



HAL
open science

Prospective des systèmes : une nouvelle méthode d'impacts croisés S.M.I.C. 74

Jean-Claude Duperrin, Michel Godet

► **To cite this version:**

Jean-Claude Duperrin, Michel Godet. Prospective des systèmes : une nouvelle méthode d'impacts croisés S.M.I.C. 74. [Rapport de recherche] Centre national de l'entrepreneuriat(CNE); CEA. 1974, 114 p., figures, tableaux. hal-02185156

HAL Id: hal-02185156

<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02185156v1>

Submitted on 16 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jan 70

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

Département des Programmes

LG LIP 2

PROSPECTIVE DES SYSTEMES :

UNE NOUVELLE METHODE

D'IMPACTS CROISES S.M.I.C. 74

DPg/E -74- 541

Mai 1974

- Jean-Claude DUPERRIN

- Michel GODET

Département des Programmes

PROSPECTIVE DES SYSTEMES :

UNE NOUVELLE METHODE

D'IMPACTS CROISES S.M.I.C. 74

DPg/E -74- 541

Mai 1974

- Jean-Claude DUPERRIN

- Michel GODET

PROSPECTIVE DES SYSTEMES :
UNE NOUVELLE METHODE D'IMPACTS CROISES S.M.I.C. 74

I N T R O D U C T I O N

I. PROSPECTIVE DES SYSTEMES

1.1 PROSPECTIVE

| | |
|-------------------------------|------|
| 111 - Définition | p. 1 |
| 112 - Caractéristiques | p. 2 |
| 113 - Concept englobant | p. 3 |

1.2 SYSTEME

| | |
|---|------|
| 121 - Définition d'un système | p. 4 |
| 122 - Etats et structures d'un système - variétés | p. 5 |
| 123 - Les systèmes complexes | p. 7 |

1.3 LECTURE PROSPECTIVE DES SYSTEMES

| | |
|--------------------------------------|-------|
| 131 - Grille de lecture | p. 8 |
| 132 - Lecture contre intuitive | p. 10 |

II. ETAPE QUALITATIVE

2.1 ANALYSE DES SYSTEMES p. 11

| | |
|---------------------|--|
| 211 - Appréhension | |
| 212 - Compréhension | |
| 213 - Explication | |

2.2. INSTRUMENTS D'ANALYSE

| | |
|---|-------|
| 221 - Matrices d'analyse structurelle | p. 12 |
| 222 - Hiérarchisation des éléments d'un système : MICMAC | p. 15 |
| 223 - Analyse de stabilité | p. 20 |

2.3. C O N C L U S I O N p. 24

III. ETAPE QUANTITATIVE

| | | | |
|-------|---|-------|-------|
| 3.1 | POSITION DU PROBLEME | p. 25 | |
| <hr/> | | | |
| 3.2 | CADRE D'ANALYSE | p. 28 | |
| <hr/> | | | |
| 321 | - Définitions et propriétés | p. 28 | |
| 322 | - Restrictions et champ d'application | p. 33 | |
| 3.3 | NOUVELLE APPROCHE | p. 34 | |
| <hr/> | | | |
| 331 | - Information disponible | p. 34 | |
| 332 | - Relations entre probabilités | p. 36 | |
| 333 | - Fonction objectif | p. 39 | |
| 3.4 | RESOLUTION MATRICIELLE | p. 41 | |
| <hr/> | | | |
| 341 | - Programme général | p. 41 | |
| 342 | - Programme sans contraintes de signes | p. 41 | |
| 343 | - Programme avec contraintes de signes | p. 43 | |
| 344 | - Analyse de la matrice "M" | p. 43 | |
| 345 | - Recherche de la matrice "M" : algorithme ALPHA | p. 47 | |
| 346 | - Application de l'algorithme ALPHA | p. 49 | |
| 347 | - Cas général de résolution : $N \geq 4$ | p. 56 | |
| 3471 | Détermination d'une solution particulière: la pseudo-inverse | | |
| 3472 | Détermination du noyau de "M" | | p. 73 |
| 3.5 | COMPLEMENT S D'ANALYSE | p. 76 | |
| <hr/> | | | |
| 351 | - Estimations des experts et contradictions | p. 76 | |
| 3511 | Problèmes posés par les probabilités conditionnelles | | |
| 3512 | Temporalité et contradictions sur les probabilités a priori | | |
| 352 | - La probabilité d'un état est bornée | p. 80 | |
| 353 | - Typologie des relations entre deux évènements isolés A et B | p. 82 | |
| 354 | - Conclusion | p. 85 | |

36 - APPLICATION POUR TROIS EVENEMENTS

ISOLÉS p. 86

- 361 Premier cas p. 88
- 362 Deuxième cas p. 94
- 363 Analyse des résultats p. 97
- 364 Remarques et conclusions..... p. 101

C O N C L U S I O N

I N T R O D U C T I O N

Cette étude* s'inscrit dans le développement logique des travaux de prospective sur lesquels nous nous sommes penchés depuis deux ans au Commissariat à l'Energie Atomique. Au départ, le problème posé était celui du développement futur de l'Energie Nucléaire. Il nous est apparu que cette démarche prospective passait par une vision globale du système énergétique et par la considération des facteurs d'environnement qualitatifs et quantitatifs, susceptibles de jouer un rôle.

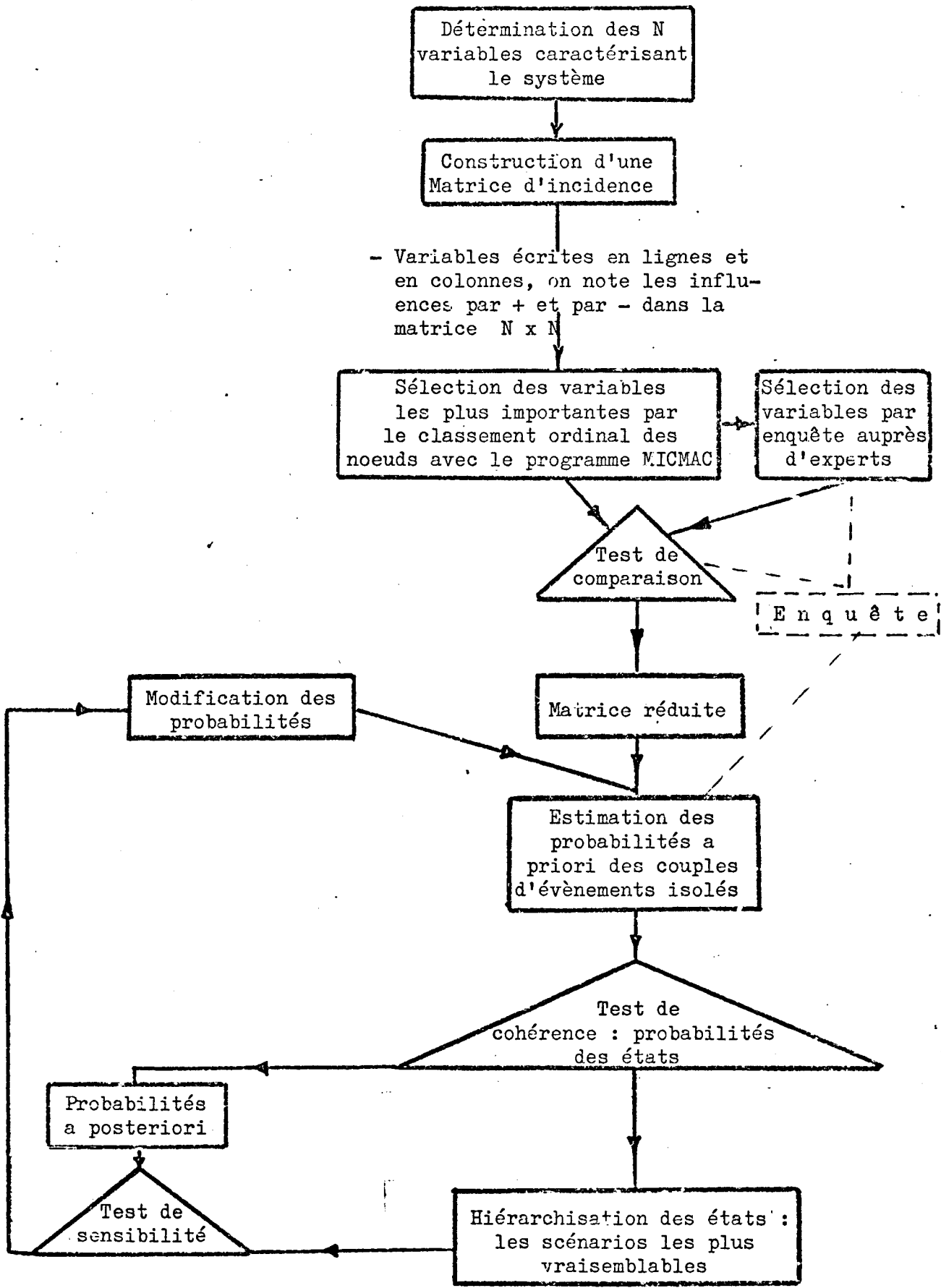
La prise en compte des variables et des relations caractérisant ce système nous a montré que nous avons affaire à un ensemble complexe. Pour réduire la complexité de ce système, nous avons fait appel à un certain nombre de méthodes (cf. XII) qui présentent la particularité d'être pour la plupart qualitatives.

Si l'approche purement qualitative représente une première étape fructueuse et indispensable pour la lecture des systèmes complexes, elle ne fournit qu'une grille des états possibles ; il convient donc dans un deuxième temps, de la prolonger par une étape quantitative permettant de hiérarchiser ces états en termes de probabilités d'apparition.

Au cours de l'élaboration de cette méthode quantitative qui fait l'objet de la troisième partie de cette étude, nous nous sommes attachés, contrairement aux autres méthodes, à obtenir des résultats cohérents. Néanmoins, il nous a semblé utile de préciser au préalable dans une première partie ce que nous entendions par prospective des systèmes complexes et dans une deuxième partie de faire le bilan des instruments d'analyse disponibles pour l'approche qualitative. On peut résumer la démarche proposée par le graphe de la page suivante.

* Cette étude peut aussi être consultée dans les bibliothèques de Doctorat 3ème cycle des Universités de PARIS I et PARIS VI.

ETAPES QUALITATIVES
ETAPES QUANTITATIVES
IMPACTS CROISES



" La seule science possible est celle de la Société, car le fait social est un, il n'est jamais économique ou politique ou idéologique "

S A M I R A M I N

L'accumulation à l'échelle mondiale

I. PROSPECTIVE DES SYSTEMES

1.1. LA PROSPECTIVE

La prévision est l'objectif moteur de toute connaissance. La plupart des méthodes de prévision ont pour but de projeter des tendances passées, ce qui serait suffisant dans un univers à évolution lente mais apparaît tout à fait illusoire dans un monde de plus en plus accéléré où les phénomènes à étudier se caractérisent par une diversité et une complexité croissante. Il est de plus en plus difficile, et donc de plus en plus urgent de prévoir. En effet, ne pas réfléchir à l'avenir, c'est cependant l'engager : demain se décide aujourd'hui. Plus les changements seront rapides, moins il faudra tarder pour les comprendre et les infléchir si l'on ne veut pas compromettre cet avenir de manière irréversible.

A côté des opérations logiques classiques de l'induction et de la déduction, il y a la transduction : réflexion sur l'objet possible qui trouve sa terre d'élection dans la démarche prospective.

111 - Définition

"La prospective a pour but principal d'éclairer la décision à prendre en vue de l'action. Elle est, avant tout, attitude d'esprit, ayant pour objet de fonder les actions à entreprendre, non pas seulement sur le passé ou le présent mais aussi sur une vision de l'avenir, afin de ne pas "subir" le futur, mais tenter de le maîtriser. Elle doit, à ce titre, fournir au décideur les images des différents avènements possibles, et les cheminements correspondants afin de lui permettre de choisir l'avenir le plus souhaitable et d'écartier les aspects indésirables. La prospective est donc la réflexion sur le futur appuyée sur les conclusions de la prévision et intégrant des notions subjectives, notamment un système de valeurs ". (cf. XXIII)

Plus simplement, nous définirons la prospective comme une exploration des états possibles et une délimitation des états souhaitables.

112 - Caractéristiques

1121. La prospective se donne un but : compte tenu de l'avenir probable, agir sur le présent pour préparer l'avenir souhaitable.
1122. La prospective possède une limite : toute démarche prospective fait appel à des choix au niveau des hypothèses de base et le résultat est imprégné par un système de valeur implicite ou explicite et ne vaut que dans la mesure où ce système est lui-même acceptable.
1123. La prospective s'appuie sur un principe : délimiter le souhaitable dans la grille des possibles avant de revenir vers le présent pour trouver les moyens d'atteindre ce souhaitable.
1124. La prospective se fonde sur une méthode de lecture de l'histoire. Nous rejetons en particulier l'explication causale selon laquelle l'explication d'un état présent ne saurait se trouver que dans le passé alors qu'il s'agit plutôt d'explorer le passé et de l'expliquer à partir du présent ; il faut donc envisager ce présent comme un état dynamique et concret de tension entre les forces orientées vers l'avenir et leur blocage par des forces agissant en sens contraire qui tendent à empêcher son développement.
(cf. III L. GOLDMANN)

Il est donc inutile de rattacher d'une façon déterministe le présent à l'avenir, mais il faut plutôt envisager l'avenir relié au présent, de la même manière que le présent explique le passé. Ainsi s'éclaire la formule du Professeur SOUX :
" L'avenir, clef d'explication du présent " *

Nous connaissons assez bien les forces du passé, mais pour expliquer le présent, il faut en plus connaître l'avenir, on comprend mieux en 1972 ce qui s'est passé en 1960 ; pour comprendre ce qui se passe en 1972, il faut donc se placer en 1985 ou au-delà.

.../

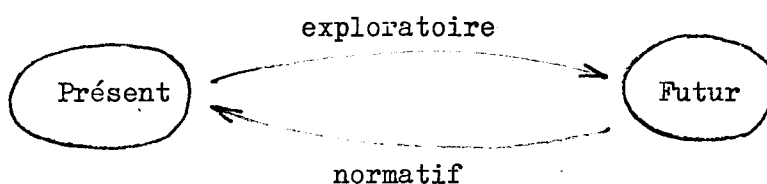
* Marx faisait remarquer avec humour que l'homme est la clef de l'anatomie du singe.

Inversement, pour éliminer dans la grille des possibles "les logiquement possibles mais historiquement impossibles", il faut prendre comme critère de choix le présent. Nous dessinerons une prospective de l'élément étudié en repérant dans la grille des possibles le ou les futuribles qui sont les plus cohérents avec le présent tel qu'on le voit ; bien entendu, cette démarche passe par une lecture du présent qui dépend du système de valeurs adopté.

113 - Concept englobant

La démarche prospective représente la forme la plus englobante d'interrogation sur le futur. En particulier elle englobe :

- 1131. la prévision à long terme : démarche exploratoire qui s'appuie sur des extrapolations de tendances et considère le futur comme une image homothétique du présent.
- 1132. La planification, c'est-à-dire le retour normatif de la prévision à long terme.



La corrélation classique entre consommation et P.N.B. est un exemple-type de cette boucle. On déduit le niveau de consommation par habitant en l'an 2000 à partir du P.N.B. prévu pour cette même année ; la démarche normative vient boucler le raisonnement ; on part de ce résultat et l'on détermine le programme d'investissements productifs qui permettra de l'atteindre.

- 1133. La prévision technologique. La science est un pur produit de la société et ne peut donc suffire à l'expliquer.

La prospective n'a rien à voir avec le développement des produits nouveaux, mais doit s'interroger sur le pourquoi de ces produits.

1134. Evaluation technologique. Terme récent qui désigne une pratique déjà bien connue des économistes, la prise en compte et la comptabilisation des effets externes (retombées) engendrés par la réalisation de certains projets.

1.2. SYSTEME

121 - Définition d'un système

Tout d'abord, qu'est-ce qu'un système ? ; les définitions sont nombreuses mais on peut néanmoins dégager une définition générale :

" Un système est à la fois un ensemble d'objets et de relations entre ces objets et leurs attributs" (cf. v)

D'après Jacques MELESE (cf. VI), un système se définit par :

- un ensemble d'éléments (de parties, de variables)
- un ensemble de relations appliquées à ces éléments.

Le passage d'une définition générale à une définition restrictive de système se fait autour du concept d'ouverture ou de fermeture du système.

- dans la définition générale, un système est ouvert sur l'extérieur avec lequel il entretient des relations.
- dans la définition restrictive, un système est un ensemble suffisamment autonome pour assurer sa reproduction.

1211. les éléments peuvent être selon les cas des êtres matériels ou abstraits, des événements.

- la définition d'un élément fait appel à un certain nombre de données que l'on peut classer en deux grandes catégories :
 - données qualitatives (en particulier, existence ou non)
 - données quantitatives

.../

Naturellement, il n'y a pas de données quantitatives sans données qualitatives. On ne peut affirmer qu'une variable a telle ou telle mesure sans admettre auparavant l'existence de cette variable.

La définition d'un élément peut très bien ne pas être unique. Il y a autant de définitions possibles que de points de vues différents.

- On distinguera avec DELATRE (cf. VII) une définition fonctionnelle qui contiendra toutes les caractéristiques qualitatives et quantitatives nécessaires pour rendre compte avec une précision donnée du rôle et du comportement de cet élément dans le système étudié et une définition exhaustive qui rendrait compte du rôle et du comportement de l'élément dans tous les systèmes possibles.

1212. Les relations.

L'existence des relations entre les éléments d'un système se traduit par deux types d'effets :

- . modifications de certaines caractéristiques quantitatives
- . apparition ou disparition de caractéristiques qualitatives.

On remarquera en particulier qu'un élément n'existe ou ne se définit que par les relations qu'il entretient avec les autres.

122 - Etats et structures d'un système - variétés

Par définition, un système est dynamique; sa transformation au cours du temps s'explique par l'évolution des relations entre ses éléments constitutifs et par les effets de ces relations sur les éléments eux-mêmes.

- . un état du système à un instant donné est donc la spécification
 - 1) des éléments caractérisant ce système éventuellement assortis d'une mesure
 - 2) des relations entre ces éléments.

- . la structure du système à un instant donné s'identifie donc à l'état pris par le système à cet instant, ce qui correspond aux définitions données par Delattre :

Structure : arrangement entre les éléments du système

: configuration spatiale entre les éléments du système.

Pour illustrer nos définitions, on peut prendre l'image d'une maison évolutive :

- le système
 - . ensemble des éléments préfabriqués
 - . ensemble de relations possibles entre ces éléments
- état ou structure du système
 - . c'est l'arrangement qui a été fait des éléments pour construire un type de maison
 - . un autre état résulte de l'ensemble des modifications qu'il a fallu apporter entre les éléments de la première maison pour fabriquer la deuxième.

Nous retiendrons aussi la notion de variété, c'est-à-dire de l'ensemble des états possibles du système. Avec Ross ASHBY (cf VIII) on distinguera :

- la variété potentielle : ensemble des états qu'un système serait susceptible de prendre si nulle contrainte interne n'intervenait.
- la variété réelle : l'ensemble des états qu'un système peut réellement occuper.

variété réelle \leq variété potentielle

- la variété observée : ensemble des états qu'un observateur pourra déceler pour un système donné

variété observée \leq variété réelle

Cette dernière notion n'est pas intrinsèque au système étudié mais traduit en partie la relation entre le chercheur qui fait partie du système qu'il observe et le système lui-même.

123 - Système complexe

" Il est nécessaire à la sociologie d'envisager la Société comme un tout, encore que ce tout, bien distinct de la somme des individus, ne soit que l'ensemble des rapports ou des interactions entre ces individus " P I A G E T. (cf. IX p. 186)

Avec Jantsch , nous qualifierons de complexe un système à boucles multiples non linéaires et doté d'effets de rétroaction.

La complexité apparaît comme l'incapacité de décrire tout le système et de déduire son comportement à partir de la connaissance de ses éléments puisque, non seulement le tout est différent de la somme des éléments, mais aussi l'évolution de chaque élément dépend du comportement de l'ensemble.

Le tout est dans chaque partie (il y a une vie organique), par conséquent, un raisonnement s'appuyant sur une cascade de "toutes choses égales par ailleurs" est inapte à expliquer l'évolution d'un tel système, dans lequel tout bouge à la fois. Dans un système dynamique "rien n'est égal, par ailleurs".

1.3 LECTURE PROSPECTIVE DES SYSTEMES

131 - Grille de lecture

Toute démarche prospective se traduit par la spécification d'une grille de lecture à trois composantes, à savoir : type de vision adoptée, type de liaisons envisagées, type de variables retenues.

Les démarches entreprises et les attitudes adoptées jusqu'ici face au futur se caractérisent par l'emploi d'une grille de lecture le plus souvent rigide et fermée ; la vision est parcellaire (on ne retient que deux ou trois variables explicatives). Les liaisons sont fixes (coefficients de corrélations). Les variables retenues sont quantitatives. Il s'agit le plus souvent de grandeurs statistiques et mesurables qui apparaissent comme objectives.

" L'avenir est comme le reste, il n'est plus ce qu'il était ..."

P. VALERY

Notre souci est de ne plus considérer le futur comme une simple image homothétique du présent. A cette fin, nous avons construit une grille de lecture qui s'oppose en tout point à la précédente.

1311. Vision globale

Puisque "rien n'est égal par ailleurs "

On ne peut faire de prospective sans replacer le sujet étudié dans le système économique et social auquel il appartient ; ce système économique et social est appréhendé sous forme d'une structure complexe, composée de plusieurs sous-structures liées et l'explication du devenir de chaque sous-structure englobée passe par la compréhension de la structure englobante (cf. III L. GOLDMA

1312. Liaisons évolutives

Les éléments de cette structure globale forment un tout, mais la structure ne se réduit pas à une simple juxtaposition d'éléments, elle est un édifice dont chaque partie conditionne l'équilibre et l'évolution.

.../

Aussi dans l'étude du devenir d'une structure composée de plusieurs blocs en relation, ce qui importe, ce n'est pas de projeter chacun des blocs à l'horizon considéré et d'opérer par simple homothétie puis de rassembler les morceaux, mais de déterminer les facteurs susceptibles d'avoir un impact sur les liaisons, les facteurs significatifs ; étant entendu que l'on retient l'évolution de ces liaisons comme explicative d'une transformation possible de la structure en cause et par là même de ses éléments constitutifs.

1313. Variables

. qualitatives, quantifiables ou non

Nous partons de l'idée simple selon laquelle les éléments non mesurables risquent d'être déterminants ; l'essentiel est peut-être ce que l'on ne connaît pas. Notre ambition vise donc à prendre en compte, dans la mesure du possible, le qualitatif, en plus du quantitatif ; ce que l'on perd en formules, on le gagne en serrant de plus près la réalité.

. subjectives

En face du futur, le jugement personnel est le seul élément d'information accessible pour la détermination des facteurs susceptibles d'agir sur le cours des événements.

Les variables que nous retenons ne sont pas objectives mais ce sont des jugements sur l'apparition ou non d'événements et sur leurs influences réciproques. En effet, dans une certaine mesure, toutes les variables sont subjectives, puisque le chercheur fait lui-même partie de la Société qu'il se propose d'étudier.

Nous pouvons résumer l'exposé précédent par un tableau :

| | Démarche classique | Démarche prospective |
|-------------------|--|--|
| V i s i o n | - Parcelleaire toutes choses égales par ailleurs | - Globale rien n'est égal par ailleurs |
| Liaisons | - fixes corrélation - homo- thétie | - évolutives évolution des liaisons explicatives de la trans- formation |
| V a r i a b l e s | - quantitatives - objectives | - qualitatives - quanti- fiables ou non - subjectives |

142 - Lecture contre intuitive ou synectique

"Les solutions dernières des problèmes sont rationnelles mais la façon d'y parvenir ne l'est pas forcément" (Cf. A. GORDON XX).

Le rationalisme absolu qui reste de mode ne permet de considérer que des faits relevant étroitement du champ limité de notre expérience. C'est dans cette cage que notre imagination est forcée de tourner.

Pour l'en sortir A. GORDON propose la Synectique, il s'agit d'une attitude de recherche qui consiste à essayer de résoudre un problème avec des éléments pris en dehors du sujet, de mettre en dedans ce qui est en dehors et réciproquement. Selon lui il faut "rendre l'insolite familier et le familier insolite".

A notre sens le mérite de cette lecture synectique que nous appellerons aussi contre-intuitive revient aux surréalistes. En effet, A. BRETON dès 1933 ne présentait rien d'autre lorsqu'il écrivait :

"Comparer deux objets aussi éloignés que possible l'un de l'autre ou, par toute autre méthode, les mettre en présence d'une manière brusque et saisissante, demeure la tâche la plus haute à laquelle la poésie puisse prétendre". On pourra ainsi "faire apparaître l'unité concrète des deux termes mis en rapport et communiquer à chacun d'eux, quel qu'il soit, une vigueur qui lui manquait tant qu'il était pris isolément..... plus l'élément de dissemblance immédiate paraît fort, plus il doit être surmonté et nié" A. BRETON Cf. XXIV p. 133.

En pratique, on peut distinguer deux types de problèmes, les uns qui sont plutôt de nature logique et que l'on peut rattacher à une catégorie de notre expérience, pour lesquels une démarche rationnelle classique convient mieux a priori, et les autres qui échappent à toute logique connue et dont la solution doit être cherchée à partir d'une démarche le cas échéant contre intuitive. Les systèmes se présentent comme des combinaisons variées et évolutives de causalité non linéaires. Ils se rattachent donc à la deuxième catégorie de problèmes et la réduction de leur complexité passe par une lecture contre-intuitive.

2.1. ANALYSE DES SYSTEMES

L'analyse des systèmes complexes peut se faire en trois étapes :

211 - L'appréhension consiste à repérer les frontières du domaine dans lequel le sous-système étudié est impliqué et inversement à décomposer ce système global afin d'obtenir des sous-ensembles observables et d'une complexité abordable.

212 - La compréhension consiste à spécifier :

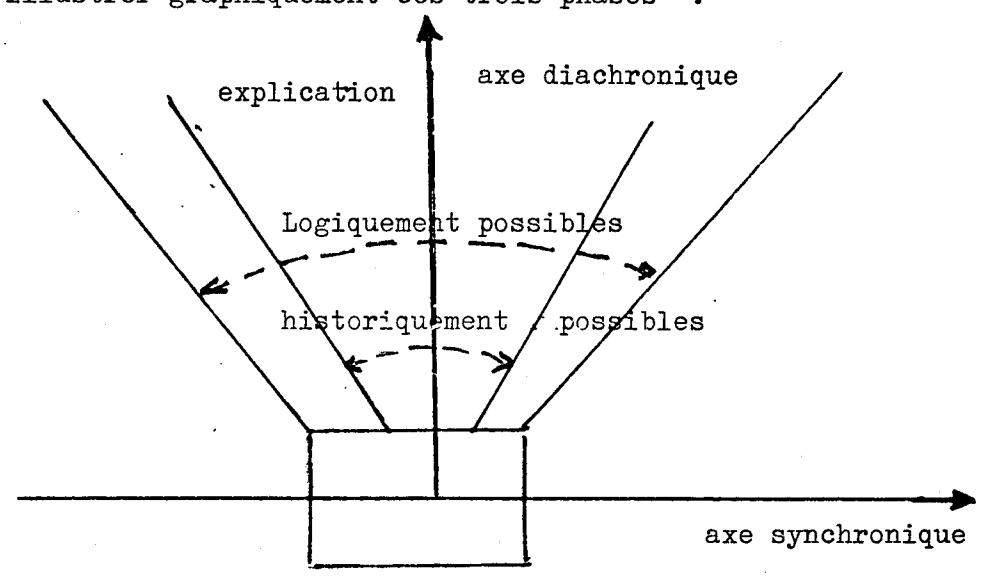
- a) les variables caractérisant la variété du système
- b) les relations entre ces variables.

L'évolution des liaisons entre les éléments étant explicative d'une transformation du système, le modèle compréhensif doit permettre de délimiter le cône des logiquement possibles.

212 - Explication

Si l'on admet que la structure du système est un état concret de tension entre des forces de destruction et de restructuration, l'explication consiste en la saisie des lois qui régissent le devenir du système. Le modèle explicatif permet d'éliminer dans la grille des logiquement possibles ceux qui sont historiquement impossibles.

On peut illustrer graphiquement ces trois phases :



2.2 INSTRUMENTS D'ANALYSE

L'utilisation des mathématiques ne résoud pas en lui-même le problème que nous nous posons, même si elle permet de le poser de manière plus rigoureuse. Car un système de concepts faux reste un système faux quand bien même on en déduirait un corps de théorème de manière rigoureuse et la mise en équation ne lui octroie par elle-même aucune qualité scientifique (cf. X SAMIR AMIN).

Forts de cette mise en garde, nous allons examiner les instruments d'analyse susceptibles de rendre compte de la réalité des systèmes complexes.

221 - Matrice d'analyse structurelle

La phase de compréhension impliquant la recherche d'information sur les variables et sur leur interdépendance, il s'agit maintenant de mettre en relation certains éléments considérés comme significatifs et de représenter sous une forme compréhensible les liaisons entre ces variables.

2211. Détermination des variables

Les variables significatives sont des événements qui, s'ils se produisent ont une influence sur une variable du système ou sur plusieurs à la fois.

La notion d'évènement retenue pour définir les variables doit être comprise au sens large. Elle recouvre :

- d'une part, des événements au sens strict qui ont lieu ou qui n'ont pas lieu
- d'autre part, des événements résultant de phénomènes politiques ou économiques connus.

Afin d'identifier de façon aussi exhaustive que possible les variables caractérisant le système, on peut adopter différents points de vue : politique, économique, technologique, psychologique, sociologique, écologique. Nous obtenons ainsi une liste de N variables appartenant à M sous-systèmes différents.

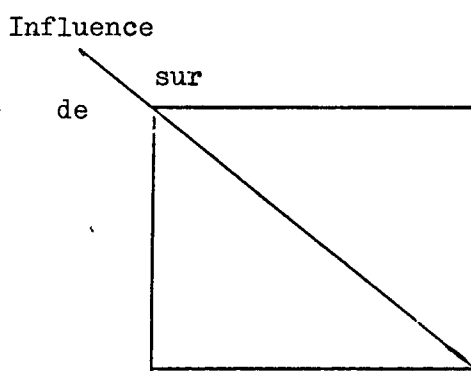
En outre, les variables peuvent être regroupées dès le départ de l'analyse suivant la trilogie : données - résultats - contraintes. Mais ce choix conditionne nécessairement le déroulement et donc le résultat de l'analyse (cf. XI Modèle POPOLE).

C'est pourquoi nous choisissons d'écrire "pêle-mêle" les variables sans aucune hiérarchie ; aucun pré-ordre n'est recherché même si certaines d'entre elles peuvent être considérées comme plus importantes que d'autres.

2212. Prise en compte des liaisons entre variables.

Les N facteurs sont mis en ligne et en colonnes formant ainsi une matrice d'incidence qui résume l'ensemble des liens que ces N facteurs tissent entre eux.

On peut différencier les influences entre les variables en notant positivement ou négativement les liens.



A : Matrice d'incidence générale

$$a_{i j} = \begin{cases} + 1 & \text{lorsque l'influence est positive} \\ - 1 & \text{lorsque l'influence est négative} \\ 0 & \text{lorsqu'il n'y a pas d'influence.} \end{cases}$$

Il convient de noter que l'intitulé de chaque variable n'est pas un parti pris dans un sens ou dans l'autre ; modifier l'intitulé revient à changer éventuellement le signe de la liaison.

L'intérêt d'une telle matrice est d'intégrer dans un tout l'ensemble des liens que ces variables tissent entre elles, afin d'étudier de façon systématique les chaînes et les boucles d'interactions, étude que notre esprit ne pourrait aborder que de façon parcellaire, sans le support de cette matrice d'incidence.

Remarquons que le remplissage de la matrice peut se faire de deux manières :

- remplissage en lignes : influence de chaque variable sur toutes les autres
- remplissage en colonnes : par quelles variables, chaque variable est-elle influencée ?

En pratique, il est utile de procéder des deux manières et de comparer les résultats en superposant par exemple les deux matrices et en étudiant attentivement les différences.

En comptant le nombre d'influences de chaque variable sur toutes les autres et le nombre de variables pour lesquelles chaque variable est influencée, on peut distinguer des variables plutôt motrices et des variables plutôt résultats.

Mais toutes les variables retenues agissent les unes sur les autres et si une matrice d'influence peut aisément rassembler l'ensemble de ces relations binaires, il est impossible de se représenter la totalité des chaînes d'influence entre variables (*), alors que, précisément il importe de connaître les effets directs ou indirects qu'une action sur l'une quelconque des variables peut avoir sur d'autres variables ou sur elle-même par l'intermédiaire de boucles de réactions ou feedbacks.

L'esprit humain étant incapable d'appréhender et de se représenter, en même temps la totalité du réseau infiniment diversifiée des relations à étudier, il devient extrêmement difficile de classer, dans la longue liste des variables, les points les plus sensibles du point de vue de l'évolution du système, c'est-à-dire ce qui est essentiel et ce qui l'est moins.

.../

(*) Pour moins de 10 variables, le nombre de chaînes d'influence dépasse le plus souvent l'ordre du milliard.

222 - Hiérarchisation des éléments d'un système : méthode MIGMAC (cf. XII)

2221. Information disponible

Nous disposons :

- d'une liste de N variables caractérisant le système étudié.
- d'une matrice d'incidence.

2222. Détermination d'un critère de choix des variables :

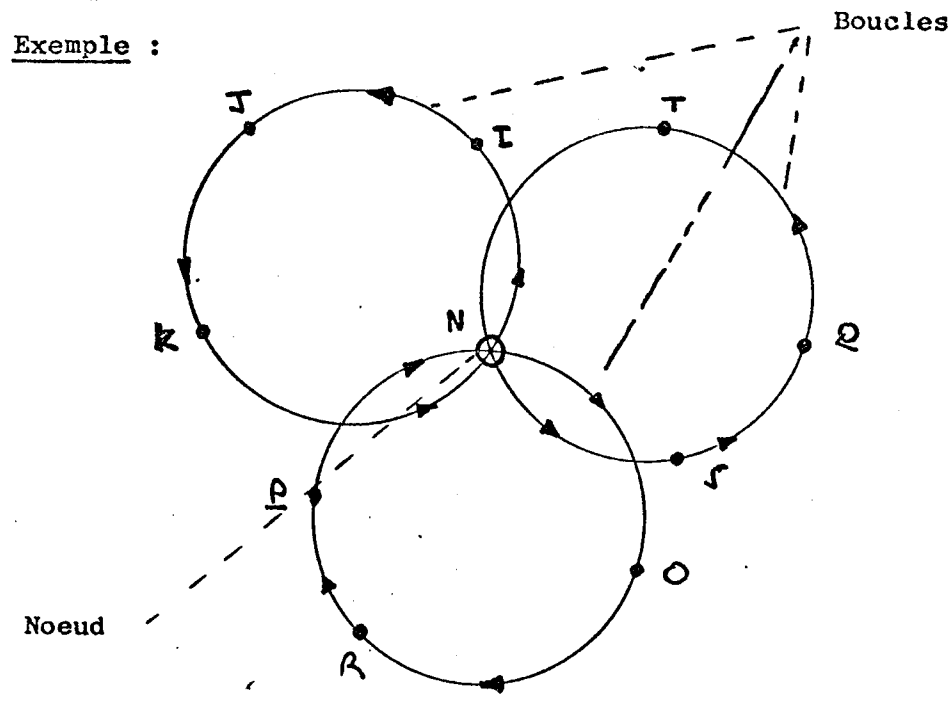
En vue de déterminer les variables les plus importantes, une première idée s'impose : classer les variables en fonction du nombre de liaisons qui arrivent ou qui partent d'elles, mais cette première idée s'avère insuffisante pour deux raisons :

- d'une part, ce classement reste subjectif, il découle directement de l'interprétation personnelle donnée aux interactions entre variables.
- d'autre part, seules les interactions directes sont prises en compte, il faudrait considérer les chaînes d'influence et les effets indirects qu'elles provoquent.

L'ensemble des variables retenues dans la matrice constitue un réseau complexe de relations à la fois très dense et relativement fermé puisqu'il est impossible d'imaginer un événement sur lequel aucun autre événement n'aurait d'influence et/ou qui serait sans conséquence sur le développement des autres événements. Lorsqu'on a affaire à un système complexe, il ne faut pas dissocier le choix des variables du choix des relations. En effet, une variable n'existe que par rapport aux autres et choisir des variables c'est donc choisir des relations. Remarquons par ailleurs que les relations les plus intéressantes sont celles qui en engendrant des feedbacks assurent la dynamique du système. Par conséquent il paraît normal de considérer les boucles ou circuits d'influence passant par chaque variable et de retenir comme critère de classement le nombre de boucles dans lesquelles chaque variable est impliquée.

.../

Pour appliquer ce critère, nous avons fait appel au programme MICMAC (Matrice d'Impacts Croisés - Multiplication Appliquée à un Classement). Ce traitement aboutit à un classement ordinal des variables considérées comme des noeuds entre boucles. Une action sur ces variables aura des retombées importantes sur tout le système, les plus importantes sont donc celles par lesquelles passent le plus grand nombre de boucles :



La variable N est impliquée dans 3 boucles de longueur 4. C'est un noeud de 3 boucles.

2223. Programme MICMAC :

Il s'agit d'un programme de multiplication matricielle appliquée à un classement.

On part d'une matrice Booléenne avec des zéros et des 1. On multiplie cette matrice par elle-même, les calculs sont faits en algèbre ordinaire. Soit A (n, n) cette matrice d'incidence qui n'est autre que la matrice des influences entre variables significatives.

Ordre 1

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & a^1 & \\ & & ij \end{pmatrix}$$

avec $a^1_{ij} = 1$, s'il y a une influence positive ou négative de la variable i sur la variable j, on dira alors qu'il existe un chemin d'influence de longueur 1 allant de i à j.

$a^1_{ij} = 0$, lorsque la variable i est sans influence sur la variable j, il n'existe pas de chemin d'influence de longueur 1 allant de i à j.

Ordre 2

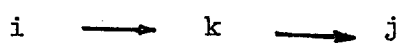
$$A^2 = A \times A = \left(\begin{matrix} a^2_{ij} \end{matrix} \right)$$

avec $a^2_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a^1_{ik} \cdot a^1_{kj}$

en particulier

$$a^2_{ij} = 1 \text{ il existe } k \text{ tel que } a_{ij} = a^1_{ik} \cdot a^1_{kj}$$

c'est-à-dire qu'il existe une variable intermédiaire k. tel qu'il y ait une influence de la variable i sur la variable k et de la variable k sur la variable j.

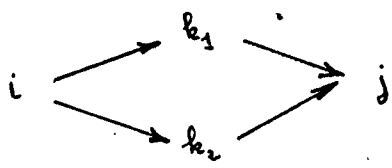


On dira qu'il y a un chemin de longueur 2 allant de i vers j.

$$a^2_{ij} = 2 \text{ il existe } k_1, k_2 \text{ tels que}$$

$$a^2_{ij} = a^1_{ik_1} \cdot a^1_{k_1j} + a^1_{ik_2} \cdot a^1_{k_2j}$$

c'est-à-dire qu'il existe deux variables intermédiaires. On dira qu'il y a deux chemins d'influence de longueur 2 qui vont de i à j.



$$a^2_{ij} = L \text{ il existe } k_1, k_2, \dots, k_L \text{ tels qu'il}$$

y ait L chemins d'influence de longueur 2 qui vont de i à j.

Ordre n $A^n = \left(\begin{matrix} a^n_{ij} \end{matrix} \right)$

$a^n_{ij} = L$ il existe L chemins d'influence de longueur n qui vont de i à j.

Cas particuliers : $i = j$

$a_{ii}^1 = 0$ par hypothèse une variable n'agit pas sur elle-même, en conséquence, la première diagonale est nulle.

$a_{ii}^2 = L$ il existe L chemins de longueur 2 allant de i à i ; un tel chemin s'appelle un circuit -- nous parlerons de L boucles d'influence passant par i .

$a_{ii}^n = L$ L boucles d'influence passent par la variable i .

La variable i est considérée comme un noeud entre L boucles de longueur n

A chaque élévation de puissance, le nombre sur la diagonale principale nous dit de combien de boucles la variable correspondante est le noeud. En pratique, les résultats précédents ne sont pas tout-à-fait exacts. En effet, au cours des élévations de puissances successives, des boucles plus petites se joignent pour en former de plus longues ; certains éléments sont donc comptés plusieurs fois dans la même boucle. En faisant ainsi, on privilégie les variables entrant dans les boucles d'influence courtes, ce qui n'est pas choquant puisque les boucles longues sont moins significatives en termes de retombées sur le système.

D'une puissance à l'autre, c'est-à-dire d'une longueur de boucle à l'autre, on compare les classements obtenus par MICMAC. En pratique, il s'avère que ce classement devient rapidement stable.

L'ordre obtenu pour les boucles de longueur "P" éléments étant stable, nous le choisissons comme classement final.

Remarques :

R 1 - Nous ne sommes pas allés au-delà de "P" pour deux raisons :

- a) le classement obtenu est stable,
- b) plus une boucle est longue, moins elle est significative.

R 2 - Le dernier point de la remarque précédente implique immédiatement la proposition inverse, à savoir que plus une boucle est courte, plus elle est importante.

Et on ne peut pas dire que nous avons défavorisé les variables impliquées dans les boucles courtes, puisque, les boucles de longueur "P" comprennent toutes les combinaisons de boucles de longueur inférieure et qu'les éléments répétés sont comptés plusieurs fois.

2224. C O N C L U S I O N :

MICMAC nous donne un deuxième classement des variables que l'on peut comparer au premier obtenu en fonction du nombre de liaisons directes entre elles. En particulier, certaines variables qui, au niveau des impacts directs, pouvaient sembler secondaires, se révèlent très importantes lorsque les effets indirects sont pris en compte par l'intermédiaire du nombre de boucles dans lesquelles chaque variable est impliquée.

Finalement, le programme MICMAC permet de hiérarchiser les variables caractéristiques d'un système à partir de calculs simples et en appliquant un critère cohérent : le nombre de boucles dans lesquelles chaque variable est impliquée.

MICMAC s'avère un outil puissant qui permet de déterminer rapidement ce qui est essentiel et ce qui l'est moins, et grâce auquel on peut réduire la complexité du système étudié en ne s'intéressant qu'aux variables les plus importantes.

223 - Analyse de stabilité

2231. Stabilité des éléments du système : boucles de rétroaction et effets bocmerangs.

Afin de tirer parti de la matrice d'incidence réduite aux variables les plus importantes, on s'intéresse aux boucles comprenant un nombre restreint de variables, elles sont sélectionnées par le programme MICROBE (Matrice d'Impacts Croisés Recherche Opérationnelle de Boucles Enchevêtrées).

- Rappelons que la liaison i sur j doit s'interpréter en termes d'élasticités, le développement d'un facteur propage une onde d'influence qui se répercute sur les autres facteurs suivant une intensité variable et une rapidité qui dépend du temps de latence entre facteurs (nombre de liaisons intermédiaires). En conséquence, les boucles les plus courtes sont les plus significatives, c'est pourquoi nous n'allons pas plus loin que les boucles de longueur 4 et 5, qui sont fournies par le programme MICROBE. Ce programme permet donc d'exploiter les feedbacks les plus intéressants.

- Rappelons que la liaison positive d'une variable i sur une variable j peut s'interpréter de la manière suivante. Si la variable i apparaît, alors le développement de la variable J s'en trouve favorisé et inversement pour une liaison négative.

Une boucle positive comprend zéro ou un nombre pair de signes négatifs,

soit par exemple la boucle positive :

$$x_i \xrightarrow{+} x_J \xrightarrow{+} x_K \xrightarrow{+} x_L \xrightarrow{+} x_i$$

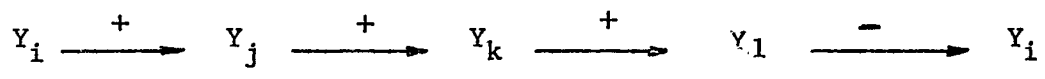
pour faciliter l'interprétation, raisonnons en termes de probabilités; soient P_i, P_J, P_K, P_L les probabilités initiales de développement de chaque variable à une date horizon. Si avant cette date, une impulsion positive est donnée sur P_i , elle se traduit par une augmentation de la probabilité de développement qui devient $P_i + \Delta P_i$. La réaction en chaîne se présente comme suit :

$$(P_i + \Delta P_i) \xrightarrow{+} (P_J + \Delta P_J) \xrightarrow{+} (P_K + \Delta P_K) \xrightarrow{+} (P_L + \Delta P_L) \xrightarrow{+} \dots \dots \dots (P_i + \Delta P_i + \Delta' P_i)$$

$\Delta' P_i$ étant la nouvelle impulsion résultant de l'influence de la boucle positive. On parlera alors "d'effet boomerang multiplicateur de développement" pour la variable x_i

- Inversement, une boucle négative comprend un nombre impair de signes négatifs.

Soit la boucle négative :



Le raisonnement probabiliste va nous permettre à nouveau d'explicitier ce processus. Soient P_i, P_j, P_k, P_l les probabilités de développement de chaque variable à une date horizon, si avant cette date, une impulsion est donnée à Y_i , la réaction en chaîne s'écrit :

$$(P_i + \Delta P_i) \xrightarrow{+} (P_j + \Delta P_j) \xrightarrow{+} (P_k + \Delta P_k) \xrightarrow{+} (P_l + \Delta P_l) \xrightarrow{-} (P_i + \Delta P_i - \Delta')$$

Le signe moins de la boucle négative se traduit donc par une diminution de la probabilité de développement de la variable Y_i qui est maintenant inférieure à ce qu'elle était, compte tenu de l'impulsion initiale. On parlera alors "d'effet boomerang réducteur de développement".

Enfin :

- un feedback négatif peut s'interpréter comme une force stabilisatrice ayant un effet boomerang annulateur ou réducteur de développement.
- Si il n'y a que des feedbacks négatifs, le système étudié est dit équilibré.
- un feedback positif au contraire peut s'interpréter comme une force d'instabilité ou de changement ayant un effet boomerang multiplicateur ou amplificateur de développement.

Si les feedbacks positifs l'emportent sur les feedbacks négatifs, le système est dit instable ou explosif.

L'analyse des boucles est particulièrement utile pour la construction de scénarii puisqu'elle permet de connaître l'ensemble des effets directs et indirects que l'action sur l'une quelconque des variables peut avoir sur d'autres ou sur elle-même.

2232. Stabilité du système et valeurs propres (*)

2232I - Définitions

- Un digraphe orienté comprend un ensemble de N points ou noeuds et une relation binaire R sur N (R non réflexive)
- Les noeuds sont des variables ou des objectifs du phénomène ou du système étudié.
- $x R y$ signifie qu'une variation de x entraîne une variation de y .
- En se référant à la théorie des graphes orientés, on peut définir des chaînes et des boucles d'influence auxquelles on peut associer des longueurs.
- L'ensemble des relations binaires sont rassemblées dans une matrice d'incidence " S ".

22322 - Les mécanismes d'impacts

Soient les noeuds x_1, x_2, \dots, x_n et $V_i(t)$ la valeur atteinte par le noeud x_i aux temps $t = 0, 1, 2, \dots$. La valeur $V_i(t+1)$ se calcule à partir de $V_i(t)$ en tenant compte des impulsions exogènes $P_i^0(t+1)$ introduites au noeud x_i au temps $t+1$ et du fait que les noeuds en relations avec x_i ont augmenté ou diminué à la période précédente.

On définit :

$$V_i(t+1) = V_i(t) + P_i^0(t+1) + \sum_j \text{sgn}(x_j, x_i) P_j(t)$$

ou

$$\text{sgn}(x_j, x_i) = \begin{cases} +I & \text{si le lien } x_j, x_i \text{ est positif} \\ -I & \text{si le lien } x_j, x_i \text{ est négatif} \\ 0 & \text{pas de relation de } j \text{ sur } i \end{cases}$$

et

$$P_j(t) = \begin{cases} (V_j(t) - V_j(t-1)) & \text{si } t > 0 \\ (P_j(0)) & \text{à } t = 0 \end{cases}$$

La quantité $P_j(t)$ s'appelle l'impulsion au noeud x_j au temps t

On dispose d'un vecteur initial de valeurs :

$$V(0) = (V_1(0), V_2(0), \dots, V_n(0))$$

et de vecteurs exprimant les impulsions exogènes introduites à chaque période sur chaque noeud :

$$P^0(t) = (P^0_1(t), P^0_2(t), \dots, P^0_n(t))$$

.../

Ainsi que du vecteur d'impulsion initiale

$$P^0(0) = (P_I^0(0) \dots\dots\dots P_n^0(0))$$

Si $P^0(t) = 0$ pour $t > 0$ on dit que l'on a affaire à un mécanisme d'impulsion autonome et

$$P(t) = S^{t-T} P(T)$$

22323. Approche matricielle pour déterminer la stabilité ou l'instabilité d'un système autonome.

Soit " S " la matrice d'incidence du digraphe orienté caractérisant le système étudié.

S étant carrée, on peut trouver une matrice régulière

$$R \text{ tel que } S = R J R^{-1}$$

avec J : matrice canonique de Jordan

Si S a toutes ses valeurs propres distinctes, J est une matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale principale.

On peut écrire :

$$P(t) = S^t P(0) = R J^t R^{-1} P(0)$$

en conséquence, P(t) le vecteur d'impulsion aura une borne supérieure si toutes les valeurs propres λ_i sont telles que :

$$|\lambda_i| < 1$$

Inversement, P(t) ne sera pas borné si l'une des valeurs propres est supérieure à 1 en valeur absolue.

Sans entrer plus avant dans les détails, on peut dire néanmoins que l'étude détaillée des valeurs propres permet d'analyser la stabilité ou l'instabilité du système étudié.

2.3 C O N C L U S I O N

- Les matrices d'analyse structurelle représentent l'instrument de base pour l'étude des systèmes complexes; mais il convient de remarquer qu'une véritable analyse de système devrait comprendre autant d'analyses structurelles qu'il y a d'états possibles pour le système. En effet, une matrice d'analyse structurelle ne représente qu'un "arrêt sur l'image" du film de l'évolution continue du système.
- Le programme MICMAC permet de hiérarchiser les éléments d'un système et donc de réduire la complexité de son analyse en restreignant le domaine d'étude aux variables les plus essentielles.
- Par ailleurs, si les analyses de stabilité du système et de ses éléments sont utiles pour la construction de scénarii, elles restent néanmoins insuffisantes.

En effet, pour comprendre la transformation d'un système, il ne suffit pas de repérer certaines variables et certaines relations mais il faut aussi prendre en compte l'intensité de ces relations.

En d'autres termes, si l'approche purement qualitative représente une première étape fructueuse et indispensable pour la "lecture" des systèmes complexes, elle ne fournit qu'une grille d'états possibles, il convient donc, dans un deuxième temps, de la dépasser par une approche quantitative permettant de hiérarchiser ces états en termes de probabilités d'apparition.

UNE NOUVELLE METHODE D'IMPACTS CROISES :

S.M.I.C. 74 (Systèmes et Matrices d'Impacts Croisés)

31 - P O S I T I O N D U P R O B L E M E

Les systèmes sociaux sont de plus en plus complexes et diversifiés. Les phénomènes sont de plus en plus interdépendants, les événements de plus en plus liés. Par conséquent, la maîtrise du futur passe par une connaissance immédiate de ce que pourrait être l'avenir. De même qu'on peut résumer l'histoire passée par une série d'évènements marquants, on peut repérer les futurs possibles par une liste d'évènements qui, s'ils se produisent, sont considérés comme importants pour un horizon donné, cet ensemble d'évènements constitue un référentiel dans lequel il y a autant d'états possibles / de futuribles / que de combinaisons d'évènements. La question à laquelle nous nous proposons de répondre est de savoir comment déterminer les événements et, par conséquent, les états les plus probables.

Il convient de rappeler qu'en face du futur, le jugement personnel est souvent le seul élément d'information accessible. Le chercheur faisant lui-même partie de la société qu'il se propose d'étudier, la plupart des idées émises sont subjectives. A ce propos, deux remarques s'imposent :

- R_1 / cette subjectivité s'applique à l'étude de systèmes de plus en plus complexes et l'esprit humain est incapable de saisir et d'intégrer à sa pensée le réseau infiniment diversifié des relations à étudier.
- R_2 / les opinions émises à la suite de certaines questions particulières portant sur des événements non indépendants, renferment une certaine part d'incohérence par rapport à l'opinion globale, inexprimée mais implicite si l'on considère l'ensemble des réponses aux autres questions.

.../

Ces remarques suscitent deux propositions :

- P_1 / le support mathématique et le traitement informatique s'avèrent nécessaires pour prendre en compte l'ensemble des interdépendances entre évènements, pour intégrer les informations partielles dans un tout.
- P_2 / Il faut tester la cohérence des informations rassemblées et corriger les estimations.

Certaines méthodes comme Delphi permettent assez bien de collecter les opinions et d'aboutir à un résultat convergent. Mais cette méthode présente le défaut de ne pas tenir compte des interactions entre évènements. A l'inverse, la méthode des Impacts Croisés (M.I.C.) présente l'avantage de prendre en compte à la fois les opinions exprimées et les interdépendances entre questions posées et offre, par conséquent, une grille de lecture plus cohérente.

La méthode des Impacts Croisés est le terme générique d'une famille de techniques qui tente d'évaluer les changements dans les probabilités d'apparition d'un ensemble d'évènements à la suite de l'apparition de l'un d'eux. Cette méthode se présente d'abord sous la forme d'une liste d'évènements avec les probabilités de développement qui leur sont associées; l'hypothèse de base de la méthode est que les probabilités élémentaires tiennent compte des interactions mais incomplètement. La prise en compte de ces interdépendances entre évènements permet de passer d'un système de probabilités a priori à un système de probabilités a posteriori.

Plusieurs méthodes ont été proposées. Tout d'abord l'évaluation des interactions s'est faite avec des coefficients d'impact compris entre + 10 et - 10 (cf XV GORDON); le passage des probabilités a priori aux probabilités a posteriori faisant le plus souvent appel à des techniques assez sophistiquées : méthode de Monte-Carlo avec itérations successives. A la suite des travaux de GORDON, la méthode a fait l'objet d'autres approches; on peut citer NORMAN DALKEY (cf. XVI) qui s'appuie sur une matrice des probabilités conditionnelles entre tous les couples d'évènements pour modifier le système de probabilité initial. Cette approche constitue un progrès par rapport à celle de GORDON puisque les probabilités étant non plus modifiées à partir de coefficients mais à partir d'autres probabilités, les données sont plus homogènes.

.../

Les contraintes matérielles et financières mises à part, l'utilisation de la M.I.C. telle qu'elle est proposée par GORDON et améliorée par DALKEY reste très peu crédible. En effet, les résultats obtenus* dépendent de la formule de passage adoptée pour le calcul des probabilités a posteriori. Plusieurs formules ont été proposées souvent constituées en un savant mélange entre formes quadratiques, espérances mathématiques et coefficients de pondérations subjectifs ... En pratique, aucune ne s'impose et sur un même exemple, il y a autant de résultats que de formules testées. En particulier, rien ne justifie l'emploi dans ces formules de passage du produit $P_i (I - P_i)$ qui est maximum pour P_i égal à 0,5 et minimum pour P_i égal à 0 ou 1 - et par conséquent a tendance à empêcher les modifications pour les probabilités proches de 0,5 et à faciliter celles des probabilités extrêmes.

Le souci de proposer une formule de passage qui ait un sens a conduit les différents auteurs (cf. XVII) à faire appel à la théorie de l'information. L'approche est séduisante mais l'obtention des résultats reste complexe et entachée de subjectivité (emploi de coefficients de pondérations individuels et collectifs).

Dé plus, l'objet de la méthode devrait consister à contrôler la cohérence des estimations relativement aux contraintes classiques sur les probabilités (cf. 3313). En pratique, la plupart des méthodes, quel que soit leur degré de complexité, aboutissent à des probabilités a posteriori incohérente avec des résultats du type, par exemple, $P(i) \leq P(i/j) P(j)$, ce qui n'est pas compatible avec la relation $P(i) = P(i/j) P(j) + P(i/\bar{j}) \cdot P(\bar{j})$ qui doit toujours être vérifiée.

Finalement, les différentes M.I.C. mises au point jusqu'ici ne nous semblent pas satisfaisantes. C'est pourquoi il nous a paru nécessaire de repenser la question à son point de départ et dans sa totalité.

Dans les pages suivantes, nous allons tout d'abord préciser les limites de la méthode des impacts croisés, ensuite proposer une nouvelle approche et enfin la tester sur un exemple.

* bien évidemment les résultats à la sortie dépendent d'abord des données entrées mais ceci est vrai pour tout modèle.

321 - DEFINITIONS ET PROPRIETES

La notion d'évènement est définie par M. E. BOREL de la manière suivante (cf. XXI) :

" Un évènement est un être abstrait dont la seule caractéristique est de se produire ou de ne pas se produire " . On peut le considérer comme une variable ne pouvant prendre que deux valeurs qui sont en général 1 si l'évènement se produit, 0 si l'évènement ne se produit pas. Un tel évènement sera appelé "évènement isolé".

Soit $H = (e_1 . e_2 \dots\dots\dots e_N)$ un ensemble fini d'évènements isolés :

1/ Ces évènements isolés sont liés entre eux

$$e_i R_{ij} e_j \quad \forall (i,j)$$

2/ On considère le système S constitué par l'ensemble de ces évènements isolés en relation :

$$S = (H, R) \quad R = \{ R_{ij} \}$$

3/ Nous considérons des évènements isolés non récurrents, c'est-à-dire ne pouvant se produire qu'une fois au plus dans la période T considérée. (cf. 322)

L'ensemble auquel nous allons nous intéresser est l'ensemble des évènements élémentaires définis comme les parties E_k d'un ensemble fini H , les éléments de H étant les évènements isolés.

Soit H un ensemble d'évènements isolés $H = (e_1, e_2 \dots e_N)$

On définit alors comme évènement élémentaire que nous appellerons aussi état du système d'évènements isolés, toute combinaison correspondant à l'arrivée d'un certain nombre d'évènements isolés pendant la période considérée et de ceux-là seulement.

Soit par exemple

$$H = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$E_k = (e_1, \bar{e}_2, e_3)$ correspondant à l'arrivée de e_1 et e_3 et non

Les évènements élémentaires E_k sont les parties de H , ensemble des évènements isolés.

Soit $\Omega = (E_k)$ avec $|H| = N$ $| \quad |$ signifiant cardinal de

$$\text{alors } |\Omega| = 2^N$$

Remarquons que les évènements élémentaires E_k sont incompatibles.

A partir de l'espace (Ω) des évènements élémentaires E_k , on peut définir des évènements A_i correspondant aux combinaisons des E_k

$$\text{pour } N = 3 \quad \Omega = (E_1, E_2 \dots E_8)$$

on aura par exemple :

$$A_i = (E_1, E_2, E_7) \text{ qui correspond à l'arrivée de}$$

E_1 ou E_2 ou E_7 à l'exclusion de tout autre évènement élémentaire.

Les évènements A_i sont les parties de l'ensemble Ω des évènements élémentaires

$$|A| = 2^r \text{ avec } r = \text{card } \Omega = 2^N$$

$$\text{card } A = 2^{2^N}$$

Pour illustrer notre propos, considérons les évènements isolés
comme des mots :

- soient deux mots e_1 et e_2 .- $\text{card } |H| = 2$

à partir de ces mots (évènements isolés), on peut construire des
éléments de discours (évènements élémentaires)

- soient $2^2 = 4$ éléments de discours = $\text{card } \Omega$

Ces éléments de discours peuvent être combinés pour former des discours
et il y a 2^4 discours possibles.

$$H = (e_1, e_2)$$

$$\Omega = (E_1, E_2, E_3, E_4)$$

| | | |
|-------|-------------|-------------|
| H | e_1 | e_2 |
| E_1 | e_1 | e_2 |
| E_2 | e_1 | \bar{e}_2 |
| E_3 | \bar{e}_1 | e_2 |
| E_4 | \bar{e}_1 | \bar{e}_2 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | A_5 | A_6 | A_7 | A_8 | A_9 | A_{10} | A_{11} | A_{12} | A_{13} | A_{14} | A_{15} | A_{16} |
| E_1 | 0 | 0 | 0 | E_1 | E_1 | E_1 | 0 | 0 | 0 | E_1 | E_1 | E_1 | 0 | E_1 | 0 |
| 0 | E_2 | 0 | 0 | E_2 | 0 | 0 | E_2 | E_2 | 0 | E_2 | E_2 | 0 | E_2 | E_2 | 0 |
| 0 | 0 | E_3 | 0 | 0 | E_3 | 0 | E_3 | 0 | E_3 | E_3 | 0 | E_3 | E_3 | E_3 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | E_4 | 0 | 0 | E_4 | 0 | E_4 | E_4 | 0 | E_4 | E_4 | E_4 | E_4 | 0 |

Les différents discours correspondent aux relations suivantes entre les éléments isolés :

| | | | | | |
|----------|---|-------------|--------------------|-------------|------------------------|
| A_1 | : | e_1 | et | e_2 | |
| A_2 | : | e_1 | et | \bar{e}_2 | |
| A_3 | : | \bar{e}_1 | et | e_2 | |
| A_4 | : | \bar{e}_1 | et | \bar{e}_2 | |
| A_5 | : | e_1 | | | |
| A_6 | : | e_2 | | | |
| A_7 | : | e_1 | \Leftrightarrow | e_2 | implication réciproque |
| A_8 | : | e_1 | \nleftrightarrow | e_2 | incompatibilité |
| A_9 | : | \bar{e}_2 | | | |
| A_{10} | : | \bar{e}_1 | | | |
| A_{11} | : | e_1 | ou | e_2 | |
| A_{12} | : | e_2 | \Rightarrow | e_1 | e_2 implique e_1 |
| A_{13} | : | e_1 | \Rightarrow | e_2 | |
| A_{14} | : | \bar{e}_1 | ou | \bar{e}_2 | |
| A_{15} | : | Ω | | | |
| A_{16} | : | \emptyset | | | |

Pour connaître les probabilités de chaque mot et de chaque couple de mots, il n'est pas nécessaire de connaître toutes les probabilités de discours.

Ainsi, par exemple, la donnée des probabilités des quatre discours A_{11} , A_{12} , A_{13} , A_{14} suffit pour connaître les probabilités individuelles et conditionnelles des mots.

Posons :

$$P(A_{11}) = P(e_1 \text{ ou } e_2) = a$$

$$P(A_{12}) = P(e_2 \implies e_1) = b$$

$$P(A_{13}) = P(e_1 \implies e_2) = c$$

$$P(A_{14}) = P(\bar{e}_1 \text{ ou } \bar{e}_2) = d$$

et calculons par exemple $P(e_1)$ et $P(e_2/e_1)$

nous avons :

$$(1) \quad (1 - a) = P(\overline{e_1 \text{ ou } e_2}) = P(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2)$$

$$(2) \quad b = P(e_2 \implies e_1) = 1 - P(e_2 \cdot \bar{e}_1)$$

$$(3) \quad c = P(e_1 \implies e_2) = 1 - P(e_1 \cdot \bar{e}_2)$$

$$(4) \quad 1 - d = P(\overline{\bar{e}_1 \text{ ou } \bar{e}_2}) = P(e_1 \cdot e_2)$$

nous avons par ailleurs :

$$P(e_1) = P(e_1 \cdot e_2) + P(e_1 \cdot \bar{e}_2)$$

$$= (1 - d) + (1 - c) =$$

$$P(e_1) = (1 - d) + (1 - c)$$

d'autre part, nous obtenons :

$$P(e_2/e_1) = \frac{P(e_1 \cdot e_2)}{P(e_1)} = \frac{(1 - d)}{(1 - d) + (1 - c)}$$

322 - RESTRICTIONS ET CHAMP D'APPLICATION

Nous nous intéressons à l'horizon t que couvre la période T et à la probabilité qu'à chaque événement de se produire pendant cette période T nous limitons le domaine de notre étude aux points suivants

3221) Evènements discrets

On peut en partie supprimer l'hétérogénéité due à l'existence d'évènements discrets et continus en "discrétisant" les évènements continus grâce à la définition de seuils. Par exemple, pour l'évènement "baisse de l'âge de la retraite", on peut délimiter certains seuils 50 ans, 55 ans, 60 ans.

3222) Evènements non récurrents

Les évènements sont considérés comme non récurrents. Si l'on s'intéresse à un horizon donné t et à la période T qui sépare le présent de cette date, un évènement ne peut se produire plus d'une fois.

3223) Système sans mémoire (on ne tient pas compte de l'ordre d'arrivée des évènements isolés)
Certains phénomènes, mécaniques, physiques, chimiques, etc. sont sans mémoire, mais la plupart des systèmes économiques et sociaux sont à mémoire. L'image que l'on prétend avoir du futur au travers d'un ensemble d'évènements devrait donc intégrer ce concept de mémoire. Mais comme le montre le tableau ci-dessous le nombre de paramètres qu'il faut théoriquement connaître pour spécifier complètement le système étudié s'impose comme une limite insurmontable dans la mesure où c'est à l'esprit humain de fournir l'information :

| Nombre d'évènements | Impacts croisés | Système sans mémoire | Système avec mémoire |
|---------------------|-----------------|----------------------|---|
| N | N^2 | $N \cdot 2^{N-1}$ | $\sum_{J \neq e \in N} J! \binom{N}{J} \neq e N!$ |
| 2 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 9 | 12 | 15 |
| 4 | 16 | 32 | 64 |
| 5 | 25 | 80 | 325 |
| 10 | 100 | 5 120 | 10 millions |

Dans ce tableau, nous limitons nos calculs aux systèmes à évènements non récurrents.

(Systèmes et Matrices d'Impacts Croisés)

331 / INFORMATION DISPONIBLE

Le principe de la méthode est extrêmement simple et est soumis à l'hypothèse selon laquelle les experts peuvent fournir une information sur :

3311) La liste des N évènements isolés considérés comme importants pour l'objet de l'étude :

$$H = (e_1, e_2 \dots \dots \dots e_N)$$

3312) Les probabilités d'arrivée des évènements isolés dans un horizon donné

$P(i)$ probabilité de l'évènement isolé e_i

Avec le

Professeur J. VILLE, nous "pouvons considérer une évaluation de probabilité d'un évènement isolé comme un jugement subjectif en ce sens que l'on classe l'évènement considéré dans une catégorie d'évènements qui subjectivement ont même degré de vraisemblance. C'est donc l'expert qui, en portant ses jugements, établit les catégories". (cf. XVIII p. 139)

Ainsi quand une personne dit "j'estime à $3/4$ la probabilité de tel évènement" (isolé), nous nous accordons avec le professeur VILLE pour comprendre ce jugement ainsi : "si vous notez tous les évènements auxquels j'aurai attribué une probabilité égale à $3/4$ et que vous observiez pour un grand nombre de cas la fréquence de ceux où l'évènement s'est effectivement produit, je prédis que cette fréquence sera voisine de $3/4$ ". (cf. XVIII p. 17)

3313) Les probabilités conditionnelles des évènements isolés pris deux à deux

$P(i/j)$. probabilité de i si j est arrivé

$P(i/\bar{j})$ probabilité de i si j n'est pas arrivé.

Les conditions à respecter sont :

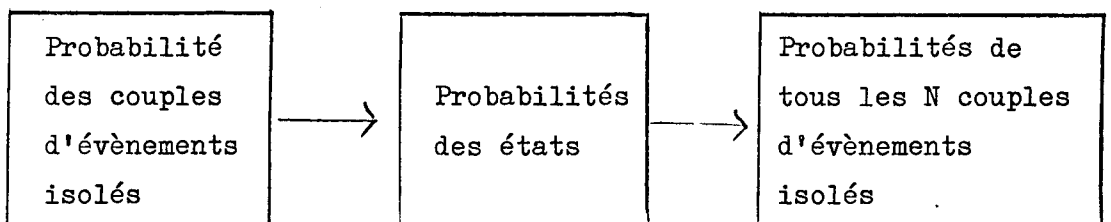
- a) $0 \leq P () \leq 1$
- b) $P (i/j) \cdot P (j) = P (j/i) \cdot P (i) = P (i \cdot j)$
- c) $P (i/j) \cdot P (j) + P (i/\bar{j}) \cdot P (\bar{j}) = P (i)$

L'objet de la méthode consiste à contrôler la cohérence des estimations des experts relativement aux contraintes ci-dessus. C'est l'idée classique de la méthode selon laquelle chaque information apportée par les experts tient compte des interactions entre évènements mais sous un angle différent, c'est-à-dire incomplètement. Par conséquent, les estimations doivent être corrigées, et la manière d'opérer pour passer au système de probabilité a posteriori doit être inspirée d'une règle objective, c'est-à-dire exprimant l'accord des estimations avec les contraintes imposées.

On pourrait penser à optimiser une certaine fonction des probabilités individuelles et conditionnelles sous les contraintes ci-dessus. Mais la non-linéarité des contraintes sur les probabilités des évènements isolés impose des conditions particulières à l'optimum, ceci nous conduit à nous intéresser aux probabilités des états du système d'évènements isolés.

En effet, la connaissance des probabilités des états du système donne la séquence des futurs possibles les plus vraisemblables et permet de construire des scénarii.

Le principe retenu consiste à partir d'une information a priori incohérente et incomplète sur les probabilités des évènements isolés, à trouver des résultats a posteriori complets et cohérents en passant par les probabilités des états du système isolé.



Information incomplète et incohérente
fournie par les experts

Transformation

Information complète et cohérente

DES ETATS DU SYSTEME D'EVENEMENTS ISOLES.

Rappelons qu'un évènement élémentaire ou état du système " S " est une spécification des évènements isolés.

Pour un système S de N évènements isolés, il y a $2^N = r$ états possibles

- à chaque état E_k on associe une probabilité π_k

avec
$$\sum_k^r \pi_k = 1$$

$$E_1 = (e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_N)$$

$$E_2 = (\bar{e}_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_N)$$

$$E_3 = (e_1, \bar{e}_2, \dots, e_i, \dots, e_N)$$

$$E_r = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_N)$$

- à chaque évènement élémentaire e_i , on peut associer une probabilité :

$$P(i) = \sum_k^r \theta_{ik} \pi_k \quad (1)$$

avec $\theta_{ik} = 1$ si e_i figure dans E_k

$\theta_{ik} = 0$ si e_i ne figure pas dans E_k

$$- P(i/j) = \frac{\sum_{k=1}^r t(ijk) \pi_k}{P(j)} \quad \forall (i,j) \quad (2)$$

avec $t(ijk) = 1$ si e_i et e_j figurent dans E_k avec $i \neq j$

$t(ijk) = 0$ si e_i ou e_j ne figure pas dans E_k

$$- P_{(i/\bar{j})} = \frac{\sum_{k=1}^r S(ijk) \prod_k}{I - P(j)} \quad \forall (ij) \quad (3)$$

avec $S(ijk) = 1$ si e_i et \bar{e}_j figurent dans E_k avec $i \neq j$

$S(ijk) = 0$ si e_i ou \bar{e}_j ne figure pas dans E_k

$$(2) \text{ peut s'écrire } P(i/j) \cdot P(j) = \sum_{k=1}^r t(ijk) \prod_k$$

$$(3) \text{ peut s'écrire } P(i/\bar{j}) \cdot P(\bar{j}) = \sum_{k=1}^r S(ijk) \prod_k$$

Les conditions à respecter sont :

a) $0 \leq P(\quad) \leq 1$

b) $P(i/j) \cdot P(j) = P(j/i) \cdot P(i) = P(i \cdot j)$

c) $P(i/j) \cdot P(j) + P(i/\bar{j}) \cdot P(\bar{j}) = P(i)$

Les trois conditions sont vérifiées par construction. Montrons néanmoins la troisième :

$$P(i/j) \cdot P(j) = \sum_{k=1}^r t(ijk) \prod_k$$

$$P(i/\bar{j}) \cdot P(\bar{j}) = \sum_{k=1}^r S(ijk) \prod_k$$

$$\text{et } P(i) = \sum_k \theta(ik) \prod_k$$

avec $\theta(ik) = 1$ si e_i figure dans E_k

$t(ijk) = 1$ si e_i et e_j figurent dans E_k

$S(ijk) = 1$ si e_i et \bar{e}_j figurent dans E_k

par conséquent :

$$\theta (ik) = t (ijk) + S (ijk)$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } P (i/j) \cdot P (j) + P (i/\bar{j}) P (\bar{j}) &= \sum_k^r (t (ijk) + S (ijk)) \pi_k = \\
 &= \sum_k^r \theta (ik) \pi_k
 \end{aligned}$$

| | |
|---|-----------------|
| $P (i/j) \cdot P (j) + P (i/\bar{j}) \cdot P (\bar{j}) = P (i)$ | $\forall (i,j)$ |
|---|-----------------|

.../

333 - F O N C T I O N O B J E C T I F

Les contraintes a, b, c, sont vérifiées par les probabilités théoriques mais pas par les probabilités estimées, par conséquent la fonction objectif que nous nous proposons d'optimiser consiste à minimiser la différence entre les produits $P(i/j)P(j)$ résultant des estimations et les produits théoriques $P(i/j)^* \cdot P(j)^*$ qui s'expriment en fonction des π_k . Ce qui revient à chercher les probabilités $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \dots, \pi_r)$ des r états possibles qui rendent minimum, par exemple :

$$\text{Min} \left\{ \sum_{ij}^N [P(i/j) \cdot P(j) - \sum_{k=1}^r t(ijk) \cdot \pi_k]^2 + \sum_{ij}^N [P(i/\bar{j}) \cdot P(\bar{j}) - \sum_{k=1}^r s(ijk) \pi_k]^2 \right\} \text{ pour } i \neq j$$

sous les contraintes :

$$\sum_{k=1}^r \pi_k = 1$$

$$\pi_k \geq 0 \quad \forall k$$

C'est un programme classique de minimisation d'une forme quadratique sous contraintes linéaires. Les contraintes étant linéaires et compatibles, une condition de qualification est vérifiée, par conséquent, les conditions de Kuhn et Tucker sont nécessaires à l'optimum.

Soit $(\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_k^*, \dots, \pi_r^*)$ un

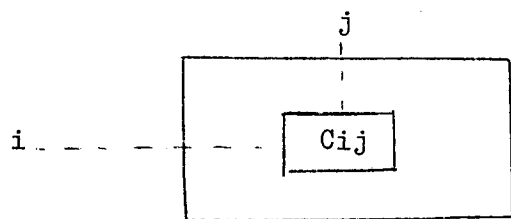
vecteur solution.

Les équations (I), (2), (3) (cf 332) permettent de calculer des probabilités a posteriori $P^*(i)$, $P^*(i/j)$, $P^*(i/\bar{j})$, non seulement cohérentes avec les estimations des experts mais aussi satisfaisant aux contraintes sur les probabilités.

Remarquons que nous obtenons aussi un classement cardinal des états possibles, ce qui permet de déterminer les futuribles les plus probable

La suite de la méthode consiste en une analyse de sensibilité du système. Il s'agit en particulier d'estimer la variation

$\Delta P(j)$ de $P(j)$ à la suite d'une variation $\Delta P(i)$ de $P(i)$



$$\alpha(ij) = \frac{P(i) \cdot \Delta P(i)}{P(j) \cdot \Delta P(j)}$$

On construit la matrice de sensibilité de laquelle on peut déduire des événements moteurs ou dominants et des événements dominés.

341 - PROGRAMME GENERAL

Rappelons que le programme général à résoudre s'écrit :

$$\text{Min } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{ij}^N [R(i/j) R(j) - \sum_{k=1}^r t_{(ijk)} \pi_k]^2 \\ + \sum_{ij}^N [R(i/j) \bar{R}(j) - \sum_{k=1}^r s_{(ijk)} \pi_k]^2 \end{array} \right\}$$

sous les contraintes

multiplicateurs

$$\sum_{k=1}^{k=r} \pi_k = 1 \quad (\lambda)$$

$$\pi_k \geq 0 \quad (U_k)$$

342 - PROGRAMME SANS CONTRAINTES DE SIGNES

- Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker revient à annuler la dérivée par rapport à chaque variable π_k , ($k = 1, 2, \dots, r$) et par rapport au multiplicateur λ ce qui fait $(r + 1)$ équations
- en remplaçant dans les r premières équations le multiplicateur λ par sa valeur tirée de la $(r + 1)^{\text{ème}}$ le système d'équations peut être mis sous forme matricielle :

$$\boxed{M \cdot \pi = D}$$

$$r, r \times r, 1 \quad r, 1$$

le format de M est égal à r puisque la variable λ est éliminée par substitution

Le programme avec contraintes de signes s'écrirait :

$$M \tilde{\pi} = D - U$$

$$\text{avec } U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_k \\ \vdots \\ U_r \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \pi_k \cdot U_k = 0 \text{ pour tout } k$$

.../

- avec π le vecteur des probabilités inconnues π_k

$$\pi = \begin{array}{|l} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_{r-1} \\ -\pi_r \end{array}$$

- le vecteur π comprend $-\pi_r$, cet artifice de présentation permet de rendre la matrice "M" symétrique comme nous allons le voir.
- D vecteur des données : expression tirée des probabilités estimées a priori
- M la matrice dite de structure parce qu'elle ne dépend que de la dimension du système étudié, c'est-à-dire du nombre d'évènements N.

La dérivée de la fonction par rapport à chaque π_k s'écrit :

$$2 \sum_{ij}^N \left[\left(\sum_{k=1}^r t(ijk) \pi_k - P(i/j) P(j) \right) + \left(\sum_{k=1}^r S(ijk) \pi_k - P(i/j) P(j) \right) \right]$$

on constate que les coefficients des π_k ne dépendent que des $t(ijk)$ et des $S(ijk)$. Par conséquent, quelle que soit la nature des évènements isolés étudiés, la Matrice "M" (matrice des coefficients des π_k) possède une structure qui ne dépend que du nombre d'évènements isolés traités. "M" sera qualifiée de matrice de structure. Cette matrice est purement combinatoire.

343 - PROGRAMME AVEC CONTRAINTES DE SIGNES.

Le programme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f \\ \sum \pi_k = 1 \\ \pi_k \geq 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (\lambda) \\ (\mu_k) \end{array} \right\} \text{ multiplicateurs} \quad \forall k$$

considérer la probabilité π_k de l'état E_k comme étant nulle alors que toutes les autres probabilités d'état sont positives, revient à transformer la colonne " k " de la matrice " M " les autres colonnes restant inchangées et à remplacer π_k par le multiplicateur U_k

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} k \\ \boxed{\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & \\ \hline 0 & \end{array}} & \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ U_k \\ \pi_r \end{array}} & = & \begin{array}{c} \boxed{D} \\ r, 1 \end{array} \\ k \text{ ---} & \begin{array}{c} r, r \\ r, 1 \end{array} & & \begin{array}{c} r, 1 \end{array} \\ M & & & \end{array}$$

Considérer une ou plusieurs probabilités d'état comme nulles ne change pas la nature du problème et implique seulement de modifier une ou plusieurs colonnes de la matrice " M ", en les remplaçant par des colonnes canoniques.

344 - ANALYSE DE LA MATRICE DE STRUCTURE "M" POUR "N" QUELCONQUE

3441) Dans l'expression de la dérivée par rapport à chaque π_k , on retrouve le multiplicateur λ ; on élimine λ en transposant, dans les $(r - 1)$ premières équations la valeur de λ en fonction de π_r tirée de la $r^{\text{ième}}$ équation; la variable $-\pi_r$ apparaît par conséquent dans chacune des $(r - 1)$ premières équations affectée du coefficient " 1 "

$\forall N$ les $(r - 1)$ premiers termes de la $r^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M sont égaux à 1

3442) La dernière ligne de la matrice M correspond à la contrainte $\sum \pi_k = 1$.

Chaque π_k est affecté du coefficient 1 ; les $(r - 1)$ premiers termes de la dernière ligne sont égaux à 1, le r -ième terme est égal à -1 puisque le vecteur π comprend $-\pi_r$; cet artifice permet de rendre la dernière ligne symétrique de la première colonne.

Remarquons que D_r le dernier terme du vecteur D est égal à 1 puisqu'il correspond à la contrainte ci-dessus.

Finalement :

$\forall N$ les $(r - 1)$ premiers termes de la r -ième ligne de la matrice M sont égaux à 1

$\forall N$ le r -ième terme de la dernière ligne et de la colonne de la matrice M est égal à -1

La matrice M se présente comme suit :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|c}
 \hline
 & & & 1 \\
 & & & 1 \\
 & & & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & -1 \\
 \hline
 \end{array} & = & \begin{array}{|c}
 \hline
 \\
 \\
 \\
 \hline
 -\pi_r \\
 \hline
 \end{array} \\
 M & & \pi \\
 \end{array}$$

La dernière ligne et la dernière colonne de la matrice M étant identique $\forall r$, il nous reste à déterminer les $(r - 1)$ premières lignes et colonnes, c'est-à-dire la sous-matrice

$$M^\circ = \left(M_{h k}^\circ \right)$$

.../

Le terme M^0_{hk} de la matrice M^0 est le coefficient de \prod_h dans la dérivée de la fonction par rapport à \prod_k

La dérivée de U^2 est égale à $2 U U'$, par conséquent, la dérivée de la fonction par rapport à \prod_k est :

$$2 \left\{ \sum_{ij}^N \left(\sum_{k=1}^r t(ijk) \prod_k - P(i/j) P(j) + \sum_{k=1}^r S(ijk) \prod_k^{-P(i/j) P(j)} \right) \right.$$

avec $t(ijk) = 1$ si e_i et e_j figurent dans E_k

$t(ijk) = 0$ si e_i ou e_j figure dans E_k avec $i \neq j$

$S(ijk) = 1$ si e_i et e_j figurent dans E_k

$S(ijk) = 0$ si e_i ou e_j figure dans E_k

Cette dérivée est une expression linéaire des \prod_k

Par suite, le coefficient de \prod_h dans la dérivée de la fonction par rapport à \prod_k est égal au nombre de fois où l'on rencontre l'expression : $(\dots + \prod_h + \prod_k + \dots)$ c'est-à-dire au nombre de fois où $t(ijh) = t(ijk) = 1$ et $S(ijh) = S(ijk) = 1$

d'où :

$$M^0_{hk} = \sum_{ij}^N (t(ijh) \cdot t(ijk) + S(ijh) \cdot S(ijk)) \quad V(h,k)$$

Rappelons qu'un état du système est une spécification des événements isolés :

$$E_k = (e_1, e_2, e_i, \dots, e_N)$$

avec $e_i = 1$ si e_i figure dans E_k

$e_i = 0$ si e_i ne figure pas dans E_k

$$t(ijh) \cdot t(ijk) = 1 \iff e_i \text{ et } e_j \text{ figurent dans } E_h \text{ et } E_k$$

remarquons que :

$$t(ijh) \cdot t(ijk) = 1 \iff t(jih) \cdot t(jik) = 1$$

$$\sum_{i,j}^N t(ijh) \cdot t(ijk) = \text{nombre de couples non ordonnés d'événements qui figurent à la fois dans } E_h \text{ et dans } E_k.$$

S'il y a z évènements qui figurent à la fois dans E_h et E_k ,
on a par conséquent :

$$\sum_{ij}^z t(ijh) \cdot t(ijk) = A_z^2$$

A_z^2 : arrangement de deux
éléments parmi z .

$$S(ijh) \cdot S(ijk) = 1 \iff e_i \text{ et } e_j \text{ figurent dans } E_h \text{ et } E_k$$

remarquons que :

$$S(ijh) \cdot S(ijk) = 1 \iff S(jih) \cdot S(jik) = 1$$

$\sum_{ij} S(ijh) \cdot S(ijk)$ = nombre de couples d'évènements où le
premier figure dans E_h et E_k et où le
second ne figure ni dans E_h ni dans E_k .

S'il y a z évènements qui figurent à la fois dans E_h et E_k et
 U évènements qui ne figurent ni dans E_h ni dans E_k , nous avons alors

$$\sum_{ij}^z S(ijh) \cdot S(ijk) = z U$$

Finalement :

$$M_{hk}^0 = A_z^2 + z U$$

avec z le nombre d'évènements qui figurent à la fois dans
 E_h et dans E_k

et U le nombre d'évènements qui ne figurent ni dans E_h et ni
dans E_k

z et U concernent le couple d'indices (h, k)

345 - RECHERCHE DE LA MATRICE "M" : ALGORITHME ALPHA

Nous avons :

$$M = \begin{array}{ccccc|c} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

avec

$$M_{hk}^{\circ} = \begin{array}{c} A^2 \\ z \end{array} + z U$$

pour N évènements isolés, il y a $r = 2^N$ états

Nous nous intéressons à la Matrice B de format $[(r-1), N]$ constituée par la spécification de (r-1) états

| | e1 | e2 | | e _k | | e _N |
|------------------|----|----|-------|----------------|-------|----------------|
| E ₁ | 1 | 1 | | 1 | | 1 |
| E ₂ | 0 | 1 | | 1 | | 1 |
| E ₃ | 1 | 0 | | 1 | | 1 |
| ⋮ | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| E _k | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| E _{r-1} | 0 | 0 | | 0 | | 1 |

B de format (r-1, N)

| | | | | | | |
|----------------|---|---|-------|---|-------|---|
| E _r | 0 | 0 | | 0 | | 0 |
|----------------|---|---|-------|---|-------|---|

ne figure pas dans la matrice B

Soit $[B']$ la transposée de $[B]$

$N, r-1$

considérons le produit $[B] \cdot [B']$ de format $(r-1; r-1)$

3451) dans l'algèbre ordinaire

$B B'_{h k}$ = nombre de 1 en commun entre les états h et k (cf. XIV)

c'est donc le nombre z cherché, c'est-à-dire, le nombre d'évènements qui figurent à la fois dans E_h et E_k , mais cette algèbre est insuffisante puisqu'il nous faut connaître U le nombre de zéros communs à E_h et E_k , c'est-à-dire le nombre d'évènements qui ne figurent ni dans E_h ni dans E_k .

3452) Algèbre ALPHA $[\alpha]$

| |
|------------------|
| $0 \times 0 = a$ |
| $0 \times 1 = 0$ |
| $1 \times 0 = 0$ |
| $1 \times 1 = 1$ |

- L'addition reste la même

Si dans cette algèbre $[\alpha]$ on fait le produit $B B'$, on obtient :

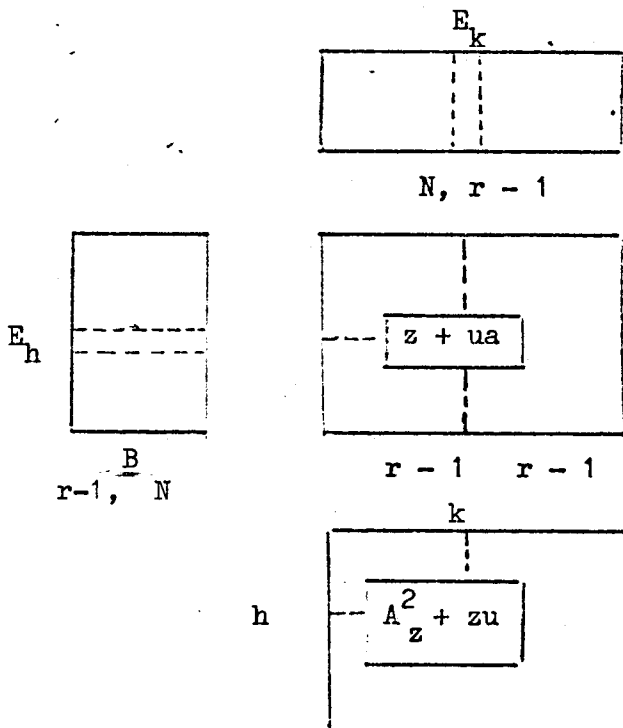
| |
|--------------------------------|
| $[B \cdot B']_{h k} = z + U a$ |
|--------------------------------|

Connaissant z et U, on peut calculer :

| |
|---------------------------|
| $M^0_{h k} = A^2_z + z U$ |
|---------------------------|

3453) Résumé des opérations à effectuer

Matrice des
vecteurs états



transposée de B.

produit de B par sa
transposée

Matrice M^0
avec A le nombre d'arrange-
ment.

346 - APPLICATION DE L'ALGORITHME ALPHA

3461/ Détermination de la matrice de structure pour $N = 3$

- B' -

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

$e_1 \quad e_2 \quad e_3$

| | | | |
|-------|---|---|---|
| E_1 | 1 | 1 | 1 |
| E_2 | 0 | 1 | 1 |
| E_3 | 1 | 0 | 1 |
| E_4 | 1 | 1 | 0 |
| E_5 | 0 | 0 | 1 |
| E_6 | 0 | 1 | 0 |
| E_7 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | $2+a$ | 1 | 1 | $1+a$ | $1+a$ | 0 |
| 2 | 1 | $2+a$ | 1 | $1+a$ | 0 | $1+a$ |
| 2 | 1 | 1 | $2+a$ | 0 | $1+a$ | $1+a$ |
| 1 | $1+a$ | $1+a$ | 0 | $1+2a$ | 0 | 0 |
| 1 | $1+a$ | 0 | $1+a$ | 0 | $1+2a$ | 0 |
| 1 | 0 | $1+a$ | $1+a$ | 0 | 0 | $1+2a$ |

$z + U a$

- B -

- B B' -

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |

$A_z^2 + Z U$

- M° -

avec

M =

| | | | | |
|-----------|---|---|---|----|
| M° | | | | 1 |
| | | | | 1 |
| | | | | 1 |
| | | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |

3462/ Détermination de la matrice de structure pour $N = 4$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 14 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3+a | 2 | 2 | 2 | 2+a | 2+a | 2+a | 1 | 1 | 1 | 1+a | 1+a | 1+a | 0 |
| 3 | 2 | 3+a | 2 | 2 | 2+a | 1 | 1 | 2+a | 2+a | 1 | 1+a | 1+a | 0 | 1+a |
| 3 | 2 | 2 | 3+a | 2 | 1 | 2+a | 1 | 2+a | 1 | 2+a | 1+a | 0 | 1+a | 1+a |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 3+a | 1 | 1 | 2+a | 1 | 2+a | 2+a | 0 | 1+a | 1+a | 1+a |
| 2 | 2+a | 2+a | 1 | 1 | 2+2a | 1+a | 1+a | 1+a | 1+a | 0 | 1+2a | 1+2a | a | a |
| 2 | 2+a | 1 | 2+a | 1 | 1+a | 2+2a | 1+a | 1+a | 0 | 1+a | 1+2a | a | 1+2a | a |
| 2 | 2+a | 1 | 1 | 2+a | 1+a | 1+a | 2+2a | 0 | 1+a | 1+a | a | 1+2a | 1+2a | a |
| 2 | 1 | 2+a | 2+a | 1 | 1+a | 1+a | 0 | 2+2a | 1+a | 1+a | 1+2a | a | a | 1+2a |
| 2 | 1 | 2+a | 1 | 2+a | 1+a | 0 | 1+a | 1+a | 2+2a | 1+a | a | 1+2a | a | 1+2a |
| 2 | 1 | 1 | 2+a | 2+a | 0 | 1+a | 1+a | 1+a | 1+a | 2+2a | a | a | 1+a | 1+2a |
| 1 | 1+a | 1+a | 1+a | 0 | 1+2a | 1+2a | a | 1+2a | a | a | 1+3a | 2a | 2a | 2a |
| 1 | 1+a | 1+a | 0 | 1+a | 1+2a | a | 1+2a | a | 1+2a | a | 2a | 1+3a | 2a | 2a |
| 1 | 1+a | 0 | 1+a | 1+a | a | 1+2a | 1+2a | a | a | 1+2a | 2a | 2a | 1+3a | 2a |
| 1 | 0 | 1+a | 1+a | 1+a | a | a | a | 1+2a | 1+2a | 1+2a | 2a | 2a | 2a | 1+3a |

RESULTAT POUR N = 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 12 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 6 | 9 | 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 6 | 2 | 9 | 2 | 2 | 4 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 6 | 2 | 2 | 9 | 2 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 6 | 2 | 2 | 2 | 9 | 0 | 0 | 4 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 2 | 4 | 4 | 0 | 0 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 7 | 2 | 4 | 0 | 4 | 0 | 1 | 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 8 | 2 | 4 | 0 | 0 | 4 | 1 | 1 | 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 9 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| 10 | 2 | 0 | 4 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 11 | 2 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 |

- M° -

avec M =

| | |
|---------|----|
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| 1 1 1 1 | -1 |

GENERALISATION

Si l'on se réfère à 3462, l'on constate que l'on retrouve la matrice de structure M d'ordre 3 (M_3) en gardant par exemple les éléments communs aux lignes et aux colonnes qui correspondent à l'occurrence (ou à la non-occurrence) d'un évènement isolé donné.

Par exemple, si l'on retient les états où le premier évènement isolé ne se produit pas, c'est-à-dire en conservant les éléments communs aux lignes et colonnes n^{os} 2, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 16 on retrouve M_3 dans M_4 . C'est la deuxième configuration.

On pourrait procéder ainsi pour chaque évènement isolé en considérant son occurrence ou sa non-occurrence dans la matrice M_4 . Il est donc possible de retrouver $2 \cdot 4 = 8$ fois la matrice M_3 .

Finalement, on retrouve dans M_N $2 N$ fois M_{N-1}

347 - CAS GENERAL DE RESOLUTION - NOMBRE D'EVENEMENTS ISOLEES ≥ 4

Les matrices de structure obtenues par l'algorithme pour les ordres 4. 5. 6. ... sont singulières. Par conséquent, les matrices n'étant plus inversibles, la résolution du système $M\pi = D$ est plus complexe.

Soit X_1, X_2, \dots, X_k les vecteurs singuliers de la matrice M , c'est-à-dire les vecteurs tels que $M X = 0$. C'est le noyau de l'application linéaire correspondante

Soit π_0 , une solution particulière du système $M\pi = D$, la solution générale cherchée s'écrit :

$$\pi = \pi_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i$$

les λ_i étant des scalaires quelconques.

3471) DETERMINATION D'UNE SOLUTION PARTICULIERE

Une solution particulière du système $M \Pi = D$ est donnée par :

$$\Pi_0 = M^+ D$$

ou M^+ est la pseudo-inverse de M .

3471.1 - Position du problème

Dans ce paragraphe, nous ferons essentiellement référence aux deux auteurs KORGANOFF et PAVEL PARVU Cf XIX

"l'inversion des matrices est essentiellement liée à la résolution des systèmes linéaires. Dans ce domaine, les systèmes peuvent être singuliers ou mal conditionnés. Ils peuvent être à plus d'équations que d'inconnues, ou au contraire à moins d'équations que d'inconnues. Il semble même que ces deux derniers cas doivent être la loi dans un monde des phénomènes où il est rare d'obtenir l'information en quantité appropriée. Souvent trop ou trop peu".

Cf XIX p. 165

En pratique, on a rarement affaire à des matrices carrées régulières. Le plus souvent, les matrices sont de rang non maximum et singulières si elles sont carrées et les systèmes correspondants sont à la fois surdéterminés et indéterminés. La résolution - exacte ou approchée de ces systèmes demande alors que l'on impose des conditions supplémentaires telles qu'en donnent précisément les approximations et le lissage.

Nous verrons en particulier que la pseudo-inverse A^+ de A correspond à la minimisation de la forme quadratique $(AX - B)^2$ et que l'unicité de la pseudo-inverse telle qu'elle est définie, fait la richesse de cette solution particulière.

3471.2 - Définitions et propriétés

On appelle pseudo-inverse d'une matrice réelle rectangle A (m, n) de m lignes et n colonnes une matrice $A^+(n,m)$ telle que :

- 1/ $A \cdot A^+ \cdot A = A$
- 2/ $A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$
- 3/ $A \cdot A^+ = {}^t (A \cdot A^+)$
- 4/ $A^+ \cdot A = {}^t (A^+ \cdot A)$, $t =$ transposition

On démontre que si $A (m, n)$ est de rang maximum m ou respectivement n il y a identité entre l'inverse droite respectivement inverse gauche de A et la pseudo-inverse A^+ , en particulier si A est une matrice carrée inversible, sa matrice inverse A^{-1} au sens usuel est identique à la pseudo-inverse A^+ -

- Unicité de la pseudo-inverse A^+ dans le cas où A est de rang non maximum

Supposons qu'il existe deux pseudo-inverses A_1^+ et A_2^+ vérifiant séparément les quatre propriétés 1, 2, 3 et 4.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 A_1^+ &= A_1^+ A A_1^+ \\
 &= A_1^+ {}^t (A A_1^+) \\
 &= A_1^+ {}^t A_1^+ ({}^t A) \\
 &= A_1^+ {}^t A_1^+ {}^t A ({}^t A_2^+ {}^t A) \\
 &= A_1^+ ({}^t A_1^+ {}^t A) A A_2^+ \\
 &= (A_1^+ A A_1^+) A A_2^+ \\
 &= A_1^+ A (A_2^+) \\
 &= A_1^+ A (A_2^+ A) A_2^+ \\
 &= (A_1^+ A) {}^t A {}^t A_2^+ A_2^+ \\
 &= ({}^t A {}^t A_1^+ {}^t A) {}^t A_2^+ A_2^+ \\
 &= ({}^t A {}^t A_2^+) A_2^+ \\
 &= A_2^+ A A_2^+ \\
 &= A_2^+
 \end{aligned}$$

$$A_1^+ = A_2^+$$

Une solution particulière de $AX = B$ est donné par $X = A^+ B$.

Les deux problèmes suivants sont équivalents

$\exists X$ tel que $AX = B$ Le Min de $\|AX - B\|^2$ est nul

$(AX - B)^2$ étant une forme quadratique positive ou nulle n'a pas de maximum - L'extremum est un minimum.

Lorsque ce minimum est atteint, la dérivée est nulle :

$${}^t A (AX - B) = 0$$

$${}^t A A X = {}^t A B$$

La solution est $X = A^+ B$

En effet :

$${}^t A A A^+ B = {}^t A \quad {}^t (A A^+) B = {}^t A \quad {}^t A^+ {}^t A B = {}^t A B$$

Finalement la question posée est de savoir si $AX = B$ a une solution

- si $AX = B$ a une solution alors $X = A^+ B$ est celle qui minimise $\|AX - B\|^2$

- si $AX = B$ n'a pas de solution $X^* = A^+ B$ est la solution approchée au sens suivant

$$\|AX^* - B\|^2 < \|AX - B\|^2 \quad \forall X \quad \dots/$$

3471.2 - Calcul de la pseudo-inverse A^+

Soit une matrice $A_{m \ n}$ de rang r

Nous supposons que la matrice carrée formée des éléments communs aux r premières lignes et aux r premières colonnes est non singulière

On décompose A en sous-matrices de la façon suivante :

$$A_{\substack{m, n \\ A.}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ r \ r & r, n - r \\ A_{21} & A_{22} \\ m-r, r & m - r, n - r \end{bmatrix}$$

Les $(n - r)$ dernières colonnes sont combinaisons linéaires des r premières

On a donc

$$\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix}$$

soit en respectant les formats et en décomposant par blocs :

$$\begin{aligned} A_{12} &= A_{11} X & \Rightarrow & X = A_{11}^{-1} A_{12}. \\ A_{22} &= A_{21} X & & \text{puisque } A_{11} \text{ régulière} \end{aligned}$$

en remplaçant X par sa valeur

On obtient
$$A_{22} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

par suite la matrice A peut être mise sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$$

en posant $B = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$

on écrit $A = B A_{11}^{-1} C$

On retrouve le théorème classique selon lequel toute (m,n) matrice de rang égal à r se décompose en produit de deux matrices de rang maximum r égal à la dimension commune de ces deux matrices, en prenant indifféremment comme matrices :

$$A = \begin{pmatrix} B & A_{11}^{-1} \end{pmatrix} C \quad \text{ou} \quad A = B \cdot \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & C \end{pmatrix}$$

La matrice B ayant ses colonnes indépendantes, elle admet une inverse gauche B_g^{-1} telle que :

$$\begin{matrix} B_g^{-1} & \cdot & B & = & I \\ r,n & & n,r & & r,r \end{matrix}$$

La matrice ${}^t B \cdot B$ est régulière et admet une inverse, on peut prendre comme inverse gauche de B :

$$B_g^{-1} = ({}^t B B)^{-1} {}^t B$$

La matrice C ayant ses lignes indépendantes admet une inverse droite C_d^{-1} telle que $C \cdot C_d^{-1} = I$

$$\text{et} \quad C_d^{-1} = {}^t C (C {}^t C)^{-1}$$

La pseudo-inverse A^+ de A s'écrit

| |
|---|
| $A^+ = C_d^{-1} A_{11} B_g^{-1}$ |
| $\begin{matrix} n,m & n,r & r,r & r,m \end{matrix}$ |

Vérifions qu'il s'agit bien de la pseudo-inverse :

$$1) \quad A A^+ A = A$$

$$B A_{11}^{-1} \underbrace{C C_d^{-1}}_I A_{11} \underbrace{B_g^{-1} B}_I A_{11}^{-1} C = B A_{11}^{-1} C$$

$$2) \quad A^+ A A^t = A^t$$

$$C_d^{-1} A_{11} \underbrace{B_g^{-1} B A_{11}^{-1} C}_I \underbrace{C_d^{-1} A_{11}}_I B_g^{-1} = C_d^{-1} A_{11} B_g^{-1}$$

$$3) \quad A A^+ = {}^t (A A^+)$$

$$B \underbrace{A_{11}^{-1} C C^{-1} A_{11}}_I B^{-1} = B B^{-1} g$$

$$\text{or } B^{-1} g = ({}^t B B)^{-1} {}^t B$$

$$\text{et l'on a bien } B B^{-1} g = (B B^{-1} g)$$

puisque $({}^t B B)^{-1}$ est symétrique

On vérifie aussi de la même manière que

$$A^+ A = {}^t (A^+ A)$$

La matrice A^+ est bien la pseudo-inverse de A , elle vérifie les quatre propriétés de définitions, par conséquent, comme nous l'avons montré, elle est unique.

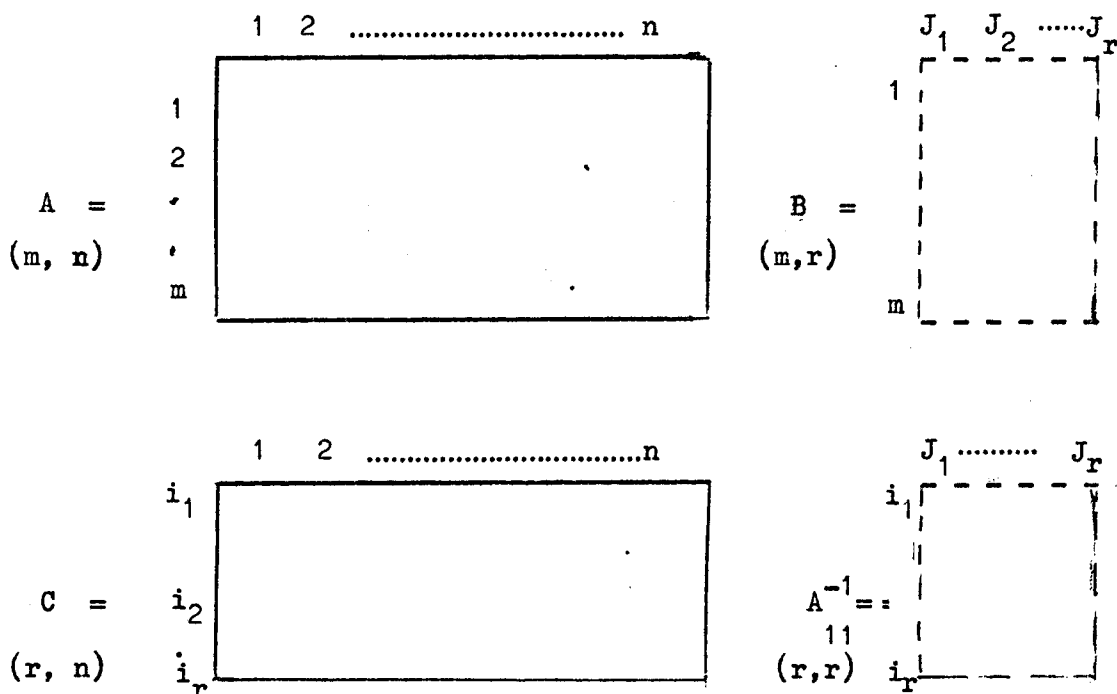
.../

M. KORGANOFF et PAVEL PARVU montrent dans leur ouvrage l'invariance de la valeur de A^+ relativement à la décomposition de A en sous blocs, c'est-à-dire relativement au choix des lignes et des colonnes indépendantes.

En pratique, on désignera par :

- B la matrice obtenue en sélectionnant seulement r colonnes m, r linéairement indépendantes $J_1 \dots\dots\dots J_r$ de A (m, n) sans en modifier les lignes
- C la matrice obtenue en sélectionnant r, n seulement r lignes linéairement indépendantes $i_1 \dots\dots\dots i_r$ de A (m, n) sans en modifier les colonnes
- A_{11} la matrice composée des éléments communs à B et C dans l'ordre des lignes de C et des colonnes de B

Le schéma ci-après résume la procédure.



- application aux matrices de structure M .

Les matrices de structures étant symétriques, les p lignes indépendantes sont identiques aux p colonnes indépendantes à une transposition près :

$$C = {}^t B$$

et M s'écrit :

$$M = B \begin{matrix} & & -1 \\ & & M_{11} \end{matrix} {}^t B$$

Les calculs à réaliser pour calculer M^+ sont relativement simplifiés puisque d'une part l'inverse gauche de B est égale à la transposée de l'inverse droite de la transposée de B .

D'autre part, le fait que dans la matrice de structure d'ordre N on retrouve la matrice de structure d'ordre $N - 1$, permet à partir des P colonnes indépendantes de la matrice de structure d'ordre $N - 1$ de connaître P colonnes indépendantes dans la matrice de structure d'ordre N . Il ne reste plus qu'à compléter la base.

Finalement si $M = B \begin{matrix} & & -1 \\ & & M_{11} \end{matrix} {}^t B$

on a

$$M^+ = B ({}^t B B)^{-1} M_{11} ({}^t B.B)^{-1} {}^t B$$

ORDRE 4 - PSEUDO - INVERSE

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 1 | 0,77 | -0,23 | -0,23 | -0,23 | -0,23 | -0,28 | -0,28 | -0,28 | -0,28 | -0,28 | -0,28 | -0,62 | 0,62 | 0,62 | 0,62 | -0,6 |
| 2 | -0,23 | +0,18 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | -0,24 | -0,24 | -0,24 | -0,12 | -0,2 |
| 3 | -0,23 | 0,05 | 0,18 | 0,05 | 0,05 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | -0,24 | -0,24 | -0,12 | -0,24 | -0,2 |
| 4 | -0,23 | 0,05 | 0,05 | 0,18 | 0,05 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | -0,24 | -0,12 | -0,24 | -0,24 | -0,2 |
| 5 | -0,23 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,18 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | -0,12 | -0,24 | -0,24 | -0,24 | -0,2 |
| 6 | -0,28 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,22 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,16 | -0,2 | -0,2 | -0,26 | -0,26 | -0,2 |
| 7 | -0,28 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,06 | 0,22 | 0,06 | 0,06 | 0,16 | 0,06 | -0,2 | -0,26 | -0,2 | -0,26 | -0,2 |
| 8 | -0,28 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,06 | 0,06 | 0,22 | 0,16 | 0,06 | 0,06 | -0,26 | -0,2 | -0,2 | -0,26 | -0,2 |
| 9 | -0,28 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,06 | 0,06 | 0,16 | 0,22 | 0,06 | 0,06 | -0,2 | -0,26 | -0,26 | -0,2 | -0,2 |
| 10 | -0,28 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,06 | 0,16 | 0,06 | 0,06 | 0,22 | 0,06 | -0,26 | -0,2 | -0,26 | -0,2 | -0,2 |
| 11 | -0,28 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,16 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,22 | -0,26 | -0,26 | -0,2 | -0,2 | -0,2 |
| 12 | 0,62 | -0,24 | -0,24 | -0,24 | -0,12 | -0,2 | -0,2 | -0,26 | -0,2 | -0,26 | -0,26 | 0,73 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,6 |
| 13 | 0,62 | -0,24 | -0,24 | -0,12 | -0,24 | -0,2 | -0,26 | -0,2 | -0,26 | -0,2 | -0,26 | 0,5 | 0,73 | 0,5 | 0,5 | 0,6 |
| 14 | 0,62 | -0,24 | -0,12 | -0,24 | -0,24 | -0,26 | -0,2 | -0,2 | -0,26 | -0,26 | -0,2 | 0,5 | 0,5 | 0,73 | 0,5 | 0,6 |
| 15 | 0,62 | -0,12 | -0,24 | -0,24 | -0,24 | -0,26 | -0,26 | -0,26 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,73 | 0,6 |
| 16 | 0,6 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | -0,2 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0 |

La pseudo-inverse est symétrique et possède la même structure que la matrice M.

PSEUDO-INVERSE M :

LIGNE = 1

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.258578D 00 | 2 | 0.659180D-02 | 3 | 0.659180D-02 | 4 | 0.659180D-02 |
| 5 | 0.659180D-02 | 6 | 0.659180D-02 | 7 | -0.845642D-01 | 8 | -0.845642D-01 |
| 9 | -0.845642D-01 | 10 | -0.845642D-01 | 11 | -0.845642D-01 | 12 | -0.845642D-01 |
| 13 | -0.845642D-01 | 14 | -0.845642D-01 | 15 | -0.845642D-01 | 16 | -0.845642D-01 |
| 17 | -0.148926D-01 | 18 | -0.148926D-01 | 19 | -0.148926D-01 | 20 | -0.148926D-01 |
| 21 | -0.148926D-01 | 22 | -0.148926D-01 | 23 | -0.148926D-01 | 24 | -0.148926D-01 |
| 25 | -0.148926D-01 | 26 | -0.148926D-01 | 27 | 0.215607D 00 | 28 | 0.215607D 00 |
| 29 | 0.215607D 00 | 30 | 0.215607D 00 | 31 | 0.215607D 00 | 32 | 0.375000D 00 |

Pour l'élaboration du programme
de la pseudo-inverse CF XXII

LIGNE = 2

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.659180D-02 | 2 | 0.404147D-01 | 3 | -0.766226D-02 | 4 | -0.766226D-02 |
| 5 | -0.766226D-02 | 6 | -0.766226D-02 | 7 | 0.801908D-02 | 8 | 0.801908D-02 |
| 9 | 0.801908D-02 | 10 | 0.801908D-02 | 11 | -0.640400D-02 | 12 | -0.640400D-02 |
| 13 | -0.640400D-02 | 14 | -0.640400D-02 | 15 | -0.640400D-02 | 16 | -0.640400D-02 |
| 17 | -0.886418D-02 | 18 | -0.886418D-02 | 19 | -0.886418D-02 | 20 | -0.886418D-02 |
| 21 | -0.886418D-02 | 22 | -0.886418D-02 | 23 | 0.103666D-01 | 24 | 0.103666D-01 |
| 25 | 0.103666D-01 | 26 | 0.103666D-01 | 27 | -0.102351D-01 | 28 | -0.102351D-01 |
| 29 | -0.102351D-01 | 30 | -0.102351D-01 | 31 | 0.426495D-01 | 32 | 0.122003D-13 |

LIGNE = 3

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.659180D-02 | 2 | -0.766226D-02 | 3 | 0.404147D-01 | 4 | -0.766226D-02 |
| 5 | -0.766226D-02 | 6 | -0.766226D-02 | 7 | 0.801908D-02 | 8 | -0.640400D-02 |
| 9 | -0.640400D-02 | 10 | -0.640400D-02 | 11 | 0.801908D-02 | 12 | 0.801908D-02 |
| 13 | 0.801908D-02 | 14 | -0.640400D-02 | 15 | -0.640400D-02 | 16 | -0.640400D-02 |
| 17 | -0.886418D-02 | 18 | -0.886418D-02 | 19 | -0.886418D-02 | 20 | 0.103666D-01 |
| 21 | 0.103666D-01 | 22 | 0.103666D-01 | 23 | -0.886418D-02 | 24 | -0.886418D-02 |
| 25 | -0.886418D-02 | 26 | 0.103666D-01 | 27 | -0.102351D-01 | 28 | -0.102351D-01 |
| 29 | -0.102351D-01 | 30 | 0.426495D-01 | 31 | -0.102351D-01 | 32 | -0.628490D-14 |

LIGNE = 4

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.659180D-02 | 2 | -0.766226D-02 | 3 | -0.766226D-02 | 4 | 0.404147D-01 |
| 5 | -0.766226D-02 | 6 | -0.766226D-02 | 7 | -0.640400D-02 | 8 | 0.801908D-02 |
| 9 | -0.640400D-02 | 10 | -0.640400D-02 | 11 | 0.801908D-02 | 12 | -0.640400D-02 |
| 13 | -0.640400D-02 | 14 | 0.801908D-02 | 15 | 0.801908D-02 | 16 | -0.640400D-02 |
| 17 | -0.886418D-02 | 18 | 0.103666D-01 | 19 | 0.103666D-01 | 20 | -0.886418D-02 |
| 21 | -0.886418D-02 | 22 | 0.103666D-01 | 23 | -0.886418D-02 | 24 | -0.886418D-02 |
| 25 | 0.103666D-01 | 26 | -0.886418D-02 | 27 | -0.102351D-01 | 28 | -0.102351D-01 |
| 29 | 0.426495D-01 | 30 | -0.102351D-01 | 31 | -0.102351D-01 | 32 | 0.237310D-14 |

ITCNE = 5

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.659180D-02 | 2 | -0.766226D-02 | 3 | -0.766226D-02 | 4 | -0.766226D-02 |
| 5 | 0.640417D-01 | 6 | -0.766226D-02 | 7 | -0.640400D-02 | 8 | -0.640400D-02 |
| 9 | 0.801908D-02 | 10 | -0.640400D-02 | 11 | -0.640400D-02 | 12 | 0.801908D-02 |
| 13 | -0.660400D-02 | 14 | 0.801908D-02 | 15 | -0.640400D-02 | 16 | 0.801908D-02 |
| 17 | 0.103666D-01 | 18 | -0.886418D-02 | 19 | 0.103666D-01 | 20 | -0.886418D-02 |
| 21 | 0.103666D-01 | 22 | -0.886418D-02 | 23 | -0.886418D-02 | 24 | 0.103666D-01 |
| 25 | -0.886418D-02 | 26 | -0.886418D-02 | 27 | -0.102351D-01 | 28 | 0.426495D-01 |
| 29 | -0.102351D-01 | 30 | -0.102351D-01 | 31 | -0.102351D-01 | 32 | 0.206779D-14 |

ITCNE = 6

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.659180D-02 | 2 | -0.766226D-02 | 3 | -0.766226D-02 | 4 | -0.766226D-02 |
| 5 | -0.766226D-02 | 6 | 0.404147D-01 | 7 | -0.640400D-02 | 8 | -0.640400D-02 |
| 9 | -0.640400D-02 | 10 | 0.801908D-02 | 11 | -0.640400D-02 | 12 | -0.640400D-02 |
| 13 | 0.801908D-02 | 14 | -0.640400D-02 | 15 | 0.801908D-02 | 16 | 0.801908D-02 |
| 17 | 0.103666D-01 | 18 | 0.103666D-01 | 19 | -0.886418D-02 | 20 | 0.103666D-01 |
| 21 | -0.886418D-02 | 22 | -0.886418D-02 | 23 | 0.103666D-01 | 24 | -0.886418D-02 |
| 25 | -0.886418D-02 | 26 | -0.886418D-02 | 27 | 0.426495D-01 | 28 | -0.102351D-01 |
| 29 | -0.102351D-01 | 30 | -0.102351D-01 | 31 | -0.102351D-01 | 32 | 0.176288D-14 |

ITCNE = 7

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.845642D-01 | 2 | 0.801908D-02 | 3 | 0.801908D-02 | 4 | -0.640400D-02 |
| 5 | -0.640400D-02 | 6 | -0.640400D-02 | 7 | 0.679767D-01 | 8 | 0.198998D-01 |
| 9 | 0.198998D-01 | 10 | 0.198998D-01 | 11 | 0.198998D-01 | 12 | 0.198998D-01 |
| 13 | 0.198998D-01 | 14 | 0.343229D-01 | 15 | 0.343229D-01 | 16 | 0.343229D-01 |
| 17 | 0.135780D-01 | 18 | -0.565279D-02 | 19 | 0.135780D-01 | 20 | -0.565279D-02 |
| 21 | -0.565279D-02 | 22 | -0.565279D-02 | 23 | -0.565279D-02 | 24 | -0.565279D-02 |
| 25 | -0.565279D-02 | 26 | 0.376164D-01 | 27 | -0.782541D-01 | 28 | -0.782541D-01 |
| 29 | -0.782541D-01 | 30 | -0.686387D-01 | 31 | -0.686387D-01 | 32 | -0.125000D 00 |

ITCNE = 8

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.845642D-01 | 2 | 0.801908D-02 | 3 | -0.640400D-02 | 4 | 0.801908D-02 |
| 5 | -0.640400D-02 | 6 | -0.640400D-02 | 7 | 0.198998D-01 | 8 | 0.679767D-01 |
| 9 | 0.198998D-01 | 10 | 0.198998D-01 | 11 | 0.198998D-01 | 12 | 0.343229D-01 |
| 13 | 0.343229D-01 | 14 | 0.198998D-01 | 15 | 0.198998D-01 | 16 | 0.343229D-01 |
| 17 | 0.135780D-01 | 18 | -0.565279D-02 | 19 | -0.565279D-02 | 20 | 0.135780D-01 |
| 21 | 0.135780D-01 | 22 | -0.565279D-02 | 23 | -0.565279D-02 | 24 | -0.565279D-02 |
| 25 | 0.376164D-01 | 26 | -0.565279D-02 | 27 | -0.782541D-01 | 28 | -0.782541D-01 |
| 29 | -0.686387D-01 | 30 | -0.782541D-01 | 31 | -0.686387D-01 | 32 | -0.125000D 00 |

ITCNE = 9

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.845642D-01 | 2 | 0.801908D-02 | 3 | -0.640400D-02 | 4 | -0.640400D-02 |
| 5 | 0.801908D-02 | 6 | -0.640400D-02 | 7 | 0.198998D-01 | 8 | 0.198998D-01 |
| 9 | 0.679767D-01 | 10 | 0.198998D-01 | 11 | 0.343229D-01 | 12 | 0.198998D-01 |
| 13 | 0.343229D-01 | 14 | 0.198998D-01 | 15 | 0.343229D-01 | 16 | 0.198998D-01 |
| 17 | -0.565279D-02 | 18 | 0.135780D-01 | 19 | -0.565279D-02 | 20 | 0.135780D-01 |
| 21 | -0.565279D-02 | 22 | 0.135780D-01 | 23 | -0.565279D-02 | 24 | 0.376164D-01 |
| 25 | -0.565279D-02 | 26 | -0.565279D-02 | 27 | -0.782541D-01 | 28 | -0.686387D-01 |
| 29 | -0.782541D-01 | 30 | -0.782541D-01 | 31 | -0.686387D-01 | 32 | -0.125000D 00 |

ITCNE = 10

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.8456420-01 | 2 | 0.8019080-02 | 3 | -0.6404000-02 | 4 | -0.6404000-02 |
| 5 | -0.6404000-02 | 6 | 0.8019080-02 | 7 | 0.1989980-01 | 8 | 0.1989980-01 |
| 9 | 0.1989980-01 | 10 | 0.6797670-01 | 11 | 0.3432290-01 | 12 | 0.3432290-01 |
| 13 | 0.1989980-01 | 14 | 0.3432290-01 | 15 | 0.1989980-01 | 16 | 0.1989980-01 |
| 17 | -0.5652790-02 | 18 | -0.5652790-02 | 19 | 0.1357800-01 | 20 | -0.5652790-02 |
| 21 | 0.1357800-01 | 22 | 0.1357800-01 | 23 | 0.3761640-01 | 24 | -0.5652790-02 |
| 25 | -0.5652790-02 | 26 | -0.5652790-02 | 27 | -0.6863870-01 | 28 | -0.7825410-01 |
| 29 | -0.7825410-01 | 30 | -0.7825410-01 | 31 | -0.6863870-01 | 32 | -0.1250000 00 |

ITCNE = 11

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.8456420-01 | 2 | -0.6404000-02 | 3 | 0.8019080-02 | 4 | 0.8019080-02 |
| 5 | -0.6404000-02 | 6 | -0.6404000-02 | 7 | 0.1989980-01 | 8 | 0.1989980-01 |
| 9 | 0.3432290-01 | 10 | 0.3432290-01 | 11 | 0.6797670-01 | 12 | 0.1989980-01 |
| 13 | 0.1989980-01 | 14 | 0.1989980-01 | 15 | 0.1989980-01 | 16 | 0.3432290-01 |
| 17 | 0.1357800-01 | 18 | -0.5652790-02 | 19 | -0.5652790-02 | 20 | -0.5652790-02 |
| 21 | -0.5652790-02 | 22 | 0.3761640-01 | 23 | 0.1357800-01 | 24 | 0.1357800-01 |
| 25 | -0.5652790-02 | 26 | -0.5652790-02 | 27 | -0.7825410-01 | 28 | -0.7825410-01 |
| 29 | -0.6863870-01 | 30 | -0.6863870-01 | 31 | -0.7825410-01 | 32 | -0.1250000 00 |

ITCNE = 12

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.8456420-01 | 2 | -0.6404000-02 | 3 | 0.8019080-02 | 4 | -0.6404000-02 |
| 5 | 0.8019080-02 | 6 | -0.6404000-02 | 7 | 0.1989980-01 | 8 | 0.3432290-01 |
| 9 | 0.1989980-01 | 10 | 0.3432290-01 | 11 | 0.1989980-01 | 12 | 0.6797670-01 |
| 13 | 0.1989980-01 | 14 | 0.1989980-01 | 15 | 0.3432290-01 | 16 | 0.1989980-01 |
| 17 | -0.5652790-02 | 18 | 0.1357800-01 | 19 | -0.5652790-02 | 20 | -0.5652790-02 |
| 21 | 0.3761640-01 | 22 | -0.5652790-02 | 23 | 0.1357800-01 | 24 | -0.5652790-02 |
| 25 | 0.1357800-01 | 26 | -0.5652790-02 | 27 | -0.7825410-01 | 28 | -0.6863870-01 |
| 29 | -0.7825410-01 | 30 | -0.6863870-01 | 31 | -0.7825410-01 | 32 | -0.1250000 00 |

ITCNE = 13

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.8456420-01 | 2 | -0.6404000-02 | 3 | 0.8019080-02 | 4 | -0.6404000-02 |
| 5 | -0.6404000-02 | 6 | 0.8019080-02 | 7 | 0.1989980-01 | 8 | 0.3432290-01 |
| 9 | 0.3432290-01 | 10 | 0.1989980-01 | 11 | 0.1989980-01 | 12 | 0.1989980-01 |
| 13 | 0.6797670-01 | 14 | 0.3432290-01 | 15 | 0.1989980-01 | 16 | 0.1989980-01 |
| 17 | -0.5652790-02 | 18 | -0.5652790-02 | 19 | 0.1357800-01 | 20 | 0.3761640-01 |
| 21 | -0.5652790-02 | 22 | -0.5652790-02 | 23 | -0.5652790-02 | 24 | 0.1357800-01 |
| 25 | 0.1357800-01 | 26 | -0.5652790-02 | 27 | -0.6863870-01 | 28 | -0.7825410-01 |
| 29 | -0.7825410-01 | 30 | -0.6863870-01 | 31 | -0.7825410-01 | 32 | -0.1250000 00 |

ITCNE = 14

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.8456420-01 | 2 | -0.6404000-02 | 3 | -0.6404000-02 | 4 | 0.8019080-02 |
| 5 | 0.8019080-02 | 6 | -0.6404000-02 | 7 | 0.3432290-01 | 8 | 0.1989980-01 |
| 9 | 0.1989980-01 | 10 | 0.3432290-01 | 11 | 0.1989980-01 | 12 | 0.1989980-01 |
| 13 | 0.3432290-01 | 14 | 0.6797670-01 | 15 | 0.1989980-01 | 16 | 0.1989980-01 |
| 17 | -0.5652790-02 | 18 | -0.5652790-02 | 19 | 0.3761640-01 | 20 | 0.1357800-01 |
| 21 | -0.5652790-02 | 22 | -0.5652790-02 | 23 | 0.1357800-01 | 24 | -0.5652790-02 |
| 25 | -0.5652790-02 | 26 | 0.1357800-01 | 27 | -0.7825410-01 | 28 | -0.6863870-01 |
| 29 | -0.6863870-01 | 30 | -0.7825410-01 | 31 | -0.7825410-01 | 32 | -0.1250000 00 |

ITGNF = 15

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.845642D-01 | 2 | -0.640400D-02 | 3 | -0.640400D-02 | 4 | 0.801908D-02 |
| 5 | -0.640400D-02 | 6 | 0.801908D-02 | 7 | 0.343229D-01 | 8 | 0.198998D-01 |
| 9 | 0.343229D-01 | 10 | 0.198998D-01 | 11 | 0.198998D-01 | 12 | 0.343229D-01 |
| 13 | 0.198998D-01 | 14 | 0.198998D-01 | 15 | 0.679767D-01 | 16 | 0.198998D-01 |
| 17 | -0.565279D-02 | 18 | 0.376164D-01 | 19 | -0.565279D-02 | 20 | -0.565279D-02 |
| 21 | 0.135780D-01 | 22 | -0.565279D-02 | 23 | -0.565279D-02 | 24 | 0.135780D-01 |
| 25 | -0.565279D-02 | 26 | 0.135780D-01 | 27 | -0.686387D-01 | 28 | -0.782541D-01 |
| 29 | -0.686387D-01 | 30 | -0.782541D-01 | 31 | -0.782541D-01 | 32 | -0.125000D 00 |

ITGNF = 16

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.845642D-01 | 2 | -0.640400D-02 | 3 | -0.640400D-02 | 4 | -0.640400D-02 |
| 5 | 0.801908D-02 | 6 | 0.801908D-02 | 7 | 0.343229D-01 | 8 | 0.343229D-01 |
| 9 | 0.198998D-01 | 10 | 0.198998D-01 | 11 | 0.343229D-01 | 12 | 0.198998D-01 |
| 13 | 0.198998D-01 | 14 | 0.198998D-01 | 15 | 0.198998D-01 | 16 | 0.679767D-01 |
| 17 | 0.376164D-01 | 18 | -0.565279D-02 | 19 | -0.565279D-02 | 20 | -0.565279D-02 |
| 21 | -0.565279D-02 | 22 | 0.135780D-01 | 23 | -0.565279D-02 | 24 | -0.565279D-02 |
| 25 | 0.135780D-01 | 26 | 0.135780D-01 | 27 | -0.686387D-01 | 28 | -0.686387D-01 |
| 29 | -0.782541D-01 | 30 | -0.782541D-01 | 31 | -0.782541D-01 | 32 | -0.125000D 00 |

ITGNF = 17

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.148926D-01 | 2 | -0.886418D-02 | 3 | -0.886418D-02 | 4 | -0.886418D-02 |
| 5 | 0.103666D-01 | 6 | 0.103666D-01 | 7 | 0.135780D-01 | 8 | 0.135780D-01 |
| 9 | -0.565279D-02 | 10 | -0.565279D-02 | 11 | 0.135780D-01 | 12 | -0.565279D-02 |
| 13 | -0.565279D-02 | 14 | -0.565279D-02 | 15 | -0.565279D-02 | 16 | 0.376164D-01 |
| 17 | 0.524339D-01 | 18 | -0.525841D-02 | 19 | -0.525841D-02 | 20 | -0.525841D-02 |
| 21 | -0.525841D-02 | 22 | -0.450721D-03 | 23 | -0.525841D-02 | 24 | -0.525841D-02 |
| 25 | -0.450721D-03 | 26 | -0.450721D-03 | 27 | 0.115497D-01 | 28 | 0.115497D-01 |
| 29 | -0.221041D-01 | 30 | -0.221041D-01 | 31 | -0.221041D-01 | 32 | -0.484855D-15 |

ITGNF = 18

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.148926D-01 | 2 | -0.886418D-02 | 3 | -0.886418D-02 | 4 | 0.103666D-01 |
| 5 | -0.886418D-02 | 6 | 0.103666D-01 | 7 | 0.135780D-01 | 8 | -0.565279D-02 |
| 9 | 0.135780D-01 | 10 | -0.565279D-02 | 11 | -0.565279D-02 | 12 | 0.135780D-01 |
| 13 | -0.565279D-02 | 14 | -0.565279D-02 | 15 | 0.376164D-01 | 16 | -0.565279D-02 |
| 17 | -0.525841D-02 | 18 | 0.524339D-01 | 19 | -0.525841D-02 | 20 | -0.525841D-02 |
| 21 | -0.450721D-03 | 22 | -0.525841D-02 | 23 | -0.525841D-02 | 24 | -0.450721D-03 |
| 25 | -0.525841D-02 | 26 | -0.450721D-03 | 27 | 0.115497D-01 | 28 | -0.221041D-01 |
| 29 | 0.115497D-01 | 30 | -0.221041D-01 | 31 | -0.221041D-01 | 32 | 0.166533D-15 |

ITGNF = 19

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.148926D-01 | 2 | -0.886418D-02 | 3 | -0.886418D-02 | 4 | 0.103666D-01 |
| 5 | 0.103666D-01 | 6 | -0.886418D-02 | 7 | -0.886418D-02 | 8 | -0.565279D-02 |
| 9 | -0.565279D-02 | 10 | 0.135780D-01 | 11 | -0.565279D-02 | 12 | -0.565279D-02 |
| 13 | 0.135780D-01 | 14 | 0.376164D-01 | 15 | -0.565279D-02 | 16 | -0.565279D-02 |
| 17 | -0.525841D-02 | 18 | -0.525841D-02 | 19 | 0.524339D-01 | 20 | -0.450721D-03 |
| 21 | -0.525841D-02 | 22 | -0.450721D-03 | 23 | -0.525841D-02 | 24 | -0.525841D-02 |
| 25 | -0.525841D-02 | 26 | -0.450721D-03 | 27 | -0.221041D-01 | 28 | 0.115497D-01 |
| 29 | 0.115497D-01 | 30 | -0.221041D-01 | 31 | -0.221041D-01 | 32 | 0.117961D-14 |

IIGNF = 20

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.1489260-01 | 2 | -0.8864180-02 | 3 | 0.1036660-01 | 4 | -0.8864180-02 |
| 5 | -0.8864180-02 | 6 | 0.1036660-01 | 7 | -0.5652790-02 | 8 | 0.1357800-01 |
| 9 | 0.1357800-01 | 10 | -0.5652790-02 | 11 | -0.5652790-02 | 12 | -0.5652790-02 |
| 13 | 0.3761640-01 | 14 | 0.1357800-01 | 15 | -0.5652790-02 | 16 | 0.5652790-02 |
| 17 | -0.5258410-02 | 18 | -0.5258410-02 | 19 | -0.4507210-03 | 20 | 0.5243390-01 |
| 21 | -0.5258410-02 | 22 | -0.5258410-02 | 23 | -0.5258410-02 | 24 | -0.4507210-03 |
| 25 | -0.4507210-03 | 26 | -0.5258410-02 | 27 | 0.1154970-01 | 28 | -0.2210410-01 |
| 29 | -0.2210410-01 | 30 | 0.1154970-01 | 31 | -0.2210410-01 | 32 | -0.4676810-14 |

IIGNF = 21

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.1489260-01 | 2 | -0.8864180-02 | 3 | 0.1036660-01 | 4 | -0.8864180-02 |
| 5 | 0.1036660-01 | 6 | -0.8864180-02 | 7 | -0.5652790-02 | 8 | 0.1357800-01 |
| 9 | -0.5652790-02 | 10 | 0.1357800-01 | 11 | -0.5652790-02 | 12 | 0.3761640-01 |
| 13 | -0.5652790-02 | 14 | -0.5652790-02 | 15 | 0.1357800-01 | 16 | -0.5652790-02 |
| 17 | -0.5258410-02 | 18 | -0.4507210-03 | 19 | -0.5258410-02 | 20 | -0.5258410-02 |
| 21 | 0.5243390-01 | 22 | -0.5258410-02 | 23 | -0.4507210-03 | 24 | 0.5258410-02 |
| 25 | -0.4507210-03 | 26 | -0.5258410-02 | 27 | -0.2210410-01 | 28 | 0.1154970-01 |
| 29 | -0.2210410-01 | 30 | 0.1154970-01 | 31 | -0.2210410-01 | 32 | -0.3982930-14 |

IIGNF = 22

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.1489260-01 | 2 | -0.8864180-02 | 3 | 0.1036660-01 | 4 | 0.1036660-01 |
| 5 | -0.8864180-02 | 6 | -0.8864180-02 | 7 | -0.5652790-02 | 8 | -0.5652790-02 |
| 9 | 0.1357800-01 | 10 | 0.1357800-01 | 11 | 0.3761640-01 | 12 | -0.5652790-02 |
| 13 | -0.5652790-02 | 14 | -0.5652790-02 | 15 | -0.5652790-02 | 16 | 0.1357800-01 |
| 17 | -0.4507210-03 | 18 | -0.5258410-02 | 19 | -0.5258410-02 | 20 | -0.5258410-02 |
| 21 | -0.5258410-02 | 22 | 0.5243390-01 | 23 | -0.4507210-03 | 24 | -0.4507210-03 |
| 25 | -0.5258410-02 | 26 | -0.5258410-02 | 27 | -0.2210410-01 | 28 | -0.2210410-01 |
| 29 | 0.1154970-01 | 30 | 0.1154970-01 | 31 | -0.2210410-01 | 32 | -0.4801710-14 |

IIGNF = 23

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.1489260-01 | 2 | 0.1036660-01 | 3 | 0.1036660-01 | 4 | -0.8864180-02 |
| 5 | -0.8864180-02 | 6 | 0.1036660-01 | 7 | -0.5652790-02 | 8 | -0.5652790-02 |
| 9 | -0.5652790-02 | 10 | 0.3761640-01 | 11 | 0.1357800-01 | 12 | 0.1357800-01 |
| 13 | -0.5652790-02 | 14 | 0.1357800-01 | 15 | -0.5652790-02 | 16 | -0.5652790-02 |
| 17 | -0.5258410-02 | 18 | -0.5258410-02 | 19 | -0.4507210-03 | 20 | -0.5258410-02 |
| 21 | -0.4507210-03 | 22 | -0.4507210-03 | 23 | 0.5243390-01 | 24 | -0.5258410-02 |
| 25 | -0.5258410-02 | 26 | -0.5258410-02 | 27 | 0.1154970-01 | 28 | -0.2210410-01 |
| 29 | -0.2210410-01 | 30 | -0.2210410-01 | 31 | 0.1154970-01 | 32 | 0.1140840-13 |

IIGNF = 24

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.1489260-01 | 2 | 0.1036660-01 | 3 | 0.1036660-01 | 4 | -0.8864180-02 |
| 5 | 0.1036660-01 | 6 | -0.8864180-02 | 7 | -0.5652790-02 | 8 | -0.5652790-02 |
| 9 | 0.3761640-01 | 10 | -0.5652790-02 | 11 | 0.1357800-01 | 12 | -0.5652790-02 |
| 13 | 0.1357800-01 | 14 | -0.5652790-02 | 15 | 0.1357800-01 | 16 | -0.5652790-02 |
| 17 | -0.5258410-02 | 18 | -0.4507210-03 | 19 | -0.4507210-03 | 20 | -0.4507210-03 |
| 21 | -0.5258410-02 | 22 | -0.4507210-03 | 23 | -0.5258410-02 | 24 | 0.5243390-01 |
| 25 | -0.5258410-02 | 26 | -0.5258410-02 | 27 | -0.2210410-01 | 28 | 0.1154970-01 |
| 29 | -0.2210410-01 | 30 | -0.2210410-01 | 31 | 0.1154970-01 | 32 | 0.9450770-14 |

ITCNE = 25

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.1489260-01 | 2 | 0.1036660-01 | 3 | -0.8864180-02 | 4 | 0.1036660-01 |
| 5 | -0.8864180-02 | 6 | -0.8864180-02 | 7 | -0.5652790-02 | 8 | 0.3761640-01 |
| 9 | -0.5652790-02 | 10 | -0.5652790-02 | 11 | -0.5652790-02 | 12 | 0.1357800-01 |
| 13 | 0.1357800-01 | 14 | -0.5652790-02 | 15 | -0.5652790-02 | 16 | 0.1357800-01 |
| 17 | -0.4507210-03 | 18 | -0.5258410-02 | 19 | -0.5258410-02 | 20 | -0.4507210-03 |
| 21 | -0.4507210-03 | 22 | -0.5258410-02 | 23 | -0.5258410-02 | 24 | -0.5258410-02 |
| 25 | 0.5258410-02 | 26 | -0.5258410-02 | 27 | -0.2210410-01 | 28 | -0.2210410-01 |
| 29 | 0.1154970-01 | 30 | -0.2210410-01 | 31 | 0.1154970-01 | 32 | 0.1104670-13 |

ITCNE = 26

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | -0.1489260-01 | 2 | 0.1036660-01 | 3 | 0.1036660-01 | 4 | -0.8864180-02 |
| 5 | -0.8864180-02 | 6 | -0.8864180-02 | 7 | 0.3761640-01 | 8 | -0.5652790-02 |
| 9 | -0.5652790-02 | 10 | -0.5652790-02 | 11 | -0.5652790-02 | 12 | -0.5652790-02 |
| 13 | 0.1357800-01 | 14 | 0.1357800-01 | 15 | 0.1357800-01 | 16 | 0.1357800-01 |
| 17 | -0.4507210-03 | 18 | -0.4507210-03 | 19 | -0.4507210-03 | 20 | -0.5258410-02 |
| 21 | -0.5258410-02 | 22 | -0.5258410-02 | 23 | -0.5258410-02 | 24 | -0.5258410-02 |
| 25 | -0.5258410-02 | 26 | 0.5263390-01 | 27 | -0.2210410-01 | 28 | -0.2210410-01 |
| 29 | -0.2210410-01 | 30 | 0.1154970-01 | 31 | 0.1154970-01 | 32 | -0.3191890-14 |

ITCNE = 27

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.2156070 00 | 2 | -0.1023510-01 | 3 | -0.1023510-01 | 4 | -0.1023510-01 |
| 5 | -0.1023510-01 | 6 | 0.4266490-01 | 7 | -0.7825410-01 | 8 | -0.7825410-01 |
| 9 | -0.7825410-01 | 10 | -0.6863870-01 | 11 | -0.7825410-01 | 12 | -0.7825410-01 |
| 13 | -0.6863870-01 | 14 | -0.7825410-01 | 15 | -0.6863870-01 | 16 | -0.6863870-01 |
| 17 | 0.1154970-01 | 18 | -0.1154970-01 | 19 | -0.2210410-01 | 20 | 0.1154970-01 |
| 21 | -0.2210410-01 | 22 | -0.2210410-01 | 23 | 0.41154970-01 | 24 | -0.2210410-01 |
| 25 | -0.2210410-01 | 26 | -0.2210410-01 | 27 | 0.2591760 00 | 28 | 0.1822530 00 |
| 29 | 0.1822530 00 | 30 | 0.1822530 00 | 31 | 0.1822530 00 | 32 | 0.3750000 00 |

ITCNE = 28

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.2156070 00 | 2 | -0.1023510-01 | 3 | -0.1023510-01 | 4 | -0.1023510-01 |
| 5 | 0.4266490-01 | 6 | -0.1023510-01 | 7 | -0.7825410-01 | 8 | -0.7825410-01 |
| 9 | -0.6863870-01 | 10 | -0.7825410-01 | 11 | -0.7825410-01 | 12 | -0.6863870-01 |
| 13 | -0.7825410-01 | 14 | -0.6863870-01 | 15 | -0.7825410-01 | 16 | -0.6863870-01 |
| 17 | 0.1154970-01 | 18 | -0.2210410-01 | 19 | 0.1154970-01 | 20 | -0.2210410-01 |
| 21 | 0.1154970-01 | 22 | -0.2210410-01 | 23 | -0.2210410-01 | 24 | 0.1154970-01 |
| 25 | -0.2210410-01 | 26 | -0.2210410-01 | 27 | 0.1822530 00 | 28 | 0.2591760 00 |
| 29 | 0.1822530 00 | 30 | 0.1822530 00 | 31 | 0.1822530 00 | 32 | 0.3750000 00 |

ITCNE = 29

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.2156070 00 | 2 | -0.1023510-01 | 3 | -0.1023510-01 | 4 | 0.4266490-01 |
| 5 | -0.1023510-01 | 6 | -0.1023510-01 | 7 | -0.7825410-01 | 8 | -0.6863870-01 |
| 9 | -0.7825410-01 | 10 | -0.7825410-01 | 11 | -0.6863870-01 | 12 | -0.7825410-01 |
| 13 | -0.7825410-01 | 14 | -0.6863870-01 | 15 | -0.6863870-01 | 16 | -0.7825410-01 |
| 17 | -0.2210410-01 | 18 | 0.1154970-01 | 19 | 0.1154970-01 | 20 | -0.2210410-01 |
| 21 | -0.2210410-01 | 22 | 0.1154970-01 | 23 | -0.2210410-01 | 24 | -0.2210410-01 |
| 25 | 0.1154970-01 | 26 | -0.2210410-01 | 27 | 0.1822530 00 | 28 | 0.1822530 00 |
| 29 | 0.2591760 00 | 30 | 0.1822530 00 | 31 | 0.1822530 00 | 32 | 0.3750000 00 |

ITCNE = 30

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.2156070 00 | 2 | -0.1023510-01 | 3 | 0.4264950-01 | 4 | -0.1023510-01 |
| 5 | -0.1023510-01 | 6 | -0.1023510-01 | 7 | -0.6863870-01 | 8 | -0.7825410-01 |
| 9 | -0.7825410-01 | 10 | -0.7825410-01 | 11 | -0.6863870-01 | 12 | -0.6863870-01 |
| 13 | -0.6863870-01 | 14 | -0.7825410-01 | 15 | -0.7825410-01 | 16 | -0.7825410-01 |
| 17 | -0.2210410-01 | 18 | -0.2210410-01 | 19 | -0.2210410-01 | 20 | 0.1154970-01 |
| 21 | 0.1154970-01 | 22 | 0.1154970-01 | 23 | -0.2210410-01 | 24 | -0.2210410-01 |
| 25 | -0.2210410-01 | 26 | 0.1154970-01 | 27 | 0.1822530 00 | 28 | 0.1822530 00 |
| 29 | 0.1822530 00 | 30 | 0.2591760 00 | 31 | 0.1822530 00 | 32 | 0.3750000 00 |

ITCNE = 31

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.2156070 00 | 2 | 0.4264950-01 | 3 | -0.1023510-01 | 4 | -0.1023510-01 |
| 5 | -0.1023510-01 | 6 | -0.1023510-01 | 7 | -0.6863870-01 | 8 | -0.6863870-01 |
| 9 | -0.6863870-01 | 10 | -0.7825410-01 | 11 | -0.7825410-01 | 12 | -0.7825410-01 |
| 13 | -0.7825410-01 | 14 | -0.7825410-01 | 15 | -0.7825410-01 | 16 | -0.7825410-01 |
| 17 | -0.2210410-01 | 18 | -0.2210410-01 | 19 | -0.2210410-01 | 20 | -0.2210410-01 |
| 21 | -0.2210410-01 | 22 | -0.2210410-01 | 23 | 0.1154970-01 | 24 | 0.1154970-01 |
| 25 | 0.1154970-01 | 26 | 0.1154970-01 | 27 | 0.1822530 00 | 28 | 0.1822530 00 |
| 29 | 0.1822530 00 | 30 | 0.1822530 00 | 31 | 0.2591760 00 | 32 | 0.3750000 00 |

ITCNE = 32

| | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1 | 0.3750000 00 | 2 | 0.1214940-13 | 3 | -0.6955970-14 | 4 | 0.2361360-14 |
| 5 | 0.2024020-14 | 6 | 0.1246870-14 | 7 | -0.1250000 00 | 8 | -0.1250000 00 |
| 9 | -0.1250000 00 | 10 | -0.1250000 00 | 11 | -0.1250000 00 | 12 | -0.1250000 00 |
| 13 | -0.1250000 00 | 14 | -0.1250000 00 | 15 | -0.1250000 00 | 16 | -0.1250000 00 |
| 17 | -0.4846550-15 | 18 | 0.1665330-15 | 19 | -0.165730-14 | 20 | -0.4720580-14 |
| 21 | -0.4082200-14 | 22 | -0.4902060-14 | 23 | 0.1176410-13 | 24 | 0.9904470-14 |
| 25 | 0.1144380-13 | 26 | -0.4212440-14 | 27 | 0.3750000 00 | 28 | 0.3750000 00 |
| 29 | 0.3750000 00 | 30 | 0.3750000 00 | 31 | 0.3750000 00 | 32 | 0.2420290-13 |

3472)- Détermination des vecteurs du noyau de M

On sait que le rang d'une matrice symétrique est égal au nombre de valeurs propres non nulles.

Pour les matrices d'ordre 4 et de format (16,16), il y a eu quatre valeurs propres nulles et donc le rang de la matrice est $(16 - 4) = 12$. La dimension du noyau est 4.

Une base de ce noyau nous est donnée par les quatre vecteurs singuliers suivants :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----|----|----|----|----|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----|
| 1 | -4 | +3 | +3 | +3 | +3 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | +1 | +1 | +1 | +1 | 0 |
| 2 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | 0 |
| 3 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | 0 |
| 4 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Le premier vecteur s'obtient facilement en remarquant que dans la matrice M_0

telle que :

$$\boxed{M} = \boxed{M^0 \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ -1 \end{array}} \quad (1)$$

La somme des termes de la première ligne est 48.

La somme des termes de la deuxième à la cinquième ligne = 36

La somme des termes de la sixième ligne à la onzième = 24

La somme des termes de la onzième ligne à la quinzième = 12

Le premier vecteur singulier sera :

$$\boxed{-4 \quad +3 \quad +3 \quad +3 \quad +3 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad +1 \quad +1 \quad +1 \quad +1}$$

Nous remarquons que les autres vecteurs singuliers X_2, X_3, X_4 sont tels que la somme de leurs composantes est nulle et qu'ils sont aussi vecteurs singuliers de la matrice M^0 .

- pour la matrice de structure d'ordre 5, la dimension du noyau est 15
 - . le 1er vecteur singulier s'obtient en procédant de la même manière que pour le premier vecteur singulier de la matrice d'ordre 4, c'est-à-dire, à partir de la somme des termes de chaque ligne.
 - . Les autres s'obtiennent directement à partir des vecteurs singuliers de la matrice de structure d'ordre 4 puisque celle-ci, comme nous l'avons montré, se retrouve plusieurs fois dans la matrice de structure d'ordre 5.
- on pourra procéder de la même manière pour les ordres suivants.

R E M A R Q U E S

=====

- 1) -- Si la solution particulière ne vérifie pas les contraintes

$$\pi_{k0} \geq 0 \quad \forall k$$

la recherche d'une solution consiste à retenir les combinaisons linéaires de vecteurs du noyau qui annulent les composantes négatives de π_0 .

- 2) - En pratique, la solution particulière $\pi_0 = M^+ D$ vérifie la

$$\text{contrainte } \sum_k \pi_{k0} = 1$$

chaque vecteur singulier X_i étant tel que $\sum_{k=1}^r X_{i_k} = 0$

la solution générale :

$$\pi^* = \pi_0 + \sum \lambda_i X_i$$

vérifie par conséquent la contrainte de $\sum_k \pi_k = 1$

- - VECTEURS SINGULIERS POUR LA MATRICE DE STRUCTURE D'ORDRE 5 : 15 VECTEURS - -

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|----|----|----|----|----|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|---|
| 1 | -5 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 0 | |
| 2 | -4 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 | +1 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | 0 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 | +1 | +1 | 0 | 0 | | |
| 4 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | |
| 10 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 11 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 12 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | - $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 6 | |

351 - ESTIMATIONS DES EXPERTS ET CONTRADICTIONS
=====

Quelle que soit l'originalité de la MIC adoptée, les estimations apportées par le groupe d'experts constituent la seule information disponible. Aussi les résultats a posteriori n'auront de sens que dans la mesure où les valeurs a priori seront crédibles.

Par conséquent, il nous semble utile de mettre en lumière certaines erreurs classiques parce que fréquentes, qui sont commises dans ce domaine.

3511/ PROBLEMES POSES PAR LES PROBABILITES CONDITIONNELLES- réflexe mental de réversibilité des causes

Si B est une cause de A, la réponse à la question $P(A/B)$ ne pose pas trop de problème, par contre, que dire de $P(B/A)$? quelle est la probabilité d'avoir la cause sachant que j'ai la conséquence ? si plusieurs causes entraînent A, il est difficile de répondre immédiatement.

En pratique, l'expert interrogé ne prend pas toujours conscience qu'entre $P(B/A)$ et $P(A/B)$, il y a une probabilité qu'il peut raisonnablement estimer et une autre dont il est beaucoup moins sûr ; de fait, il risque d'appliquer ce que nous appelons le réflexe mental de réversibilité des causes et d'apporter une information fausse.

1er exemple : soit A : l'évènement je vois un parapluie ouvert
B : l'évènement il pleut.

.../

A la question $P(B/A)$, l'expert répondra comme si A était la cause et B la conséquence, alors qu'en fait B est normalement cause de A.

La liaison de causalité étant forte dans le sens $B \rightarrow A$, il risque de répondre par l'estimation de $P(A/B)$, lorsqu'on l'interroge sur $P(B/A)$.

2ème exemple : soit A : je tombe par la fenêtre

B : je meurs.

$P(B/A)$ peut être raisonnablement estimée. Mais on ne peut rien dire d'aussi sûr avec $P(A/B)$ probabilité que si je suis mort, ce soit en tombant par la fenêtre.

Le 1er exemple montre que l'expert interrogé risque d'inverser la causalité et de répondre à la question inverse.

Le 2ème exemple montre qu'entre les deux informations $P(B/A)$ et $P(A/B)$ une des deux informations est plus fiable que l'autre.

3512/ TEMPORALITE ET CONTRADICTIONS SUR LES PROBABILITES A PRIORI

Soient deux évènements se produisant dans la période T

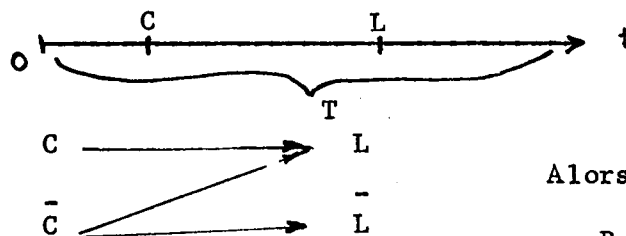
C : une catastrophe écologique

L : un règlement draconien sur l'environnement

Il est demandé au groupe d'experts d'estimer $P(C)$, $P(L)$ et $P(C/L)$, $P(L/C)$

1er cas : C se produit avant L dans la période T.

C est une cause de L



Alors vraisemblablement

$$P(L/C) \geq P(L)$$

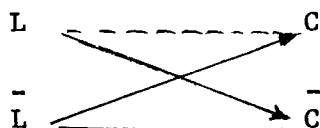
Les flèches doivent s'interpréter comme une certaine relation entre deux évènements.

2ème cas

L se produit avant C

L est une cause diminuant le risque de C

alors vraisemblablement



$$P(C/L) \leq P(C)$$

Certaines contradictions risquent d'apparaître dans les estimations du groupe d'experts, en effet :

- un "technocrate" pensera qu'il faudrait vraiment une catastrophe écologique importante pour voir les pouvoirs publics réagir et promulguer une loi draconienne sur l'environnement et se placera dans le premier cas.
- un "écologue", en tant que défenseur de la nature, pensera plutôt qu'une loi viendra à temps limiter les effets d'une catastrophe éventuelle et se placera dans le deuxième cas.
- d'autres experts se placeront, par exemple, dans le premier cas pour répondre à la question $P(L/C)$ et dans le deuxième pour répondre à la question $P(C/L)$

Nous allons montrer comment cette dernière éventualité est contradictoire en termes de probabilités

d'après le deuxième cas :

$$P(C/L) \leq P(C) \quad (a)$$

d'après le premier cas :

$$P(L/C) = P(L) + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0 \quad (b)$$

$$\text{or} \quad P(C.L) = P(C/L) \cdot P(L) = P(L/C) \cdot P(C)$$

$$\text{de (a) il vient} \quad P(C/L) \cdot P(L) \leq P(C) \cdot P(L)$$

$$\text{de (b)} \quad P(L/C) \cdot P(C) = [P(L) + \varepsilon] P(C)$$

$$\text{d'où} \quad [P(L) + \varepsilon] P(C) \leq P(C) \cdot P(L)$$

ce qui est contradictoire puisque $\varepsilon > 0$

Il convient de ne pas oublier que la contradiction n'existe que dans l'esprit des experts. En pratique, si " C " et " L " arrivent tous les deux dans la période T, l'un des deux se produira avant l'autre.

Quoiqu'il en soit, si ce type de contradiction est inévitable dans l'estimation des probabilités a priori puisqu'il résulte de l'hétérogénéité et de la pluridisciplinarité du groupe d'experts, il conviendra qu'il n'apparaisse plus dans les probabilités a posteriori ; ce qui doit normalement faire la MIC puisque son but est justement de fournir à partir de l'information apportée par les experts des estimations cohérentes en termes de probabilités.

montrons que dans les valeurs a posteriori :

$$\nexists \{ i \text{ et } j \} / \{ P(i/j) < P(i) \text{ et } P(j/i) > P(j) \}$$

ce qui s'écrit $\frac{\sum t(ijk) \pi_k}{P(j)} < P(i) \text{ et } \frac{\sum t(ijk) \pi_k}{P(i)} > P(j)$

En effet ,il est impossible d'avoir en même temps :

$$\sum t(ijk) \pi_k \leq P(i) \cdot P(j)$$

donc la contrainte de cohérence temporelle est satisfaite a posteriori.

352 - LA PROBABILITE DE CHAQUE ETAT EST BORNEE

Nous avons montré que dans les valeurs a posteriori :

$$\exists \{ i \text{ et } j \} / \{ P(i/j) < P(i) \text{ et } P(j/i) > P_j \}$$

- Les rôles joués par i et j étant symétriques, on peut écrire :

$$\exists \{ i \text{ et } j \} / \{ P(j/i) < P(j) \text{ et } P(i/j) > P(i) \}$$

par conséquent :

$$P(i/j) \leq P(i) \quad \text{et} \quad P(j/i) \leq P(j) \quad (a)$$

$$\text{ou } P(i/j) \geq P(i) \quad \text{et} \quad P(j/i) \geq P(j) \quad (b)$$

d'autre part :

$$P(i,j) = P(i/j) \cdot P(j) \quad (c)$$

$$= P(j/i) \cdot P(i)$$

si la proposition (a) est vraie

$$P(i/j) < P(i) \quad \text{et} \quad P(j/i) < P(j)$$

$$\text{et } P(i,j) = P(i/j) \cdot P(j)$$

$$\text{avec } P(i/j) \leq P(i)$$

$$\text{et } P(j/i) \leq P(j)$$

$$P(i/j) \cdot P(j/i) \leq P(i,j) \leq P(i) P(j) \quad (e)$$

si la proposition (b) est vraie

$$P(i/j) \cdot P(j/i) \geq P(i,j) \geq P(i) P(j) \quad (f)$$

Peut-on alors affirmer que pour 3 événements i, j, k , la probabilité $P(i \cdot j \cdot k)$ de leur intersection est bornée par les probabilités des couples.

Nous savons que :

$$P(i \cdot j \cdot k) = P(i,j./k) P(k)$$

$$= P(k/i.j.) P(i.j.)$$

Par conséquent :

$$P(i.j.k.) \leq P(i.j.)$$

$$\text{avec } P(i.j) \leq P(i) \cdot P(j)$$

$$\text{ou } P(i.j) \leq P(i/j) \cdot P(j/i)$$

Les rôles joués par i, j, k , étant symétriques, on peut écrire :

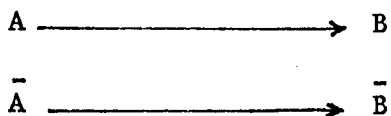
$$P(i.j.k) \leq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min. } P(i).P(j), P(i), P(k), P(j) P(k), \\ \text{Min. } P(i/j) P(j/i), P(j/k) P(k/j), P(i/k) P(k/i) \end{array} \right.$$

353 - TYPLOGIE DES RELATIONS ENTRE DEUX EVENEMENTS ISOLES A et B :

RELATIONS SUR LES PROBABILITES.

3531) Liaisons déterministes

Les flèches doivent s'interpréter comme une certaine relation entre deux évènements.

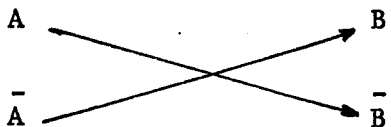


$$P(B) = P(A), \quad P(B/A) = I$$

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A})$$

Représentation ensembliste :

A et B confondus



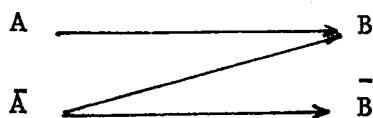
Exclusion entre A et B

$$P(\bar{B}) = P(A)$$

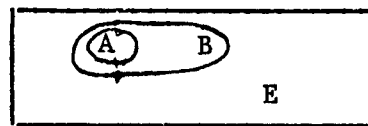
$$P(\bar{B}/A) = I$$

A et \bar{B} confondus

3532) Lien causal entre A et B



représentation ensembliste



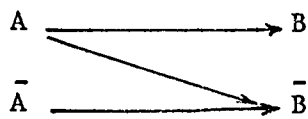
$A \subset B \iff$ lien causal entre A et B

| $P(A/B)$ | $P(A/\bar{B})$ | $P(B/A)$ | $P(\bar{B}/\bar{A})$ |
|---------------------|----------------|----------|--------------------------------|
| $\frac{P(A)}{P(B)}$ | 0 | I | $\frac{P(B) - P(A)}{I - P(A)}$ |

Remarque : dans ce cas $P(A) \leq P(B)$

Ex. : plus l'industrie utilise d'eau, plus elle pollue.

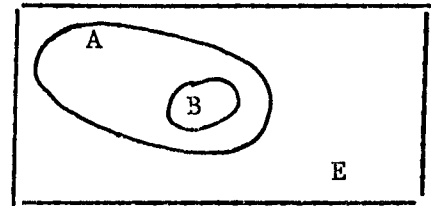
3533) Lien conditionnel entre A et B



| $P(A/B)$ | $P(A/\bar{B})$ | $P(B/A)$ | $P(B/\bar{A})$ |
|----------|--------------------------------|---------------------|----------------|
| I | $\frac{P(B) - P(A)}{I - P(B)}$ | $\frac{P(B)}{P(A)}$ | 0 |

représentation ensembliste

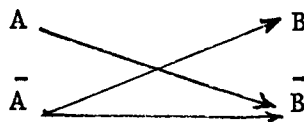
ex. : si les stations d'épuration ne sont pas raccordées par des égouts aux sources de pollution, celles-ci ne pourront pas diminuer



$B \subset A \iff$ lien conditionnel entre A et B et $P(B) \leq P(A)$

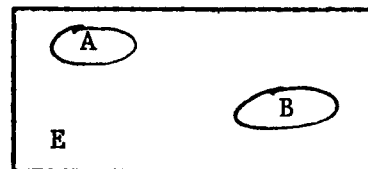
on peut remarquer qu'un lien conditionnel entre A et B est équivalent à un lien causal entre \bar{A} et \bar{B} .

3534) Incompatibilité entre A et B

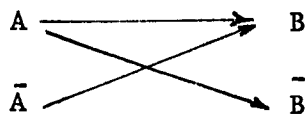


représentation ensembliste

A et B disjoints

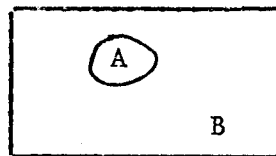
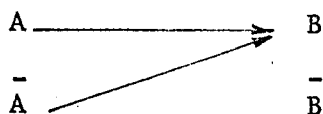


3535) Incompatibilité entre \bar{A} et \bar{B}



\bar{A} et \bar{B} disjoints

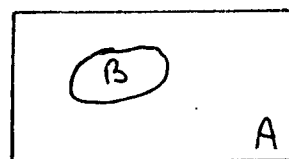
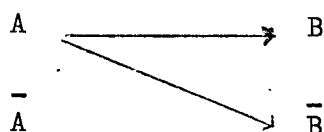
3536) Cas où l'évènement B est certain



B est l'ensemble fondamental $P(B) = 1$

B est un évènement certain

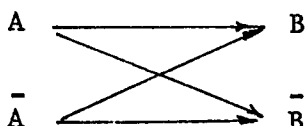
3537) Cas où l'évènement A est certain



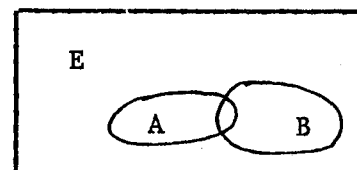
3538) Cas général

. relations entre A et B et A-bar et B-bar

. dépendance en probabilité



représentation
ensembliste



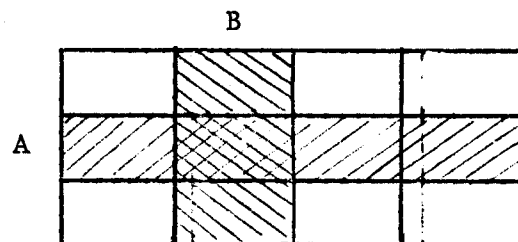
. pas de relation entre A et B

. indépendance en probabilité

Le fait de connaître A ne modifie pas la connaissance que l'on peut avoir de l'évènement B

$$P(B/A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



représentation ensembliste : surfaces proportionnelles

354 - C O N C L U S I O N S.

Compte tenu de l'existence de certains comportements psychologiques tel que le "réflexe" mental de réversibilité des causes" et de la diversité des points de vue qui apparaissent normalement dans un groupe d'experts pluridisciplinaire, il nous semble nécessaire :

- a/ de préciser au préalable avec les experts la nature des relations entre évènements et de dégager, par exemple, un certain consensus sur certaines relations intéressantes, liaisons causales, conditionnelles qui ont un sens probabiliste.
- b/ de pondérer les informations apportées par les experts, afin de ne pas mélanger de la bonne et de la mauvaise information. La procédure envisagée pourrait consister, par exemple, à demander à chaque expert de donner une fiabilité à sa réponse.

C'est dans ces limites que pourrait s'inscrire la nouvelle approche que nous proposons.

36 - A P P L I C A T I O N

Soient trois évènements isolés (e_1, e_2, e_3)

e_1 : l'eau des rivières a plus de 30 °

e_2 : 75 % de l'électricité est d'origine nucléaire

e_3 : marche de 200 000 personnes contre les centrales nucléaires

avec P_1, P_2, P_3 leur probabilité d'apparition d'ici 1990.

A partir de ces trois évènements isolés, on peut définir $2^3 = 8$ évènements élémentaires. On dira encore que le système constitué par ces trois évènements isolés peut prendre 8 états à l'horizon considéré.

$$E_1 = (e_1, e_2, e_3)$$

$$E_2 = (\bar{e}_1, e_2, e_3)$$

$$E_3 = (e_1, \bar{e}_2, e_3)$$

$$E_4 = (e_1, e_2, \bar{e}_3)$$

$$E_5 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3)$$

$$E_6 = (\bar{e}_1, e_2, \bar{e}_3)$$

$$E_7 = (e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$E_8 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

A chaque état E_k , on associe une probabilité π_k

$$\text{avec } \sum_{k=1}^{k=8} \pi_k = 1$$

- expression des probabilités individuelles en fonction des probabilités des états.

$$P_i = \sum_{k=1}^{k=8} \theta(ik) \pi_k$$

avec $\theta(ik) = 1$ si e_i figure dans E_k
 $\theta(ik) = 0$ si e_i ne figure pas dans E_k

$$P_I = \pi_I + \pi_3 + \pi_4 + \pi_7$$

$$P_2 = \pi_I + \pi_2 + \pi_4 + \pi_6$$

$$P_3 = \pi_I + \pi_2 + \pi_3 + \pi_5$$

- expression des probabilités conditionnelles

$$P(i/j) = \frac{\sum_{k=1}^r t(ijk) \pi_k}{P(j)} \quad \forall (i,j)$$

$$P(i/\bar{j}) = \frac{\sum_{k=1}^r s(ijk) \pi_k}{I - P(j)} \quad \forall (i, \bar{j})$$

- matrice des probabilités conditionnelles

| | | |
|---|---|---|
| | $P_{I/2} = \frac{\pi_I + \pi_4}{P_2}$ | $P_{I/3} = \frac{\pi_I + \pi_5}{P_3}$ |
| | $P_{I/\bar{2}} = \frac{\pi_3 + \pi_7}{I - P_2}$ | $P_{I/\bar{3}} = \frac{\pi_4 + \pi_7}{I - P_3}$ |
| $P_{2/I} = \frac{\pi_I + \pi_4}{P_I}$ | | $P_{2/3} = \frac{\pi_I + \pi_2}{P_3}$ |
| $P_{2/\bar{I}} = \frac{\pi_2 + \pi_6}{I - P_I}$ | | $P_{2/\bar{3}} = \frac{\pi_4 + \pi_6}{I - P_3}$ |
| $P_{3/I} = \frac{\pi_I + \pi_3}{P_I}$ | $P_{3/2} = \frac{\pi_I + \pi_2}{P_2}$ | |
| $P_{3/\bar{I}} = \frac{\pi_2 + \pi_5}{I - P_I}$ | $P_{3/\bar{2}} = \frac{\pi_3 + \pi_5}{I - P_2}$ | |

361 - P R E M I E R C A S

Dans un premier temps, sans tenir compte explicitement des relations entre évènements, il a été demandé au groupe d'experts constitué à cette occasion de fournir une estimation sur les probabilités individuelles et les probabilités conditionnelles

| | | | | |
|-------|-----|------------|------------|------------|
| | | e_1 | e_2 | e_3 |
| e_1 | 0,3 | | 0,8 0,4 | 0,3 0,3 |
| e_2 | 0,5 | 0,7 0,6 | | 0,4 0,6 |
| e_3 | 0,6 | 0,9 0,5 | 0,7 0,4 | |

$$P(i)$$

$$\begin{array}{c} P(i/j) \\ \hline P(i/\bar{j}) \end{array}$$

ce qui fait en tout $2(N^2 - N) + N = 2(9 - 3) + 3 = 15$ questions

Le programme s'écrit :

$$\text{Min. } \left\{ \begin{array}{l} (0,4 - \pi_1 - \pi_4)^2 + (0,2 - \pi_3 - \pi_7)^2 \\ + ((0,18 - \pi_1 - \pi_3)^2 + (0,12 - \pi_4 - \pi_7)^2 \\ + (0,21 - \pi_1 - \pi_4)^2 + (0,42 - \pi_2 - \pi_6)^2 \\ + (0,24 - \pi_1 - \pi_2)^2 + (0,24 - \pi_4 - \pi_6)^2 \\ + (0,27 - \pi_1 - \pi_3)^2 + (0,35 - \pi_2 - \pi_5)^2 \\ + (0,35 - \pi_1 - \pi_2)^2 + (0,20 - \pi_3 - \pi_5)^2 \\ + (q - \pi_8)^2 \end{array} \right.$$

sous la contrainte :

$$\sum_{k=1}^{k=8} \pi_k = 1 \quad (\lambda)$$

et les contraintes :

$$\pi_k \geq 0 \quad (U_k) \quad \forall k$$

avec λ et U_k les multiplicateurs associés

.../

- quelques précisions s'imposent : π_8 la probabilité de l'état où aucun évènement ne se produit pendant la période considérée n'intervient pas dans les probabilités individuelles et conditionnelles. Il est donc demandé aux experts de fournir directement une estimation sur π_8 . Soit Q cette estimation pour le problème qui nous intéresse, le groupe d'experts s'est arrêté sur $Q = 0,1$

- afin de faciliter la résolution de ce programme, nous faisons dans un premier temps l'hypothèse a priori que les contraintes de signes sur les π_k sont vérifiées. Nous verrons si les solutions trouvées respectent ou non ces contraintes.

Nous étudierons dans un deuxième temps l'intégration de cette contrainte.

D'après les relations d'exclusions

$$\pi_k > 0 \quad \forall_k \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = 0 \quad \forall_k$$

- la dérivée par rapport à π_i de

$$\left[a - (\pi_i + \pi_j) \right]^2 \quad \text{est} \quad 2 (\pi_i + \pi_j - a)$$

.../

3611/ CONDITIONS DE KÜHN et TUCKER

avec λ le multiplicateur associé à la première contrainte et $U_k = 0 \quad \forall_k$
 en annulant la dérivée par rapport à π_1

$$2 (6\pi_1 + 2\pi_4 + 2\pi_3 + 2\pi_2 - 1,65) - \lambda = 0 \quad (1)$$

par rapport à π_2

$$2 (4\pi_2 + 2\pi_1 + \pi_5 + \pi_6 - 1,36) - \lambda = 0 \quad (2)$$

par rapport à π_3

$$2 (4\pi_3 + 2\pi_1 + \pi_5 + \pi_7 - 0,85) - \lambda = 0 \quad (3)$$

par rapport à π_4

$$2 (4\pi_4 + 2\pi_1 + \pi_6 + \pi_7 - 0,97) - \lambda = 0 \quad (4)$$

par rapport à π_5

$$2 (2\pi_5 + \pi_2 + \pi_3 - 0,55) - \lambda = 0 \quad (5)$$

par rapport à π_6

$$2 (2\pi_6 + \pi_2 + \pi_4 - 0,66) - \lambda = 0 \quad (6)$$

par rapport à π_7

$$2 (2\pi_7 + \pi_3 + \pi_4 - 0,32) - \lambda = 0 \quad (7)$$

par rapport à π_8

$$2 (\pi_8 - 0,1) - \lambda = 0 \quad (8)$$

par rapport à λ

$$\sum_{k=1}^8 \pi_k = 1 \quad (9)$$

3612/ RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

de (8) nous tirons $\lambda = 2 (\pi_8 - 0,1)$

nous reportons la valeur de λ dans les 7 premières équations.

Sous forme matricielle, le système à résoudre présente comme suit, après avoir divisé toutes les équations par 2

avec $Q = 0,1$

$$\Pi \cdot \pi = D$$

$$M \quad \Pi = D$$

| | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| I | 6 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | I |
| 2 | 2 | 4 | 0 | 0 | I | I | 0 | I |
| 3 | 2 | 0 | 4 | 0 | I | 0 | I | I |
| 4 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | I | I | I |
| 5 | 0 | I | I | 0 | 2 | 0 | 0 | I |
| 6 | 0 | I | 0 | I | 0 | 2 | 0 | I |
| 7 | 0 | 0 | I | I | 0 | 0 | 2 | I |
| 8 | I | I | I | I | I | I | I | -I |

| Π | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Π | I | | | | | | | |
| Π | | 2 | | | | | | |
| Π | | | 3 | | | | | |
| Π | | | | 4 | | | | |
| Π | | | | | 5 | | | |
| Π | | | | | | 6 | | |
| Π | | | | | | | 7 | |
| $-\Pi$ | | | | | | | | 8 |

| | |
|------|-----|
| I,65 | - Q |
| I,36 | - Q |
| 0,85 | - Q |
| 0,97 | - Q |
| 0,55 | - Q |
| 0,66 | - Q |
| 0,32 | - Q |
| I | |

Remarques : - le vecteur Π comprend ($-\Pi_8$) en effet, cet artifice de calcul permet de rendre la matrice M symétrique.

- Nous retrouvons bien la matrice M pour l'ordre 3 qui nous était donnée directement par l'algorithme ALPHA (cf. 48)

3613/ INVERSION DE LA MATRICE - RESULTATS

Pour résoudre ce système, il suffit d'inverser M

$$\Pi = M^{-1} D$$

| Π | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Π | I | | | | | | | |
| Π | | 2 | | | | | | |
| Π | | | 3 | | | | | |
| Π | | | | 4 | | | | |
| Π | | | | | 5 | | | |
| Π | | | | | | 6 | | |
| Π | | | | | | | 7 | |
| $-\Pi$ | | | | | | | | 8 |

| I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|------|
| 5/2 | -5/2 | -5/2 | -5/2 | 2 | 2 | 2 | I | I,55 |
| -5/2 | 20/7 | 13/7 | 18/7 | -31/14 | -31/14 | -29/14 | -I | I,26 |
| -5/2 | 18/7 | 20/7 | 18/7 | -31/14 | -29/14 | -31/14 | -I | 0,75 |
| -5/2 | 18/7 | 18/7 | 20/7 | -29/14 | -31/14 | -31/14 | -I | 0,87 |
| 2 | -31/14 | -31/14 | -29/14 | 23/14 | 23/14 | 23/14 | I | 0,45 |
| 2 | -31/14 | -29/14 | -31/14 | 23/14 | 31/14 | 23/14 | I | 0,56 |
| 2 | -29/14 | -31/14 | -31/14 | 23/14 | 23/14 | 31/14 | I | 0,22 |
| I | -I | -I | -I | I | I | I | 0 | I |

RESULTS

| Π^* | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Π^* | I | | | | | | | |
| Π^* | | 2 | | | | | | |
| Π^* | | | 3 | | | | | |
| Π^* | | | | 4 | | | | |
| Π^* | | | | | 5 | | | |
| Π^* | | | | | | 6 | | |
| Π^* | | | | | | | 7 | |
| $-\Pi^*$ | | | | | | | | 8 |

| |
|---------|
| 0,135 |
| 0,198 |
| 0,102 |
| 0,119 |
| 0,126 |
| 0,170 |
| 0,050 |
| - 0,100 |

| |
|---|
| prob. (e_1, e_2, e_3) |
| prob. (\bar{e}_1, e_2, e_3) |
| prob. (e_1, \bar{e}_2, e_3) |
| prob. (e_1, e_2, \bar{e}_3) |
| prob. ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3$) |
| prob. ($\bar{e}_1, e_2, \bar{e}_3$) |
| prob. ($e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$) |
| - prob. ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$) |

évidemment $\sum \pi_k = I$,

de plus $0 < \pi_k \leq I \quad \forall k$ les solutions vérifient les contraintes que volontairement nous n'avions pas intégré dans le programme. Il n'était donc pas nécessaire d'en tenir compte directement.

3614/ PROBABILITES A POSTERIORI

D'après les relations (1), (2) et (3), on déduit les probabilités corrigées:

e_1 : l'eau des rivières à plus de 30 °

e_2 : 75 % de l'électricité est d'origine nucléaire

e_3 : marche de 200 000 personnes contre les centrales nucléaires

$$P_I^* : \pi_I^* + \pi_3^* + \pi_4^* + \pi_7^* = 0,40$$

$$P_2^* : \pi_I^* + \pi_2^* + \pi_4^* + \pi_6^* = 0,62$$

$$P_3^* : \pi_I^* + \pi_2^* + \pi_3^* + \pi_5^* = 0,56$$

Probabilités a priori

| | | e_1 | e_2 | e_3 |
|-------|-----|-----------|-----------|-----------|
| e_1 | 0,3 | | 0,8 / 0,4 | 0,2 / 0,3 |
| e_2 | 0,5 | 0,7 / 0,6 | | 0,4 / 0,6 |
| e_3 | 0,6 | 0,9 / 0,5 | 0,7 / 0,4 | |

Probabilités a posteriori

| | | e_1 | e_2 | e_3 |
|-------|------|-------------|-------------|-------------|
| e_1 | 0,40 | | 0,41 / 0,40 | 0,42 / 0,38 |
| e_2 | 0,62 | 0,63 / 0,61 | | 0,59 / 0,66 |
| e_3 | 0,56 | 0,59 / 0,54 | 0,54 / 0,60 | |

3615/ REMARQUES :

- a) La méthode n'implique pas de longs calculs pour des changements mineurs. En effet, les probabilités corrigées diffèrent très sensiblement des probabilités initiales notamment en ce qui concerne les probabilités conditionnelles; par exemple, la probabilité conditionnelle de e_3 "marche contre les centrales nucléaires" sachant que l'eau des rivières est à plus de 30° diminue fortement puisqu'elle passe de 0,9 à 0,59. Même remarque pour $P(e_1 / e_2)$ probabilité que l'eau des rivières soit à plus de 30° si 75 % de l'électricité est d'origine nucléaire.

- b) Les probabilités π_k des états E_k sont des points de repères fructueux pour la construction de scénarii.

En particulier, les états possibles les plus vraisemblables sont :

$$E_2 = (\bar{e}_1, e_2, e_3) \text{ et } E_6 = (\bar{e}_1, e_2, \bar{e}_3)$$

qui ont respectivement comme probabilité :

$$\pi_2 = 0,198 \quad \text{et} \quad \pi_6 = 0,176$$

L'état le moins probable est $E_7 = (e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

avec $\pi_7 = 0,050$ probabilité que l'eau des rivières soit à plus de 30 ° alors que e_2 et e_3 ne sont pas réalisés.

Ce dernier résultat semble tout-à-fait logique.

- c) Test de sensibilité des résultats en fonction de Q , estimation de π_8 donnée directement par les experts.

Cas A

Cas B

$$Q = 0,1$$

$$Q = 0,05$$

| | | |
|---------|-------|-------|
| π_1 | 0,135 | 0,180 |
| π_2 | 0,198 | 0,150 |
| π_3 | 0,102 | 0,050 |
| π_4 | 0,119 | 0,069 |
| π_5 | 0,126 | 0,179 |
| π_6 | 0,170 | 0,222 |
| π_7 | 0,050 | 0,100 |
| π_8 | 0,100 | 0,05 |

- C_1 probabilités des états

Les modifications subies par les probabilités des états semblent assez logiques.

π_1 passe de 0,135 à 0,180 - Il est normal que la probabilité de l'état E_1 c'est-à-dire celui où tous les "événements arrivent", augmente si la probabilité que rien ne se produise, diminue.

- C_2 probabilités individuelles et conditionnelles

Les valeurs de $P(i)$ et $P(i/\bar{j}) \forall (i, j)$ calculées à partir des vecteurs π^* du cas A et du cas B sont identiques, par conséquent, sur cet exemple, les résultats sur les probabilités individuelles sont insensibles aux estimations initiales de π_8 qui ne modifient que le vecteur π^* .

Jusqu'ici, nous n'avons pas intégré la contrainte de signes mais il peut être nécessaire de la faire comme nous le verrons sur un exemple.

362 - DEUXIEME CAS : ANALYSE DES RELATIONS ENTRE EVENEMENTS

ISOLES

Il est demandé au préalable au groupe d'experts de tenir compte explicitement des relations entre évènements.

Reprenons notre exemple à trois évènements :

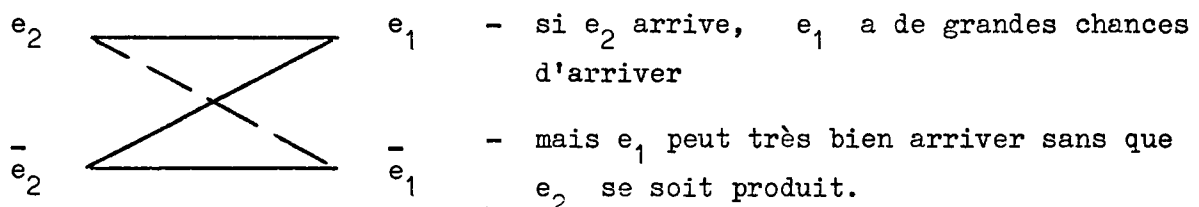
- e_1 : l'eau des rivières à plus de 30°
- e_2 : 75 % de l'électricité est d'origine nucléaire
- e_3 : marche de 200 000 personnes contre les centrales nucléaires.

avec P_i : probabilité que e_i se soit produit d'ici t , c'est-à-dire pendant la période T .

- les relations entre évènements dépendent de l'expert interrogé, il y aura donc autant de types de relations que de points de vue différents.

- plaçons-nous dans l'hypothèse où un concensus se dégage dans le groupe d'experts sur un type de relations entre ces évènements.

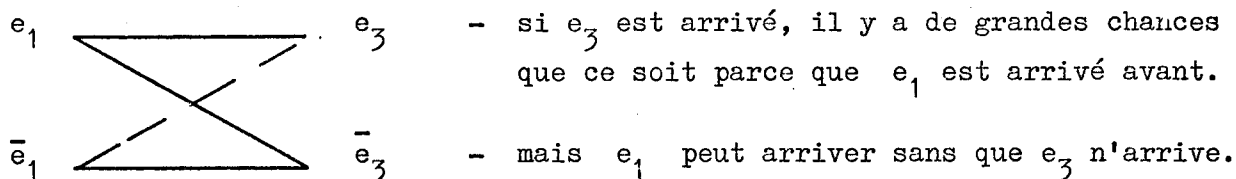
- Relation plutôt causale entre e_2 et e_1 dans le sens e_2 vers e_1 .



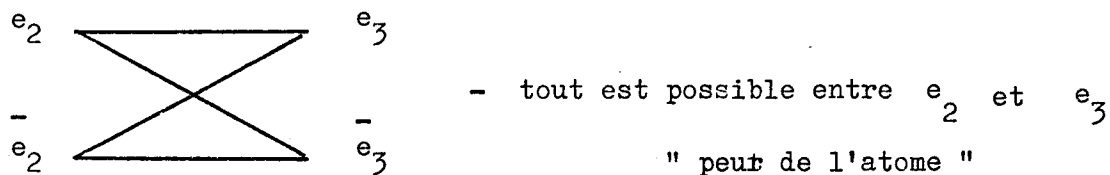
Explicitation

- Dans l'état des techniques actuelles, si 75 % de l'électricité est produite à partir de l'énergie nucléaire, il est vraisemblable que l'eau des rivières sera à plus de 30°.
- par contre, l'eau des rivières peut très bien être à plus de 30 ° par suite d'autres activités industrielles.

- Relation plutôt conditionnelle entre e_1 et e_3 dans le sens e_1 si e_3 .

Explicitation :

- si 200 000 personnes marchent contre les centrales nucléaires, il y a de grandes chances que ce soit à cause de la pollution thermique excessive.
- mais la pollution thermique peut très bien ne pas mobiliser les foules.
- Relation de dépendance générale entre e_2 et e_3

Conséquence sur les probabilités (Cf. 353)

La relation plutôt causale entre e_2 et e_1 implique que vraisemblablement $P(e_2) \leq P(e_1)$

La relation plutôt conditionnelle entre e_1 et e_3 implique que vraisemblablement $P(e_3) \leq P(e_1)$

On ne peut comparer les probabilités de e_2 et e_3 .

Exemple : en tenant compte des types de relations entre évènements,
la matrice remplie par les experts s'écrit :

| | Pi |
|---|-----|
| I | 0,7 |
| 2 | 0,4 |
| 3 | 0,2 |

| | e ₁ | e ₂ | e ₃ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| e ₁ | | 0,8 / 0,5 | 0,9 / 0,6 |
| e ₂ | 0,4 / 0,1 | | 0,3 / 0,4 |
| e ₃ | 0,2 / 0,1 | 0,4 / 0,1 | |

Le programme s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & (0,32 - \pi_1 - \pi_4)^2 + (0,30 - \pi_3 - \pi_7)^2 \\
 + & (0,18 - \pi_1 - \pi_3)^2 + (0,48 - \pi_4 - \pi_7)^2 \\
 + & (0,28 - \pi_2 - \pi_4)^2 + (0,03 - \pi_2 - \pi_6)^2 \\
 + & (0,06 - \pi_1 - \pi_2)^2 + (0,24 - \pi_4 - \pi_6)^2 \\
 + & (0,14 - \pi_1 - \pi_3)^2 + (0,16 - \pi_1 - \pi_2)^2 \\
 + & (0,03 - \pi_2 - \pi_5)^2 + (0,06 - \pi_3 - \pi_5)^2 \\
 + & (Q - \pi_8)^2
 \end{aligned}$$

sous la contrainte

$$\sum \pi_k = t$$

En prenant $Q = 0,2$,

on a

M. $\bar{\pi} = D$ avec $D =$

| |
|-------|
| 0,94 |
| 0,08 |
| 0,48 |
| 1,12 |
| -0,11 |
| 0,07 |
| 0,58 |
| 1,00 |

$$\bar{\pi} = M^{-1} D.$$

363 - ANALYSE DES RESULTATS DU DEUXIEME CAS

3631 / Résultats du programme sans contrainte de signes

| π_1 | π_2 | π_3 | π_4 | π_5 | π_6 | π_7 | π_8 |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,230 | -0,120 | -0,078 | 0,078 | 0,144 | 0,156 | 0,390 | 0,200 |

Certaines valeurs sont négatives, il faut donc intégrer la contrainte de signes. On sait que :

$$P_1 = \pi_1 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_7$$

$$P_2 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_4 + \pi_6$$

$$P_3 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_5$$

L'estimation a priori de la probabilité individuelle P_3 étant faible (0,2), on peut s'attendre à ce que la probabilité a posteriori le soit aussi, et par conséquent à ce que certaines probabilités d'état parmi π_1, π_2, π_3 et π_5 soient nulles.

.../

3632/ Résultats du programme avec contraintes de signes

Nous envisageons plusieurs hypothèses annulant certaines probabilités d'états (cf. 343)

| | H_1 | H_2 | H_3 | H_4 | H_5 | H_6 |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| π_1 | 0,125 | 0,0997 | 0,139 | 0,119 | 0 | 0,145 |
| π_2 | 0 | 0,0243 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| π_3 | 0,0294 | 0,0657 | 0 | 0,0522 | 0,139 | 0 |
| π_4 | 0,187 | 0,214 | 0,173 | 0,195 | 0,288 | 0,169 |
| π_5 | 0,0513 | 0 | 0,0633 | 0 | 0 | 0 |
| π_6 | 0,0627 | 0,0437 | 0,0670 | 0,0703 | 0,0424 | 0,0833 |
| π_7 | 0,303 | 0,283 | 0,322 | 0,299 | 0,228 | 0,338 |
| π_8 | 0,242 | 0,265 | 0,237 | 0,265 | 0,303 | 0,265 |

Multiplicateurs

| | | | | | | |
|-------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|
| u_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,389 | |
| u_2 | -0,042 | 0 | -0,0908 | 0,0378 | 0,340 | -0,0275 |
| u_3 | 0 | 0 | 0,0542 | 0 | 0 | 0,118 |
| u_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| u_5 | 0 | 0,0652 | 0 | 0,103 | 0,0541 | 0,155 |
| u_6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| u_7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| u_8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- Les solutions correspondant aux hypothèses H_1 , H_3 et H_6 ne sont pas optimales, la présence de multiplicateurs négatifs signifiant que l'on peut améliorer les résultats.

Il reste donc à comparer H_2 , H_4 et H_5 .

Les valeurs prises par la fonction objective sont :

$$f(H_2) = 0,0129$$

$$f(H_4) = 0,0186$$

$$f(H_5) = 0,0495$$

Nous retiendrons l'hypothèse H_2 comme étant la meilleure de celles envisagées.

- résultats

| A priori | | | | A posteriori | | | | | |
|----------|-----|-------|-------|--------------|---|------|-------|-------|-------|
| | | e_1 | e_2 | e_3 | | | e_1 | e_2 | e_3 |
| e_1 | 0,7 | | 0,8 | 0,9 | 1 | 0,66 | | 0,812 | 0,87 |
| | | | 0,5 | 0,6 | | | | 0,51 | 0,61 |
| e_2 | 0,4 | 0,4 | | 0,3 | 2 | 0,39 | 0,47 | | 0,65 |
| | | 0,1 | | 0,4 | | | 0,21 | | 0,2 |
| e_3 | 0,2 | 0,2 | 0,4 | | 3 | 0,19 | 0,25 | 0,32 | |
| | | 0,1 | 0,1 | | | | 0,07 | 0,10 | |

La hiérarchie des probabilités d'états s'écrit :

$$\pi_7 > \pi_8 > \pi_4 > \pi_1 > \pi_3 > \pi_6 > \pi_2 > \pi_5$$

avec

$$\pi_7 = \text{Prob}(e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\pi_8 = \text{Prob}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\pi_4 = \text{Prob}(e_1, e_2, \bar{e}_3)$$

$$\pi_1 = \text{Prob}(e_1, e_2, e_3)$$

$$\pi_3 = \text{Prob}(e_1, \bar{e}_2, e_3)$$

$$\pi_6 = \text{Prob}(\bar{e}_1, e_2, \bar{e}_3)$$

$$\pi_2 = \text{Prob}(\bar{e}_1, e_2, e_3)$$

$$\pi_5 = \text{Prob}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3).$$

.../

- avec e_1 l'eau des rivières à plus de 30°
 e_2 75 % de l'électricité est d'origine nucléaire
 e_3 marche de 200 000 personnes contre les centrales.

La probabilité que rien ne se produise est relativement élevée (0,265) néanmoins, elle est inférieure à celle de l'état E_4 (0,283). Sur cet exemple, le scénario le plus probable est donc celui où l'eau des rivières est à plus de 30° alors que moins de 75 % de l'électricité est produite à partir du nucléaire et que l'opinion ne se manifeste pas.

Si l'on se réfère à la hiérarchie ci-dessus, un autre état est très probable ($\pi_4 = 0,214$). C'est un scénario un peu différent du précédent.

Si le réchauffement des eaux peut s'expliquer par le fait que plus de 75 % de l'électricité est d'origine nucléaire, cela ne se traduit pas par une mobilisation massive de l'opinion.

Les autres états ont des probabilités négligeables et les scénarios correspondants sont donc moins intéressants.

364 - REMARQUES ET CONCLUSIONS

R₁ - Sur cet exemple, les résultats a posteriori sont assez proches des résultats a priori. Ceci s'explique par le fait que dans le remplissage de la matrice de départ, nous nous sommes arrêtés longuement sur chaque probabilité, en essayant d'être autant que possible cohérent avec nous-mêmes et avec le type de relations retenu au préalable entre ces événements (liaisons causales, conditionnelles, etc. ...).

R₂ - Certaines modifications importantes montrent que la cohérence probabiliste n'a pas toujours été atteinte au départ puisque, par exemple, $P(e_2/e_3)$ passe de 0,3 à 0,65.

Il apparaît donc que même sur un exemple simplifié à 3 événements, il est difficile de fournir une information sans incohérence. On comprendra alors que pour des systèmes caractérisés par un plus grand nombre d'événements, il est quasi impossible de fournir une information probabiliste cohérente.

R₃ - Les conditions de Kühn et Tucker sont nécessaires mais non suffisantes dans notre modèle. Aussi, il existe un ensemble de points solutions qui vérifient ces conditions et c'est à l'intérieur d'un sous-ensemble de cet ensemble non totalement spécifié que nous choisissons une solution.

Concrètement, cela signifie que sous d'autres hypothèses que H_1, H_2, \dots, H_6 , on pourrait peut-être trouver d'autres points vérifiant les conditions de Kühn et Tucker et les contraintes. Envisager toutes les hypothèses serait difficile et, comme nous l'avons montré, certaines hypothèses semblent plus intéressantes que d'autres. En particulier, il est remarquable de constater que la meilleure des six hypothèses envisagées est celle annulant la probabilité π_5 qui n'apparaît qu'une fois dans les probabilités individuelles, lors de la définition de P_3 (cf. p.)

Finalement, la M.I.C. que nous proposons permet de traiter une information imparfaite et d'en inférer des résultats cohérents d'une part, avec les estimations du groupe d'experts et, d'autre part, avec les contraintes sur les probabilités.

C O N C L U S I O N

Le monde dans lequel nous vivons repose sur un réseau si complexe de relations interdépendantes qu'il est difficile d'observer l'évolution d'un système sans envisager les influences qu'il subit ainsi que les impacts qu'il provoque. Il faut donc replacer tout système dans un contexte plus global prenant en compte les aspects socio-politiques aussi bien que technologiques pour obtenir une vision la plus juste possible à un horizon donné.

L'esprit humain n'a pas la capacité de saisir l'ensemble des relations entre des évènements non indépendants et se limite le plus souvent à des comparaisons binaires. Un des outils les mieux adaptés se trouve être la méthode des Impacts Croisés proposée par L. GORDON en 1968. Elle a pour principal objectif de corriger les opinions exprimées par des experts en tenant compte des interdépendances entre les questions posées. Malheureusement les résultats ne sont pas toujours cohérents.

La méthode que nous proposons s'est attachée à obtenir cette cohérence en construisant à partir des probabilités des couples d'évènements isolés un ensemble de probabilités d'états vérifiant les axiomes classiques. De plus cette méthode présente l'avantage de donner la séquence des futurs possibles les plus probables, ce qui permet de construire directement des scénarii.

Cependant, pas plus qu'aucune autre méthodologie, cette nouvelle méthode d'Impacts Croisés ne constitue une panacée. Quel que soit le système étudié, le choix des variables et des relations dépend du système de valeurs des experts interrogés. Il convient donc d'être conscient du danger de manipulation de telles méthodes où les hypothèses de départ conditionnent fortement les résultats.

- B I B L I O G R A P H I E -

- Ouvrages généraux -

- I - Erich JANTSCH - Prospective et politique
O.C.D.E. - Paris - 1969
- II - Yves BAREL - Prospective et analyse de systèmes
Documentation Française - Paris 1971 -
- III - Lucien GOLDMAN - Logique et connaissance scientifique - La Pléiade
- IV - Gaston BACHELARD - L'esprit scientifique
Librairie Philosophique - J. VRIN

- Références particulières -

- V - A. DHALL E. FAGEN - Définition of system. Modern systems research
for the behavioral scientist - W. BUCKLEY -
Aldine Publishing 1968.
- VI - Jacques MELESE - L'analyse modulaire de système - Editions Hommes
et Techniques.
- VII - P. DELATTRE - Système, structure, fonction, évolution
Maloine Doin Editeurs
- VIII- Ross ASHBY - Introduction à la cybernétique
1956
- IX - PIAGET - Psychologie de l'intelligence
- X - SAMIR AMIN - L'accumulation à l'échelle mondiale
- XI - P.F. TENIERE BUCHOT - Modèle POPOLE
Analyse et prévision - Futuribles
Février-mars 1973.

- XII - J.C. DUPERRIN & M. GODET - Méthode de hiérarchisation des éléments
d'un système
Essai de prospective du système de l'énergie
nucléaire dans son contexte sociétal.
Rapport économique CEA R 4541 - décembre 1973.
- XIII-- P. ROBERTS - Pulse Processes on signed digraphs a tool for
analysing energy demand N S F 5926-5927
mars - avril 1972.
- XIV - HARARY, NORMAN, CARTWRIGHT - Structural models : - an introduction
to the theory of directed graphs -
Willey and Sons Inc. New-York - 1965.
- XV - T.J. GORDON - Initial Experiments with the cross impact matrix
method of forecasting
FUTURES - mars 1968
- XVI - N. DALKEY - An elementary cross impact model
Technological forecasting and social change
1972
- XVII - HOWARD - E. JOHSON - " Some computational aspects of cross impact
matrix forecasting"
FUTURES - juin 1970.
SELWYN ENZER - FUTURES de décembre 1970 et mars 1972.
- XVIII- J. VILLE - Etude critique de la Notion de collectif.
Gauthier-Villars - Paris - 1967
- XIX - A. KORGANOFF - M. PAVEL-PARVU - méthodes de calcul numérique - tome 2
Eléments de théorie des matrices carrées et rectangles -
DUNOD 1967.

- XX - A. GORDON - stimulations des facultés créatrices
La synectique
Editions Hommes et Techniques
- XXI - E. BOREL - Traité du calcul des probabilités et de ses
applications :
- 1 - Tome 1 : fascicule 1, principes et formules
classiques
- 2 - Tome 4 : fascicule 3, valeur pratique et
philosophie des probabilités
- XXII - H. NGUYEN NGOC - "Méthodes numériques des sous-programmes de la
rubrique ALGEBRE LINEAIRE"
Manuel C.I.S.I. n° 36, 1974.
- XXIII- Groupe de Travail Méthodologie de la Prévision et de
la Prospective - Ministère du Développement Industriel
et Scientifique - Octobre 1970.
- XXIV - A. BRETON - Les vases communicants - 1933.