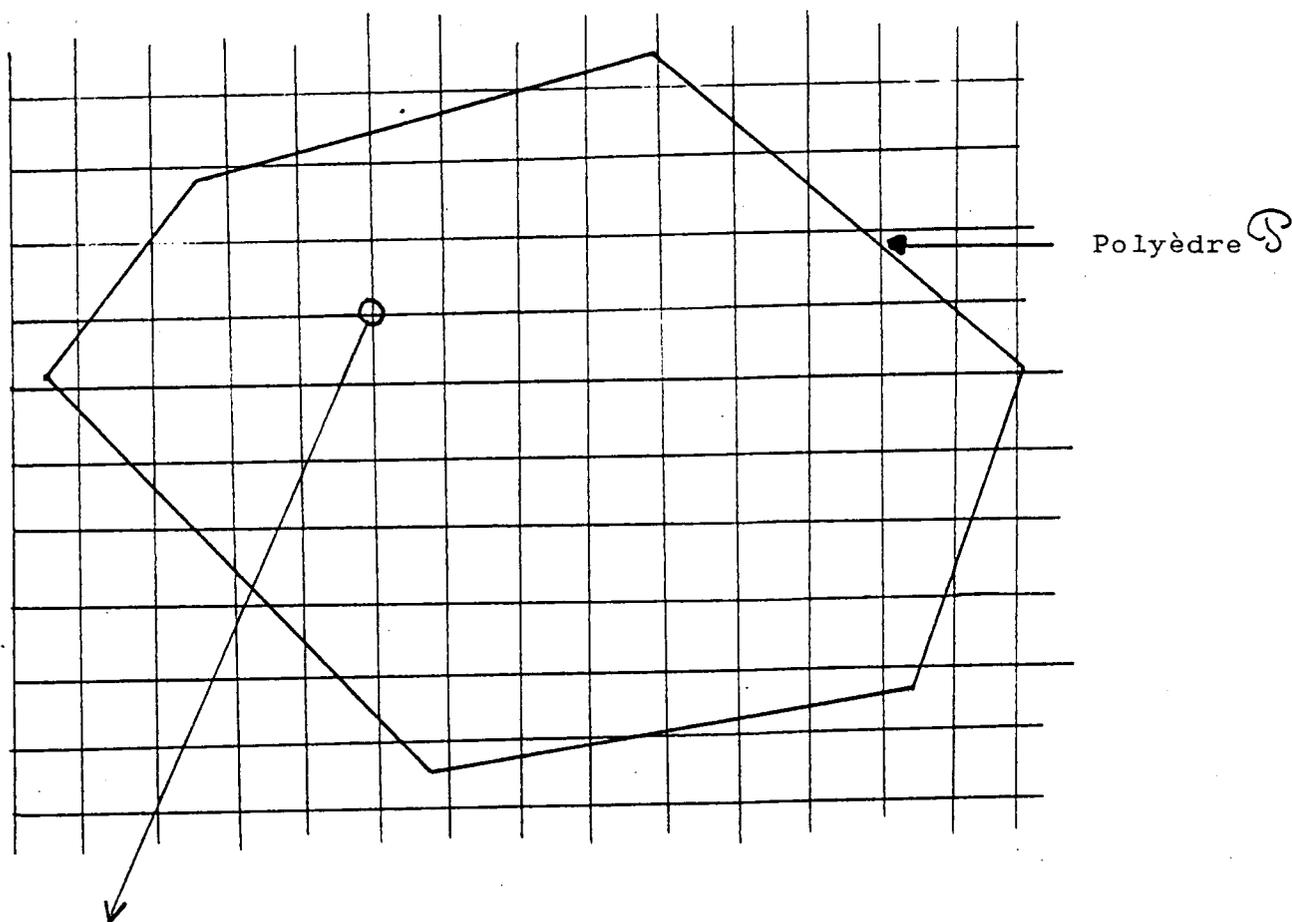
a semblé judicieux de transformer le domaine de plausibilité en un ensemble fini de jeux de poids noté \mathcal{S}^{dis} . Dans ce but, nous avons retenu une méthode de discrétisation par quadrillage tirée du programme ENUMEF (cf [2]), et qui est détaillée en annexe. D'autres méthodes de discrétisation pourraient bien entendu être utilisées ici, pour peu qu'elles aboutissent à un ensemble suffisamment représentatif du polyèdre de départ (signalons notamment les travaux de Y.A. BERNABEU et H.-M. WINKELS et la procédure interactive qu'ils proposent dans [3]).

Les jeux de poids générés par cette discrétisation seront notés $P^j = (p_1^j, p_2^j, \dots, p_k^j, \dots, p_K^j)$ pour j variant de 1 à J .

A chacun d'eux, on peut associer pour une action a_i donnée la somme pondérée $U^j(a_i) = \sum_{k=1}^K p_k^j u_k(a_i)$, qui peut être interprétée comme l'utilité espérée de a_i pour le jeu de poids particulier qu'est P^j .

Dans le cas où les utilités conditionnelles sont floues on forme de même J sommes pondérées floues $\widetilde{U^j(a_i)} = \sum_{k=1}^K p_k^j \widetilde{u_k(a_i)}$ notées par le triplet $(U^j(a_i), \alpha^j(a_i), \beta^j(a_i))$, où $\alpha^j(a_i) = U^j(a_i) - U_*^j(a_i)$ (valeur modale moins valeur limite inférieure) et $\beta^j(a_i) = U^{j*}(a_i) - U^j(a_i)$ (valeur limite supérieure moins valeur modale) (*).

(*) : La fonction d'appartenance de $\widetilde{U^j(a_i)}$ est donnée par les formules du chapitre II.



$$P^j \longrightarrow U^j = p_1^j u_1 + p_2^j u_2 + \dots + p_k^j u_k + \dots + p_K^j u_K$$

2. - APPLICATION DE CRITERES OBJECTIVISTES AU POLYEDRE S

Dans cette première approche sont proposés des modes de sélection et de classement dérivés des critères de décision de caractère "objectiviste", suivant l'optique adoptée par FOURGEAUD, LENCLUD et SENTIS ([17]).

Dans le cas non flou, pour une action a_i donnée, on a donc J utilités espérées $U^1(a_i), U^2(a_i), \dots, U^j(a_i), \dots, U^J(a_i)$, auxquelles on peut appliquer l'un des critères suivants :

- a) Le critère du maximin, où les actions sont comparées en fonction de leur somme pondérée de valeur minimale $\text{Min}_j U^j(a_i)$. Le choix de ce critère traduit le souci de prise en compte par le décideur de l'hypothèse la plus défavorable à l'intérieur du domaine de plausibilité. Lorsque l'on est en situation de totale incertitude et que \mathcal{S} est égal au simplexe de \mathbb{R}^K tout entier, on retrouve le critère de WALD évoqué au I.3.2.:

$$\text{Min}_j U^j(a_i) = \text{Min}_k u_k(a_i)$$

Inversement, lorsque \mathcal{S} est réduit à un seul point (et l'ensemble des sommes pondérées à un seul élément), on retrouve le critère de l'espérance (cf. I.3.3.).

- b) Le critère du minimax regret, où les actions sont comparées en fonction de leurs valeurs de regret respectives maximales $\text{Max}_j \Delta^j(a_i)$ où $\Delta^j(a_i) = \text{Max}_i U^j(a_i) - U^j(a_i)$.

En situation de totale incertitude, on retrouve le critère de SAVAGE traditionnel (cf I.3.2.) :

$$\text{Max}_j \Delta^j(a_i) = \text{Max}_k \left[\text{Max}_i u_k(a_i) - u_k(a_i) \right]$$

- c) Le critère du maximax, où les actions sont comparées en fonction de leur somme pondérée de valeur maximale $\text{Max } U^j(a_i)$, et qui revient à prendre en compte l'hypothèse la plus favorable à l'intérieur de \mathcal{S} . Pour $\mathcal{S} = \text{simplexe } (\mathbb{R}^K)$, on retrouve le critère de HURWICZ traditionnel (cf I.3.2.) :

$$\text{Max}_j U^j(a_i) = \text{Max}_k u_k(a_i).$$

Dans le cas flou, on peut procéder de la même manière, en utilisant l'écart E défini au chapitre II pour déterminer pour chaque action les sommes pondérées floues minimale et maximale (*):

$$\text{Min}_E \widetilde{U^j(a_i)} = \widetilde{U^{j^0}(a_i)} \text{ telle que } E(\widetilde{U^{j^0}(a_i)}, \widetilde{U^j(a_i)}) \leq 0 \\ \forall j=1 \dots J.$$

(*) : Contrairement au cas non flou, nous n'introduisons pas ici de critère du type "regret maximum". En effet, si, pour chaque jeu de poids P_j , on calculait des valeurs de regret au moyen de l'opérateur flou \ominus , la meilleure action pour ce jeu de poids serait évaluée $(0, \alpha^j + \beta^j, \alpha^j + \beta^j)$, et non $(0, 0, 0)$ en fonction de la formule de la soustraction floue. Les valeurs de regret perdant ainsi beaucoup de leur signification, il nous semble préférable de renoncer à ce critère.

$$\text{Max}_j \widetilde{U^j(a_i)} = \widetilde{U^{j^*}(a_i)} \text{ telle que } E(\widetilde{U^{j^*}(a_i)}, \widetilde{U^j(a_i)}) \geq 0$$

$$\forall j=1 \dots J.$$

3. - PROPOSITION D'UN NOUVEAU CRITERE DE CHOIX

Dans cette section est présenté un critère original de sélection et de classement où les actions sont comparées, non plus en vertu d'une utilité espérée particulière (minimale ou maximale), mais à partir de l'ensemble des utilités espérées $U^1, \dots, U^j, \dots, U^J$ (ou $\widetilde{U}^1, \dots, \widetilde{U}^j, \dots, \widetilde{U}^J$ dans le cas flou).

La procédure se décompose en trois parties :

- Construction d'une relation de surclassement partiel sur l'ensemble des actions A pour chacun des jeux de poids $P^j (j=1 \dots J)$;
- Construction d'une relation de surclassement global sur A à partir des J relations partielles ;
- Mise en évidence du sous-ensemble flou des actions non dominées.

Dans cette procédure, on considèrera les J jeux de poids constituant \mathcal{S}^{dis} comme ayant tous la même importance. Adopter cette attitude revient à supposer qu'il n'existe pas,

parmi toutes les mesures de probabilité composant \mathcal{S} , un sous-ensemble de jeux de poids qui permette de représenter mieux que les autres les degrés de croyance des experts vis-à-vis de la réalisation future des différents scénarios. Il s'agit donc là d'une hypothèse d'équivalence en termes d'admissibilité entre les jeux de poids de \mathcal{S} (si l'on n'accepte pas cette hypothèse, la procédure reste malgré tout applicable à condition de moduler chaque P^j par un "degré d'admissibilité" compris par exemple entre 0 et 1 (*)).

3.1. Surclassement trivial et surclassement flou partiels

Le concept de surclassement a été introduit par B. ROY dans le cadre de la modélisation des préférences afin de donner à celle-ci un caractère beaucoup moins contraignant que dans les méthodes fondées sur la construction d'une fonction multiattributs (voir [1], [4], [5], [23], [27], [37]). Une relation de surclassement est une relation binaire S définie sur A de la manière suivante :

- la proposition " a_1 surclasse a_2 " signifie que l'on que a_1 est au moins aussi bonne que a_2 ;
- la proposition " a_1 ne surclasse pas a_2 " signifie que les preuves en faveur de la proposition " a_1 est

(*) : Dans ce cas, \mathcal{S} pourrait être considéré comme un sous-ensemble flou de \mathcal{R}^k .

au moins aussi bonne que a_2 " sont jugées insuffisantes.

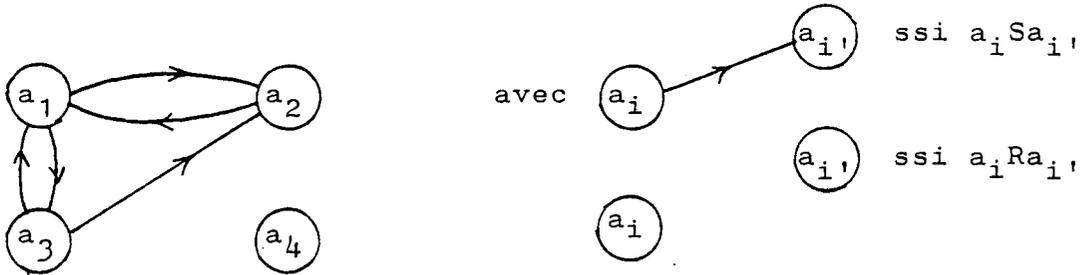
S regroupe par conséquent les deux relations fondamentales de préférence stricte P et d'indifférence I, mais le graphe associé à S ne sera pas toujours complet, certaines actions pouvant être jugées incomparables. En résumé, on a donc :

$$a_1 P a_2 \iff a_1 S a_2 \text{ et } a_2 \text{ non } S a_1$$

$$a_1 I a_2 \iff a_1 S a_2 \text{ et } a_2 S a_1$$

$$a_1 R a_2 \iff a_1 \text{ non } S a_2 \text{ et } a_2 \text{ non } S a_1$$

Exemple de graphe associé à une relation de surclassement trivial



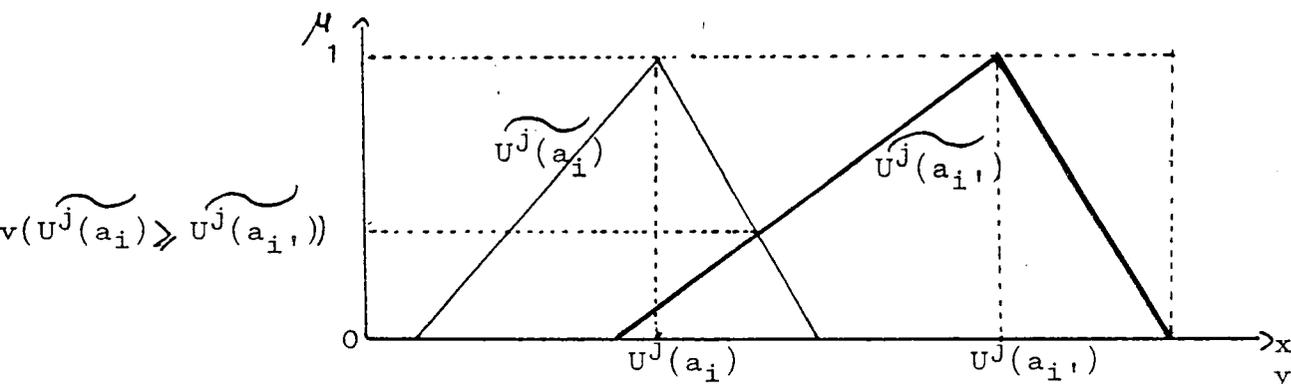
Cette représentation des préférences au moyen d'une relation de surclassement triviale convient bien dans notre

problème au cas où les sommes pondérées sont des utilités espérées ponctuelles $U^j(a_i)$. Pour chaque jeu de poids P^j , on aura alors une relation dite de "surclassement partiel" S^j sur l'ensemble A des actions, définie par :

$$a_1 S^j a_2 \iff U^j(a_1) \gg U^j(a_2)$$

Par contre, lorsque les utilités espérées sont floues, il n'est plus possible de raisonner de la sorte. On est donc amené à définir une relation de surclassement partiel floue, où le surclassement de a_i par a_i est modulé par un degré de crédibilité $d^j(a_i, a_i')$. Une façon logique et cohérente de procéder est alors d'identifier ce degré comme la valeur de vérité v de l'assertion " $\widetilde{U^j(a_i)}$ est plus grande que $\widetilde{U^j(a_i')}$ ". Le principe d'extension de ZADEH nous dit que, pour deux nombres flous \widetilde{m} et \widetilde{n} quelconques, on a :

$$v(\widetilde{m} \gg \widetilde{n}) = \sup_{x \gg y} [\text{Min}(\mu_{\widetilde{m}}(x), \mu_{\widetilde{n}}(y))]$$



* Si $m \gg n$ (i.e. la valeur modale de \tilde{m} et supérieure à la valeur modale de \tilde{n}), $v(\tilde{m} \gg \tilde{n}) = 1$.

* Sinon : - lorsque \tilde{m} et \tilde{n} sont disjoints, $v(\tilde{m} \gg \tilde{n}) = 0$;
- lorsque les deux nombres ne sont pas disjoints, v est égale à la plus haute ordonnée de leur intersection (cf [12]) ; en

particulier, pour des nombres flous triangulaires $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)$ et $\tilde{n} = (n, \gamma, \delta)$,

$$v(\tilde{m} \gg \tilde{n}) = 1 - \frac{n-m}{\gamma+\beta}$$

On a donc $d^j(a_i, a_i) = v(\widetilde{U^j(a_i)} \gg \widetilde{U^j(a_i)})$ défini de la sorte. Vérifions que d^j satisfait aux trois conditions citées par B. ROY (cf [39]) qui caractérisent un degré de crédibilité :

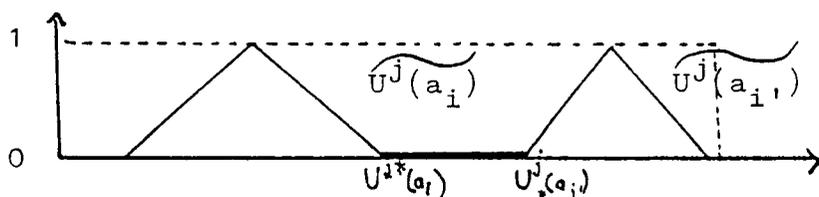
- Propriété 1 : $d^j(a_i, a_i)$ n'est fonction que des évaluations : c'est évident d'après la définition de d^j
- Propriété 2 : $d^j(a_i, a_i)$ est d'autant plus grand que la fiabilité du surclassement de a_i , par a_i est plus grande : c'est aussi vrai, puisque d^j se rapproche de 1 lorsque le support commun aux deux nombres flous s'étend.
- Propriété 3 : $0 \leq d^j(a_i, a_i) \leq 1$: c'est évident par définition.

Remarquons pour finir qu'une relation de surclassement triviale comme celle examinée plus haut peut être résumée par un degré de crédibilité $d^J(a_i, a_i')$ égal à 1 si $a_i S^J a_i'$, et à 0 sinon.

3.2. Construction d'une relation de surclassement global à partir des J relations partielles

Chaque couple d'actions (a_i, a_i') peut ainsi être comparé au moyen d'une relation de surclassement partiel, floue ou triviale selon le cas dans lequel on se trouve, et ceci pour chacune des J sommes pondérées. Une idée naturelle est alors de chercher à construire à partir de ces J relations partielles S^J une unique relation de surclassement global S. Cette relation, qui sera floue quelle que soit la nature des utilités espérées, sera définie par un degré de crédibilité noté $\mu_S(a_i, a_i')$ faisant intervenir les degrés de surclassements partiels d'une part, et d'autre part un seuil de veto v. Ce seuil de veto, qui peut ou bien dépendre de U^J , ou bien être constant, est défini comme la valeur de la différence $U^J(a_i',) - U^J(a_i)$ (ou, dans le cas flou $U_*^J(a_i',) - U_*^J(a_i)$ (*)) au-delà de laquelle on refuse toute crédibilité au surclassement de a_i' par a_i , même si tous les autres écarts entre utilités espérées sont favorables à a_i' . On a donc :

(*) : ce qui correspond à la plus petite différence possible entre les deux nombres flous $\widetilde{U^J(a_i')}$ et $\widetilde{U^J(a_i)}$:



* dans le cas non flou

$$\cdot \mu_S(a_i, a_i) = \left\| \frac{j/a_i S^j a_i}{J} \right\| \text{ si } \exists j^{\circ} \text{ t.q.}$$

$$U^{j^{\circ}}(a_i) > U^{j^{\circ}}(a_i) + v [U^{j^{\circ}}(a_i)] \quad (*)$$

$$\cdot \mu_S(a_i, a_i) = 0 \text{ sinon}$$

* dans le cas flou

$$\cdot \mu_S(a_i, a_i) = \frac{\sum_{j=1}^J d^j(a_i, a_i)}{J} \text{ si } \exists j^{\circ} \text{ t.q.}$$

$$U_*^{j^{\circ}}(a_i) > U^{j^{\circ}*}(a_i) + v [U^{j^{\circ}*}(a_i)] \quad (*)$$

$$\cdot \mu_S(a_i, a_i) = 0 \text{ sinon.}$$

Il est facile de voir que μ_S vérifie les propriétés d'un degré de crédibilité.

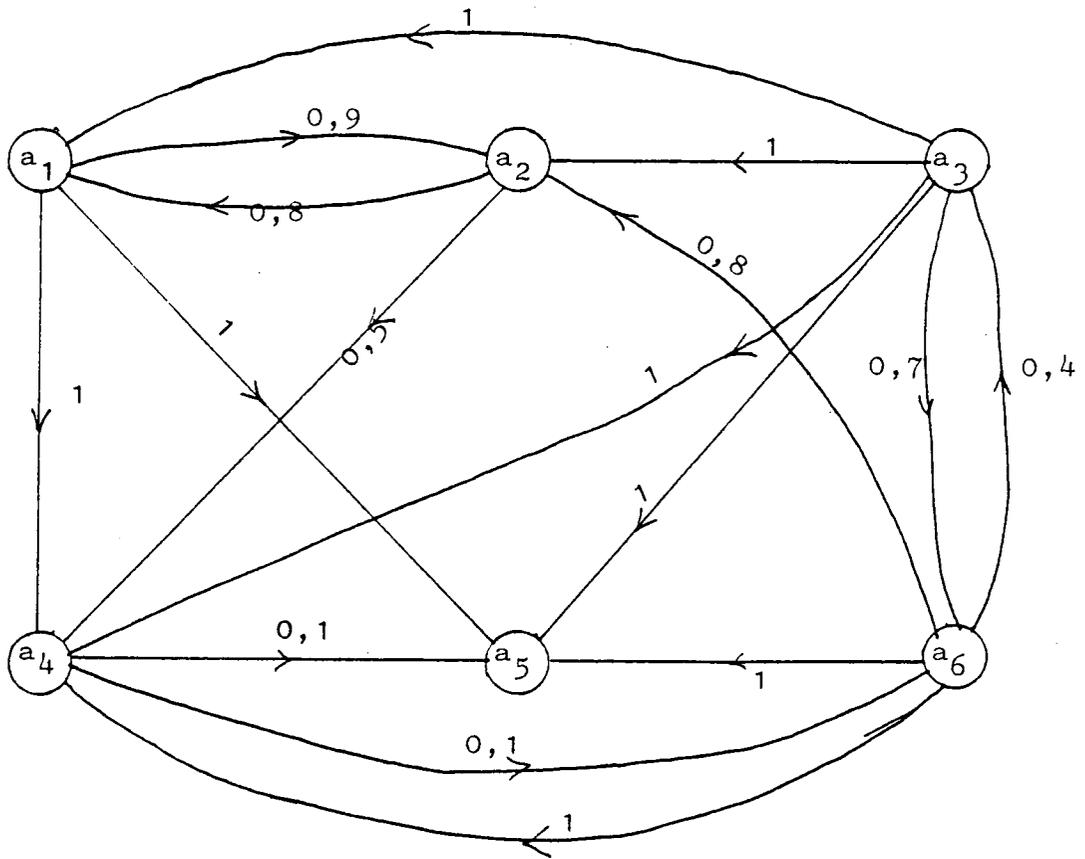
Ce calcul étant effectué pour tout couple (a_i, a_i) , S peut donc être représentée par un tableau de ce type :

(*) : C'est au travers de cette formule que joue l'hypothèse d'équivalence entre les jeux de poids.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	1	0,9	0	1	1	0
a_2	0,8	1	0	0,5	0	0
a_3	1	1	1	1	1	0,7
a_4	0	0	0	1	0,1	0,1
a_5	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0,8	0,4	1	1	1

(Les cases du tableau contiennent les valeurs de μ_s par exemple $\mu_s(a_1, a_2) = 0,9$)

ou bien encore par un graphe :



avec $a_i \xrightarrow{0,8} a_{i'}$ si $\mu_s(a_i, a_{i'}) = 0,8$ et $\mu_s(a_{i'}, a_i) = 0$.

3.3. Recherche du sous-ensemble flou des actions non dominées (voir ORLOVSKY [29])

A partir de cette relation de surclassement global, il est possible de construire le sous-ensemble flou des actions non dominées dont nous allons montrer qu'il est défini par la fonction d'appartenance :

$$\mu^{ND}(a_i) = 1 - \sup_{a_{i'} \in A} [\mu_s(a_{i'}, a_i) - \mu_s(a_i, a_{i'})]$$

A cet effet, construisons sur l'ensemble des couples d'actions $A \times A$ la relation floue de préférence stricte P . Celle-ci est égale à $S \setminus (S \cap S^{-1}) = S \setminus S^{-1}$ (où $a_i S^{-1} a_{i'}$, signifie $a_{i'}$ sur-classe a_i). D'où $\mu_P(a_i, a_{i'}) = \mu_{S \setminus S^{-1}}(a_i, a_{i'}) \Rightarrow$

$$\mu_P(a_i, a_{i'}) = \begin{cases} \mu_S(a_i, a_{i'}) - \mu_{S^{-1}}(a_i, a_{i'}) = \mu_S(a_i, a_{i'}) - \mu_S(a_{i'}, a_i) \\ \quad \text{si } \mu_S(a_i, a_{i'}) > \mu_S(a_{i'}, a_i), \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour toute action $a_{i'}$, la fonction $\mu_P(a_{i'}, a_i)$ représente le sous-ensemble flou des actions a_i qui sont strictement dominées par $a_{i'}$. Donc, le complémentaire de ce sous-ensemble flou, défini par la fonction d'appartenance $1 - \mu_P(a_{i'}, a_i)$, est le sous-ensemble flou des actions non strictement dominées par $a_{i'}$. L'intersection de tous ces sous-ensembles pour $a_{i'}$, parcourant A nous donne par conséquent le sous-ensemble flou des actions qui ne sont strictement dominées par aucune autre ; la fonction d'appartenance associée μ^{ND} est donnée par :

$$\mu^{ND}(a_i) = \inf_{a_{i'} \in A} [1 - \mu_P(a_{i'}, a_i)] = 1 - \sup_{a_{i'} \in A} \mu_P(a_{i'}, a_i)$$

d'après la définition de l'intersection. $\mu^{ND}(a_i)$ représente le degré de vérité de l'assertion " a_i n'est dominée par aucune action de A ". D'après la définition de μ_P , il est facile de montrer que :

$$\sup_{a_i, \in A} \mu_P(a_i, a_i) = \sup_{a_i, \in A} [\mu_S(a_i, a_i) - \mu_S(a_i, a_i)]$$

$$(\text{car } \mu_S(a_i, a_i) - \mu_S(a_i, a_i) = 0)$$

$$\text{Donc on obtient bien } \mu^{\text{ND}}(a_i) = 1 - \sup_{a_i, \in A} [\mu_S(a_i, a_i) - \mu_S(a_i, a_i)].$$

Effectuons le calcul de μ^{ND} pour l'exemple vu plus haut. Les valeurs de μ_P sont données par le tableau suivant :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	0	0,1	0	1	1	0
a_2	0	0	0	0,5	0	0
a_3	1	1	0	1	1	0,3
a_4	0	0	0	0	0,1	0
a_5	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0,8	0	0,9	1	0

d'où on tire μ^{ND} :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\mu^{ND}(a_i) =$	0	0	1	0	0	0,7

On voit que $\mu^{ND}(a_3)=1$, ce qui veut dire que a_3 est une action non dominée au sens non flou du terme. On peut montrer qu'il existe de telles actions dès que S est transitive, c'est-à-dire dès que $\mu_S(a_i, a_i') \gg \sup_{a_i'' \in A} \text{Min} [\mu_S(a_i, a_i''), \mu_S(a_i'', a_i')]$ $\forall a_i, a_i' \in A$.

Lorsque l'on recherche la meilleure ou les meilleures actions (problématique d'optimisation), il est logique de choisir parmi A le ou les éléments dont la valeur de μ^{ND} est égale à ou proche de

$$\sup_{a_i \in A} \mu^{ND}(a_i) = 1 - \inf_{a_i \in A} \sup_{a_i' \in A} [\mu_S(a_i', a_i) - \mu_S(a_i, a_i')],$$

soit en l'occurrence l'action a_3 .

Si l'on souhaite à présent obtenir un classement complet des actions, il est nécessaire de procéder par étapes successives, la valeur de μ^{ND} ne pouvant être interprétée comme une utilité (cf. SISKOS [46]) :

* On classe premières ex-aequo les actions qui ont un μ^{ND} maximum ou proche du maximum. La première classe C_1 du préordre recherché est donc composée des a_i telles que $\mu^{ND}(a_i) \gg \sup_{a_i \in A} \mu^{ND}(a_i) - \sigma$, où σ est un seuil de discrimination introduit de façon volontariste par l'homme d'étude et qui croît lorsque $\sup_{a_i} \mu^{ND}(a_i)$ diminue (afin de tenir compte du fait qu'un écart entre 0,9 et 0,7 est plus significatif qu'un écart entre 0,4 et 0,2).

* C_1 étant ainsi constituée, on considère l'ensemble $A \setminus C_1$ des actions qui ne sont pas encore classées, et on recalcule pour chacune d'elles un degré de non-dominance μ^{ND} . Les actions vérifiant $\mu^{ND}(a_i) \gg \sup_{a_i \in A \setminus C_1} \mu^{ND}(a_i) - \sigma$ sont rangées dans la seconde classe C_2 du préordre.

* On recommence avec l'ensemble $A \setminus (C_1 \cup C_2)$, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les actions soient classées.

Appliquons cette procédure à notre exemple, en choisissant un seuil de discrimination égal à : $0,3 - 0,2 \sup_{a_i} \mu^{ND}(a_i)$:

* Etape 1 : a_3 est classée première.

* Etape 2 : On recalcule μ^{ND} pour a_1, a_2, a_4, a_5 et a_6 à partir du tableau des valeurs de μ_P :

$$\mu_P(a_i, a_i) =$$

	a_1	a_2	a_4	a_5	a_6
a_1	0	0,1	1	1	0
a_2	0	0	0,5	0	0
a_4	0	0	0	0,1	0
a_5	0	0	0	0	0
a_6	0	0,8	0,9	1	0

$$\mu^{ND}(a_i) =$$

	a_1	a_2	a_4	a_5	a_6
	1	0,2	0	0	1

a_1 et a_6 sont secondes ex-aequos.

* Etape 3 : On recalcule μ^{ND} pour a_2, a_4 et a_5 :

$\mu_P(a_i, a_{i'}) =$

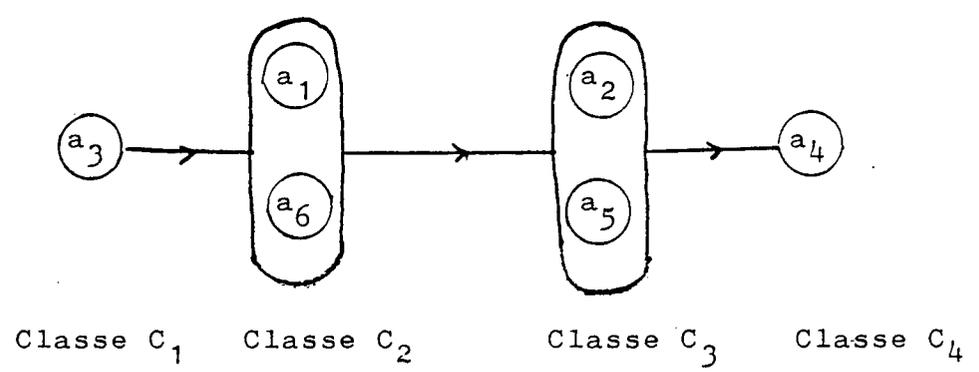
	a_2	a_4	a_5
a_2	0	0,5	0
a_4	0	0	0,1
a_5	0	0	0

$\mu^{ND}(a_i) =$

	a_2	a_4	a_5
	1	0,5	0,9

a_2 et a_5 sont classées quatrièmes ex-aequo, et a_4 sixième.

On obtient par conséquent le préordre complet représenté par le graphe suivant :



Les propriétés de ce critère de non-dominance floue sont étudiées en annexe.

4. - COMPARAISON DE DIFFERENTS CRITERES DE CHOIX

Nous reprenons ici l'exemple de l'industriel évoqué au chapitre I.

Rappelons que le tableau des utilités conditionnelles se présentait comme suit :

Scénarios Actions	s_1	s_2	s_3
a_1	1	0,679	0,500
a_2	0,458	0,750	0,938
a_3	0	0,813	0,969

On suppose que l'on dispose de l'information suivante sur les scénarios :

- $s_2 \textcircled{P} s_1$ (s_2 est plus plausible que s_1) ;
- $s_3 \textcircled{P} s_1$ (s_3 est plus plausible que s_1) ;
- $s_2 \textcircled{I} s_3$ (s_2 et s_3 sont aussi plausibles l'un que l'autre).

En choisissant un seuil d'équiplausibilité $\delta = 0,09$, un seuil de dominance en probabilité $\delta^+ = 0,10$ et un pas de discrétisation $\rho = 0,05$, on obtient les utilités espérées suivantes :

Indice	Jeu de poids de \mathcal{S}^{dis}			Utilités espérées		
	p_1^j	p_2^j	p_3^j	$U^j(a_1)$	$U^j(a_2)$	$U^j(a_3)$
1	0,10	0,45	0,45	0,631	0,806	0,802
2	0,15	0,40	0,45	0,647	0,791	0,761
3	0,15	0,45	0,40	0,656	0,782	0,753
4	0,20	0,40	0,40	0,672	0,767	0,713
5	0,25	0,35	0,40	0,688	0,752	0,672
6	0,25	0,40	0,35	0,697	0,743	0,664

Nous avons cherché à comparer les classements obtenus avec sept critères différents :

- 1) $\text{Max}_i \left[\text{Min}_k u_k(a_i) \right]$ (critère de WALD traditionnel)
- 2) $\text{Min}_i \left[\text{Max}_k \left(\text{Max}_i u_k(a_i) - u_k(a_i) \right) \right]$ (critère de SAVAGE traditionnel)

- 3) $\text{Max}_i \left[\text{Max}_k u_k(a_i) \right]$ (critère de HURWICZ traditionnel)
- 4) $\text{Max}_i \left[\text{Min}_j U^j(a_i) \right]$ (critère de WALD restreint à \mathcal{S})
- 5) $\text{Min}_i \left[\text{Max}_j (\text{Max}_k U^j(a_i) - U^j(a_i)) \right]$ (critère de SAVAGE restreint à \mathcal{S})
- 6) $\text{Max}_i \left[\text{Max}_j U^j(a_i) \right]$ (critère de HURWICZ restreint à \mathcal{S})
- 7) $\text{Sup}_i \mu^{\text{ND}}(a_i)$ (critère de non-dominance floue sur \mathcal{S}) (*)

On aboutit aux résultats qui suivent :

Critère de classement	Rang de a_1	Rang de a_2	Rang de a_3
Maximin traditionnel	1	2	3
Minimax regret traditionnel	1	2	3
Maximax traditionnel	1	3	2
Maximin restreint à \mathcal{S}	3	1	2
Minimax regret restreint à \mathcal{S}	3	1	2
Maximax restreint à \mathcal{S}	3	1	2
Non-dominance floue sur \mathcal{S}	3	1	2

(*) avec un seuil de veto égal à 0,2 et un seuil de discrimination égal à 0,3-0,2 $\text{sup}_i \mu^{\text{ND}}(a_i)$

Comme on peut le constater, les résultats sont très différents selon que l'on prend ou non en compte les informations disponibles sur l'avenir. Les quatre derniers critères, relatifs à un domaine de plausibilité restreint, permettent en effet de ne pas pénaliser les actions qui, comme a_2 ou a_3 , sont mal évaluées sur un scénario peu plausible. Les inconvénients habituels des critères classiques sont de la sorte évités, les scénarios les moins vraisemblables ne jouant un rôle significatif que si les utilités conditionnelles qui leur correspondent sont notablement différentes de celles relatives aux autres scénarios.

C O N C L U S I O N

La méthode que nous avons présentée s'articule donc autour de quatre points forts :

- 1) La construction de l'arbre de décision avec la définition des actions potentielles et des scénarios ;
- 2) Le calcul des utilités conditionnelles et la valorisation des branches de l'arbre ;
- 3) La construction, puis la réduction progressive de l'ensemble des jeux de poids admissibles ;
- 4) La discrétisation du polyèdre ainsi obtenu, le calcul des utilités espérées et le choix d'un critère de sous-agrégation.

Par rapport aux travaux de FOURGEAUD, LENCLUD, SENTIS ([17] et [18]), elle apporte les améliorations suivantes :

- prise en compte des phénomènes de perception des contrastes sur l'échelle des évaluations par le biais d'une fonction d'utilité ;
- extension des relations de plausibilité à l'algèbre engendrée par l'ensemble des scénarios ;

- possibilité d'adjonction de contraintes de type cardinal ;
- prise en compte de l'imprécision des évaluations au moyen de nombres flous.

Comme il a été souligné, l'avantage principal de cette méthode réside dans sa capacité à traiter des problèmes caractérisés par des niveaux d'incertitude très différents. De ce point de vue, on peut d'ailleurs la considérer comme une généralisation des approches objectivistes et subjectivistes évoquées au début de ce document, la taille du polyèdre des mesures de probabilité admissibles oscillant en fonction de la quantité d'information disponible sur l'avenir.

	Recours aux utili- tés	Nombre de mesures de probabilité admissibles
Approche objectiviste	oui	Toutes les mesures
Approche subjectiviste	oui	Une seule mesure
Méthode de FOURGEAUD	non	Variable
Méthode proposée	oui	Variable

La méthode permet ainsi de représenter une réalité donnée de la façon la plus adéquate, ce qui lui confère un caractère opérationnel indéniablement plus marqué que dans les approches traditionnelles.

A N N E X E S

QUELQUES EXEMPLES DE FONCTIONS D'APPARTENANCE

POUR DES NOMBRES FLOUS

Courbe	Fonction
	$\mu(x) = 0 \quad -\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{k}}$ $= 1 - e(-x)^k, \quad -\frac{1}{\sqrt{k}} < x < 0,$ $= 1 - e(x)^k, \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{k}},$ $= 0, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} < x < \infty.$
	$\mu(x) = \frac{1}{1+kx^2},$ <p style="text-align: right;">$k > 1.$</p>
	$\mu(x) = e^{kx}, \quad -\infty < x < 0,$ $= e^{-kx}, \quad 0 < x < \infty,$ <p style="text-align: right;">$k > 1.$</p>
	$\mu(x) = e^{-kx^2}.$

On peut également envisager de représenter les phénomènes d'imprécision au moyen d'intervalles flous, c'est-à-dire de sous-ensembles flous convexes de \mathbb{R} pour lesquels $x/\mu_m(x)=1$ ne soit pas unique :

Courbe	Fonction
	$\mu(x) = 0, \quad -\infty < x < -a_2,$ $= \frac{a_2 + x}{a_2 - a_1}, \quad -a_2 < x < -a_1,$ $= 1, \quad -a_1 < x < a_1,$ $= \frac{a_1 - x}{a_1 - a_2}, \quad a_1 < x < a_2,$ $= 0, \quad a_2 < x < \infty.$
	$\mu(x) = 0, \quad -\infty < x < -b,$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} \left(x + \frac{a+b}{2} \right),$ $\quad -b < x < -a,$ $= 1, \quad -a < x < a,$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right),$ $\quad a < x < b,$ $= 0, \quad b < x < \infty.$
	$\mu(x) = 0, \quad -\infty < x < -a,$ $= 1, \quad -a < x < a,$ $= 0, \quad a < x < \infty.$

A N N E X E 2

RELATIONS DE PLAUSIBILITE \mathbb{I} , \mathbb{P} , \mathbb{R} ET CONDITIONS
D'EXISTENCE D'UNE MESURE DE PROBABILITE

On considère l'ensemble des scénarios \mathcal{S} et l'algèbre \mathcal{C} engendrée par \mathcal{S} .

On a les deux axiomes PR1 et PR2 :

Axiome PR1 : $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \mathbb{P} A_2$, ou $A_2 \mathbb{P} A_1$, ou $A_1 \mathbb{I} A_2$ ou $A_1 \mathbb{R} A_2$ ("ou" exclusif), et $(\mathbb{I}, \mathbb{P}, \mathbb{R})$ définit sur \mathcal{C} un quasi-ordre partiel.

Axiome PR2 : $\forall A \in \mathcal{C}$ et $A \neq \emptyset$, $A \mathbb{P} \emptyset$.

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème : Il existe (au moins) une fonction π de \mathcal{C} dans \mathbb{R} et deux nombres réels δ et δ^+ vérifiant $0 < \delta < \delta^+$, tels que l'on ait :

- . $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \mathbb{P} A_2 \implies \pi(A_1) - \pi(A_2) \geq \delta^+$ (assertion I)
- . $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \mathbb{I} A_2 \implies |\pi(A_1) - \pi(A_2)| \leq \delta$ (assertion II)

. $\forall A \in \mathcal{C} \mathcal{B}$ et $A \neq \emptyset$, $\pi(A) \geq \delta^+$ (assertion III),

. $\pi(\mathcal{S}) = 1$ (assertion IV).

Démonstration : Nous allons montrer pour commencer qu'il existe un ensemble de valeurs $\pi(A_1), \pi(A_2), \dots$, telles que, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C} \mathcal{B}$, $A_1 \textcircled{P} A_2 \Rightarrow \pi(A_1) - \pi(A_2) \geq \delta^+$ et $A_1 \textcircled{I} A_2 \Rightarrow |\pi(A_1) - \pi(A_2)| \leq \delta$.

Pour cela, on affecte aux arcs \textcircled{P} du graphe associé aux relations $\textcircled{I}, \textcircled{P}, \textcircled{R}$ sur \mathcal{A} la valeur $\delta^+ = \delta + \varepsilon$ et aux arcs \textcircled{I} la valeur $-\delta$, et on cherche à prouver qu'il existe un ensemble de potentiels $\pi(A_1), \pi(A_2), \dots$ mis en correspondance biunivoque avec les sous-ensembles de \mathcal{A} et vérifiant $\pi(A_1) - \pi(A_2) \geq \delta + \varepsilon$ pour tout arc \textcircled{P} entre deux sommets A_1 et A_2 de Γ et $\pi(A_1) - \pi(A_2) \geq -\delta$ pour tout arc \textcircled{I} entre deux sommets A_1 et A_2 . Or, on sait que, sur un graphe conjonctif, il existe au moins un tel ensemble de potentiels si et seulement si Γ n'admet aucun circuit de longueur strictement positive (cf. [35]).

Considérons donc un circuit Ω de Γ comportant $\overline{\Phi}$ arcs ; deux cas doivent être distingués :

- soit $\overline{\Phi}$ est impair, et on pose $\overline{\Phi} = 2\varphi + 1$. Alors, en raison de la propriété de pré-transitivité hyperforte (hypothèse PR1), Ω est de longueur maximale

s'il comporte φ arcs \textcircled{P} et $(\varphi+1)$ arcs \textcircled{I} . Cette longueur est égale à $\varphi(\delta+\varepsilon)+(\varphi+1)(-\delta)=\varphi\varepsilon-\delta$, expression qui est négative ou nulle pour $\varepsilon \leq \frac{\delta}{\varphi}$;

- soit $\overline{\Phi}$ est pair, et on pose $\overline{\Phi}=2\varphi$. Dans ce cas, Ω est de longueur maximale pour une combinaison de $(\varphi-1)$ arcs \textcircled{P} et de $(\varphi+1)$ arcs \textcircled{I} . Cette longueur est égale à $(\varphi-1)(\delta+\varepsilon)+(\varphi+1)(-\delta)=\varphi\varepsilon-\varepsilon-2\delta$, qui est ≤ 0 pour $\varepsilon \leq \frac{2\delta}{\varphi-1}$.

Ceci montre qu'il y a toujours un $\varepsilon > 0$ tel que Γ ne comporte aucun circuit de longueur strictement positive, et donc les assertions I et II du théorème sont démontrées.

D'autre part, si $A \in \mathcal{A}$ et $A \neq \emptyset$, on a, d'après PR2, $A \textcircled{P} \emptyset$, d'où $\pi(A)-\pi(\emptyset) \geq \delta^+ \Rightarrow \pi(A) \geq \delta^+$ (assertion III).

Enfin, il est toujours possible de choisir δ et δ^+ suffisamment petits, de telle sorte qu'en normalisant les $\pi(A)$, on ait $\pi(\mathcal{Y}) = 1$ (assertion IV).

Rajoutons à présent les axiomes PR3 et PR4 :

{ Axiome PR3 : $\forall A_1, A_2, A_3$ sous-ensembles disjoints de \mathcal{A} ,
 $A_1 \textcircled{P} A_2 \Leftrightarrow (A_1 \cup A_3) \textcircled{P} (A_2 \cup A_3)$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Axiome_PR4 : } \forall A_1, A_2, A_3 \text{ sous-ensembles disjoints de } \mathcal{C}_B, \\ A_1 \textcircled{I} A_2 \iff (A_1 \cup A_3) \textcircled{I} (A_2 \cup A_3). \end{array} \right.$

Ces axiomes permettent d'imposer à \textcircled{I} , \textcircled{P} , \textcircled{R} de satisfaire quelques propriétés intéressantes, notamment :

Propriété 1 : $A_1 \subset A_2$ (au sens strict) $\implies A_2 \textcircled{P} A_2$

Propriété 2 : $A_1 \textcircled{P} (A_2 \cup A_3) \implies A_1 \textcircled{P} A_2$ et $A_1 \textcircled{P} A_3$

mais elles ne suffisent pas à assurer l'additivité de Π , comme le montre l'exemple suivant, pour lequel il n'existe aucune représentation additive :

ex : $(A_1 \cup A_4) \textcircled{P} (A_2 \cup A_4) \textcircled{P} (A_1 \cup A_5) \textcircled{P} (A_1 \cup A_6) \textcircled{P} (A_2 \cup A_5) \textcircled{P}$
 $(A_3 \cup A_4) \textcircled{P} (A_3 \cup A_5) \textcircled{P} (A_2 \cup A_6) \textcircled{P} (A_3 \cup A_6).$

A N N E X E 3

ALGORITHME DE RECHERCHE D'UNE BORNE SUPERIEURE

POUR LE SEUIL δ

Soit Γ le graphe associé aux relations de plausibilité \textcircled{I} , \textcircled{P} , \textcircled{R} , sur \mathcal{C} , l'algèbre engendrée par \mathcal{G} . Rappelons que l'on définit à partir de Γ l'ensemble de contraintes suivant :

$$- p_k \geq \delta^+ \quad \forall k=1 \dots K \quad (\text{où } \delta^+ = \delta + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \text{ petit})$$

$$- \sum_{k=1}^K p_k = 1$$

$$- s_k \textcircled{P} s_{k'} \implies p_k - p_{k'} \geq \delta^+$$

$$- s_k \textcircled{I} s_{k'} \implies |p_k - p_{k'}| \leq \delta$$

$$- (s_k \cup \dots \cup s_{k'}) \textcircled{P} (s_{k''} \cup \dots \cup s_{k'''})$$

$$\implies p_k + \dots + p_{k'} - p_{k''} - \dots - p_{k'''} \geq \delta^+$$

$$- (s_k \cup \dots \cup s_{k'}) \textcircled{I} (s_{k''} \cup \dots \cup s_{k'''})$$

$$\implies |p_k + \dots + p_{k'} - p_{k''} - \dots - p_{k'''}| \leq \delta$$

Le choix des seuils δ et δ^+ est laissé à la discrétion de l'homme d'étude ; cependant, ces deux seuils ne doivent

pas être trop grands afin que la condition de normalisation

$\sum_{k=1}^K p_k = 1$ ne soit pas violée. Nous proposons ici un algorithme permettant de trouver une borne supérieure pour δ qui respecte cette condition.

Etape 1 : On considère le graphe $\Gamma' \subset \Gamma$ des relations de plausibilité sur \mathcal{S} et on value $\delta + \varepsilon$ les arcs \textcircled{P} ($\circ \longrightarrow \circ$) et $-\delta$ les arcs \textcircled{I} ($\circ \longleftarrow \circ$).

Etape 2 : Pour chaque sommet (i.e. scénario) s_k de Γ' , on recherche le chemin partant de s_k de longueur positive maximale (formé d'arcs \textcircled{P} descendants et d'arcs \textcircled{I}), et on affecte à s_k un nombre v_k égal à la longueur du chemin ainsi trouvée augmentée de $\delta + \varepsilon$. Dans l'hypothèse où il n'existe pas de chemin de longueur positive, ce qui est le cas notamment pour les scénarios incomparables à tout autre, on posera $v_k = \delta + \varepsilon$. Lorsque Γ' est associé à un préordre ou à un ordre partiel, $v_k = \sum_k \delta^+$, \sum_k étant le nombre maximum de descendants de s_k appartenant à un chemin quelconque d'arcs \textcircled{P} (s_k étant considéré comme son propre descendant) ; lorsque Γ' est associé à un préordre complet, $v_k = C - c_k + 1$, où C est le nombre de classes du préordre et c_k le numéro de la classe à laquelle appartient s_k ; enfin, lorsque Γ' est

associé à un ordre total, $v_k = K - r_k + 1$, où K est le nombre de scénarios et r_k le rang de s_k .

Etape 3 : Une fois tous les v_k ainsi exprimés en fonction de δ et ε , on passe à l'examen des relations sur les groupes de scénarios. Si les v_k obtenus satisfont toutes les contraintes correspondantes, autrement dit si l'on a $v_k + \dots + v_{k'} - v_{k''} - \dots - v_{k'''} \geq \delta^+$ quand $(s_k \cup \dots \cup s_{k'}) \textcircled{P} (s_{k''} \cup \dots \cup s_{k'''})$ et $|v_k + \dots + v_{k'} - v_{k''} - \dots - v_{k'''}| \leq \delta$ quand $(s_k \cup \dots \cup s_{k'}) \textcircled{I} (s_{k''} \cup \dots \cup s_{k'''})$, on passe directement à l'étape 6 ; sinon, on exécute l'étape suivante.

Etape 4 : On s'intéresse à la première relation sur les groupes de scénarios avec laquelle l'ensemble des v_k n'est pas compatible. Si cette relation est une relation d'équiplausibilité $A_1 \textcircled{I} A_2$ et si $\sum_{A_1} v_k - \sum_{A_2} v_k > \delta^+$, on réécrit $A_1 \textcircled{I} A_2$ en $A_2 \textcircled{I} A_1$. De cette façon, c'est toujours l'expression $\sum v_k$ associée au membre de gauche de la relation \textcircled{I} ou \textcircled{P} considérée qui a une valeur trop faible. On recherche donc sur cette expression la modification de "coût minimum" afin d'obtenir un ensemble de v_k compatible avec cette relation. Pour cela, on regarde s'il existe dans le membre de gauche un scénario s_k tel que $s_k \textcircled{R} s_{k'}$ pour

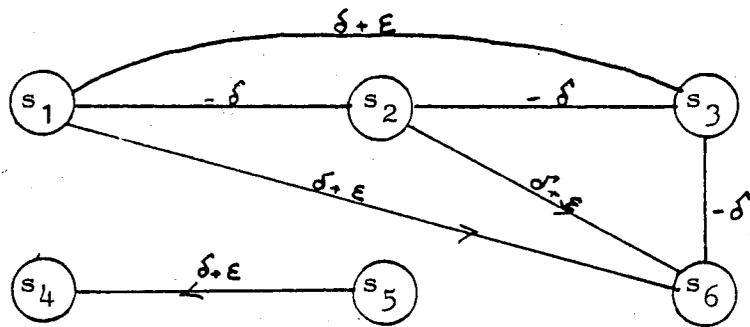
tout s_k , appartenant au membre de droite. Si oui, on incrémente successivement de $+\epsilon, +\delta, +\epsilon, +\delta, \dots$ les v_k affectés à s_k ainsi qu'à tout scénario s_k , tel qu'il existe au moins un chemin de $s_{k'}$ à s_k formé d'arcs \textcircled{I} et d'arcs \textcircled{P} descendants, et ce jusqu'à ce que tous les v_k soient compatibles avec la relation en question ; sinon, on effectue la même opération avec le scénario s_k du membre de gauche dont le v_k est maximum. Si la relation examinée est la seule relation \textcircled{I} ou \textcircled{P} sur les groupes de scénarios, on va directement en 6 ; dans le cas contraire, on exécute l'étape 5.

Etape 5 : On réexamine toutes les relations portant sur des groupes de scénarios. Si l'ensemble des v_k satisfait à toutes les contraintes correspondantes, on passe à l'étape suivante ; sinon on réexécute l'étape 4.

Etape 6 : Les v_k obtenues sont maintenant compatibles avec l'ensemble du graphe Γ . Ils représentent la valeur minimale des probabilités p_k pour $k=1\dots K$, et on doit donc avoir $\sum_{k=1}^K v_k \leq 1$, d'où on tire une condition sur δ .

Appliquons cet algorithme à un exemple où l'on a les relations suivantes : $s_1 \textcircled{I} s_2$, $s_1 \textcircled{P} s_3$, $s_1 \textcircled{P} s_6$, $s_2 \textcircled{I} s_3$, $s_2 \textcircled{P} s_6$, $s_3 \textcircled{I} s_6$, $s_5 \textcircled{P} s_4$, $s_1 \textcircled{I} (s_4 \cup s_6)$, $(s_3 \cup s_5) \textcircled{P} s_1$, $(s_5 \cup s_6) \textcircled{P} s_1$.

On a le graphe Γ' suivant :



(Etape 1)

Les chemins de longueur positive maximale sont :

- Pour s_1 : $s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_2 \rightarrow s_6 \Rightarrow v_1 = 2\delta + 3\varepsilon$
- Pour s_2 : $s_2 \rightarrow s_6 \Rightarrow v_2 = 2\delta + 2\varepsilon$
- Pour s_3 : $s_3 \rightarrow s_2 \rightarrow s_6 \Rightarrow v_3 = \delta + 2\varepsilon$
- Pour s_4 : pas de chemin $\geq 0 \Rightarrow v_4 = \delta + \varepsilon$
- Pour s_5 : $s_5 \rightarrow s_6 \Rightarrow v_5 = 2\delta + 2\varepsilon$
- Pour s_6 : pas de chemin $\geq 0 \Rightarrow v_6 = \delta + \varepsilon$ (Etape 2)

On regarde les quatre dernières relations ; on voit que l'ensemble des v_k obtenus satisfait à $s_1 \textcircled{I} (s_4 \cup s_6)$ et à $(s_3 \cup s_5) \textcircled{P} s_1$, mais pas à $(s_3 \cup s_6) \textcircled{P} s_1$, puisque

$$v_3 + v_6 - v_1 = 0 < \delta + \varepsilon \text{ (Etape 3)}.$$

s_3 non $\textcircled{R} s_1$ et s_6 non $\textcircled{R} s_1$; par conséquent, on recherche quel est de s_3 et s_6 (nombre de gauche) le scénario qui a le v_k maximum ; c'est s_3 , et on incrémente v_3 , ainsi que v_1 , v_2 et v_6 de ε . Cela ne suffit pas pour satisfaire à $(s_5 \cup s_6) \textcircled{P} s_1$; donc on incrémente v_1, v_2, v_3, v_6 de δ , et on obtient $v_1 = 3\delta + 4\varepsilon$, $v_2 = 3\delta + 3\varepsilon$, $v_3 = 2\delta + 3\varepsilon$, $v_4 = \delta + \varepsilon$, $v_5 = 2\delta + 2\varepsilon$, $v_6 = 2\delta + 2\varepsilon$. On a alors $v_3 + v_6 - v_1 = \delta + \varepsilon$, qui est bien supérieur ou égal à $\delta + \varepsilon$ (Etape 4).

On réexamine les quatre relations sur les groupes de scénarios. L'ensemble de v_k est compatible avec toutes sauf $(s_5 \cup s_6) \textcircled{P} s_1$, puisque $v_5 + v_6 - v_1 = \delta < \delta + \varepsilon$ (Etape 5).

On a $s_5 \textcircled{R} s_1$, donc on incrémente v_5 de ε , d'où on obtient $v_1 = 3\delta + 4\varepsilon$, $v_2 = 3\delta + 3\varepsilon$, $v_3 = 2\delta + 3\varepsilon$, $v_4 = \delta + \varepsilon$, $v_5 = 2\delta + 3\varepsilon$, $v_6 = 2\delta + 2\varepsilon$, qui satisfait à $(s_5 \cup s_6) \textcircled{P} s_1$ (Etape 4).

On réexamine une nouvelle fois les quatre relations sur les groupes de scénarios. L'ensemble des v_k est compatible avec chacune de ces relations. ; il s'agit donc des valeurs définitives (Etape 5).

$$\begin{aligned} \text{On doit donc avoir } \sum_{k=1}^6 v_k \leq 1 &\implies 13\delta + 16\varepsilon \leq 1 \implies \delta \leq \frac{1-16\varepsilon}{13} \\ &\implies \delta < \frac{1}{13} \text{ (Etape 6)}. \end{aligned}$$

A N N E X E 4

METHODE DE DISCRETISATION D'UN POLYEDRE CONVEXE

PAR QUADRILLAGE

Rappelons qu'il s'agit de transformer un polyèdre \mathcal{S} convexe défini par un ensemble de contraintes \mathcal{C} en un ensemble fini \mathcal{S}^{dis} de points (ou jeux de poids)

- \mathcal{S} étant inclus dans le simplexe de l'espace \mathbb{R}^K (cf chap. III § 1.2.), on se place dans \mathbb{R}^{K-1} , en raisonnant sur p_1, p_2, \dots, p_{K-1} . La contrainte $\sum_{k=1}^K p_k = 1$ disparaît et on définit p_K comme égal à $1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{K-1}$.
- On encadre \mathcal{S} par un pavé de \mathbb{R}^{K-1} obtenu avec les valeurs limites des p_k , soit $p_{k*} = \delta^+$ et $p_k^* = 1 \quad \forall k=1 \dots K-1$. On peut donc supprimer dans \mathcal{C} les contraintes $p_k \geq \delta^+$ (pour $k=1 \dots K-1$) qui sont implicitement prises en compte de cette manière.
- On calcule le nombre N_k de points générés par le pas

de discrétisation choisi p_k sur chacune des $K-1$ dimensions :

$$N_k = \left[\frac{p_k^* - p_{k*}}{\rho_k} \right] + 1, \text{ où } [Q] \text{ représente la partie entière de } Q.$$

Ici, $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{K-1} = \rho$, et par conséquent $N_1 = N_2 = \dots = N_{K-1} = N$.

• On exécute l'algorithme de discrétisation :

Etape 1 : On part du point initial $(p_{1*}, p_{2*}, \dots, p_{k*}, \dots, p_{K-1*})$.

Etape 2 : On incrémente les p_k , dimension par dimension, dans l'ordre lexicographique, soit

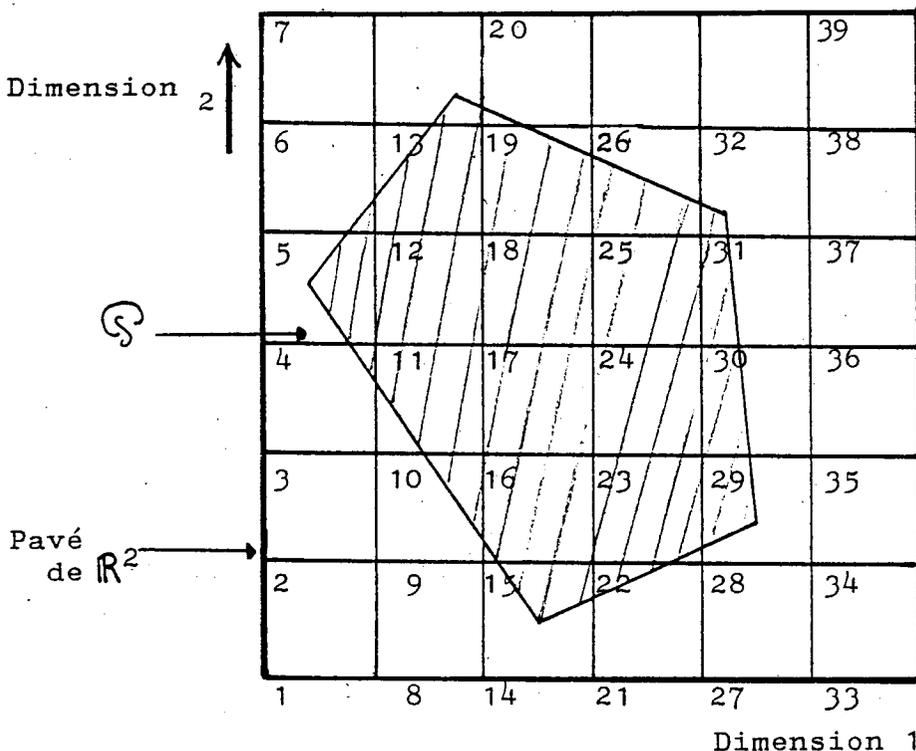
$(p_{1*}, \dots, p_{K-1*} + \rho), \dots, (p_{1*}, \dots, p_{K-1*} + N\rho),$
 $(p_{1*}, \dots, p_{K-2*} + \rho, p_{K-1*}), (p_{1*}, \dots, p_{K-2*} + \rho, p_{K-1*} + N\rho)$
 $(p_{1*}, \dots, p_{K-2*} + 2\rho, p_{K-1*}),$ etc. Pour chacun des points ainsi générés, on examine le jeu de poids (p_1, \dots, p_K) correspondant, avec $p_K = 1 - p_1 - \dots - p_{K-1}$.

Dès qu'un des jeux de poids satisfait à l'ensemble

\mathcal{C} des contraintes, c'est-à-dire appartient à \mathcal{P} , on passe à l'étape 3.

Etape 3 : On enregistre ce jeu de poids, ainsi que tous les suivants vérifiant également \mathcal{E} . Si on trouve un jeu de poids qui ne vérifie pas \mathcal{E} , on retourne à l'étape 2. Dans le cas où ce phénomène est consécutif à une incrémentation de ρ sur une dimension k donnée, avec passage de $p_{k^*+t\rho}$ à $p_{k^*+(t+1)\rho}$, on peut en conclure, en raison de la convexité de \mathcal{S} , que l'on est sorti du polyèdre ; il est alors inutile de poursuivre l'exploration sur cette dimension et on passera directement dans l'étape 2 à l'examen de la dimension suivante.

Schéma de discrétisation de \mathcal{S} (cas où $\mathcal{S} \subset \text{simplexe } \mathbb{R}^3$)



Les numéros indiquent dans quel ordre sont examinés les points générés par le quadrillage.

\mathcal{S} comprend les jeux de poids correspondant aux points n°11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 31.

Dans ce quadrillage, le choix par l'homme d'étude du pas de discrétisation ρ est essentiel, puisque c'est lui qui conditionne le nombre J de points générés. Si ρ est trop grand, il y a danger que l'ensemble \mathcal{S}^{dis} des jeux de poids correspondants $P^j (j=1\dots J)$ représente mal le polyèdre \mathcal{S} , compromettant ainsi la validité de la procédure de sous-agrégation ; inversement, si ρ est trop petit, la taille de \mathcal{S}^{dis} sera trop importante pour autoriser un traitement informatique. A titre d'illustration, dans une situation de totale incertitude, résumée par les contraintes $p_k > 0 \quad \forall k=1\dots K$ et $\sum_{k=1}^K p_k = 1$, le cardinal de \mathcal{S}^{dis} est égal à $\sum_{i=0}^{N-K} C_{i+K-2}^i = C_{N-2}^{K-1}$; avec 5 scénarios, on a :

$$\text{Card} (\mathcal{S}^{\text{dis}}) = J = C_9^4 = 126 \text{ pour } \rho = 0,1 \quad (\Rightarrow N=11)$$

$$J = C_{19}^4 = 3876 \text{ pour } \rho = 0,05 \quad (\Rightarrow N=21)$$

$$J = C_{32}^4 = 35960 \text{ pour } \rho = 0,03 \quad (\Rightarrow N=34)$$

$$J = C_{49}^4 = 211876 \text{ pour } \rho = 0,02 \quad (\Rightarrow N=51)$$

$$J = C_{39}^4 = 3764376 \text{ pour } \rho = 0,01 \quad (\Rightarrow N=101)$$

ANNEXE 5

PROPRIETES DU CRITERE DE NON-DOMINANCE FLOUE

- Sensibilité du classement obtenu à l'adjonction ou à la suppression d'une action

Supposons que le classement obtenu sur un ensemble initial d'actions A place a_1 devant a_2 . Alors le classement obtenu sur un nouvel ensemble A' construit en adjoignant ou retranchant une action à A peut inverser les positions relatives de a_1 et a_2 .

Démonstration (à l'aide d'un exemple) :

$$\text{On a au départ } \mu_S(a_i, a_{i'}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0,6 \\ \hline 0,4 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} , \text{ ce qui donne}$$

$$\mu_P(a_i, a_{i'}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0,2 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} , \text{ et donc}$$

$$\mu^{ND}(a_i) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} a_1 & a_2 \end{array} \\ & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0,8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Nous ne pensons pas que cette absence de stabilité dans le classement (que l'on retrouve également avec un critère de type minimax regret) soit gênante. Elle traduit simplement le fait que la recherche d'un compromis satisfaisant parmi un ensemble d'actions est une procédure dépendante des caractéristiques de ces actions. Dans le cas présent a_2 est légèrement moins bonne que a_1 si l'on ne considère que ces deux actions, mais elle apparaît comme meilleure dès que l'on introduit a_3 , car, tout en étant "sous-optimale" par rapport à a_1 , elle ne présente contrairement à celle-ci aucune discordance significative avec a_3 .

• Compatibilité du critère avec la dominance

{ Si a_1 domine a_2 , c'est-à-dire si $\forall j=1\dots J U^j(a_1) \gg U^j(a_2)$ dans le cas non flou, et $U_*^j(a_1) \gg U^{j*}(a_2)$ dans le cas flou (nombres flous disjoints), alors a_1 est classé avant a_2 par le critère de non-dominance floue.

Démonstration : On a par définition $\mu_S(a_1, a_2) = 1$ et $\mu_S(a_2, a_1) = 0$, donc $\mu_P(a_1, a_2) = 1$ et $\mu_P(a_2, a_1) = 0$.

En choisissant $\sigma = 0,3 - 0,2 \sup_i \mu^{ND}(a_i)$, on a 1°) a_1
2°) a_2 .

On introduit l'action a_3 vérifiant notamment :

$\exists j^0 / U^{j^0}(a_3) > U^{j^0}(a_1) + [U^{j^0}(a_1)]$ où v est le
seuil de veto $\implies \mu_s(a_1, a_3) = 0$.

On a $\mu_s(a_i, a_{i'})$

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	0,6	0
a_2	0,4	1	0,8
a_3	0,4	0,2	1

, d'où

$\mu_p(a_i, a_{i'}) =$

	a_1	a_2	a_3
a_1	0	0,2	0
a_2	0	0	0,6
a_3	0,4	0	0

, et donc

$\mu^{ND}(a_i) =$

	a_1	a_2	a_3
	0,6	0,8	0,4

a_2 est par conséquent classée première devant a_1 .

En conséquence, $\mu^{\text{ND}}(a_2)=0$ tant que a_1 n'est pas classée. A l'étape où a_1 est classée, $\mu^{\text{ND}}(a_1) \geq \sup_{a_i \in A \setminus (C_1 \cup \dots)} \mu^{\text{ND}}(a_i) - \epsilon$, et donc a_2 est obligatoirement dans une classe inférieure.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : BENAYOUN R., ROY B., SUSSMANN B., "Electre : une méthode pour guider le choix en présence de critères multiples", SEMA, Direction scientifique-note de travail 49 (1966)
- [2] : BERNABEU Y.-A., ROY B., "Le programme ENUMEF", Cahier LAMSADE n° 30, Université Paris-Dauphine (1980)
- [3] : BERNABEU Y.A., WINKELS H.M., Une méthode de discrétisation générale (article à paraître)
- [4] : BERTIER P., DE MONTGOLFIER J., Approche multicritère des problèmes de décision, Editions Hommes et Techniques (1978)
- [5] : BERTIER P., ROY B., "La méthode Electre II : une application au média-planning", VI° conférence internationale de recherche opérationnelle-Dublin (1972)
- [6] : CAPROS P., Analyse multicritère en avenir incertain appliquée au cas du système énergétique de la Grèce, Mémoire de DEA, Université Paris-Dauphine (1979)
- [7] : CHARNES A., COOPER W.W., Management models and industrial applications of linear programming, John Wiley & Sons (1961)
- [8] : CHARNES A., COOPER W.W., FERGUSON R., "Optimal estimation of executive compensation for linear programming," Management Science n° 1 (1965)

- [9] : DE FINETTI B., Teoria delle probabilità (2 tomes), Einaudi (1970)
- [10] : DE GROOT M.H., Optimal statistical decisions, Mc Graw-Hill (1970)
- [11] : DE MONTGOLFIER J., TERGNY J., "Les décisions partiellement rationalisables", Metra vol. 11 n° 2 (1972)
- [12] : DOBLES R. Développement du système des moyens de production d'énergie électrique : analyse des principaux aspects et sélection d'une stratégie de développement en présence des critères multiples et en avenir incertain, Thèse de 3° cycle, Université Paris-Dauphine (1979)
- [14] : DUBOIS D., PRADE H., Fuzzy sets and systems ; theory and applications, Academic Press (1980)
- [15] : DYER J.S., "Interactive goal-programming", Management Science n° 1 (1972)
- [16] : EGLE K., MUNIER B., "Decision under "non-Savagian" uncertainty", Note de recherche du GRASCE n°78-03 (1968)
- [17] : FOURGEAUD C., LENCLUD B., SENTIS P., "Critère de choix en avenir partiellement incertain", R.I.R.O. n° 14 (1968)
- [18] : FOURGEAUD C., LENCLUD B., SENTIS P., "Critère de choix en avenir partiellement incertain, note sur un algorithme de résolution", Bulletin de mathématiques économiques n° 1 (1969)

- [19] : GENET J., Mesure et intégration, Vuibert (1976)
- [20] : GODET M., Crise de la prévision, essor de la prospective, PUF (1977)
- [21] : GODET M., "Les scénarios du transport aérien à l'horizon 1990 : analyse stratégique par la méthode SMIC 74", Metra vol. 14 n° 1 (1975)
- [22] : IJIRI Y. Management goals and accounting for control, North-Holland (1975)
- [23] : JACQUET-LAGREZE E., "De la logique d'agrégation de critères à une logique d'agrégation-désagrégation de préférences et de jugements", Cahier de l'I.S.M.E.A., Série Sciences de gestion t. 13 n°456 (1979)
- [24] : KAUFMANN A., Introduction à la théorie des sous-ensembles flous (4 tomes), Masson (1973)
- [25] : LEE S.M., "Decision analysis through goal-programming", Decision Sciences n° 2 (1971)
- [26] : MANAS M., NEDOMA J., "Finding all vertices of a convex polyedron", Numerische Mathematik n° 12 (1968)
- [27] : MOSCAROLA J. "Multiple decision aid ; two applications in education management", Multiple criteria problem solving , Springer-Verlag (1978)
- [28] : MOTHESS J., Incertitudes et décisions industrielles, Dunod (1967)
- [29] : ORLOVSKY S.A., "Decision-making with a fuzzy preference relation", Fuzzy sets and systems n° 1 (1978)

- [30] : OTAM (Metra International) Aménagement hydro-agricole de la vallée du Chélif- Rapport d'étude (1970)
- [31] : PRATT J.W., RAIFFA H., SCHLAIFER R.O., Introduction to statistical decision theory, Mc Graw-Hill (1965)
- [32] : RAIFFA H., Decision analysis (1968), paru en français sous le titre : l'analyse de la décision, Dunod
- [33] : ROODMAN G.M., "Post-infeasibility analysis in linear programming", Management Science n° 9 (1979)
- [34] : ROY B., L'aide à la décision : critères multiples pour choisir, trier, ranger, (livre à paraître)
- [35] : ROY B., Algèbre moderne et théorie des graphes (2 tomes), Dunod (1970)
- [36] : ROY B., "Decisions avec critères multiples : problèmes et méthodes", Metra vol. 11 n° 1 (1972)
- [37] : ROY B., "Critères multiples et modélisations des préférences : l'apport des relations de surclassement", Revue d'économie politique n° 1 (1974)
- [38] : ROY B., "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision", Metra vol. 14 n° 3 (1975)
- [39] : ROY B. "Electre III : Un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples", Communication présentée à la 8° conférence internationale de l'IFORS, Toronto (1978), paru dans les Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, Vol. 20, n° 1, 1978.

- [40] : RUEFLI T.W., "A generalized goal decomposition model", Management Science n° 17 (1971)
- [41] : SAINT-PAUL R., TENIERE-BUCHOT P.-F., Innovation et évaluation technologiques, Entreprise moderne d'édition (1974)
- [42] : SAVAGE L.J., The foundations of statistics, 1° édition John Wiley & Sons (1954)
- [43] : SCHLAIFER R.D., Analysis of decisions under uncertainty Mc Graw-Hill (1969)
- [44] : SCHWARTZ L.E., "Uncertainty reduction over time in the theory of multiattributed utility", Multiple criteria decision-making, University of South Carolina Press (1972)
- [45] : SEMA, "Methodologie d'aide à la décision en matière d'investissements prenant en compte les phénomènes de risques", Rapport de recherche n° 79 (1975)
- [46] : SISKOS J., "A multi-criteria decision-making methodology under fuzziness", Rapport CÉPN n° 41 (1981)
- [47] : VAN DE PANNE C., Methods for linear and quadratic programming, North-Holland publishing company (1975)
- [48] : VEDDER J.N., "Multiattribute decision-making under uncertainty using bounded intervals", Multiple criteria decision-making, University of South Carolina Press (1972)
- [49] : VON NEUMANN J., MORGENSTERN O., Theory of games and economic behavior, Princeton University Press (1947)

- [50] : WALD A., Statistical decision functions, John Wiley & Sons (1950)
- [51] : WINKELS H.-M., "Complete efficiency analysis for linear vector maximum systems : theoretical background and an algorithm", Arbeitsberichte zur ökonomathematik n° 800 (1980)
- [52] : ZADEH L.A., "Fuzzy sets", Information and control n° 8 (1980)
- [53] : ZADEH L.A., "The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning", Information Sciences. n° 8 et 9 (1975).