



**HAL**  
open science

# Hiérarchies algébriques de classes d'automates cellulaires

Marianne Delorme, Jacques Mazoyer, Guillaume Theyssier

► **To cite this version:**

Marianne Delorme, Jacques Mazoyer, Guillaume Theyssier. Hiérarchies algébriques de classes d'automates cellulaires. [Rapport de recherche] LIp RR-2005-29, Laboratoire de l'informatique du parallélisme. 2005, 2+49p. hal-02102505

**HAL Id: hal-02102505**

**<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-02102505>**

Submitted on 17 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme**

École Normale Supérieure de Lyon  
Unité Mixte de Recherche CNRS-INRIA-ENS LYON n° 5668

***Hierarchies algébriques de classes  
d'automates cellulaires.***

Marianne Delorme, Jacques Mazoyer,  
Guillaume Theyssier

Juin 2005

Research Report N° 2005-29

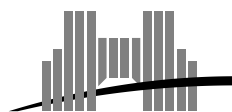
**École Normale Supérieure de Lyon**

46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Téléphone : +33(0)4.72.72.80.37

Télécopieur : +33(0)4.72.72.80.80

Adresse électronique : [lip@ens-lyon.fr](mailto:lip@ens-lyon.fr)



# Hierarchies algébriques de classes d'automates cellulaires.

Marianne Delorme, Jacques Mazoyer, Guillaume Theyssier

Juin 2005

## Abstract

Cellular automata are a formal model of locally interacting systems which is very simple but suitable to study complex systems in general. Many classifications have been proposed in the literature, often relying on the observation of dynamics. In a first part, we present more recent approaches of algebraic nature based on notions of sub-systems or embeddings. A second part, which is more technical, is dedicated to new results concerning these algebraic tools. This framework allows us to give formal definitions to several intuitive global notions (e.g., universality, particles) and to derive formal proofs of positive results and, more interestingly, of negative results. More precisely, we show that modifying local rules may be more powerful in some sense than increasing the number of states ; then, we illustrate by the construction of an infinite lattice that dynamical universality is incredibly more powerful than usual computation universality.

**Keywords:** Cellular Automata, Complexity, Computation, Universality, Algebraic Classifications, Methods.

## Résumé

Les automates cellulaires sont un modèle formel de systèmes définis par interactions locales qui est à la fois très simple et bien adapté à l'étude des systèmes complexes en général. Plusieurs classifications ont été proposées dans la littérature s'appuyant le plus souvent sur l'observation de leur dynamique. Dans une première partie, on présente les approches récentes de nature algébrique fondées sur les notions de sous-systèmes et d'injection. Une seconde partie, plus technique, est dédiée à de nouveaux résultats concernant ces outils algébriques. Ce cadre nous permet de donner des définitions formelles à plusieurs notions intuitives (en particulier, universalité et particules) et d'en déduire des preuves de résultats positifs ainsi, que ce qui est ici plus intéressant, des résultats négatifs. Plus précisément, on montre qu'en un certain sens modifier les règles locales est plus puissant qu'augmenter le nombre d'états ; puis, nous illustrons par la construction d'un treillis infini que l'universalité pour la dynamique est plus puissante que la notion usuelle d'universalité pour le calcul.

**Mots-clés:** Automates cellulaires, Complexité, Calculs, Universalité, Classifications algébriques, Méthodes

# 1 Introduction et motivations

L'origine de l'étude des automates cellulaires remonte, à la fin des années 1950, aux travaux de J. von Neumann [25] et S. Ulam d'une part et K. Suze [27] d'autre part. L'objectif était alors de modéliser soit l'auto-reproduction chez les êtres vivants, soit les lois de la physique. Depuis lors, outre de très nombreuses modélisations dans des domaines très variés, les automates cellulaires ont été étudiés en tant que tels. Historiquement, trois directions sont apparues : l'étude des propriétés « ensemblistes » des automates cellulaires (injectivité, surjectivité, définition topologique, ...), la définition d'algorithmes sur automates cellulaires, vus comme un modèle possible du parallélisme massif, et la classification des automates cellulaires.

Ici, nous ne considérons que le dernier point. Usuellement, les automates cellulaires sont constitués de machines finies, toutes identiques (modélisées par des automates finis), placées aux sommets d'un graphe « régulier » (la définition précise de la notion de régularité n'existe pas ; il s'agit de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^n$ , d'un graphe de Cayley, ...), interagissant de façon synchrone suivant un motif de communication uniforme et fini. Le fait que les machines composantes soient finies n'est pas une vraie contrainte car elles permettent de simuler des machines infinies en augmentant la dimension de l'espace et en projetant suivant une direction. Pour préciser la problématique de la classification nous introduisons la définition usuelle d'automate cellulaire sur  $\mathbb{Z}$ , cadre auquel nous nous restreindrons.

- Définition 1**
1. *Un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  est un triplet  $(Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  où  $Q_{\mathcal{A}}$  est un ensemble fini (les états),  $V_{\mathcal{A}} = \{z_0, \dots, z_\ell\}$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}$  (le voisinage) - qu'on suppose contenir 0 (bien que ce ne soit pas nécessaire) - et  $\delta_{\mathcal{A}}$  est une application de  $Q_{\mathcal{A}}^{\ell+1}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}$ .*
  2. *Une configuration  $c$  est une application de  $\mathbb{Z}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}$  (élément de  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ ). Un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  agit sur  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$  via sa fonction globale de transition,  $\Delta_{\mathcal{A}}$ , par*

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_{\mathcal{A}}(c(z)) = \delta_{\mathcal{A}}(c(z+z_0), \dots, c(z+z_\ell)).$$

Ainsi, un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  apparaît comme un système dynamique discret d'ensemble de phases  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$  et de fonction  $\Delta_{\mathcal{A}}$ .

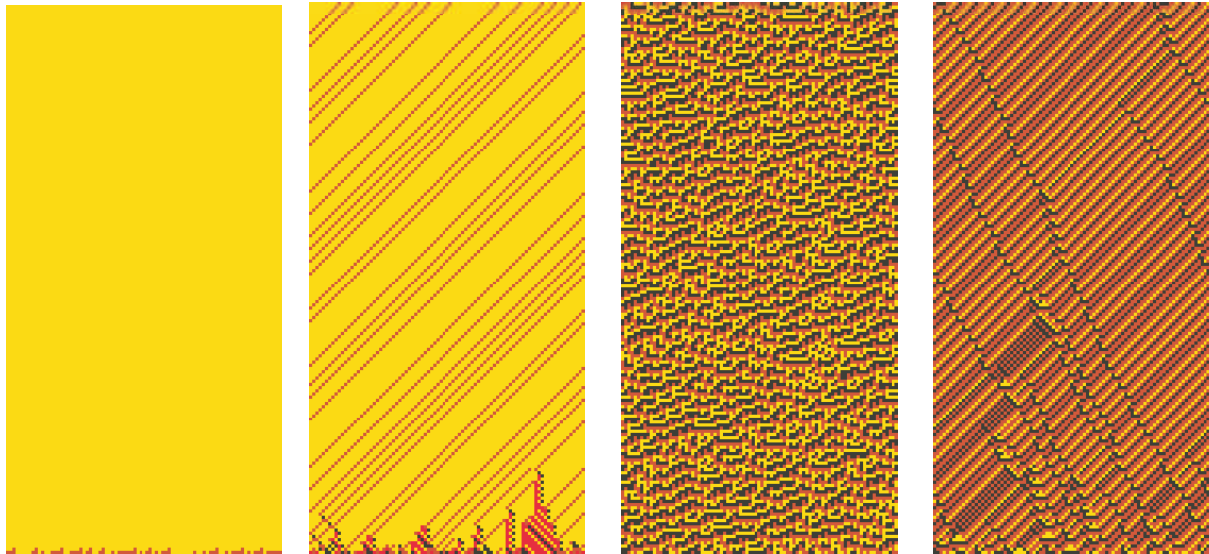
3. *L'orbite de  $\Delta_{\mathcal{A}}$  sur  $c$  est appelée diagramme espace-temps de  $\Delta_{\mathcal{A}}$  sur  $c$  et notée  $\text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)$ . L'orbite  $\text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)$  peut être visualisée car elle est une application de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}$ , définie par*

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)((z, n)) = \Delta_{\mathcal{A}}^n(c)(z).$$

La Figure 12 montre quelques diagrammes espace-temps (le temps va de bas en haut) : on observe des comportements globaux différents. Classifier les automates cellulaires apparaît pour la première fois dans les travaux de S. Wolfram [26] ; cette classification est empirique et on peut la résumer ainsi : le comportement « typique » d'un automate cellulaire (celui qui apparaît dans une orbite obtenue à partir d'une configuration aléatoire) est d'un des quatre « types » illustrés par la Figure 12. Les quatre types en jeu sont mal définis dans [26] ; actuellement, ils sont résumés par : conduire à une configuration uniforme, conduire à une configuration régulière (périodique), être chaotique, faire apparaître des particules. Classifier apparaît alors comme :

- donner un ensemble (fini ou infini) de propriétés sur les orbites (propriétés intéressantes pour mettre en évidence un phénomène émergent ; chaos par exemple) permettant de faire une partition de l'ensemble des automates cellulaires (toutes les orbites - presque toutes (pour une mesure donnée) - d'un automate cellulaire ont une de ces propriétés) ;
- en souhaitant qu'on puisse caractériser les fonctions globales et, si possible, locales vérifiant l'une des propriétés et/ou donner des algorithmes de décision (ou de semi-décision) sur les fonctions locales ( $\delta_{\mathcal{A}}$ ).

Cet objectif de classification semble irréaliste [1], notamment par le fait que de nombreuses propriétés dynamiques sont indécidables (un automate cellulaire peut simuler une machine de Turing [24]). Néanmoins, de nombreux auteurs [7, 8, 11, 12, 13] ont cherché à préciser différents aspects des intuitions de [26]. Un exemple montre bien que les propriétés choisies dépendent de l'objectif, celui de la classification de P. Kůrka [12] : lorsqu'on munit  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$  de la topologie de Cantor, un automate cellulaire est soit équicontinu, soit a des points d'équicontinuité, soit est sensible mais pas expansif, soit est expansif. L'intérêt est alors de donner un sens à la notion de chaos (ici, être expansif). Cependant, le décalage  $((Q, \{-1, 0, +1\}, \delta(a, b, c) = a))$  est alors chaotique ce qui correspond à une certaine interprétation du



(a) Automate de la classe 1 de S.Wolfram.

(b) Automate de la classe 2 de S.Wolfram.

(c) Automate de la classe 3 de S.Wolfram.

(d) Automate de la classe 4 de S.Wolfram.

FIG. 1 – Automates caractéristiques des classes de S. Wolfram.

chaos (toute erreur est magnifiée par l'évolution). Avec une autre interprétation (est chaotique ce qui n'est pas intelligible), le décalage n'est pas chaotique. Deux voies ont été explorées : revoir les conditions topologiques du chaos avec la topologie de Cantor [3] ou considérer une autre topologie, par exemple la topologie de Besicovich [4].

Dans ce texte, on présente et on continue l'étude d'un type de classification qui semble adaptée aux sous-automates du type 4 : on compare les sous-automates selon la puissance de représentation de l'ensemble de leurs orbites.

## 2 Comparaisons d'orbites et d'ensembles d'orbites

### 2.1 Opérations de groupage

La définition 20 montre que deux automates différents peuvent avoir mêmes orbites (en augmentant inutilement le voisinage); de fait, un automate cellulaire peut être défini autrement [9].

**Théorème 1** *Soit  $S$  un ensemble fini, l'espace  $S^{\mathbb{Z}}$  étant muni de la topologie de Cantor, les fonctions continues commutant avec le décalage sont les fonctions globales des automates cellulaires.*

Pour comparer les automates cellulaires entre eux nous comparons, de fait, toutes les fonctions continues commutant avec le décalage sur  $S_n^{\mathbb{Z}}$  où  $S_n$  est l'ensemble d'entiers  $\{0, \dots, n-1\}$  (à un renommage près nous les considérons toutes) lorsque l'entier  $n$  varie dans  $\mathbb{N}_+$  (cet ensemble de fonctions est noté  $\mathfrak{F}$ ). Une telle fonction est représentée par l'ensemble de ses orbites, c'est-à-dire l'ensemble des diagrammes espace-temps sur toutes les configurations initiales possibles. En d'autres termes, on considère des ensembles de diagrammes espace-temps structurés par des dépendances locales (les fonctions locales) comme ceux illustrés sur la Figure 13.

Lorsqu'on observe une orbite, application de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  dans  $S_n$ , on peut la paver par une pièce unique de sorte que les interactions entre pièces soient encore locales (voir Figure 14); lorsque cette opération est uniforme, l'ensemble des orbites d'un automate cellulaire est vue comme l'ensemble des orbites d'un (même) autre automate cellulaire et on dit qu'on passe du premier au second via l'opération de « groupage », définie par la pièce pavant le plan. L'étude des pièces convenant est menée dans [20]; ici, nous ne considérerons que des pièces rectangulaires avec un possible décalage (voir Figure 14). Ces remarques

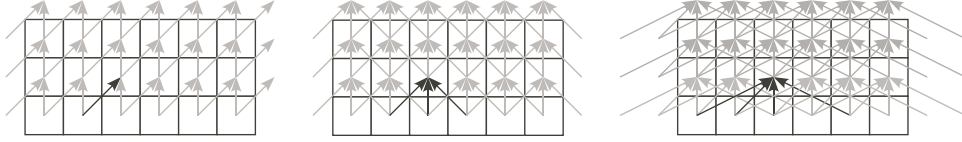


FIG. 2 – Exemple de dépendances : cas des voisinages  $\{-1, 0\}$ ,  $\{-1, 0, +1\}$  et  $\{-2, -1, 0, +2\}$ .

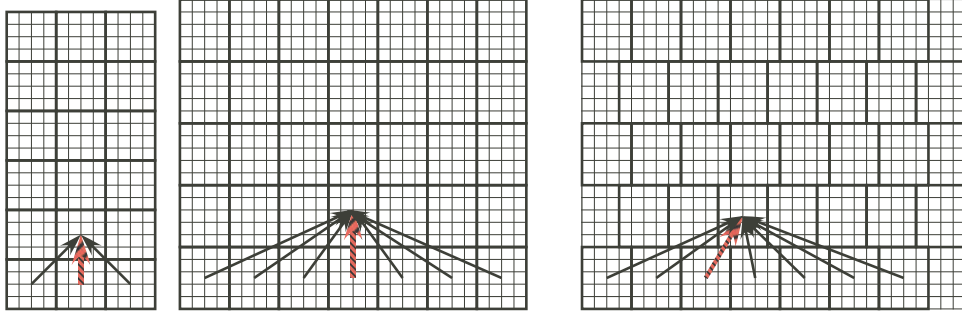


FIG. 3 – Exemples de pavages par des carrés, des rectangles sans et avec décalage; les flèches indiquent les nouvelles dépendances quand les premières correspondent au voisinage  $\{-1, 0, +1\}$ .

se formalisent par les définitions équivalentes suivantes ( $\zeta$  est une bijection - calculable - quelconque de  $\mathbb{N}$  sur les suites finies d'entiers ( $\zeta_i(n)$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  composante de  $\zeta(n)$ ) :

**Définition 2 (Groupage via les fonctions globales)**

1. Soit  $m \in \mathbb{N}_+$ , on définit l'application  $\mathcal{O}_m$  de  $\mathfrak{F}$  dans  $\mathfrak{F}$  par :  $\forall f \in \mathfrak{F}$ ,  $S_\ell^{\mathbb{Z}}$  étant le domaine de définition de  $f$ ,  $\mathcal{O}_m(f)$  est l'élément de  $\mathfrak{F}$ 
  - de domaine  $S_{o(\ell)}$  avec  $o(\ell) = |\zeta^{-1}(S_\ell^m)|$  ;
  - à toute configuration  $c$  de  $S_\ell^{\mathbb{Z}}$ , on fait correspondre la configuration  $o_m(c)$  de  $S_{o(\ell)}^{\mathbb{Z}}$  définie par :  $\forall z \in \mathbb{Z}$ ,  $o_m(c)(z) = \zeta^{-1}(c(mz), \dots, c(mz + m - 1))$  ;
  - à toute configuration  $c$  de  $S_{o(\ell)}^{\mathbb{Z}}$ , on fait correspondre la configuration  $\overline{o}_m(c)$  de  $S_\ell^{\mathbb{Z}}$  définie par :  $\forall h \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall k \in \{0, \dots, m - 1\}$ ,  $\overline{o}_m(c)(hm + k) = \zeta_k(c(h))$  ;
  - $\forall c \in S_{o(\ell)}^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{O}_m(f)(c) = o_m(f(\overline{o}_m(c)))$ .

Partant d'une configuration  $c$  sur l'alphabet  $S_{o(\ell)}$ , on éclate chaque point (cellule) de  $\mathbb{Z}$  en  $m$  cellules via  $\zeta$  ; puis, on fait agir  $f$  sur cette configuration d'éléments de  $S_\ell$ , et on regroupe  $m$  cellules en une seule, en commençant à cellule de rang 0. Ainsi, dans une configuration pour  $f$ , on groupe les points de  $\mathbb{Z}$  par paquets de  $m$ , en commençant à l'origine.

2. A tous entiers  $m, n$  ( $n \geq 1$ ), à tout entier relatif  $s$ , à toute fonction  $f$  de  $\mathfrak{F}$ , on fait correspondre la fonction  $f^{(m,n,s)}$  de  $\mathfrak{F}$  définie par :

$$f^{(m,n,s)} = \mathcal{O}_m^{-1} \circ \sigma^s \circ f^n \circ \mathcal{O}_m$$

où  $\sigma$  est le décalage à droite de domaine le domaine de  $f$ .

3. Une fonction  $f$  de  $\mathfrak{F}$  s'envoie par groupage de paramètres  $(m, n, s)$  sur une fonction  $g$  de  $\mathfrak{F}$  si  $g = f^{(m,n,s)}$ .

**Définition 3 (Groupage via les fonctions locales)**

1. A tous entiers  $m, n$  ( $n \geq 1$ ), à tout automate cellulaire  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} = \{-h_{\mathcal{A}}, \dots, 0, \dots, +k_{\mathcal{A}}\}$ , on fait correspondre la fonction  $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}$  de  $Q_{\mathcal{A}}^{m+n(h_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}})}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}^m$  définie par induction sur  $n$  :

- $\forall q_{-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+k_{\mathcal{A}}} \in Q_{\mathcal{A}}$ ,  
 $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,1)}(q_{-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+k_{\mathcal{A}}}) = (\delta_{\mathcal{A}}(q_{-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{k_{\mathcal{A}}}), \dots, \delta_{\mathcal{A}}(q_{m-1-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+k_{\mathcal{A}}}))$   
(on applique  $\delta_{\mathcal{A}}$  à  $m$   $(h_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{A}} + 1)$ -uplets d'états successifs) ;
- $\forall q_{-(n+1)h_{\mathcal{A}}} \dots q_0, \dots, q_{m-1} \dots, q_{m-1+(n+1)k_{\mathcal{A}}} \in Q_{\mathcal{A}}$ ,  
 $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n+1)}(q_{-(n+1)h_{\mathcal{A}}} \dots q_0, \dots, q_{m-1} \dots, q_{m-1+(n+1)k_{\mathcal{A}}}) =$

$\delta_A^{(m,n)} (\delta_A (q_{-(n+1)h_A} \cdots q_{-nh_A+k_A}), \dots, \delta_A (q_{m-1+(n+1)k_A-h_A-1} \cdots q_{m-1+(n+1)k_A}))$   
(on applique  $\delta_A^{(m,n)}$  à  $m + (n-1)(h_A + k_A)$   $(h_A + k_A + 1)$ -uplets d'états successifs obtenus via  $\delta_A$ ).

2. A tous entiers  $m, n$  ( $n \geq 1$ ), à tout entier relatif  $s$ , à tout automate cellulaire  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} = \{-h_{\mathcal{A}}, \dots, 0, \dots, +k_{\mathcal{A}}\}$ , on fait correspondre la fonction

$\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)}$  de  $Q_{\mathcal{A}}^{m+n(h_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}})+s}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}^m$  définie par :

-  $\forall q_{-nh_{\mathcal{A}}} \cdots q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s} \in Q_{\mathcal{A}}$ ,

$\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)} (q_{-nh_{\mathcal{A}}} \cdots q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s}) = \delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)} (q_{-nh_{\mathcal{A}}} \cdots q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}})$  (si  $s \geq 0$ )

$\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)} (q_{-nh_{\mathcal{A}}} \cdots q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s}) = \delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)} (q_{-nh_{\mathcal{A}}+s} \cdots q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s})$  (si  $s \leq 0$ )

on applique  $s$  décalages à  $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}$ .

3. Un automate cellulaire  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} = \{-h_{\mathcal{A}}, \dots, 0, \dots, +k_{\mathcal{A}}\}$  s'envoie par groupage de paramètres  $(m, n, s)$  sur un automate cellulaire  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  s'il existe une bijection  $\phi$  de  $Q_{\mathcal{A}}^m$  sur  $Q_{\mathcal{B}}$  et, si  $|V_{\mathcal{B}}| = \frac{g(m,n,s)}{m}$  où  $g(m,n,s)$  est le plus petit multiple de  $m$  plus grand que  $m + (n-1)(h_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{A}}) + s$ ,  $\forall q_0 \cdots q_{m+(n-1)(h_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}})+s-1}$ ,

$$\phi \left( \delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)} (q_0 \cdots q_{m+(n-1)(h_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}})+s-1}) \right) = \delta_{\mathcal{B}} \left( \underbrace{\left( \phi(q_{im}) \cdots \phi(q_{im+m-1}) \right)}_{\substack{m \text{ éléments} \\ \frac{g(m,n,s)}{m} \text{ fois}}} \right).$$

$\mathcal{B}$  est noté  $\mathcal{A}^{(m,n,s)}$  et désigné comme un  $(m, n, s)$ -groupé de  $\mathcal{A}$ .

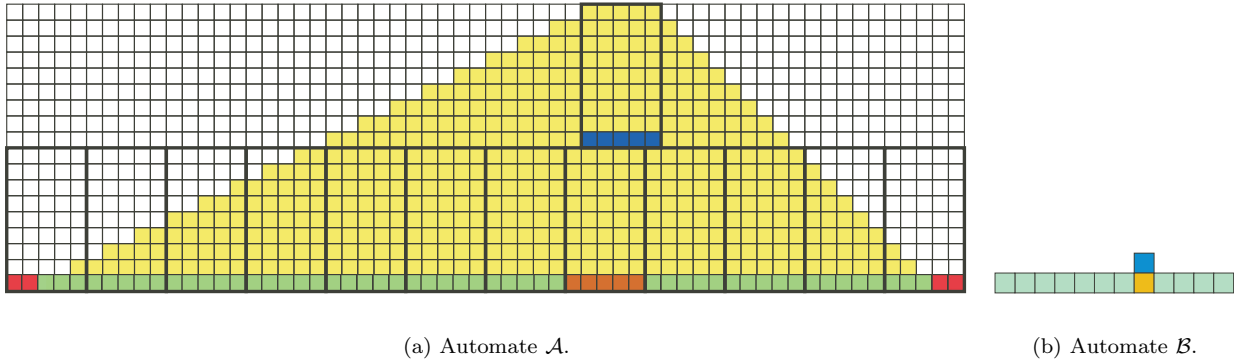


FIG. 4 – Exemple de groupage de paramètres  $m = 5$ ,  $n = 9$  et  $s = 1$ . On a  $h_{\mathcal{A}} = 2$  et  $k_{\mathcal{A}} = 1$ . La zone en jaune indique les dépendances dans  $\mathcal{A}$ . On a  $h_{\mathcal{B}} = 7$  et  $k_{\mathcal{B}} = 4$ .

L'équivalence entre les deux définitions provient de [23, 20]. La Figure 15 montre un exemple où le plan  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  est pavé par des rectangles avec décalage : on observe que la connaissance de tous les états de la configuration initiale de  $\mathcal{A}$  appartenant aux rectangles permettant de calculer un nouveau rectangle de  $\mathcal{A}$  permet de connaître ce nouvel état de  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{(5,9,1)}$  (base d'un rectangle d'états de  $\mathcal{A}$ ).

Dans la suite  $\mathfrak{F}$  représentera l'ensemble des fonctions continues commutant avec le décalage (pour un  $S_{\ell}$ ) ou l'ensemble des automates cellulaires de la définition 20 selon le contexte.

Intuitivement, la fonction de groupage (qui à  $f$  fait correspondre  $f^{(m,n,s)}$ ) consiste à « changer d'échelle, en regroupant des états » de façon uniforme sur toutes les orbites de  $f$ . On peut considérer que  $f^{(m,n,s)}$  est un codage « effectif » de  $f$ , transportant toutes les propriétés algorithmiques de  $f$ . Observons qu'intuitivement on passe alors de  $f^{(m,n,s)}$  à  $f$  en structurant l'ensemble des états de  $f^{(m,n,s)}$  via  $\zeta^{-1}$  et en « changeant d'échelle en éclatant les états ». Les différentes fonctions de groupage induisent différentes relations d'équivalence sur  $\mathfrak{F}$ ,  $\sim_1, \sim_2, \sim_3$  :

**Définition 4** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathfrak{F}$  :

1.  $f \sim_1 g$  si et seulement s'il existe  $m_f, m_g \in \mathbb{N}$  tels que  $g = f^{(m_f, m_f, 0)}$  et  $f = g^{(m_g, m_g, 0)}$ .
2.  $f \sim_2 g$  si et seulement s'il existe  $m_f, m_g, n_f, n_g \in \mathbb{N}$  tels que  $g = f^{(m_f, n_f, 0)}$  et  $f = g^{(m_g, n_g, 0)}$ .

3.  $f \underset{3}{\sim} g$  si et seulement si il existe  $m_f, m_g, n_f, n_g \in \mathbb{N}$  et  $s_f, s_g \in \mathbb{Z}$  tels que  $g = f^{(m_f, n_f, s_f)}$  et  $f = g^{(m_g, n_g, s_g)}$ .

Notons que  $\underset{3}{\sim}$  raffine  $\underset{2}{\sim}$  et  $\underset{2}{\sim}$  raffine  $\underset{1}{\sim}$ . La classe d'équivalence de  $\mathcal{A}$  est notée  $\mathfrak{A}_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ). Tous les décalages vers la droite  $\sigma_\ell$  (de domaine  $S_\ell$  définis par  $\sigma_\ell(c)(z) = c(z - 1)$ ) sont dans même la classe  $\mathfrak{S}_1$ ; dans  $\mathfrak{S}_2$ , on trouve aussi les fonctions  $\text{Id}_\ell^k \circ \sigma_\ell$  ( $\text{Id}_\ell$  est l'identité sur  $S_\ell$ ), décalage une fois sur  $k + 1$ ; enfin,  $\text{Id}_\ell$  appartient à  $\mathfrak{S}_3$ .

On a donc défini des classes d'automates cellulaires équivalents via des opérations de groupage; maintenant examinons comment comparer ces classes entre elles de façon « naturelle ».

## 2.2 Ordre induit par injection

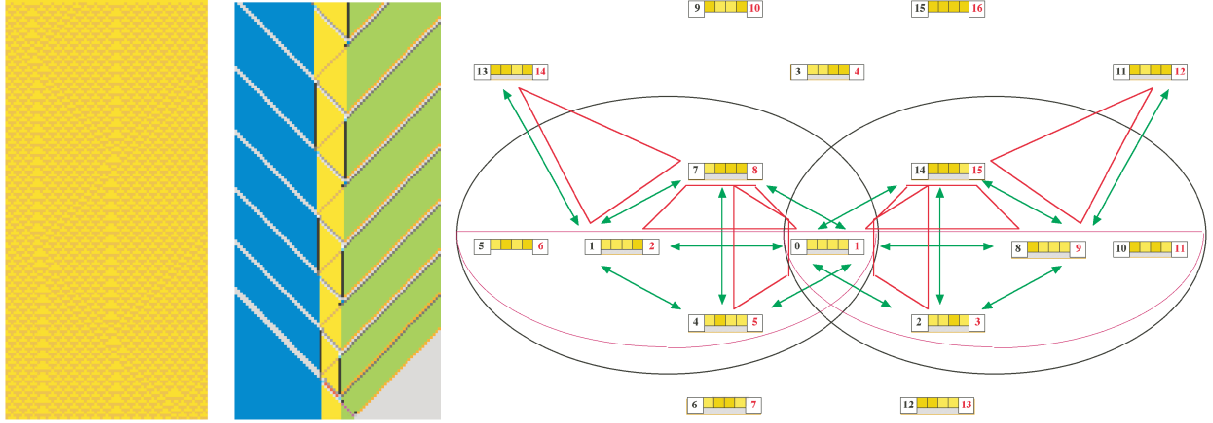


FIG. 5 – L'automate 54 (l'état 0 est jaune et l'état 1 est marron) et son groupé  $54^{(4,4,0)}$ . Les états de  $54^{(4,4,0)}$  sont représentés par une suite de 4 états de 54, et leur numéro dans l'ordre lexicographique.

La Figure 16 montre quelques propriétés de l'automate 54 (dans la numérotation de S. Wolfram [26]) de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$ . La partie gauche montre une orbite sur une configuration particulière : autour d'un segment de 32 points de  $\mathbb{Z}$  elle est périodique dans les deux directions (avec des périodes différentes). La partie centrale de la figure donne l'orbite de la même configuration dans  $54^{(4,4,0)}$ . On observe que, dans ces deux représentations d'une même orbite, apparaissent la branche gauche d'une parabole discrète et son axe de symétrie : ce phénomène est plus visible par groupage, donc dans  $54^{(4,4,0)}$  (zone jaune). Observant un tel diagramme espace-temps, on aimerait le décrire ainsi : « il apparaît des particules (signaux) de nature différentes : se déplaçant vers la droite, la gauche, restant sur place et leurs collisions construisent une demi-parabole ». Sur la figure centrale, une particule est marquée par un changement d'état (frontières entre les bandes bleues et grises ou jaune et vertes) : on imagine que  $\sigma_2^{-1}$  (décalage vers la gauche sur deux états) représente les interactions entre les états bleus et gris de la figure centrale. Si tel est le cas,  $\sigma_2^{-1}$  est un automate cellulaire, partie stable de  $54^{(4,4,0)}$  (sous-automate de  $54^{(4,4,0)}$ ). La figure de droite montre les sous-automates de  $54^{(4,4,0)}$  : les états « quiescents » (tels que  $\delta(q, q, q) = q$ ) donnent les sous-automates à un état et sont indiqués par une barre grise au-dessous de leur description ; ceux à deux états le sont par des flèches vertes, les autres par des triangles, quadrilatère, ... rouges, violets ou noir. Ainsi on retrouve que l'état (0001) correspondant au carré  $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ , numéroté 1 (en noir sur la figure de droite et représenté en bleu sur la figure centrale) est un sous-automate. Il en est de même pour (1101) représentant  $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$ , numéroté 13 (en noir sur la figure de droite et représenté en gris sur la figure centrale). On retrouve  $\sigma_2^{-1}$  (flèche entre les états 1 et 13). Une étude plus complète de  $54^{(4,4,0)}$  se trouve dans [2] et [14].

Intuitivement, à un groupage près, la règle 54 est plus puissante que  $\sigma_2^{-1}$  (au sens que les orbites de  $54^{(4,4,0)}$  contiennent les images de toutes les orbites de  $\sigma_2^{-1}$ ), voire plus « complexe » (tout phénomène global apparaissant dans les orbites de  $\sigma_2^{-1}$  apparaît dans celles de  $54^{(4,4,0)}$ ). Ces remarques conduisent à :



**Définition 5** Soient  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  et  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  deux automates cellulaires, on dit que

1.  $\mathcal{A}$  est un sous-automate de  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ , s'il existe une injection  $\iota$  de  $Q_{\mathcal{A}}$  dans  $Q_{\mathcal{B}}$  telle que  $\delta_{\mathcal{B}}$  soit stable sur  $\iota(Q_{\mathcal{A}})$ .
2.  $\mathcal{A}$  est inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage carré, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_1} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}, 0)} \sqsubseteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
3.  $\mathcal{A}$  est inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_2} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, 0)} \sqsubseteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
4.  $\mathcal{A}$  est inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire avec décalage, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_3} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  et  $s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}} \in \mathbb{Z}$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}})} \sqsubseteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}})}$ .

**Proposition 1** Les relations  $\preceq_{\square_1}$ ,  $\preceq_{\square_2}$  et  $\preceq_{\square_3}$  sont des relations de pré-ordre (voir [23, 20]).

On obtient alors des relations d'ordre, encore notées  $\preceq_{\square_1}$ ,  $\preceq_{\square_2}$  et  $\preceq_{\square_3}$ , en passant aux classes d'équivalence,  $\sim_1^{\square}$ ,  $\sim_2^{\square}$  et  $\sim_3^{\square}$ , induites par ces préordres. Les classes d'équivalence d'un automate cellulaire pour  $\sim_i^{\square}$  sont notées  $\bar{\mathcal{A}}^i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

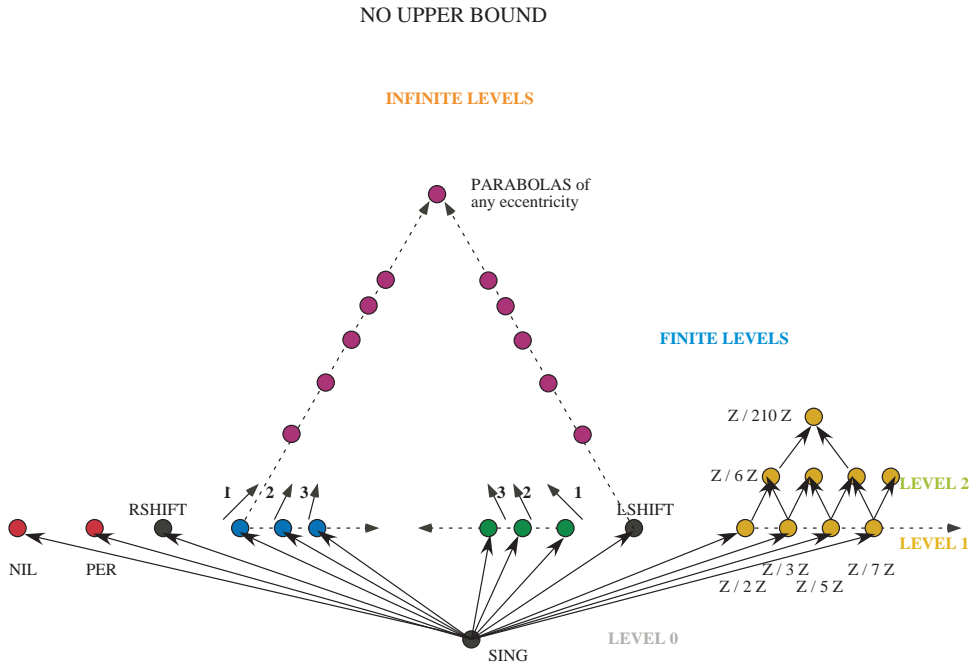


FIG. 6 – Ordre des classes  $\bar{\mathcal{A}}^i$ , obtenues par groupage carré avec injection.

L'ordre sur les classes obtenues par groupage carré avec injection est étudié dans [23, 15] et est illustré par la Figure 17. On a un plus petit élément (automates à un seul état); puis immédiatement au-dessus plusieurs classes (celles des automates nilpotents, les automates qui évoluent toujours vers une configuration périodique, les classes concernant ou  $\sigma$  ou  $\text{Id}^k \circ \sigma$  ou  $\sigma^{-1}$  ou  $\text{Id}^k \circ \sigma^{-1}$ , et les automates de voisinage  $\{-1, +1\}$  sur  $S_p$  représentant  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$  avec  $p$  premier). Il existe des chaînes infinies croissantes et, donc, des classes avec une infinité de classes plus petites. Notons [23] qu'il n'existe pas d'élément maximal. Dans [18], il est montré que savoir si un automate appartient à la classe des nilpotents (toute configuration évolue vers la même configuration uniforme) est indécidable. Ainsi l'appartenance à une classe pour  $\preceq_{\square_1}$  peut être indécidable et on conjecture que c'est le cas général.

L'ordre obtenu par groupage rectangulaire avec injection est étudié dans [20] et est illustré par la Figure 18. Il présente des différences attendues : toutes les classes de  $\preceq_{\square_1}$  correspondant à  $\text{Id}^k \circ \sigma$  - resp.  $\text{Id}^k \circ \sigma^{-1}$  - avec  $k \in \mathbb{N}$  sont regroupées en une classe (« avoir une particule vers la droite - resp. la gauche -). Le fait marquant est la présence d'un plus grand élément : les automates dits « intrinsèquement universels » [22] avec un représentant  $\mathcal{U}$  à seulement 6 états [21]. En outre, pour chaque sous-automate

cellulaire  $\mathcal{A}$ , il existe un groupage rectangulaire de paramètres  $(n, m, 0)$  tel que  $\mathcal{A}^{(n, m, 0)} \sqsubseteq_2 \mathcal{U}$  (voir [20]). Qui plus est, dans [22], il est montré qu'entre toute classe  $\mathcal{A} \sqsubseteq_2$  et  $\mathcal{U} \sqsubseteq_2$ , il existe une suite infinie croissante de classes pour  $\sqsubseteq_2$ . L'absence d'élément maximum pour  $\sqsubseteq_1$  [17], montre que pour avoir un automate intrinsèquement universel, il faut avoir de la redondance, donc avoir  $m > n$ .

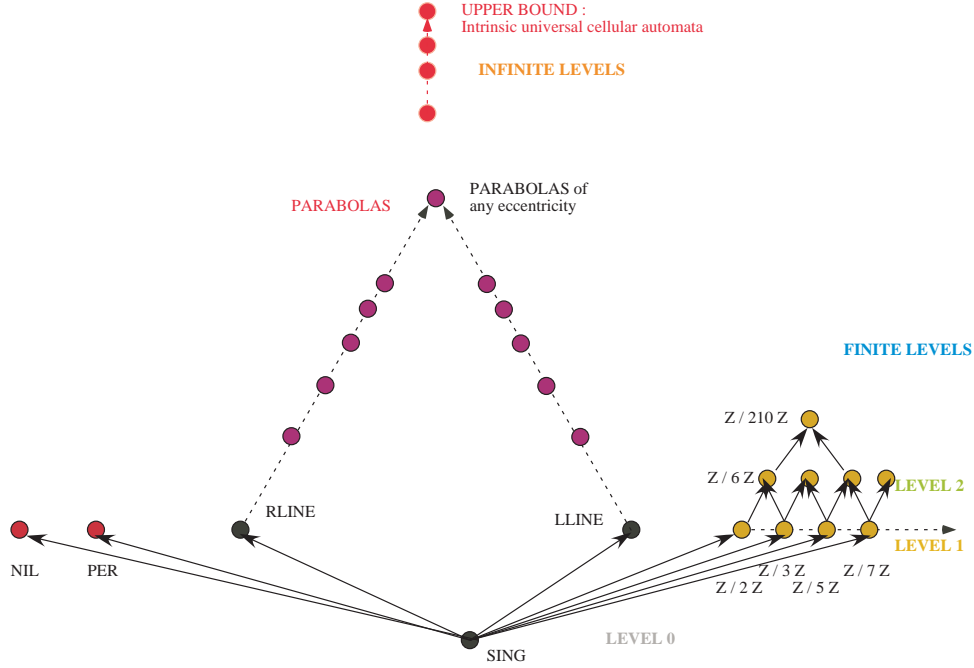


FIG. 7 – Ordre des classes  $\mathcal{A} \sqsubseteq_2$ , obtenues par groupage rectangulaire avec injection.

L'ordre sur les classes obtenues par groupage rectangulaire avec décalage et injection est semblable à l'ordre induit par  $\sqsubseteq_2$  : simplement, il regroupe les classes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  quand  $\mathcal{A} = \sigma \circ \mathcal{B}$ . Son intérêt principal est que dans toute classe il existe un représentant de voisinage  $\{-1, 0\}$  via la simulation de tout automate par un automate de voisinage  $\{-1, 0\}$  de [5].

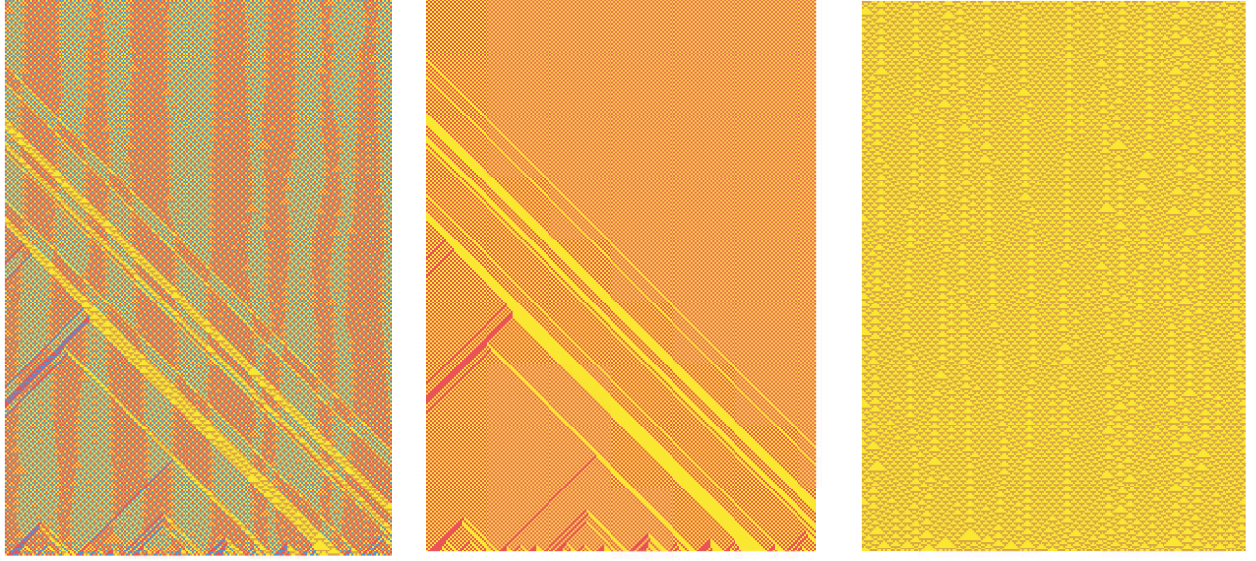
Dans tous les cas, on montre que les classes des automates de voisinage  $\{-1, 0\}$  sur  $S_p$  représentant  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$  ont une structure de treillis qui correspond à celle des groupes  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ . Cela n'est pas général. Si on note par  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  le produit de  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{B}$ , de même voisinage et défini à une bijection près par  $\delta_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((q_{A,0}, q_{B,0}), \dots, (q_{A,\ell}, q_{B,\ell})) = (\delta_{\mathcal{A}}(q_{A,0}, \dots, q_{A,\ell}), \delta_{\mathcal{B}}(q_{B,0}, \dots, q_{B,\ell}))$ , on a toujours  $\mathcal{A} \sqsubseteq_i \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B} \sqsubseteq_i \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  mais  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  n'est pas en général le maximum de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{B}$  [20].

### 2.3 D'autres ordres

La Figure 19 montre l'automate  $\mathcal{P}$  produit  $54 \times 184$  de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$  codé ainsi : il a 4 états  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Pour obtenir  $\delta_{\mathcal{P}}(q_\ell, q_c, q_r)$  on procède comme suit : soit  $\alpha \in \{\ell, c, r\}$

- si  $q_\alpha \geq 2$  on pose  $q'_\alpha = q_\alpha - 2$ , et on calcule  $q = \delta_{54}(q'_\ell, q'_c, q'_r)$  ;
- aux états  $q_\ell, q_c, q_r$  on fait correspondre  $q^*_\ell, q^*_c, q^*_r$  de  $\{0, 1\}$  par  $q^*_\alpha = 0$  si  $q_\alpha \in \{0, 1\}$  et  $q^*_\alpha = 1$  si  $q_\alpha \in \{2, 3\}$  puis on calcule  $q^\# = \delta_{184}(q^*_\ell, q^*_c, q^*_r)$  ;
- $\delta_{\mathcal{P}}(q_\ell, q_c, q_r)$  est enfin  $q$  si  $q^\# = 0$  et  $q + 2$  sinon.

Alors  $54 \sqsubseteq_1 54 \times 184$  et  $184 \sqsubseteq_1 54 \times 184$ . Les états 0 et 1 (resp. 2 et 3) forment un sous-automate dont la règle est 54. On observe que (Figure 19 b)) en identifiant les états 0 et 1 d'une part et les états 2 et 3 d'autre part, on obtient encore un sous-automate cellulaire de  $\mathcal{P}$  qui est 184 et que (Figure 19 c)) en identifiant les états 0 et 2 d'une part et les états 1 et 3 d'autre part, on obtient aussi un sous-automate cellulaire de  $\mathcal{P}$  qui est 54. Cette idée d'identifier des états nous donne une autre façon de comparer des automates.



(a) Automate  $\mathcal{P}$ .

(b) Sous-automate 184 de S.Wolfram.

(c) Sous-automate 54 de S.Wolfram.

FIG. 8 – Automate  $54 \times 184$ .

**Définition 6** Soient  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  et  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} \subseteq V_{\mathcal{B}}$  deux automates cellulaires, on dit que

1.  $\mathcal{A}$  est un automate projeté de  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ , s'il existe une surjection  $s$  de  $Q_{\mathcal{B}}$  sur  $Q_{\mathcal{A}}$  telle que  $\forall q_0, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1} \in Q_{\mathcal{B}}, \forall q_0^*, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1}^* \in Q_{\mathcal{B}}$ , si  $s(q_0) = s(q_0^*), \dots, s(q_{V_{\mathcal{A}}-1}) = s(q_{V_{\mathcal{A}}-1}^*)$ , alors  $\delta_{\mathcal{A}}(s(q_0), \dots, s(q_{V_{\mathcal{A}}-1})) = s(\delta_{\mathcal{B}}(q_0, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1})) = s(\delta_{\mathcal{B}}(q_0^*, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1}^*))$ .
2.  $\mathcal{A}$  est  $\trianglelefteq$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage carré, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq_1} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}, 0)} \trianglelefteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
3.  $\mathcal{A}$  est  $\trianglelefteq$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq_2} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, 0)} \trianglelefteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
4.  $\mathcal{A}$  est  $\trianglelefteq$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire avec décalage, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq_3} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  et  $s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}} \in \mathbb{Z}$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}})} \trianglelefteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}})}$ .

**Proposition 2** Les relations  $\preceq_{\trianglelefteq_1}$ ,  $\preceq_{\trianglelefteq_2}$  et  $\preceq_{\trianglelefteq_3}$  sont des relations de pré-ordre (voir [15]).

On obtient alors des relations d'ordre, encore notées  $\preceq_{\trianglelefteq_1}$ ,  $\preceq_{\trianglelefteq_2}$  et  $\preceq_{\trianglelefteq_3}$ , en passant aux classes d'équivalence  $\sim_1^{\trianglelefteq}$ ,  $\sim_2^{\trianglelefteq}$  et  $\sim_3^{\trianglelefteq}$ , induites par ces préordres. Les classes d'équivalence d'un automate cellulaire pour  $\sim_i^{\trianglelefteq}$

sont notées  $\overline{\mathcal{A}}^{\trianglelefteq_i}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

La structure des classes via  $\sim_1^{\trianglelefteq}$ ,  $\sim_2^{\trianglelefteq}$ ,  $\sim_3^{\trianglelefteq}$  reste à étudier. Néanmoins, on a encore un élément minimum; des classes de  $\sim_1^{\square}$ ,  $\sim_2^{\square}$ ,  $\sim_3^{\square}$  sont conservées comme les nilpotents et on a aussi des chaînes infinies croissantes. Par contre, on ignore s'il existe un élément maximum.

Dans le cas des classes obtenues via  $\sim_1^{\square}$ ,  $\sim_2^{\square}$ ,  $\sim_3^{\square}$  (section 7.2), l'interprétation naturelle était :

« dans  $\overline{\mathcal{A}}^{\square_i}$  se trouvent tous les automates qui présentent par un groupage de type  $i$  les mêmes propriétés d'orbites ». Dans le cas des classes obtenues via  $\sim_1^{\trianglelefteq}$ ,  $\sim_2^{\trianglelefteq}$ ,  $\sim_3^{\trianglelefteq}$ , une interprétation naturelle de la surjection est la notion de *paramètre caché*. Considérons l'automate  $54 \times 184$  de la Figure 19; on a 4 paramètres (les états); selon qu'on les observe tous (cas a)), qu'on observe des groupes de deux par la surjection 0022 (cas b)) ou par la surjection 0101 (cas c)), on observe des propriétés globales très différentes (184 ou 54).

L'automate de la Figure 20 a 6 états et est construit ainsi :

1. *Mélange de deux automate via un troisième* On se donne deux automates  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  de même nombre d'états  $n$  et de même voisinage  $V = \{-1, 0, +1\}$ . Les états de  $\mathcal{A}_1$  sont nommés  $0, \dots, n-1$  et ceux de  $\mathcal{A}_2$   $n, \dots, 2n-1$ . A tout élément  $x$  de  $Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  on fait correspondre son numéro d'automate  $\nu$  (0 si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$  et 1 sinon) et son numéro d'ordre  $\zeta$  ( $x$  si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $x-n$  sinon). On se donne un troisième automate  $\mathcal{B}$  à deux états  $\{0, 1\}$  encore de voisinage  $V$  et vérifiant  $\delta_{\mathcal{B}}(0, 0, 0) = 0$  et  $\delta_{\mathcal{B}}(1, 1, 1) = 1$ .

On construit alors le mélange de  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  par  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2$  par :

- (a)  $Q_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2} = Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  et  $V_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2} = V$  ;
- (b)  $\forall q_\ell, q_c, q_r \in Q_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2}$ ,

$$\delta_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2}(q_\ell, q_c, q_r) = \begin{cases} \delta_{\mathcal{A}_1}(\zeta(q_\ell), \zeta(q_c), \zeta(q_r)) & \text{si } \delta_{\mathcal{B}}(\nu(q_\ell), \nu(q_c), \nu(q_r)) = 0 \\ \delta_{\mathcal{A}_2}(\zeta(q_\ell) + n, \zeta(q_c) + n, \zeta(q_r) + n) & \text{si } \delta_{\mathcal{B}}(\nu(q_\ell), \nu(q_c), \nu(q_r)) = 1 \end{cases}$$

2. *Mélange de trois automates via quatre autres* On se donne trois automates  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  de même nombre d'états  $n$  et de même voisinage  $V = \{-1, 0, +1\}$ . Les états de  $\mathcal{A}_0$  sont nommés  $0, \dots, n-1$ , ceux de  $\mathcal{A}_1$   $n, \dots, 2n-1$  et ceux de  $\mathcal{A}_2$   $2n, \dots, 3n-1$ . A tout élément  $x$  de  $Q_{\mathcal{A}_0} \cup Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  on fait correspondre son numéro d'automate  $\nu$  (0 si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$ , 1 si  $x \in \{n, \dots, 2n-1\}$  et 2 sinon) et son numéro d'ordre  $\zeta$  ( $x$  si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $x-n$  si  $x \in \{n, \dots, 2n-1\}$  et  $x-2n$  sinon). On se donne trois automates  $\mathcal{B}_{0,1}, \mathcal{B}_{1,2}$  et  $\mathcal{B}_{2,1}$  à deux états  $\{0, 1\}$  encore de voisinage  $V$  et vérifiant  $\delta_{\mathcal{B}_{0,1}}(0, 0, 0) = \delta_{\mathcal{B}_{1,2}}(0, 0, 0) = \delta_{\mathcal{B}_{2,0}}(0, 0, 0) = 0$  et  $\delta_{\mathcal{B}_{0,1}}(1, 1, 1) = \delta_{\mathcal{B}_{1,2}}(1, 1, 1) = \delta_{\mathcal{B}_{2,0}}(1, 1, 1) = 1$ . On se donne, en outre, un automate  $\mathcal{C}$  à trois états  $\{0, 1, 2\}$  encore de voisinage  $V$  et vérifiant  $\delta_{\mathcal{C}}(0, 0, 0) = 0$ ,  $\delta_{\mathcal{C}}(1, 1, 1) = 1$  et  $\delta_{\mathcal{C}}(2, 2, 2) = 2$ . On construit alors le mélange de  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  par  $\mathcal{B}_{0,1}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,1}$  et  $\mathcal{C}$ , noté  $\mathcal{D}$ , par :

- (a)  $Q_{\mathcal{D}} = Q_{\mathcal{A}_0} \cup Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  et  $V_{\mathcal{D}} = V$ .
- (b) Les états  $Q_{\mathcal{A}_0} \cup Q_{\mathcal{A}_1}$  ( $Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}, Q_{\mathcal{A}_2} \cup Q_{\mathcal{A}_0}$ ) engendrent un sous-automate de  $\mathcal{D}$  isomorphe à  $\mathcal{A}_0 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_1$  ( $\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_0$ ) par la bijection  $\phi$  avec  $\forall x \in \{0, \dots, 2n-1\}, \phi(x) = x$  ( $\forall x \in \{n, \dots, 3n-1\}, \phi(x) = x-n, \forall x \in \{0, \dots, n-1\} \phi(x) = x+n$  et  $\forall x \in \{2n, \dots, 3n-1\}, \phi(x) = x-2n$ ).
- (c)  $\forall q_\ell, q_c, q_r \in Q_{\mathcal{D}}$ ,
  - i. Si  $\nu(q_\ell) \neq \nu(q_c), \nu(q_c) \neq \nu(q_r)$  et  $\nu(q_r) \neq \nu(q_\ell)$ , soit  $\eta = \delta_{\mathcal{C}}(\nu(q_\ell), \nu(q_c), \nu(q_r))$ , alors il existe un seul état  $q^*$  de  $\{q_\ell, q_c, q_r\}$  tel que  $\nu(q^*) = \eta$ , et  $\delta_{\mathcal{C}}(q_\ell, q_c, q_r) = \eta n + q^*$ .
  - ii. Sinon il existe  $i_1$  et  $i_2$  dans  $\{0, 1, 2\}$  tels que  $\nu(q_\ell), \nu(q_c), \nu(q_r)$  appartiennent tous à  $\{i_1, i_2\}$  et la valeur de  $\delta_{\mathcal{C}}(q_\ell, q_c, q_r)$  est fixée par le point (b) précédent.

3. *Cas de la Figure 20* L'automate de la Figure 20 a les caractéristiques suivantes :  $\mathcal{A}_0 = 54$ ,  $\mathcal{A}_1 = 184$ ,  $\mathcal{A}_2 = 54$ ,  $\mathcal{B}_{0,1} = 150$ ,  $\mathcal{B}_{1,2} = 150$   $\mathcal{B}_{2,0} = 184$  et  $\mathcal{C}$  est l'identité.

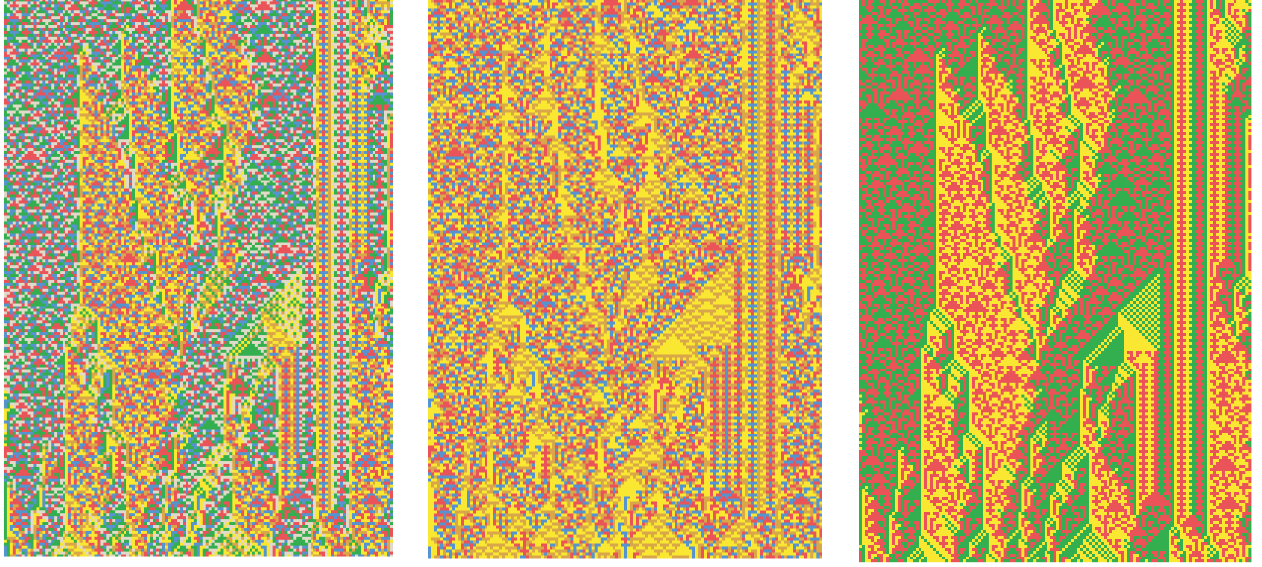
Par la surjection (002244), on obtient un sous-automate à 3 états (points 2)b) et 2)c)). Ce sous-automate contient  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$  comme sous-automates. En outre, la surjection (012301) donne un sous-automate à 4 états puisque  $\mathcal{B}_{1,0} = \mathcal{B}_{1,1} = \mathcal{B}_{3,0} = \mathcal{B}_{3,1} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_3$ . Ce sous-automate à 4 états contient  $\mathcal{A}_2$  comme sous-automate. Donc  $\mathcal{A}_2$  est sous-automate de  $\mathcal{K}$  et aussi par injection dans un projeté. Ici  $\mathcal{A}_1$  est seulement sous-automate d'un projeté de  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 3** *Si  $\mathcal{A}$  est sous-automate d'un projeté de  $\mathcal{B}$ , alors  $\mathcal{A}$  est projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}$ .*

*Preuve* Soient  $s : Q_{\mathcal{B}} \rightarrow Q_{\mathcal{C}}$  et  $\iota : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow Q_{\mathcal{C}}$  les surjection et injection rendant compte des hypothèses. Désignons par  $\mathcal{E}$  l'ensemble  $\{q \in Q_{\mathcal{B}} \mid \exists c \in Q_{\mathcal{A}} \text{ tel que } s(q) = \iota(c)\}$ . On définit  $\tilde{s}, \tilde{\iota} : \mathcal{E} \rightarrow Q_{\mathcal{A}}$  par : soit  $q \in \mathcal{E}$ , il existe  $a \in Q_{\mathcal{A}}$  tel que  $s(q) = \iota(a)$  ; on pose  $\tilde{s}(q) = \iota^{-1}(a)$ . Comme  $\iota$  est injective,  $\tilde{s}$  est bien défini. C'est une surjection.  $(\mathcal{E}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}} \upharpoonright \mathcal{E})$  est un sous-automate de  $\mathcal{B}$  et  $(Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  est un projeté de  $(\mathcal{E}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}} \upharpoonright \mathcal{E})$ .  $\nabla$

Pour tenir compte de la possibilité de retrouver un automate comme projeté d'un sous-automate, on introduit la définition suivante.

**Définition 7** *Soient  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  et  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  deux automates cellulaires, on dit que*



(a) Automate  $\mathcal{K}$ .

(b) Automate  $\mathcal{K}$  avec la surjection (012301).

(c) Automate  $\mathcal{K}$  avec la surjection (002244).

FIG. 9 – Automate  $\mathcal{K}$ .

1.  $\mathcal{A}$  est  $\preceq_{\square}$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage carré, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_1} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}, 0)}$  soit projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
2.  $\mathcal{A}$  est  $\preceq_{\square}$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_2} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, 0)}$  soit projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
3.  $\mathcal{A}$  est  $\preceq_{\square}$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire avec décalage, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_3} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}})}$  soit projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}})}$ .

**Proposition 4** Les relations  $\preceq_{\square_1}$ ,  $\preceq_{\square_2}$  et  $\preceq_{\square_3}$  sont des relations de pré-ordre.

On obtient alors des relations d'ordre, encore notées  $\preceq_{\square_1}$ ,  $\preceq_{\square_2}$  et  $\preceq_{\square_3}$ , en passant aux classes d'équivalence  $\sim_1^{\preceq_{\square}}$ ,  $\sim_2^{\preceq_{\square}}$  et  $\sim_3^{\preceq_{\square}}$ , induites par ces préordres. Les classes d'équivalence d'un automate cellulaire pour  $\preceq_i$  sont notées  $\mathfrak{A}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

On ne sait rien sur la réciproque. On remarque que  $\preceq_{\square} \preceq_{\square}$  est  $\preceq_{\square}$ .

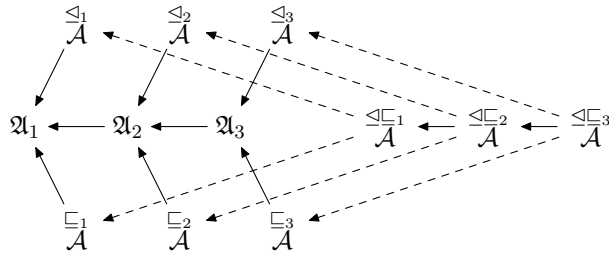


FIG. 10 – Comparaisons entre les classes (une flèche indique que la relation de départ raffine la relation d'arrivée).

On ne sait pas si les classes  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}$  sont distinctes. Les relations indiquées dans la Figure 21 sont évidentes. Les classes  $\mathfrak{A}_i$  et  $\mathfrak{A}$  sont distinctes : les classes de  $\mathfrak{A}_i$  où  $\mathcal{A}$  est non-autosimilaire au sens de [15] ne contiennent que  $\mathcal{A}$  contrairement aux classes  $\mathfrak{A}$ .

L'étude de ces classifications permet de mettre en lumière certains phénomènes. Nous allons l'illustrer de deux façons. D'abord en montrant l'existence de suites croissantes infinies de classes pour  $\sqsubseteq_i$  dont le nombre minimal d'états des représentants croît puis chute. Puis en montrant l'existence d'un treillis de classes pour  $\triangleleft\sqsubseteq_i$  dont des chaînes présentent la même propriété (en utilisant le nombre d'aller-retours d'une tête de machine de Turing).

### 3 Pouvoir d'expression du nombre d'états

Considérons un ensemble de classes parmi celles définies précédemment, et supposons que pour l'ordre considéré  $\triangleleft$  on ait une chaîne infinie croissante. Dans une classe  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$ , on a des automates de voisinage minimal : en fait, il s'agit du voisinage  $\{-1, 0, +1\}$  pour les groupages carré et rectangulaire et  $\{-1, 0\}$  (ou  $\{0, +1\}$ ) pour le groupage rectangulaire avec décalage [6, 5]. Parmi tous les automates  $\mathcal{A}^*$  appartenant à  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$  et de voisinage minimal, il y en a un de plus petit nombre d'état noté  $n_{\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}}$ . Lorsqu'on a une chaîne infinie croissante  $\left(\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i \mid i \in \mathbb{N}\right)$  majorée par  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$ , les nombres minimaux d'états  $n_{\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i}$  des classes  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i$  ne sont pas majorés car on a un nombre fini d'automates de voisinage fixé. Donc, pour un nombre infini d'indices  $i$ , le représentant minimal de  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i$  a plus d'états que  $n_{\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}}$ , nombre d'états minimal de  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$ . Avec notre interprétation des classes de la section 7, cela signifie que l'automate  $\mathcal{A}^\#$  avec  $n_{\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}}$  états a plus de pouvoir d'expression que les automates  $\mathcal{A}_i^\#$  avec un nombre d'états arbitrairement plus grand. Nous allons donner une explication (partielle) de ce phénomène. Mais pour cela nous montrons l'existence de chaînes infinies croissantes bornées (voir [17]) en introduisant les notions nécessaires.

**Définition 8** On définit deux familles d'automates de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$

1.  $\mathcal{G}_n = (S_n, \zeta_n)$  avec

$$\zeta_n(q_\ell, q_c, q_r) = \begin{cases} q_\ell & \text{si } x = y = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.  $\mathcal{H}_n = (S_n, \eta_n)$  avec  $\eta_n(q_\ell, q_c, q_r) = \min(q_\ell, q_c, q_r)$ .

**Lemme 1** Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$

1.  $\mathcal{G}_1 \sim_{\sqsubseteq} \mathcal{H}_i$  et  $\mathcal{NIL} \sqsubseteq_i \mathcal{G}_1$  où  $\mathcal{NIL}$  est la classe des sous-automates nilpotents ( $\mathcal{NIL} = \overset{\sqsubseteq_i}{\mathcal{N}}$  avec  $Q_{\mathcal{N}} = \{0, 1\}$  et  $\delta_{\mathcal{N}}(q_\ell, q_c, q_r) = 0$ ).
2.  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \mathcal{G}_n \sqsubseteq_i \mathcal{G}_{n+1}$  et  $\mathcal{H}_n \sqsubseteq_i \mathcal{H}_{n+1}$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \mathcal{G}_{n+1} \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_n$  et  $\mathcal{H}_{n+1} \not\sqsubseteq_i \mathcal{H}_n$ .
4.  $\forall n \geq 2, \forall m \geq 2, \mathcal{G}_n \not\sqsubseteq_i \mathcal{H}_m$  et  $\mathcal{H}_m \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_n$ .

*Preuve* Une preuve détaillée pour  $\sqsubseteq_1$  se trouve dans [17]. L'image par l'injection  $\iota$  de  $Q_{\mathcal{N}}$  qui à  $q$  fait correspondre  $0q$  dans  $\mathcal{G}_2^{(2,2,0)}$  ou  $\mathcal{H}_2^{(2,2,0)}$  est stable ; d'où 1). Le point 2) est évident : il suffit de prendre l'identité.

Intuitivement, si on ne considère que des configurations initiales périodiques de période  $p$ ,  $\mathcal{G}_n$  a  $n - 1$  points fixes atteints en une étape ( $q \dots q$  avec  $q \neq 0$ ) et un point fixe  $0 \dots 0$  pouvant être atteint en  $0$  à  $p - 1$  étapes ;  $\mathcal{H}_n$  a aussi  $n$  points fixes mais tous les points fixes  $q \dots q$  ont une transitoire de longueur de  $0$  à  $p - 1$ . Un groupage quelconque de paramètres  $(\mu, \nu, s)$  de la section 7.1 ne change pas le nombre de cycles des configurations périodiques mais il « divise » la longueur des transitoires par  $\nu$ . D'où le point 3) car un automate ne peut avoir un sous-automate avec plus de cycles-limites de configurations périodiques que lui.

Puisque tout groupé de  $\mathcal{H}_n$  a des transitoires d'itérées de configurations périodiques de longueur non bornée conduisant à  $n$  points fixes différents, il ne peut être sous-automate d'un groupé de  $\mathcal{G}_m$  dont les transitoires d'itérées de configurations périodiques sont de longueur non bornée qui conduisent toutes au même point fixe  $0 \dots 0$  (l'injection enverrait tout état  $q \dots q$  de  $S_n^{\mu\nu}$  sur  $0 \dots 0$  de  $S_m^{\mu\nu}$ ) et donc  $\mathcal{H}_n \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_m$  si  $n \geq 2$ . Sur les configurations périodiques de période  $2p$ , de la forme  $x \dots xy \dots y$  ( $x, y \in S_N$  tout groupé de  $\mathcal{G}_n$  conduit au point fixe  $0 \dots 0$ , alors que tout groupé de  $\mathcal{G}_m$  conduit au point fixe  $\min(x, y) \dots \min(x, y)$ ,

une injection de  $\mathcal{G}_n^{(\mu_G, \nu_G, s_G)}$  dans  $\mathcal{H}_m^{(\mu_{\mathcal{H}}, \nu_{\mathcal{H}}, s_{\mathcal{H}})}$  donnerait pour image de  $0 \dots 0$  de  $S_n^{\mu_G}$  à la fois  $0 \dots 0$  de  $S_m^{\mu_{\mathcal{H}}}$  et  $1 \dots 1$  de  $S_m^{\mu_{\mathcal{H}}}$ . D'où 4).  $\nabla$

**Définition 9 (FSSP : Firing Squad Synchronization Problem)** *Le problème de la synchronisation avec deux généraux en temps  $t(n)$  est de construire un sous-automate cellulaire  $\mathcal{F}$  de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$  tel que :*

1. *L'automate comporte 5 états particularisés : ! (extérieur avec,  $\forall X, Y \in Q_{\mathcal{F}}, \delta_{\mathcal{F}}(X, !, Y) = !$ ),  $L$  (état quiescent avec  $\delta_{\mathcal{F}}(L, L, L) = L$ ),  $G_\ell, G_r$  (généraux de gauche et de droite) et  $F$  (feu).*
2. *Partant de la configuration initiale  $c$  de taille  $n : \infty ! G_\ell \underbrace{L \dots L}_{n-2} G_r ! \infty$ , l'évolution est telle que*
  - *Pour  $\theta \in \{0, \dots, t(n) - 1\}$ , l'état  $F$  n'apparaît pas dans  $\Delta_{\mathcal{F}}^\theta(c)$  ;*
  - *$\Delta_{\mathcal{F}}^{t(n)}(c)$  est  $\infty \underbrace{! F \dots F !}_{n-1} \infty$ .*

Dans [19], le résultat suivant est montré.

**Proposition 5** *Il existe une solution  $\mathcal{F}^o$  au problème de la synchronisation avec deux généraux en temps  $t(n) = n$  et ce temps est optimal.*

Des modifications [16] à la solution de [19] permettent de définir un automate  $\mathcal{F}$  comme suit :

**Définition 10** *L'automate  $\mathcal{F}$*

1. *a 2 états particularisés  $G$  (général) et  $F$  (feu) ;*
2. *partant de la configuration initiale périodique  $\gamma$  de période  $n : \infty (G \underbrace{F \dots F}_n G)^\infty$  avec  $\gamma(0) = G$ ,*  
*l'évolution est telle que*
  - *Pour  $\theta \in \{0, \dots, n - 1\}$ , les états  $F$  et  $G$  n'apparaissent pas dans  $\Delta_{\mathcal{F}}^\theta(\gamma)$  ;*
  - *$\Delta_{\mathcal{F}}^n(\gamma)$  est  $\infty (G \underbrace{F \dots F}_n G)^\infty$  avec  $\gamma(c) = G$ .*

**Définition 11** *On définit un nouvel automate  $\mathcal{D}$  en deux temps.*

1.  *$\mathcal{S} = (\{0, 1\}^3, V_{\mathcal{S}} = \{-1, 0, +1\}, \delta_{\mathcal{S}})$  est défini pour tous  $(q_{\ell_1}, q_{\ell_2}, q_{\ell_3}), (q_{c_1}, q_{c_2}, q_{c_3}), (q_{r_1}, q_{r_2}, q_{r_3})$  de  $\{0, 1\}$  par  $\delta_{\mathcal{S}}((q_{\ell_1}, q_{\ell_2}, q_{\ell_3}), (q_{c_1}, q_{c_2}, q_{c_3}), (q_{r_1}, q_{r_2}, q_{r_3})) = (q_{\ell_1}, q_{c_2}, q_{r_3})$ .*
2.  *$\mathcal{D} = (Q_{\mathcal{F}} \times Q_{\mathcal{S}}, V_{\mathcal{D}} = \{-1, 0, +1\}, \delta_{\mathcal{D}})$  où  $\delta_{\mathcal{D}}((q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{\ell, \mathcal{S}}), (q_{c, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{S}}), (q_{r, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{S}}))$  est défini par*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\delta_{\mathcal{F}}(q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{F}}), 000) & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\mathcal{F}}(q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{F}}) \in \{F, G\} \\ \text{et} \\ \delta_{\mathcal{S}}(q_{\ell, \mathcal{S}}, q_{c, \mathcal{S}}, q_{r, \mathcal{S}}) \neq (111) \end{array} \right. \\ (\delta_{\mathcal{F}}(q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{F}}), \delta_{\mathcal{S}}(q_{\ell, \mathcal{S}}, q_{c, \mathcal{S}}, q_{r, \mathcal{S}})) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

**Lemme 2** *Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et pour  $n \geq 2$*

1.  $\mathcal{G}_n \sqsubseteq_i \mathcal{D}$ ,
2.  $\mathcal{H}_n \sqsubseteq_i \mathcal{D}$ .
3.  $\mathcal{D} \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_n$  et  $\mathcal{D} \not\sqsubseteq_i \mathcal{H}_n$ .

*Preuve* Il suffit de montrer les points 1) et 2) pour  $\sqsubseteq_1$ . Pour montrer que  $\mathcal{A} \sqsubseteq_1 \mathcal{B}$  il suffit d'exhiber des configurations de  $\mathcal{B}$  images par  $\iota$  de l'ensemble des configurations d'un groupé de  $\mathcal{A}$ . L'intérêt de  $\mathcal{F}_{(1,0,0)}$  est que les configurations  $\infty (G \underbrace{F \dots F}_{\nu-1} G)^\infty$  structurent le diagramme espace-temps en carrés

de taille  $\nu \times \nu$  en marquant les coins des carrés par l'état  $G$  et les côtés horizontaux par l'état  $F$ . L'automate  $\mathcal{S}$  est le produit de trois sous-automates sur  $\{0, 1\}$  ; le premier est le décalage à droite,  $\sigma$ , le second est l'identité, le troisième est le décalage à gauche  $\sigma^{-1}$ . Donc partant d'une configuration  $\dots (1, 1, 1) \underbrace{(0, 0, 0) \dots (0, 0, 0)}_{x-1} (1, 1, 1) \underbrace{(0, 0, 0) \dots (0, 0, 0)}_{y-1} (1, 1, 1) \dots$ , on obtiendra  $(1, 1, 1)$  en position  $x + 1$

après  $x$  évolutions si et seulement si  $x = y$ .  
On code alors, via  $\iota$ , un état  $x \neq 0$  de  $\mathcal{G}$  par

$$(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{x-1} (F, (1, 1, 1)) \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{n-x-1}$$

et 0 par  $(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{n-1}$ . On a alors  $\mathcal{G}_n \preceq_{\sqsubseteq_1} \mathcal{D}^{n+1}$  car sur l'évolution d'une

configuration de  $\iota(S_n^{\mathbb{Z}})$  lors de la synchronisation de sa composante  $\mathcal{F}$  au temps  $n$ , l'état de sa composante  $\mathcal{S}$  ne peut être  $(1, 1, 1)$  en  $z$  que s'il était de la forme  $(?, ?, 1)$  (resp.  $(?, 1, ?)$ ,  $(?, ?, 1)$ ) (et donc  $(1, 1, 1)$  par choix de  $\iota$ ) en  $z - n$ ,  $z$  et  $z + n$ ; en outre par définition de  $\mathcal{D}$ , s'il n'est pas  $(1, 1, 1)$  il est  $(0, 0, 0)$ .

On code alors, via  $\iota$ , un état  $x \neq 0$  de  $\mathcal{G}$  par

$$(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (1, 1, 1)) \dots (F, (1, 1, 1))}_x \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{n-x-1}$$

et 0 par  $(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{n-1}$  et on conclue de même.

Le point 3) provient du point 3) du lemme 8 : en raisonnant par l'absurde on observe que par 1) on aurait  $\mathcal{G}_{n+1} \sqsubseteq_i \mathcal{D}$  et donc  $\mathcal{G}_{n+1} \sqsubseteq_i \mathcal{D} \sqsubseteq_1 \mathcal{G}_n$ .  $\nabla$

L'automate  $\mathcal{D}$  de la définition 30 a moins de 300 états, donc  $n_{\mathcal{D}} < 300$  et donc on a bien lorsque l'on monte dans l'ordre  $\sqsubseteq_i$  une diminution du nombre d'états. La preuve du lemme 9 montre qu'on a codé le numéro d'un état de  $\mathcal{G}$  par la position d'un  $(1, 1, 1)$  sur le bas d'un carré fourni par  $\mathcal{F}$  et celui d'un état de  $\mathcal{H}$  par le nombre de  $(1, 1, 1)$  consécutifs et le fonctionnement de  $\mathcal{D}$  permet de « simuler » ceux de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ . La famille  $\mathcal{G}$  code dans ses états le nombre de cycles-limites (sur les configurations périodiques) avec une propriété supplémentaire sur les transitoires alors que  $\mathcal{D}$  code la présence d'un état  $(F, (1, 1, 1))$  en  $z$  en fonction de sa présence en  $z + k$ ,  $z$ ,  $z - k$  dans une  $k^{\text{ième}}$  pré-image. Cela permet de coder le nombre d'états de  $\mathcal{G}$  par la position relative des états  $(F, (1, 1, 1))$  et  $(G, (0, 0, 0))$ . *En quelque sorte, au lieu de décrire une famille avec un nombre quelconque d'états et un comportement donné, on donne le moyen de coder les états en nombre quelconque par la configuration initiale et les règles permettent de retrouver le comportement voulu en transformant les codages donnés par les configurations.*

## 4 Particules et produits cartésiens pour un treillis Turing

Dans cette section, les automates cellulaires considérés  $\mathcal{A}$  seront de voisinage  $\{-r_{\mathcal{A}}, \dots, r_{\mathcal{A}}\}$ ; en outre, pour alléger les notations, on désignera par  $\mathcal{A}$  à la fois l'automate, sa fonction locale, sa fonction globale et on notera son ensemble d'états par  $A$ .

**Définition 12** Une dynamique  $\mathcal{D}$  associée à un alphabet  $Q$  est un ensemble de diagrammes spatio-temporels, formellement :  $\mathcal{D} \subseteq Q^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}$ . Un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  capture la dynamique  $\mathcal{D}$  s'il existe des entiers  $m, n, k$ , un ensemble  $E$  de configurations de  $(A^m)^{\mathbb{Z}}$  et une surjection  $\varsigma : A^m \rightarrow Q$  tels que, pour tout  $d \in \mathcal{D}$ , il existe  $c \in E$  avec

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}, d(z, t) = \varsigma \left( (\mathcal{A}^{(m, n, k)})(c) \right) (z, t).$$

Il résulte de la définition de  $\leq_{\sqsubseteq_3}$ , de la transitivité des changements d'échelle et le théorème 12 de [20], page 55, que :

**Lemme 3** Si un automate cellulaire est intrinsèquement universel alors il capture toutes les dynamiques cellulaires (i.e. les dynamiques capturées par automate cellulaire).

### 4.1 Dynamiques séquentielles

Le comportement de certains automates cellulaires peut être mieux compris en étudiant les trajectoires suivies par certains états particuliers. La définition suivante formalise une notion de *particule* : un ensemble d'états qui peuvent être "localisés", c'est-à-dire qui ne se dispersent pas dans l'espace itération après itération.



**Définition 13** Soit  $\mathcal{A}$  un automate cellulaire.  $T \subseteq A$  est un type de particule pour  $\mathcal{A}$  si le nombre (éventuellement infini) de cellules dans un état de  $T$  n'augmente pas sous l'action de  $\mathcal{A}$ . Formellement, en notant  $\#_T(c) = |\{z \in \mathbb{Z} : c(z) \in T\}|$ , on a :

$$\forall c \in A^{\mathbb{Z}}, \#_T(c) \geq \#_T(\mathcal{A}(c)).$$

Lorsque  $\#_T(c) = 1$ , on note  $\chi_T(c)$  la position de l'unique cellule de  $c$  dans un état de  $T$ . On appelle particule une cellule dans un état de  $T$ .

Enfin, pour tout entier  $m \in \mathbb{N}_+$  et toute configuration  $c \in (A^m)^{\mathbb{Z}}$ , on utilise les notations  $\#_T(c)$  et le cas échéant  $\chi_T(c)$  pour désigner l'extension de  $\#_T(\cdot)$  et  $\chi_T(\cdot)$  aux blocs de cellules.

On vérifie aisément que l'ensemble d'états  $A \setminus T$  induit un sous-automate que l'on appelle *automate cellulaire médium* associé à  $\mathcal{A}$  et  $T$ .

Le formalisme particule/médium que l'on vient d'introduire permet aussi de capturer la notion de calcul séquentiel dans les automates cellulaires ([24]). Étant donné une machine de Turing d'ensemble d'états  $E$  et d'alphabet de ruban  $R$ , on peut lui associer un automate cellulaire dans lequel la tête Turing sera simulée par un certain type de particule (isomorphe en un certain sens à  $E$ ) et le médium correspondant, choisi comme automate cellulaire identité sur l'ensemble d'états  $R$ , joue le rôle du ruban. Sur les configurations comportant une seule particule, la dynamique de l'automate cellulaire est isomorphe à celle de la machine de Turing. En revanche, rien ne garantit dans cet automate la présence d'une seule particule, et, selon la définition de sa règle de transition locale en présence de plusieurs particules, il peut produire des dynamiques qui n'ont rien de commun avec la machine de Turing associée.

La construction générale suivante permet, étant donné un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  et un type de particule  $T$ , de contrôler en un certain sens la présence d'une seule particule de ce type dans une configuration.

Sur les configurations comportant une seule particule de type  $T$ , le fonctionnement de l'automate construit est essentiellement celui de  $\mathcal{A}$  auquel on ajoute une couche de contrôle de la position de la particule. Dans cette couche, une cellule dans l'état  $\leftarrow$  indique que la particule est à sa gauche (au sens large) et une cellule dans l'état  $\rightarrow$  indique que la particule est à sa droite (au sens strict). Cette couche reste inchangée par itérations, sauf au voisinage de la particule où les états  $\leftarrow$  et  $\rightarrow$  sont mis à jour pour refléter les mouvements éventuels de la particule. Enfin, les contrôles suivants sont effectués en permanence de façon locale :

- à une particule de type  $T$  correspond toujours un état  $\leftarrow$ ;
- à gauche d'une particule on trouve toujours un état  $\rightarrow$ ;
- jamais un état  $\rightarrow$  n'apparaît à droite d'un état  $\leftarrow$ .

Dès que l'un de ces contrôles échoue, un état envahissant est produit pour détruire toute la configuration.

**Définition 14** Soit  $\mathcal{A}$  un automate cellulaire admettant le type de particule  $T$ . On définit  $\overline{\mathcal{A}}_T$  sur l'alphabet  $\overset{\circ}{A} = \{\kappa\} \cup (A \times \{\leftarrow, \rightarrow\})$  de rayon  $2r_{\mathcal{A}}$  de la façon suivante :

- $\kappa$  est un état envahissant (i.e.  $\overline{\mathcal{A}}(\dots \kappa \dots) = \kappa$ );
- $\overline{\mathcal{A}}_T((u_{-2r_{\mathcal{A}}}, v_{-2r_{\mathcal{A}}}), \dots, (u_{2r_{\mathcal{A}}}, v_{2r_{\mathcal{A}}})) = x$  avec

$$x = \begin{cases} \kappa & \text{si } \begin{cases} \exists i, -2r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 2r_{\mathcal{A}} \text{ avec } u_i \in T \text{ et } v_i = \rightarrow, \text{ ou} \\ \exists i, -2r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 2r_{\mathcal{A}} - 1 \text{ avec } u_{i+1} \in T \text{ et } v_i = \leftarrow, \text{ ou} \\ \exists i, j, -2r_{\mathcal{A}} \leq i < j \leq 2r_{\mathcal{A}} \text{ tels que } v_i = \leftarrow \text{ et } v_j = \rightarrow \end{cases} \\ (u, v) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$u = \mathcal{A}(u_{-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{r_{\mathcal{A}}})$$

$$v = \begin{cases} \leftarrow & \text{si } \exists i, -r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 0 \text{ avec } \mathcal{A}(u_{i-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{i+r_{\mathcal{A}}}) \in T, \\ \rightarrow & \text{si } \exists i, 0 < i \leq r_{\mathcal{A}} \text{ avec } \mathcal{A}(u_{i-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{i+r_{\mathcal{A}}}) \in T, \\ v_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $\rho : \overset{\circ}{A} \setminus \{\kappa\} \rightarrow A$  la fonction définie par  $\rho(a, \leftarrow) = \rho(a, \rightarrow) = a$ .

**Lemme 4** *La construction ci-dessus est croissante : si  $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$  admettent respectivement les types de particule  $T$  et  $T'$  avec  $\iota(T) \subseteq T'$  (où  $\iota$  est l'injection impliquée dans la relation  $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ ), alors  $\overline{\mathcal{A}}_T \sqsubseteq \overline{\mathcal{B}}_{T'}$ .*

*De plus, pour tout automate cellulaire  $\mathcal{A}$ ,  $\overline{\mathcal{A}}_T$  a les propriétés suivantes :*

- *il admet  $\overset{\circ}{T} = T \times \{\leftarrow\}$  comme type de particule ;*
- *il existe une fonction  $\Psi_T : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \overset{\circ}{A}^{\mathbb{Z}}$  telle que pour toute configuration  $c$  comportant une seule particule de type  $T$  et telle que son image comporte aussi une seule particule :  $\Psi_T(\mathcal{A}(c)) = \overline{\mathcal{A}}_T(\Psi_T(c))$  ;*
- *si une configuration  $c \in \overset{\circ}{A}^{\mathbb{Z}}$  est telle que  $\#_{\overset{\circ}{T}}(c) > 1$ , alors toute cellule finit par être constante dans le diagramme espace-temps  $\text{Diag}_{\overline{\mathcal{A}}_T}(c)$ .*

*Preuve* La croissance de la construction se vérifie facilement d'après la définition.

Considérons un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  admettant un type de particule  $T$ . Tout d'abord, si pour une certaine configuration  $c$  de  $\overline{\mathcal{A}}_T$  on a  $\#_{\overset{\circ}{T}}(c) < \#_{\overset{\circ}{T}}(\overline{\mathcal{A}}_T(c))$  alors la configuration  $c' = \overline{p}(c)$  de  $\mathcal{A}$  est telle que  $\#_T(c') < \#_T(\mathcal{A}(c'))$  ce qui contredit le fait que  $T$  est un type de particule pour  $\mathcal{A}$ .

On vérifie ensuite que la fonction qui à  $c$  (configuration de  $\mathcal{A}$  comportant une seule particule de type  $T$  en  $z \in \mathbb{Z}$ ) associe la configuration  $c'$  définie par

$$c'(i) = \begin{cases} (c(i), \rightsquigarrow) & \text{si } i < z, \\ (c(i), \leftarrow) & \text{sinon,} \end{cases}$$

convient comme choix pour  $\Psi_T$ .

Enfin, soit  $c$  une configuration de  $\overline{\mathcal{A}}_T$  telle qu'il existe deux positions  $i < j$  telles que  $c(i) \in \overset{\circ}{T}$  et  $c(j) \in \overset{\circ}{T}$ . S'il existe  $a \in A$  tel que  $c(j-1) = (a, \leftarrow)$  alors  $\kappa$  apparaît dans  $\overline{\mathcal{A}}_T(c)$  et c'est un état envahissant. Sinon, il existe un entier  $l$ ,  $i \leq l \leq j$ , tel que  $c(l) = (a, \leftarrow)$  et  $c(l+1) = (a, \rightsquigarrow)$  et alors  $\kappa$  apparaît dans  $\overline{\mathcal{A}}_T(c)$ .  $\nabla$

L'automate  $\overline{\mathcal{A}}_T$  est en un certain sens forcé à agir de manière séquentielle (si l'on fait abstraction du médium) ce qui constitue une contrainte très forte pour le modèle des automates cellulaires : le lemme suivant montre en particulier que si l'automate médium associé à  $\mathcal{A}$  et  $T$  est neutre, alors  $\overline{\mathcal{A}}_T$  ne peut pas être intrinsèquement universel.

**Lemme 5** *Si  $\mathcal{A}$  admet un type de particule  $T$  tel que l'automate cellulaire médium associé est l'identité, alors  $\overline{\mathcal{A}}_T$  n'est pas intrinsèquement universel.*

*Preuve* Il est facile de vérifier que  $\overline{\mathcal{A}}_T$  est incapable de capturer une dynamique constituée d'un unique diagramme spatio-temporel dans lequel il y a deux zones de l'espace disjointes telles que :

1. l'état des cellules hors de ces zones ne varie pas au cours du temps,
2. l'état des cellules dans ces zones ne devient jamais constant après un certain temps.

En effet, si  $\overline{\mathcal{A}}_T$  capturait une telle dynamique, cela impliquerait la présence de deux particules et donc chaque cellule deviendrait constante après un certain temps d'après le lemme 11. Le lemme 10 permet de conclure car une telle dynamique peut être choisie cellulaire.  $\nabla$

**Définition 15** *Un automate cellulaire est universel pour le calcul [24] s'il capture toute la dynamique d'une machine de Turing universelle  $T_{univ}$  sur ses configurations valides, avec la convention qu'un diagramme spatio-temporel de  $T_{univ}$  est un élément de  $(R \times (T \cup \{\perp\}))^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}$  (où  $R$  est l'alphabet du ruban de  $T_{univ}$ ,  $T$  est son ensemble d'états et  $\perp$  désigne l'absence de tête).*

**Corollaire 1** *Il existe des automates cellulaires Turing-universels non intrinsèquement universels.*

On définit à présent une famille d'automates cellulaires à particule, appelés "automates zig-zag".

Le fonctionnement de ces automates peut être interprété de la façon suivante. Une particule  $t \in T_p$  est caractérisée par sa direction et son niveau d'énergie  $\eta(t)$ . Le médium associé au type de particule  $T_p$  est constitué de 2 sortes d'états :  $E$  (état neutre) et les  $M_i$  qui sont des barrières de potentiel asymétriques. Plus précisément, une barrière  $M_i$  ( $i > 0$ ) peut être traversée de gauche à droite par toute particule d'énergie inférieure à  $i$ , sinon il y a rebond de la particule, et elle peut être traversée de droite à gauche

par toute particule d'énergie strictement supérieure à  $i$ , sinon il y a rebond et incrémentation du niveau d'énergie de la particule. Enfin, la barrière  $M_0$  est une barrière infranchissable sur laquelle toute particule rebondit, et se voit de plus vidée de son énergie (*i.e.* elle passe au niveau d'énergie 1) lorsque elle arrive par la droite.

**Définition 16** Pour tout  $p \in \mathbb{N}_+$ , soit  $\mathcal{B}_p$  l'automate cellulaire de rayon 1 suivant :

- son alphabet est  $B_p = Q_p \cup S_p$  où  $Q_p = \{M_0, M_1, \dots, M_{p-1}, E\}$  et avec  $S_p = \{\underset{i}{\overleftarrow{X}}, X \in Q_p, 1 \leq i \leq p\} \cup \{\underset{i}{\overrightarrow{X}}, X \in Q_p, 1 \leq i \leq p\}$ .
- il admet le type de particule  $S_p$  avec le comportement suivant :

1.  $\mathcal{B}_p(M_0, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = \underset{1}{\overleftarrow{E}}$
2.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_0) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$
3.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, E) = E$
4.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{E}}, E, X) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$
5.  $\mathcal{B}_p(E, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = E$
6.  $\mathcal{B}_p(X, E, \underset{i}{\overleftarrow{E}}) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$
7.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$  si  $i > j$
8.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j) = E$  si  $i \leq j$
9.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j, X) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$  si  $i \leq j$
10.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, E) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$
11.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, E, X) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$  si  $i \leq j$
12.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = \underset{j+1}{\overleftarrow{E}}$  si  $i \leq j$
13.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = E$  si  $i > j$
14.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, \underset{i}{\overleftarrow{E}}) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$  si  $i > j$
15.  $\mathcal{B}_p(E, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, X) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$
16.  $\mathcal{B}_p(X, E, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$  si  $i > j$

où  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq p-1$  et  $X$  désigne indifféremment  $E$  ou  $M_j$  ;

- c'est l'identité partout ailleurs (et notamment sur son automate médium associé à  $S_p$ ).

Enfin, on définit l'automate cellulaire "zig-zag"  $\mathcal{Z}_p$  par  $\mathcal{Z}_p = \overline{\mathcal{B}_{S_p}}$ . On note  $T_p = \overset{\circ}{S}_p$  le type de particule associé et  $\eta : T_p \rightarrow \{1, \dots, p\}$  la fonction indicatrice sur l'état de la particule définie par  $\eta(\alpha) = i$  si  $\rho(\alpha)$  est de la forme  $\underset{i}{\overleftarrow{X}}$  ou  $\underset{i}{\overrightarrow{X}}$ .

En agençant les barrières d'un automate "zig-zag" de façon adéquate, on peut faire suivre une sorte de cycle d'hysteresis à une particule à l'intérieur d'un domaine délimité par deux états  $M_0$ . Sa trajectoire

spatio-temporelle ressemble alors à un enchaînement de “zig-zag”. Ce type de comportement se produit pour  $\mathcal{B}_p$  sur l’ensemble de mots de la forme  $M_0 \underset{1}{\overleftarrow{E}} U_p$  où  $U_p$  désigne les mots de la forme

$$E^{i_1} M_{p-1} E^{i_2} M_{p-2} \dots M_1 E^{i_p} M_0.$$

où  $i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}_+$ . La figure 22 a) illustre ce comportement.

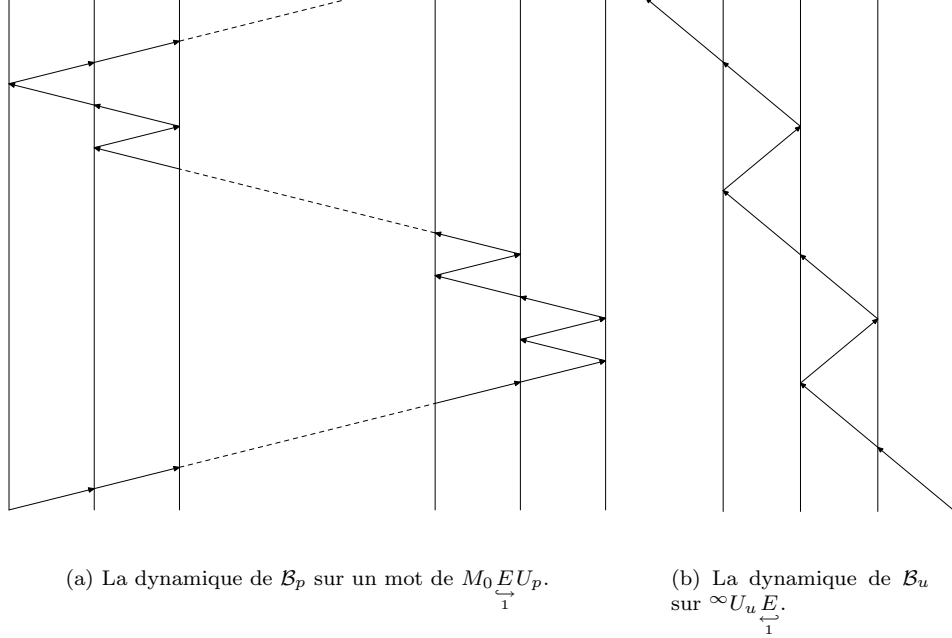


FIG. 11 – Automate  $54 \times 184$ .

**Proposition 6** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}_+$ , sur une configuration  $c$  telle que  $\#_{T_p}(c) = 1$ ,  $\mathcal{Z}_p$  a la propriété suivante, appelée propriété  $\mathcal{P}$  : s’il existe  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \in \mathbb{N}_+$  et  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{N}_+$  avec  $z_1 > z_2, z_3 > z_2$  et  $z_4 < z_2$  vérifiant, pour  $1 \leq i \leq 4$  :*

1.  $\chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^{t_i}(c)) = z_i$ ,
2.  $\forall t, t_1 < t < t_2 : z_2 < \chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_1$ ,
3.  $\forall t, t_2 < t < t_3 : z_2 < \chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_3$ ,
4.  $\forall t, t_3 < t < t_4 : z_4 < \chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_3$ ,

alors  $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_1}(c))(z_1)) < \eta((\mathcal{Z}_p^{t_4}(c))(z_4))$ .

*Preuve* Le fait que  $z_1 > z_2$  et  $z_3 > z_2$  implique un changement de direction de la particule (*i.e.* passage d’un état du type  $(X, \leftarrow)$  à un état du type  $(Y, \leftarrow)$ ) en position  $z_2$ . Donc  $c(z_2 - 1) = M_k$ . De plus  $k > 0$

car la tête dépasse ensuite la position  $z_2$  vers la gauche jusqu’en  $z_4$ . Or, comme il ne peut y avoir de cellule dans l’état  $M_0$  entre les positions  $z_1$  et  $z_2$  (pour la même raison que précédemment), on a nécessairement  $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_1}(c))(z_1)) \leq k$  (transition 12 de la définition 35). Ensuite, comme la particule a traversé de droite à gauche la cellule  $z_2 - 1$  dans l’état  $M_k$  (car  $z_4 < z_2$ ) et puisqu’aucune cellule entre  $z_4$  et  $z_2$  (incluses) n’est dans l’état  $M_0$ , on a nécessairement  $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_4}(c))(z_4)) > k$  (transition 14 de la définition 35).  $\nabla$

Dans la suite, si  $\mathcal{A}$  est un automate cellulaire admettant un type de particule  $T$ , on note  $c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}(t_1, z_1, t_4, z_4)$  le fait que la propriété  $\mathcal{P}$  ci-dessus s’applique, pour  $\mathcal{A}$  et son type de particule  $T$ , entre les temps  $t_1$  et  $t_4$ , sur la position de départ  $z_1$  et la position d’arrivée  $z_4$ , et à partir de la configuration  $c$  de  $\mathcal{A}$ .

Plus généralement, on note  $c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}_p$  le fait qu’il existe une suite d’instant  $t_1, t_2, \dots, t_p$  et une suite de positions  $z_1, \dots, z_p$  tels que

$$\forall i, 1 \leq i \leq p - 1 : c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}(t_i, z_i, t_{i+1}, z_{i+1}).$$

La figure 22 a) montre que  $\mathcal{Z}_p$  est capable d'enchaîner  $p$  “zig-zags” simples, formellement : le mot  $M_0 \xrightarrow{1} E U_p$  permet de construire une configuration  $c$  de  $\mathcal{Z}_p$  telle que  $c \models_{\mathcal{Z}_p, T_p} \mathcal{P}_p$ . En revanche, le corollaire suivant affirme que  $\mathcal{Z}_p$  ne peut pas enchaîner plus de  $p$  zig-zag simples.

**Corollaire 2** *Si  $q > p$ , il n'existe pas de configuration  $c$  de  $\mathcal{Z}_p$  telle que  $c \models_{\mathcal{Z}_p, T_p} \mathcal{P}_q$ .*

*Preuve* En supposant qu'une telle configuration existe et en appliquant  $q$  fois la propriété 15 (une fois pour chaque zig-zag simple), on montre que le type de particule  $T_p$  possède au moins  $q$  niveaux d'énergie : il y a contradiction avec la définition de  $\mathcal{Z}_p$  si  $q > p$ .  $\nabla$

## 4.2 Un treillis d'automates cellulaires universels pour le calcul Turing

La construction proposée ci-après s'appuie sur les automates cellulaires  $\mathcal{Z}_p$  et une structure de produit cartésien contrôlée. Les automates cellulaires de la collection que l'on va définir sont caractérisés par deux paramètres : leur nombre de composantes, et la capacité énergétique de chaque composante (*i.e.* l'entier  $p$  si  $\mathcal{Z}_p$  est l'automate cellulaire associé à cette composante).

En outre, tous les automates cellulaires de la collection contiennent une couche qui assure leur universalité pour le calcul Turing. Cette couche, qui fait l'objet de la définition suivante, est de plus capable d'enchaîner un nombre non borné de “zig-zags” ce qui la rend impossible à simuler par les  $\mathcal{Z}_p$ .

**Définition 17** *Soit  $T_{univ}$  une machine de Turing universelle d'ensemble d'états  $Q_T$  et d'alphabet de ruban  $Q_R$ . Soit  $Q'_R = \{M, E\}$  et*

$$Q'_T = \left\{ \underset{i}{\xrightarrow{X}}, X \in Q'_R, i \in \{0, 1\} \right\} \cup \left\{ \underset{i}{\xleftarrow{X}}, X \in Q'_R, i \in \{0, 1\} \right\}.$$

*On définit alors l'automate cellulaire  $\mathcal{B}_u$  sur l'alphabet  $B_u = R \times (T \cup \{\perp\}) \cup Q'_R \cup Q'_T$  de la façon suivante :*

- sur  $R \times (T \cup \{\perp\})$ ,  $\mathcal{B}_u$  mime le comportement de la machine  $T_{univ}$  ( $\perp$  indique l'absence de particule et  $t \in T$  indique la présence d'une particule dans l'état  $t$ );
- pour tout  $i \in \{0, 1\}$  et tout  $X \in Q'_R$ ,  $\mathcal{B}_u$  vérifie :

$$1. \mathcal{B}_u(X, E, \underset{i}{\xrightarrow{E}}) = \underset{i}{\xrightarrow{E}}$$

$$2. \mathcal{B}_u(\underset{i}{\xleftarrow{E}}, E, X) = \underset{i}{\xleftarrow{E}}$$

$$3. \mathcal{B}_u(E, \underset{i}{\xrightarrow{E}}, M) = \underset{i}{\xrightarrow{E}}$$

$$4. \mathcal{B}_u(M, \underset{0}{\xleftarrow{E}}, E) = \underset{1}{\xleftarrow{E}}$$

$$5. \mathcal{B}_u(E, M, \underset{1}{\xleftarrow{E}}) = \underset{1}{\xleftarrow{M}}$$

$$6. \mathcal{B}_u(X, E, \underset{1}{\xleftarrow{M}}) = \underset{0}{\xleftarrow{E}}$$

- $\mathcal{B}_u$  est l'identité partout ailleurs.

$S_0 = R \times T \cup Q'_T$  est un type de particule pour  $\mathcal{B}_u$  (au sens de la définition 32). On pose enfin  $\mathcal{Z}_u = \overline{\mathcal{B}_u S_0}$ ,  $Q_u = \overset{\circ}{B}_u$  et  $T_u = \overset{\circ}{S}_0$ .

Comme on l'a évoqué plus haut, une particule de  $\mathcal{Z}_u$  peut enchaîner un nombre infini de “zig-zags”, simplement car elle ne suit pas le mécanisme d'hysteresis des  $\mathcal{Z}_p$ . Pour le vérifier, on définit  $U_u$ , ensemble des mots sur l'alphabet  $B_u$  de la forme  $E^n M$ .

**Proposition 7** *Soit  $c$  une configuration de  $\mathcal{B}_u$  de la forme  ${}^\infty U_u \xrightarrow{1} E E^\infty$ . On a alors :*

$$\forall h \in \mathbb{N}_+, c \models_{\mathcal{B}_u, S_0} \mathcal{P}_h.$$

*Preuve* Voir la figure 22 b).  $\nabla$

On peut alors définir la collection d'automates cellulaires qui forme un treillis pour  $\leq_{\square 3}$ .

**Définition 18** Pour toute suite finie décroissante  $s = (n_1, \dots, n_p)$  d'éléments de  $\mathbb{N}_+$ , on définit l'automate cellulaire  $\mathcal{A}_s$  de rayon 1 sur l'alphabet

$$\{K\} \cup (Q_u \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_p})$$

comme ayant exactement le comportement de  $\mathcal{Z}_{univ} \times \mathcal{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{Z}_{n_p}$ , sauf dans les cas suivants où le comportement de  $\mathcal{A}_s$  consiste à passer dans l'état  $K$  :

1. si le voisinage contient l'état  $K$ ,
2. si le voisinage contient un état dont une composante est dans l'état  $\kappa$ ,
3. si le voisinage contient deux types de particules (i.e.  $\tau_i$  et  $\tau_j$  avec  $i \neq j$ ).

$\mathcal{A}_s$  hérite naturellement des types de particules des automates cellulaires qui le composent et on note :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= T_u \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_p}, \\ \tau_i &= Q_u \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_{i-1}} \times T_i \times Z_{n_{i+1}} \times \dots \times Z_{n_p} \quad (\forall i, 1 \leq i \leq p). \end{aligned}$$

La comparaison de deux automates cellulaires du type  $\mathcal{A}_s$  se réduit essentiellement à la comparaison du nombre de couches ainsi qu'à la comparaison couche à couche de la capacité énergétique.

La preuve du théorème suivant qui énonce ce résultat s'appuie principalement sur le lemme 11 et le corollaire 6.

**Théorème 2** Soient  $s = (n_1, \dots, n_p)$  et  $s' = (n'_1, \dots, n'_q)$  deux suites finies décroissantes d'éléments de  $\mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$ . On a

$$\mathcal{A}_s \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{s'} \Leftrightarrow p \leq q \text{ et } n_i \leq n'_i, \forall i, 1 \leq i \leq p.$$

*Preuve* Le sens  $\Leftarrow$  est immédiat car si  $p \leq q$  et  $n_i \leq n'_i, \forall i, 1 \leq i \leq p$  alors  $\mathcal{A}_s \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{(n'_1, \dots, n'_p)}$  (puisque, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{B}_{n_i} \subseteq \mathcal{B}_{n'_i}$  et les constructions mises en jeu dans les automates cellulaires  $\mathcal{A}_x$  sont croissante vis-à-vis de  $\subseteq$  d'après le lemme 11 et la définition 37) et il est clair que  $\mathcal{A}_{(n'_1, \dots, n'_p)} \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{s'}$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe des entiers  $m, m', n, n' \in \mathbb{N}_+$  et  $k, k' \in \mathbb{N}$  tels que

$$\mathcal{A}_s^{(m, n, k)} \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}$$

et notons  $\varsigma : X \rightarrow A_s^m$  la fonction surjective qui intervient dans la relation  $\leq_{\square_3}$  ci-dessus où  $X \subseteq A_{s'}^{m'}$ .

On considère à présent l'ensemble  $\mathcal{E}$  des configurations  $c$  sur l'alphabet  $B_u \times B_{n_1} \times \dots \times B_{n_p}$  qui sont de la forme suivante :

$$c = \infty P_u \Xi X \Xi^{l_1} K_1 P_1 \Xi^{l'_1} P_1 \Xi^{l_2} K_2 P_2 \Xi^{l'_2} P_2 \Xi^{l_3} \dots \Xi^{l_p} K_p P_p \Xi^{l'_p} P_p \Xi^\infty$$

où

$$\begin{aligned} \Xi &= (E, \dots, E) \\ X &= (\underbrace{E}_1, E, \dots, E) \\ K_i &= (\underbrace{EE, \dots, EE}_{i-1}, M_0 \underbrace{E}_1, \underbrace{EE, \dots, EE}_{p-i}) \\ P_u &= \{(w, E^{|w|}, \dots, E^{|w|}), w \in U_u\}, \\ P_i &= \{(\underbrace{E^{|w|}, \dots, E^{|w|}}_{i-1}, w, \underbrace{E^{|w|}, \dots, E^{|w|}}_{p-i}), w \in U_{n_i}\}, \end{aligned}$$

Comme toute configuration de ce type est telle que chaque composante  $i$  ( $0 \leq i \leq p$ ) ne contient qu'une particule du type  $S_i$ , d'après le lemme 11, on peut obtenir une configuration de  $\mathcal{Z}_s$  par application de  $\Psi_i$  sur chaque composante  $i$ .

Soit  $c' \in \Psi_{S_0} \times \dots \times \Psi_{S_p}(\mathcal{E})$  et soit  $d \in (A_{s'}^{m'})^{\mathbb{Z}}$  telle que  $\overline{\varsigma^{-1}}(d) = o_m(c')$ . Tout d'abord, l'état  $K$  ne peut pas apparaître dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}}(d)$  car sinon toute cellule deviendrait constante à partir d'un certain temps, ce qui n'est pas le cas dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_s^{(m, n, k)}}(c')$ .

Ainsi, pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ), il ne peut y avoir qu'une particule du type  $\tau_i$  dans  $d$  (d'après le lemme 11 et la définition 37). Soit  $u \in A_s^m$  un bloc apparaissant dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_s^{(m,n,k)}}(c')$ . Comme on peut choisir  $c'$  telle que tout bloc de taille  $m$  ne contenant pas de particule apparaît au moins 2 fois (on vérifie que l'on obtient cette propriété en choisissant  $c'$  suffisamment espacée car les motifs  $P_x$  apparaissent tous 2 fois au moins),  $\zeta^{-1}(u)$  ne contient pas de particule si  $u$  n'en contient pas. Réciproquement, pour tout bloc  $u$  contenant une particule,  $\zeta^{-1}(u)$  en contient une. En effet,  $\mathcal{A}_{s'}^{(m',n',k')}$  est tel que tout changement d'état a lieu au voisinage d'une particule ou alors provoque l'apparition de l'état  $K$  (en au plus 2 étapes de temps) et ce deuxième cas est exclu d'après ce qui précède.

Ainsi, à toute particule de type  $\tau_i$  apparaissant dans  $c'$ , on peut associer un ensemble (non vide) de types de particules  $\{\tau_j, j \in \rho(i)\}$  de  $\mathcal{A}_{s'}$  tel que si une particule du type  $\tau_i$  apparaît dans  $u$ , alors une particule du type  $\tau_j$  apparaît dans  $\zeta^{-1}(u)$  pour tout  $j \in \rho(i)$ . En effet, on vérifie que cette association (définie au temps initial) est préservée par itérations de  $\mathcal{A}_s^{(m,n,k)}$  et  $\mathcal{A}_{s'}^{(m',n',k')}$  respectivement car les particules de  $\mathcal{A}_{s'}^{(m',n',k')}$  ne peuvent disparaître sans provoquer l'apparition de l'état  $K$  (ce qui est exclu) et elles ne peuvent apparaître que dans des blocs de  $A_{s'}^{m'}$  qui correspondent, via  $\zeta$ , à des blocs contenant une particule (or, pour  $c'$  bien choisie, jamais deux blocs de  $A_s^m$  contenant une particule ne sont voisins dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_s^{(m,n,k)}}(c')$ ).

Comme il ne peut y avoir 2 particules du même type dans  $d$ , la fonction d'association  $\rho$  possède la propriété d'injectivité suivante :  $\rho(i) \cap \rho(j) \neq \emptyset \Rightarrow i = j$ . Or il apparaît  $p$  types de particules dans  $c'$  et  $\mathcal{A}_{s'}$  possède  $q$  types de particules, donc nécessairement  $p \leq q$ .

Enfin, pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq p$ , la présence d'un mot de la forme  $K_i P_i$  dans  $c'$  implique que la particule de type  $\tau_i$  de  $\mathcal{A}_s$  enchaîne  $n_i$  zig-zags simples (Pour  $c'$  choisie suffisamment espacée pour que les paramètres de décalage ne suffisent pas à "redresser" les "zig-zags"), formellement :

$$c' \models_{\mathcal{A}_s, \tau_i} \mathcal{P}_{n_i}.$$

En conséquence, pour  $c'$  bien choisie et vue la relation  $\mathcal{A}_s^{(m,n,k)} \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{s'}^{(m',n',k')}$ , on en déduit que la particule de type  $\tau_j$  de  $\mathcal{A}_{s'}$  (pour tout  $j \in \rho(i)$ ) enchaîne elle aussi  $n_i$  zig-zags simples à partir de  $\overline{\sigma_{m'}}(d)$ , formellement :

$$\overline{\sigma_{m'}}(d) \models_{\mathcal{A}_{s'}, \tau_j} \mathcal{P}_{n_i}.$$

Par un raisonnement semblable et en utilisant la propriété 16, on a aussi

$$\forall j \in \rho(0), \forall h \in \mathbb{N}_+, \overline{\sigma_{m'}}(d) \models_{\mathcal{A}_{s'}, \tau_j} \mathcal{P}_h.$$

D'après le corollaire 6, on a alors  $\rho(O) = \{0\}$  donc  $0 \notin \rho(i)$  pour  $i \neq 0$ , puis  $n_i \leq n'_j$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , si  $j \in \rho(i)$ . Par la propriété d'injectivité de  $\rho$  on en déduit finalement :

$$\forall 1 \leq i \leq p, n_i \leq n'_i.$$

▽

**Corollaire 3** *L'ensemble des  $\mathcal{A}_s$  muni de l'ordre  $\leq_{\square_3}$  constitue un treillis (distributif).*

*Preuve* C'est (à isomorphie près) le treillis des suites finies décroissantes d'éléments d'un ensemble bien ordonné dans lequel l'opération sup est donnée par

$$\sup((n_1, \dots, n_p), (n'_1, \dots, n'_q)) = (\max(n_1, n'_1), \dots, \max(n_q, n'_q), n_{q+1}, \dots, n_p),$$

en supposant  $q \leq p$  et l'opération inf par

$$\inf((n_1, \dots, n_p), (n'_1, \dots, n'_q)) = (\min(n_1, n'_1), \dots, \min(n_q, n'_q)),$$

en supposant  $q \leq p$ .

▽

### 4.3 Produits cartésiens

Considérons un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  et définissons la famille

$$\mathcal{A}_n = \underbrace{\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_n.$$

La suite  $(\mathcal{A}_n)_n$  est toujours croissante (au sens large) pour  $\trianglelefteq_3$  mais le fait qu'elle soit ou non strictement croissante dépend fortement de  $\mathcal{A}$ . Par exemple, si  $\mathcal{A}$  est nilpotent ou intrinsèquement universel, alors  $\mathcal{A}$  et tous les  $\mathcal{A}_n$  sont dans une même classe d'équivalence pour  $\trianglelefteq_3$ . En revanche, en choisissant  $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_p$ , la suite est strictement croissante comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 6** *Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}_+$ , si  $n < m$ , alors on a*

$$\underbrace{\mathcal{Z}_p \times \cdots \times \mathcal{Z}_p}_m \not\trianglelefteq_3 \underbrace{\mathcal{Z}_p \times \cdots \times \mathcal{Z}_p}_n.$$

*Preuve* On note  $\mathcal{A}_m = \underbrace{\mathcal{Z}_p \times \cdots \times \mathcal{Z}_p}_m$  et  $\mathcal{A}_n = \underbrace{\mathcal{Z}_p \times \cdots \times \mathcal{Z}_p}_n$ , et on suppose que  $\mathcal{A}_m \trianglelefteq_3 \mathcal{A}_n$ . Considérons

la dynamique  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{A}_m$  sur les configurations de la forme  $c_1 \times \cdots \times c_m$  où chaque  $c_i$  est de la forme  ${}^\omega EM_0 \underset{\perp}{\leftarrow} EU_p E^\omega$  et où les zones d'états différents de  $E$  dans les  $c_i$  sont toutes disjointes. Comme chaque

diagramme espace-temps de  $\mathcal{D}$  est temporellement périodique et spatialement ultimement périodique, si un état envahissant apparaît dans une couche  $i$  de  $\mathcal{A}_n$  pour capturer un diagramme de  $\mathcal{D}$ , alors celle-ci est inutile (en effet, après un certain temps cette couche devient constante sur toute la zone de  $c_i$  qui n'est pas constante).

Quitte à diminuer  $n$ , on peut donc supposer qu'il existe un diagramme espace-temps de  $\mathcal{D}$  qui est capturé par  $\mathcal{A}_n$  de telle manière que jamais un état envahissant n'apparaît dans aucune couche de  $\mathcal{A}_n$ . Ceci implique en particulier d'après le lemme 11 qu'au plus une particule par couche de  $\mathcal{A}_n$  est utilisée dans la simulation. Comme le diagramme espace-temps de  $\mathcal{D}$  possède par définition  $m$  zones non constantes distinctes et qu'un changement d'état ne peut avoir lieu qu'au voisinage d'une particule dans  $\mathcal{A}_n$ , on a alors nécessairement  $m \leq n$ .  $\nabla$

Nous proposons ci-après une construction qui, à partir d'un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  quelconque, fournit un majorant naturel pour la suite  $(\mathcal{A}_n)_n$  définie ci-dessus, qu'elle soit strictement croissante ou non. Cette construction repose sur une modification de l'automate  $\mathcal{F}$  de la définition 28 qui peut alors être vu comme un métronome robuste dont la période peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. Précisément, l'automate modifié possède un sous-ensemble  $X$  d'états particuliers utilisés pour marquer des temps. La robustesse prend alors le sens suivant :

- soit chaque cellule finit par ne plus jamais prendre un état de  $X$  après un temps fini (les temps ne sont plus marqués) ;
- soit il existe  $n$  tel que toutes les cellules prennent un état de  $X$  simultanément et tous les  $n$  temps exactement.

Cet automate cellulaire s'appuie sur un équivalent réversible  $\mathcal{F}_R$  de  $\mathcal{F}$  [10] dont le temps de synchronisation peut être choisi de la forme  $t(n) = pn$ .

**Définition 19** *On définit l'automate cellulaire  $\mathcal{H}$  d'alphabet  $Q_{\mathcal{F}_R} \cup \{\kappa\}$  où  $Q_{\mathcal{F}_R}$  est l'alphabet de  $\mathcal{F}_R$  de la façon suivante :*

1.  $\kappa$  est un état envahissant ;
2. pour  $q_{-1}, q_0, q_1 \in Q_{\mathcal{F}_R}$ ,  $\mathcal{H}$  vérifie

$$\mathcal{H}(q_{-1}, q_0, q_1) = \begin{cases} \kappa & \text{si } \exists i, j : q_i \in X_F \cup \{G\} \text{ et } q_j \notin X_F \cup \{G\}, \\ \kappa & \text{si } q_{-1}q_0 = GG \text{ ou } q_0q_1 = GG, \\ \mathcal{F}_R(q_{-1}, q_0, q_1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $X_F$  est l'ensemble d'états "feu" de  $\mathcal{F}_R$  (voir [10]).

Le comportement de  $\mathcal{H}$  est caractérisé par le lemme suivant.

**Lemme 7** *Soit  $c$  une configuration de  $\mathcal{H}$ . Alors on a l'une des alternatives suivantes :*

1.  $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists t_0, \forall t \geq t_0 : (\mathcal{H}^t(c))(z) \notin X_F \cup \{G\}$  et alors on est dans l'un des cas suivants :
  - toute cellule devient constante après un certain temps car un état envahissant est produit, ou
  - il existe une automate cellulaire  $\mathcal{R}$  tel que,  $\forall t \in \mathbb{N}, \mathcal{R}^t(\mathcal{H}^t(c)) = c$  (la dynamique est réversible) et  $t_0 = 0$  (jamais un état de  $X_F \cup \{G\}$  n'est apparu) ;



2.  $\exists n \in \mathbb{N}_+, \exists t_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{N} :$

$$(\mathcal{H}^t(c))(z) \in X_F \cup \{G\} \Leftrightarrow t = t_0 \pmod n.$$

*Preuve* Si les états  $X_F \cup \{G\}$  n'apparaissent jamais dans  $\text{Diag}_{\mathcal{H}}(c)$  alors on est dans l'alternative 1 et alors, selon que  $\kappa$  apparaît ou non dans  $c$ , soit toute cellule devient constante égale à  $\kappa$  après un temps fini, soit la dynamique est réversible car elle suit le comportement de  $\mathcal{F}_R$  qui est réversible. Sinon, si un état quelconque de  $X_F \cup \{G\}$  apparaît dans  $\mathcal{H}^t(c)$  alors cette configuration est de la forme

$$\cdots G \underbrace{X_F \cdots X_F}_{n_{-1}} G \underbrace{X_F \cdots X_F}_{n_0} G \underbrace{X_F \cdots X_F}_{n_1} G \cdots$$

d'après la deuxième partie de la définition de  $\mathcal{H}$ . Ensuite, soit tous les  $n_i$  sont égaux dans la configuration ci-dessus et on est alors dans l'alternative 2 car tous les segments se synchronisent périodiquement et au même rythme (sauf si les  $n_i$  sont tous nuls auquel cas l'état envahissant  $\kappa$  est généré et on est dans l'alternative 1), soit il existe  $i$  tel que  $n_i \neq n_{i+1}$  et alors, par définition de  $\mathcal{F}_R$ , le segment  $i$  ne synchronise pas à la même vitesse que le segment  $i+1$  ce qui fait apparaître le motif  $XGX_F$  ou  $X_FGX$  (avec  $X \notin X_F \cup \{G\}$ ) après  $\min(n_i, n_{i+1})$  étapes, ce qui fait apparaître l'état envahissant  $\kappa$  : on est alors dans l'alternative 1.  $\nabla$

Il n'est pas difficile de généraliser la construction ci-dessus de façon à produire non pas un signal (par un état de  $X_F \cup \{G\}$ ) tous les  $n$  temps, mais plusieurs types de signaux qui apparaissent successivement et cycliquement à des intervalles égaux à une constante près. Pour la suite, les intervalles utilisés seront de la forme  $n, n-2, n+2, n+1$  et 1. La proposition suivante formalise cette généralisation à travers l'automate cellulaire  $\mathcal{I}$ . Celui-ci contient 5 copies de  $\mathcal{H}$  qui sont activées successivement. Des états supplémentaires sont utilisés pour retarder d'un temps constant le passage d'une copie à la suivante lorsque c'est nécessaire.

**Proposition 8** *Il existe un automate cellulaire  $\mathcal{I}$  dont l'ensemble d'états contient des sous-ensembles d'états spéciaux  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  et tel que pour toute configuration  $c$ , on a l'une des possibilités suivantes :*

1.  $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists t_0, \forall t \geq t_0 : (\mathcal{I}^t(c))(z) \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$  et alors on est dans l'un des cas suivants :
  - toute cellule devient constante après un certain temps car un état envahissant est produit, ou
  - il existe une automate cellulaire  $\mathcal{R}$  tel que,  $\forall t \in \mathbb{N}, \mathcal{R}^t(\mathcal{I}^t(c)) = c$  (la dynamique est réversible) et  $t_0 = 0$  (jamais un état de l'un des  $S_i$  n'est apparu);
2.  $\exists n \in \mathbb{N}_+, \exists t_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} :$

$$(\mathcal{I}^t(c))(z) \in S_i \Leftrightarrow t = \begin{cases} t_0 \pmod{4n+2} & \text{si } i = 1 \\ t_0 + n \pmod{4n+2} & \text{si } i = 2 \\ t_0 + 2n - 2 \pmod{4n+2} & \text{si } i = 3 \\ t_0 + 3n \pmod{4n+2} & \text{si } i = 4 \\ t_0 + 4n + 1 \pmod{4n+2} & \text{si } i = 5 \end{cases}$$

De plus, des valeurs multiples de 3 arbitrairement grandes peuvent être obtenues pour  $n$  dans le cas 2 ci-dessus sur des configurations  $c$  bien choisies.

Cet automate cellulaire  $\mathcal{I}$  permet de découper régulièrement le temps en cycles de 5 intervalles de longueurs respectives  $n, n-2, n+2, n+1, 1$ , et ce de manière synchrone pour toutes les cellules. En s'appuyant sur ce découpage temporel, on peut définir un automate cellulaire  $\mathcal{A}_\pi$  qui travaille en 5 phases et qui permet de simuler un produit cartésien quelconque d'un même automate cellulaire  $\mathcal{A}$  de rayon 1. L'idée est d'utiliser des macro-cellules composées de 3 cellules de  $\mathcal{A}$  : si  $n = 3k$ , la macro cellule numéro  $i$  contient, dans l'ordre, une cellule pour son état courant, une cellule pour l'état de sa voisine virtuelle de gauche, la macro-cellule numéro  $i-k$ , et une pour sa voisine virtuelle de droite, la macro-cellule numéro  $i+k$ . De plus, à chaque macro-cellule est associée une tête (dans une autre couche de l'ensemble d'états) qui peut se déplacer jusqu'aux voisines virtuelles de celle-ci pour ramener les informations utiles localement. Les cinq phases de l'action de  $\mathcal{A}_\pi$  sont alors les suivantes pour la tête associée à une macro-cellule  $i$  (l'enchaînement cyclique des phases est assuré par une couche qui indique le numéro de la phase en cours, et qui est mis à jour de façon adéquate à chaque fois que  $\mathcal{I}$  rentre dans un état spécial d'un des ensembles  $S_i$ ) :

1. aller lire l'état de la macro-cellule  $i + k$  (distance  $n$ )
2. revenir et écrire l'information à l'emplacement prévu dans la macro-cellule  $i$  (distance  $n - 2$ );
3. aller lire l'état de la macro-cellule  $i - k$  (distance  $n + 2$ );
4. revenir et écrire l'information à l'emplacement prévu dans la macro-cellule  $i$  (distance  $n + 1$ );
5. se repositionner sur la cellule d'état de la macro-cellule  $i$  (distance 1).

À la fin de ce cycle, la macro-cellule possède localement toutes les informations utiles pour pouvoir effectuer une transition selon la règle de  $\mathcal{A}$ . Ainsi,  $\mathcal{A}_\pi$  simule le comportement de  $\mathcal{A}_k$ , les  $k$  composantes de ce dernier étant juxtaposées dans l'espace sous la forme de  $k$  macro-cellules consécutives.

En outre,  $\mathcal{A}_\pi$  vérifie en permanence d'une part que la couche contenant les têtes contient bien une tête toutes les 3 cellules (ceci peut être contrôlé localement avec un rayon 2), et d'autre part que  $n$  est bien un multiple de 3. Cette dernière vérification est rendue possible par une numérotation modulo 3 des cellules (qui peut, elle, être vérifiée localement) : il suffit de contrôler que les cellules de départ et d'arrivée de la première phase du cycle ont le même numéro modulo 3. Enfin, la couche contenant le numéro de phase en cours doit toujours être uniforme.

Dans le cas où l'une de ces vérifications échoue, ou si un état envahissant est produit dans la couche de l'automate  $\mathcal{I}$ , un état envahissant global est produit.

**Proposition 9** *Pour tout  $\mathcal{A}$  et tout entier  $n \in \mathbb{N}_+$ , on a :*

$$\underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n \trianglelefteq_{\equiv 3} \mathcal{A}_\pi.$$

*De plus, si  $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_p$  ou  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u$ , alors  $\mathcal{A}_\pi$  n'est pas intrinsèquement universel.*

*Preuve* La première partie de la proposition se vérifie aisément par construction de  $\mathcal{A}_\pi$  car  $\mathcal{A}_\pi$  permet de simuler des  $\underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n$  pour  $n$  arbitrairement grand.

Ensuite, d'après la proposition 17, on vérifie que pour tout  $\mathcal{A}$  et toute configuration  $c$  de  $\mathcal{A}_\pi$ , on est dans l'une des possibilités suivantes :

1. soit un état envahissant global est produit (soit parce que la couche de l'automate  $\mathcal{I}$  a produit un état envahissant, soit parce que l'une des vérifications effectuées par  $\mathcal{A}_\pi$  a échoué);
2. soit aucun état de l'un des  $S_i$  n'apparaît jamais dans la couche de  $\mathcal{I}$  et la dynamique de  $\mathcal{A}_\pi$  à partir de  $c$  est réversible (car la dynamique de la couche  $\mathcal{I}$  l'est et que toutes les autres couches restent constantes sauf la couche des têtes qui effectue un simple décalage);
3. soit il existe un entier  $i$ , des paramètres  $m, n, k$  et une configuration  $c'$  de  $\mathcal{A}_i$  tels que la dynamique de  $\mathcal{A}_i$  sur  $c'$  est isomorphe à la dynamique de  $\mathcal{A}_\pi^{(m,n,k)}$  sur  $o_m(c)$ .

Pour conclure, il suffit de considérer la dynamique d'un automate cellulaire  $\mathcal{B}$  sur une configuration  $d$  avec les propriétés suivantes :

- la dynamique n'est pas réversible,
- sur une demi-configuration il existe des zones de plus en plus larges et de plus en plus espacées sur lesquelles la dynamique est périodique avec des périodes de plus en plus longues.

$\mathcal{A}_\pi$  ne peut pas capturer cette dynamique si  $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_p$  ou  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u$ . En effet, la non-réversibilité de  $\text{Diag}_{\mathcal{B}}(d)$  et la présence de zones où le comportement ne devient pas constant après un certain temps force la possibilité 3 ci-dessus et quels que soient les paramètres  $m, n, k$ , la dynamique  $\text{Diag}_{\mathcal{B}^{(m,n,k)}}(o_m(d))$  ne peut pas être capturée par  $\mathcal{A}_i$  quel que soit  $i$  par un raisonnement de comptage de particules analogue à celui du lemme 13.  $\nabla$

**Corollaire 4** *Il existe un automate cellulaire universel pour le calcul Turing séparé de la classe des automates cellulaires intrinsèquement universels par une chaîne strictement croissante de longueur  $\omega \cdot 2$ .*

*Preuve* Cela découle de la proposition 18 et de [22].  $\nabla$

## 5 Conclusion

Les classifications présentées dans la section 7 conduisent à des définitions formelles (universalité intrinsèque (section 7.2), particule (section 9.1)) qui permettent de démontrer des résultats négatifs : non existence d'intrinsèquement universel pour  $\sqsubseteq_1$ , existence d'une chaîne infinie de longueur  $\omega \cdot 2$  de classes d'automates au-dessus de la Turing-universalité (corollaire 8). Nous avons en particulier mis en lumière deux points. D'une part, il est possible de transporter une « complexité » due au nombre d'états des automates dans les configurations initiales considérées (section 8). D'autre part, la notion d'universalité pour le calcul Turing classique qui s'appuie sur la « finitude » des configurations en jeu est beaucoup moins puissante que la notion d'universalité intrinsèque, de nature *a priori* catégorique, mais qui peut aussi être vue comme relevant d'un calcul (non Turing) (section 9).

On aimerait donner sens à une notion de « complexité » en définissant une notion de distance pertinente entre une classe et l'élément minimum d'une classification.

Nous avons tenté d'exprimer de façon formelle des intuitions sur la « complexité » qui viennent du monde des automates cellulaires. Cette formalisation a conduit à des résultats. Il reste à voir s'ils peuvent contribuer significativement à la compréhension de phénomènes complexes naturels.

## Références

- [1] T. Baldwin and S. Shelah. On the classifiability of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 230 :117–129, 2000.
- [2] N. Boccara, J. Nasser, and M. Roger. Particle-like structures and their interactions in spatio-temporal patterns generated by one-dimensional deterministic cellular automata rules. *Physical Review A*, 44 :866–875, 1991.
- [3] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara, and G. Mauri. *Topological chaos and Cellular Automata*, pages 213–259. Springer Verlag, delorme and mazoyer edition, 1999.
- [4] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara, and J. Mazoyer. Shift invariant distance on  $s^{\mathbb{Z}}$  with non trivial topology. In *Proceeding of MFCS'97*, pages 376–381. Springer Verlag, 1997.
- [5] C. Choffrut and K. Čulik. On real-time cellular automata and trellis automata. *Rairo*, pages 417–457, 1984.
- [6] S. Cole. Real time computation by n dimensional iterative arrays of finite-state machines. *IEEE Transactions on Computers*, 18, n 4 :349–362, 1969.
- [7] K. Culik and S. Yu. Undecidability of ca classification schemes. *Complex Systems*, 2 :177–190, 1988.
- [8] R. Gilman. Classes of linear cellular automata. *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, 6 :105–118, 1987.
- [9] G. Hedlund. Endomorphism and automorphism of the shift dynamical system. *Mathematical System Theory*, 3 :320–375, 1969.
- [10] K. Imai and K. Morita. Firing squad synchronization problem in reversible cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 165 :475–482, 1996.
- [11] S. Ishii. Measure theoretic approach to the classification of cellular automata. *Discrete Applied Mathematics*, 39 :125–136, 1992.
- [12] P. Kůrka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, 17 :417–433, 1997.
- [13] B. Martin. Damage spreading and  $\mu$ -sensitivity on cellular automata. *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, 6 :105–118, 1987.
- [14] B. Martin. A group interpretation of particles generated by one-dimensional cellular automata. *Int. Journ. of Mod. Phys. C*, 11 :101–123, 2000.
- [15] B. Martin. *Automates cellulaires, information et chaos*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2001.
- [16] J. Mazoyer. Solutions au problème de la synchronisation d'une ligne de fusiliers. Habilitation à diriger des recherches, 1989.
- [17] J. Mazoyer and I. Rapaport. Inducing an order on cellular automata by a grouping operation. In *Proceeding of STACS'98*, pages 128–227. Springer Verlag, 1998.

- [18] J. Mazoyer and I. Rapaport. Global fixed points attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane. *Discrete Mathematics*, 199 :103–122, 1999.
- [19] J. Mazoyer and N. Reimen. A linear speed-up theorem for cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 101 :59–98, 1992.
- [20] N. Ollinger. *Automates cellulaires : structures*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [21] N. Ollinger. The quest for small universal cellular automata. In *Proceeding of ICALP'02*, pages 376–381. Springer Verlag, 2002.
- [22] N. Ollinger. The intrinsic universality problem of one-dimensional cellular automata. In *Proceeding of STACS'03*, pages 376–381. Springer Verlag, 2003.
- [23] I. Rapaport. *Ordre induit sur les automates cellulaires par l'opération de regroupement*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1998.
- [24] A. Smith. Real time languages by one-dimensional cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 6 :233–253, 1972.
- [25] J. von Neumann. *Theory of Self-reproducing*. University of Illinois Press, Urbana Ill., 1966.
- [26] S. Wolfram. *Theory and applications of cellular automata*. World Scientific, Singapore., 1986.
- [27] K. Zuse. *Rechnender Raum*, volume 1. Friedrich Viexeg & Sohn, Braunschweig, 1969.

## 6 Introduction et motivations

L'origine de l'étude des automates cellulaires remonte, à la fin des années 1950, aux travaux de J. von Neumann [25] et S. Ulam d'une part et K. Zuse [27] d'autre part. L'objectif était alors de modéliser soit l'auto-reproduction chez les êtres vivants, soit les lois de la physique. Depuis lors, outre de très nombreuses modélisations dans des domaines très variés, les automates cellulaires ont été étudiés en tant que tels. Historiquement, trois directions sont apparues : l'étude des propriétés « ensemblistes » des automates cellulaires (injectivité, surjectivité, définition topologique, ...), la définition d'algorithmes sur automates cellulaires, vus comme un modèle possible du parallélisme massif, et la classification des automates cellulaires.

Ici, nous ne considérons que le dernier point. Usuellement, les automates cellulaires sont constitués de machines finies, toutes identiques (modélisées par des automates finis), placées aux sommets d'un graphe « régulier » (la définition précise de la notion de régularité n'existe pas ; il s'agit de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^n$ , d'un graphe de Cayley, ...), interagissant de façon synchrone suivant un motif de communication uniforme et fini. Le fait que les machines composantes soient finies n'est pas une vraie contrainte car elles permettent de simuler des machines infinies en augmentant la dimension de l'espace et en projetant suivant une direction. Pour préciser la problématique de la classification nous introduisons la définition usuelle d'automate cellulaire sur  $\mathbb{Z}$ , cadre auquel nous nous restreindrons.

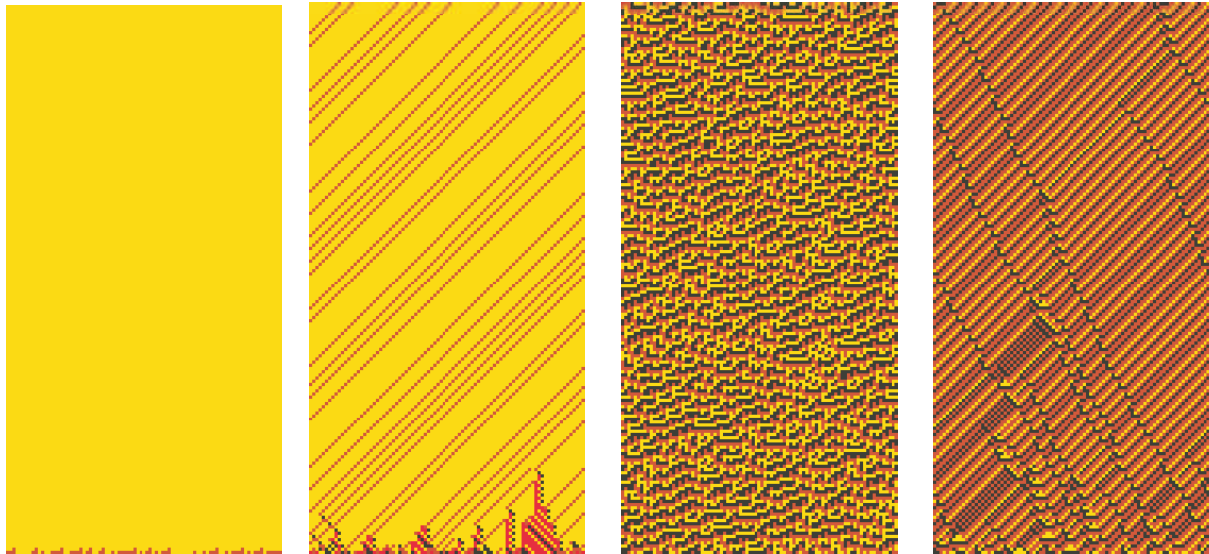
- Définition 20** 1. Un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  est un triplet  $(Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  où  $Q_{\mathcal{A}}$  est un ensemble fini (les états),  $V_{\mathcal{A}} = \{z_0, \dots, z_{\ell}\}$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}$  (le voisinage) - qu'on suppose contenir 0 (bien que ce ne soit pas nécessaire) - et  $\delta_{\mathcal{A}}$  est une application de  $Q_{\mathcal{A}}^{\ell+1}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}$ .
2. Une configuration  $c$  est une application de  $\mathbb{Z}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}$  (élément de  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ ). Un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  agit sur  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$  via sa fonction globale de transition,  $\Delta_{\mathcal{A}}$ , par

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_{\mathcal{A}}(c(z)) = \delta_{\mathcal{A}}(c(z+z_0), \dots, c(z+z_{\ell})).$$

Ainsi, un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  apparaît comme un système dynamique discret d'ensemble de phases  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$  et de fonction  $\Delta_{\mathcal{A}}$ .

3. L'orbite de  $\Delta_{\mathcal{A}}$  sur  $c$  est appelée diagramme espace-temps de  $\Delta_{\mathcal{A}}$  sur  $c$  et notée  $\text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)$ . L'orbite  $\text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)$  peut être visualisée car elle est une application de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}$ , définie par

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Diag}_{\mathcal{A}}(c)((z, n)) = \Delta_{\mathcal{A}}^n(c)(z).$$



(a) Automate de la classe 1 de S.Wolfram.

(b) Automate de la classe 2 de S.Wolfram.

(c) Automate de la classe 3 de S.Wolfram.

(d) Automate de la classe 4 de S.Wolfram.

FIG. 12 – Automates caractéristiques des classes de S. Wolfram.

La Figure 12 montre quelques diagrammes espace-temps (le temps va de bas en haut) : on observe des comportements globaux différents. Classifier les automates cellulaires apparaît pour la première fois dans les travaux de S. Wolfram [26] ; cette classification est empirique et on peut la résumer ainsi : le comportement « typique » d'un automate cellulaire (celui qui apparaît dans une orbite obtenue à partir d'une configuration aléatoire) est d'un des quatre « types » illustrés par la Figure 12. Les quatre types en jeu sont mal définis dans [26] ; actuellement, ils sont résumés par : conduire à une configuration uniforme, conduire à une configuration régulière (périodique), être chaotique, faire apparaître des particules. Classifier apparaît alors comme :

- donner un ensemble (fini ou infini) de propriétés sur les orbites (propriétés intéressantes pour mettre en évidence un phénomène émergent ; chaos par exemple) permettant de faire une partition de l'ensemble des automates cellulaires (toutes les orbites - presque toutes (pour une mesure donnée) - d'un automate cellulaire ont une de ces propriétés) ;
- en souhaitant qu'on puisse caractériser les fonctions globales et, si possible, locales vérifiant l'une des propriétés et/ou donner des algorithmes de décision (ou de semi-décision) sur les fonctions locales ( $\delta_{\mathcal{A}}$ ).

Cet objectif de classification semble irréaliste [1], notamment par le fait que de nombreuses propriétés dynamiques sont indécidables (un automate cellulaire peut simuler une machine de Turing [24]). Néanmoins, de nombreux auteurs [7, 8, 11, 12, 13] ont cherché à préciser différents aspects des intuitions de [26]. Un exemple montre bien que les propriétés choisies dépendent de l'objectif, celui de la classification de P. Kůrka [12] : lorsqu'on munit  $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$  de la topologie de Cantor, un automate cellulaire est soit équicontinu, soit a des points d'équicontinuité, soit est sensible mais pas expansif, soit est expansif. L'intérêt est alors de donner un sens à la notion de chaos (ici, être expansif). Cependant, le décalage  $((Q, \{-1, 0, +1\}, \delta(a, b, c) = a))$  est alors chaotique ce qui correspond à une certaine interprétation du chaos (toute erreur est magnifiée par l'évolution). Avec une autre interprétation (est chaotique ce qui n'est pas intelligible), le décalage n'est pas chaotique. Deux voies ont été explorées : revoir les conditions topologiques du chaos avec la topologie de Cantor [3] ou considérer une autre topologie, par exemple la topologie de Besicovich [4].

Dans ce texte, on présente et on continue l'étude d'un type de classification qui semble adaptée aux sous-automates du type 4 : on compare les sous-automates selon la puissance de représentation de l'ensemble de leurs orbites.

## 7 Comparaisons d'orbites et d'ensembles d'orbites

### 7.1 Opérations de groupage

La définition 20 montre que deux automates différents peuvent avoir mêmes orbites (en augmentant inutilement le voisinage); de fait, un automate cellulaire peut être défini autrement [9].

**Théorème 3** *Soit  $S$  un ensemble fini, l'espace  $S^{\mathbb{Z}}$  étant muni de la topologie de Cantor, les fonctions continues commutant avec le décalage sont les fonctions globales des automates cellulaires.*

Pour comparer les automates cellulaires entre eux nous comparons, de fait, toutes les fonctions continues commutant avec le décalage sur  $S_n^{\mathbb{Z}}$  où  $S_n$  est l'ensemble d'entiers  $\{0, \dots, n-1\}$  (à un renommage près nous les considérons toutes) lorsque l'entier  $n$  varie dans  $\mathbb{N}_+$  (cet ensemble de fonctions est noté  $\mathfrak{F}$ ). Une telle fonction est représentée par l'ensemble de ses orbites, c'est-à-dire l'ensemble des diagrammes espace-temps sur toutes les configurations initiales possibles. En d'autres termes, on considère des ensembles de diagrammes espace-temps structurés par des dépendances locales (les fonctions locales) comme ceux illustrés sur la Figure 13.

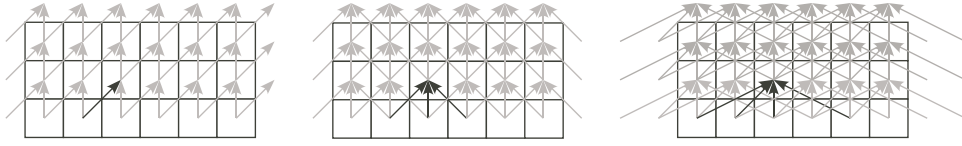


FIG. 13 – Exemple de dépendances : cas des voisinages  $\{-1, 0\}$ ,  $\{-1, 0, +1\}$  et  $\{-2, -1, 0, +2\}$ .

Lorsqu'on observe une orbite, application de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  dans  $S_n$ , on peut la paver par une pièce unique de sorte que les interactions entre pièces soient encore locales (voir Figure 14); lorsque cette opération est uniforme, l'ensemble des orbites d'un automate cellulaire est vue comme l'ensemble des orbites d'un (même) autre automate cellulaire et on dit qu'on passe du premier au second via l'opération de « groupage », définie par la pièce pavant le plan. L'étude des pièces convenant est menée dans [20]; ici, nous ne considérerons que des pièces rectangulaires avec un possible décalage (voir Figure 14). Ces remarques

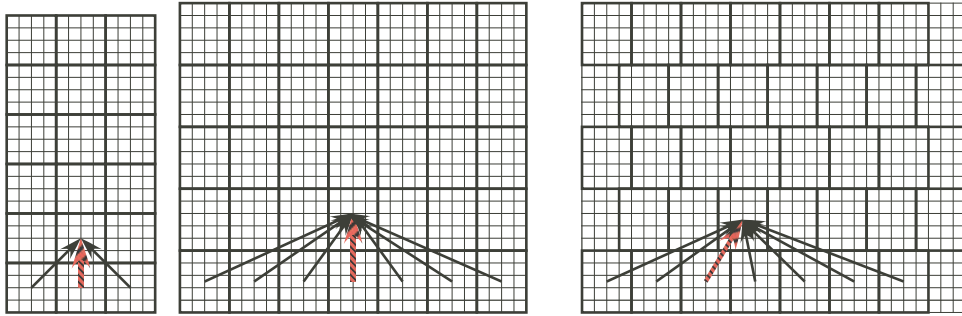


FIG. 14 – Exemples de pavages par des carrés, des rectangles sans et avec décalage; les flèches indiquent les nouvelles dépendances quand les premières correspondent au voisinage  $\{-1, 0, +1\}$ .

se formalisent par les définitions équivalentes suivantes ( $\zeta$  est une bijection - calculable - quelconque de  $\mathbb{N}$  sur les suites finies d'entiers ( $\zeta_i(n)$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  composante de  $\zeta(n)$ ) :

**Définition 21 (Groupage via les fonctions globales)** 1. Soit  $m \in \mathbb{N}_+$ , on définit l'application

- $\mathcal{O}_m$  de  $\mathfrak{F}$  dans  $\mathfrak{F}$  par :  $\forall f \in \mathfrak{F}$ ,  $S_\ell^{\mathbb{Z}}$  étant le domaine de définition de  $f$ ,  $\mathcal{O}_m(f)$  est l'élément de  $\mathfrak{F}$
- de domaine  $S_{o(\ell)}$  avec  $o(\ell) = |\zeta^{-1}(S_\ell^m)|$ ;
- à toute configuration  $c$  de  $S_\ell^{\mathbb{Z}}$ , on fait correspondre la configuration  $o_m(c)$  de  $S_{o(\ell)}^{\mathbb{Z}}$  définie par :  
 $\forall z \in \mathbb{Z}$ ,  $o_m(c)(z) = \zeta^{-1}(c(mz), \dots, c(mz + m - 1))$  ;
- à toute configuration  $c$  de  $S_{o(\ell)}^{\mathbb{Z}}$ , on fait correspondre la configuration  $\overline{o}_m(c)$  de  $S_\ell^{\mathbb{Z}}$  définie par :  
 $\forall h \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall k \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $\overline{o}_m(c)(hm + k) = \zeta_k(c(h))$  ;
- $\forall c \in S_{o(\ell)}^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{O}_m(f)(c) = o_m(f(\overline{o}_m(c)))$ .

Partant d'une configuration  $c$  sur l'alphabet  $S_{o(\ell)}$ , on éclate chaque point (cellule) de  $\mathbb{Z}$  en  $m$  cellules via  $\varsigma$ ; puis, on fait agir  $f$  sur cette configuration d'éléments de  $S_\ell$ , et on regroupe  $m$  cellules en une seule, en commençant à cellule de rang 0. Ainsi, dans une configuration pour  $f$ , on groupe les points de  $\mathbb{Z}$  par paquets de  $m$ , en commençant à l'origine.

2. A tous entiers  $m, n$  ( $n \geq 1$ ), à tout entier relatif  $s$ , à toute fonction  $f$  de  $\mathfrak{F}$ , on fait correspondre la fonction  $f^{(m,n,s)}$  de  $\mathfrak{F}$  définie par :

$$f^{(m,n,s)} = \mathcal{O}_m^{-1} \circ \sigma^s \circ f^n \circ \mathcal{O}_m$$

où  $\sigma$  est le décalage à droite de domaine le domaine de  $f$ .

3. Une fonction  $f$  de  $\mathfrak{F}$  s'envoie par groupage de paramètres  $(m, n, s)$  sur une fonction  $g$  de  $\mathfrak{F}$  si  $g = f^{(m,n,s)}$ .

**Définition 22 (Groupage via les fonctions locales)** 1. A tous entiers  $m, n$  ( $n \geq 1$ ), à tout automate cellulaire  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} = \{-h_{\mathcal{A}}, \dots, 0, \dots, +k_{\mathcal{A}}\}$ , on fait correspondre la fonction  $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}$  de  $Q_{\mathcal{A}}^{m+n(h_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}})}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}^m$  définie par induction sur  $n$  :

- $\forall q_{-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+k_{\mathcal{A}}} \in Q_{\mathcal{A}}$ ,  
 $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,1)}(q_{-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+k_{\mathcal{A}}}) = (\delta_{\mathcal{A}}(q_{-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{k_{\mathcal{A}}}), \dots, \delta_{\mathcal{A}}(q_{m-1-h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+k_{\mathcal{A}}}))$   
(on applique  $\delta_{\mathcal{A}}$  à  $m$   $(h_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{A}} + 1)$ -uplets d'états successifs);
- $\forall q_{-(n+1)h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_0, \dots, q_{m-1}, \dots, q_{m-1+(n+1)k_{\mathcal{A}}} \in Q_{\mathcal{A}}$ ,  
 $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n+1)}(q_{-(n+1)h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_0, \dots, q_{m-1}, \dots, q_{m-1+(n+1)k_{\mathcal{A}}}) =$   
 $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}(\delta_{\mathcal{A}}(q_{-(n+1)h_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{-nh_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}}}), \dots, \delta_{\mathcal{A}}(q_{m-1+(n+1)k_{\mathcal{A}}-h_{\mathcal{A}}-1}, \dots, q_{m-1+(n+1)k_{\mathcal{A}}}))$   
(on applique  $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}$  à  $m + (n - 1)(h_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{A}})$   $(h_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{A}} + 1)$ -uplets d'états successifs obtenus via  $\delta_{\mathcal{A}}$ ).

2. A tous entiers  $m, n$  ( $n \geq 1$ ), à tout entier relatif  $s$ , à tout automate cellulaire  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} = \{-h_{\mathcal{A}}, \dots, 0, \dots, +k_{\mathcal{A}}\}$ , on fait correspondre la fonction

$\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)}$  de  $Q_{\mathcal{A}}^{m+n(h_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}})+s}$  dans  $Q_{\mathcal{A}}^m$  définie par :

- $\forall q_{-nh_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s} \in Q_{\mathcal{A}}$ ,  
 $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)}(q_{-nh_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s}) = \delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}(q_{-nh_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}})$  (si  $s \geq 0$ )  
 $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)}(q_{-nh_{\mathcal{A}}}, \dots, q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s}) = \delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}(q_{-nh_{\mathcal{A}}+s}, \dots, q_{m-1+nk_{\mathcal{A}}+s})$  (si  $s \leq 0$ )  
on applique  $s$  décalages à  $\delta_{\mathcal{A}}^{(m,n)}$ .

3. Un automate cellulaire  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} = \{-h_{\mathcal{A}}, \dots, 0, \dots, +k_{\mathcal{A}}\}$  s'envoie par groupage de paramètres  $(m, n, s)$  sur un automate cellulaire  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  s'il existe une bijection  $\phi$  de  $Q_{\mathcal{A}}^m$  sur  $Q_{\mathcal{B}}$  et, si  $|V_{\mathcal{B}}| = \frac{g(m,n,s)}{m}$  où  $g(m,n,s)$  est le plus petit multiple de  $m$  plus grand que  $m + (n - 1)(h_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{A}}) + s$ ,  $\forall q_0 \dots q_{m+(n-1)(h_{\mathcal{A}}+k_{\mathcal{A}})+s-1}$ ,

$$\phi \left( \delta_{\mathcal{A}}^{(m,n,s)}(q_0 \dots q_{g(m,n,s)-1}) \right) = \delta_{\mathcal{B}} \left( \underbrace{\left( \overbrace{(\phi(q_{im}) \dots \phi(q_{im+m-1}))}^{m \text{ éléments}} \right)}_{\frac{g(m,n,s)}{m} \text{ fois}} \right).$$

$\mathcal{B}$  est noté  $\mathcal{A}^{(m,n,s)}$  et désigné comme un  $(m, n, s)$ -groupé de  $\mathcal{A}$ .

L'équivalence entre les deux définitions provient de [23, 20]. La Figure 15 montre un exemple où le plan  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  est pavé par des rectangles avec décalage : on observe que la connaissance de tous les états de la configuration initiale de  $\mathcal{A}$  appartenant aux rectangles permettant de calculer un nouveau rectangle de  $\mathcal{A}$  permet de connaître ce nouvel état de  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{(5,9,1)}$  (base d'un rectangle d'états de  $\mathcal{A}$ ).

Dans la suite  $\mathfrak{F}$  représentera l'ensemble des fonctions continues commutant avec le décalage (pour un  $S_\ell$ ) ou l'ensemble des automates cellulaires de la définition 20 selon le contexte.

Intuitivement, la fonction de groupage (qui à  $f$  fait correspondre  $f^{(m,n,s)}$ ) consiste à « changer d'échelle, en regroupant des états » de façon uniforme sur toutes les orbites de  $f$ . On peut considérer que  $f^{(m,n,s)}$  est un codage « effectif » de  $f$ , transportant toutes les propriétés algorithmiques de  $f$ . Observons qu'intuitivement on passe alors de  $f^{(m,n,s)}$  à  $f$  en structurant l'ensemble des états de  $f^{(m,n,s)}$  via  $\varsigma^{-1}$  et en « changeant d'échelle en éclatant les états ». Les différentes fonctions de groupage induisent différentes relations d'équivalence sur  $\mathfrak{F}$ ,  $\sim_1, \sim_2, \sim_3$  :

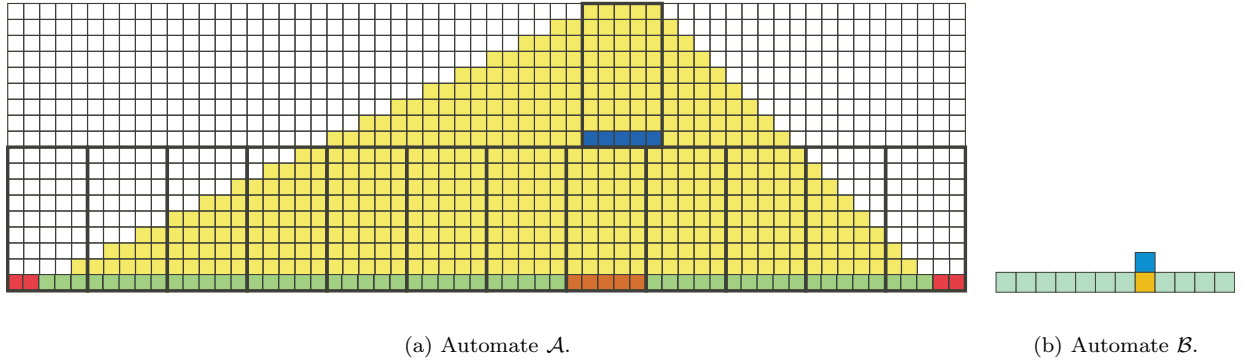


FIG. 15 – Exemple de groupage de paramètres  $m = 5$ ,  $n = 9$  et  $s = 1$ . On a  $h_{\mathcal{A}} = 2$  et  $k_{\mathcal{A}} = 1$ . La zone en jaune indique les dépendances dans  $\mathcal{A}$ . On a  $h_{\mathcal{B}} = 7$  et  $k_{\mathcal{B}} = 4$ .

**Définition 23** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathfrak{F}$  :

1.  $f \sim_1 g$  si et seulement s'il existe  $m_f, m_g \in \mathbb{N}$  tels que  $g = f^{(m_f, m_f, 0)}$  et  $f = g^{(m_g, m_g, 0)}$ .
2.  $f \sim_2 g$  si et seulement s'il existe  $m_f, m_g, n_f, n_g \in \mathbb{N}$  tels que  $g = f^{(m_f, n_f, 0)}$  et  $f = g^{(m_g, n_g, 0)}$ .
3.  $f \sim_3 g$  si et seulement s'il existe  $m_f, m_g, n_f, n_g \in \mathbb{N}$  et  $s_f, s_g \in \mathbb{Z}$  tels que  $g = f^{(m_f, n_f, s_f)}$  et  $f = g^{(m_g, n_g, s_g)}$ .

Notons que  $\sim_3$  raffine  $\sim_2$  et  $\sim_2$  raffine  $\sim_1$ . La classe d'équivalence de  $\mathcal{A}$  est notée  $\mathfrak{A}_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ). Tous les décalages vers la droite  $\sigma_\ell$  (de domaine  $S_\ell$  définis par  $\sigma_\ell(c)(z) = c(z - 1)$ ) sont dans même la classe  $\mathfrak{S}_1$ ; dans  $\mathfrak{S}_2$ , on trouve aussi les fonctions  $\text{Id}_\ell^k \circ \sigma_\ell$  ( $\text{Id}_\ell$  est l'identité sur  $S_\ell$ ), décalage une fois sur  $k + 1$ ; enfin,  $\text{Id}_\ell$  appartient à  $\mathfrak{S}_3$ .

On a donc défini des classes d'automates cellulaires équivalents via des opérations de groupage; maintenant examinons comment comparer ces classes entre elles de façon « naturelle ».

## 7.2 Ordre induit par injection

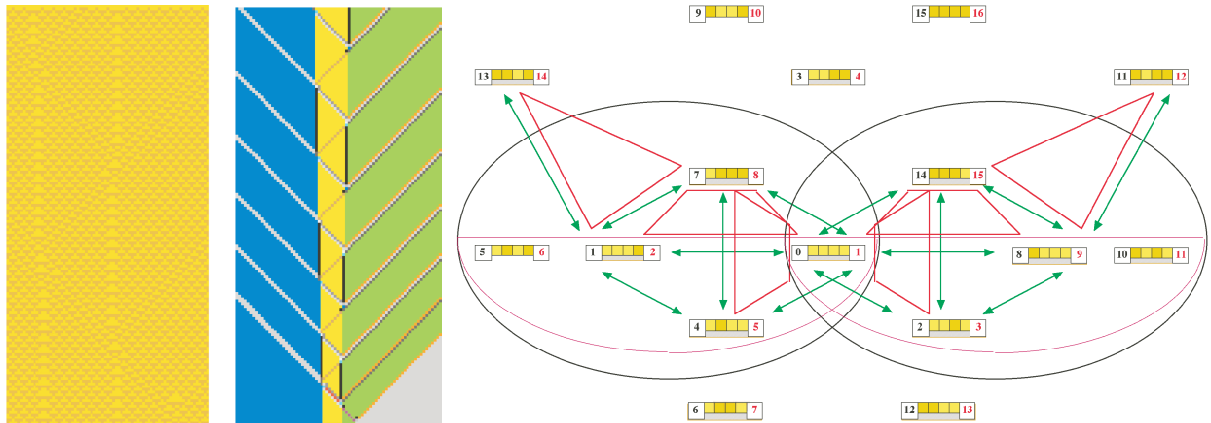


FIG. 16 – L'automate 54 (l'état 0 est jaune et l'état 1 est marron) et son groupé  $54^{(4,4,0)}$ . Les états de  $54^{(4,4,0)}$  sont représentés par une suite de 4 états de 54, et leur numéro dans l'ordre lexicographique.

La Figure 16 montre quelques propriétés de l'automate 54 (dans la numérotation de S. Wolfram [26]) de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$ . La partie gauche montre une orbite sur une configuration particulière : autour d'un segment de 32 points de  $\mathbb{Z}$  elle est périodique dans les deux directions (avec des périodes différentes).



La partie centrale de la figure donne l'orbite de la même configuration dans  $54^{(4,4,0)}$ . On observe que, dans ces deux représentations d'une même orbite, apparaissent la branche gauche d'une parabole discrète et son axe de symétrie : ce phénomène est plus visible par groupage, donc dans  $54^{(4,4,0)}$  (zone jaune). Observant un tel diagramme espace-temps, on aimerait le décrire ainsi : « il apparaît des particules (signaux) de nature différentes : se déplaçant vers la droite, la gauche, restant sur place et leurs collisions construisent une demi-parabole ». Sur la figure centrale, une particule est marquée par un changement d'état (frontières entre les bandes bleues et grises ou jaune et vertes) : on imagine que  $\sigma_2^{-1}$  (décalage vers la gauche sur deux états) représente les interactions entre les états bleus et gris de la figure centrale. Si tel est le cas,  $\sigma_2^{-1}$  est un automate cellulaire, partie stable de  $54^{(4,4,0)}$  (sous-automate de  $54^{(4,4,0)}$ ). La figure de droite montre les sous-automates de  $54^{(4,4,0)}$  : les états « quiescents » (tels que  $\delta(q, q, q) = q$ ) donnent les sous-automates à un état et sont indiqués par une barre grise au-dessous de leur description ; ceux à deux états le sont par des flèches vertes, les autres par des triangles, quadrilatère, ... rouges, violets ou noir. Ainsi on retrouve que l'état (0001) correspondant au carré  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}$ , numéroté 1 (en noir sur la figure de droite et représenté en bleu sur la figure centrale) est un sous-automate. Il en est de même pour (1101) représentant  $\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}$ , numéroté 13 (en noir sur la figure de droite et représenté en gris sur la figure centrale). On retrouve  $\sigma_2^{-1}$  (flèche entre les états 1 et 13). Une étude plus complète de  $54^{(4,4,0)}$  se trouve dans [2] et [14].

Intuitivement, à un groupage près, la règle 54 est plus puissante que  $\sigma_2^{-1}$  (au sens que les orbites de  $54^{(4,4,0)}$  contiennent les images de toutes les orbites de  $\sigma_2^{-1}$ ), voire plus « complexe » (tout phénomène global apparaissant dans les orbites de  $\sigma_2^{-1}$  apparaît dans celles de  $54^{(4,4,0)}$ ). Ces remarques conduisent à :

**Définition 24** Soient  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  et  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  deux automates cellulaires, on dit que

1.  $\mathcal{A}$  est un sous-automate de  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ , s'il existe une injection  $\iota$  de  $Q_{\mathcal{A}}$  dans  $Q_{\mathcal{B}}$  telle que  $\delta_{\mathcal{B}}$  soit stable sur  $\iota(Q_{\mathcal{A}})$ .
2.  $\mathcal{A}$  est inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage carré, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_1} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}, 0)} \sqsubseteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
3.  $\mathcal{A}$  est inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_2} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, 0)} \sqsubseteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
4.  $\mathcal{A}$  est inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire avec décalage, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\square_3} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  et  $s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}} \in \mathbb{Z}$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}})} \sqsubseteq \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}})}$ .

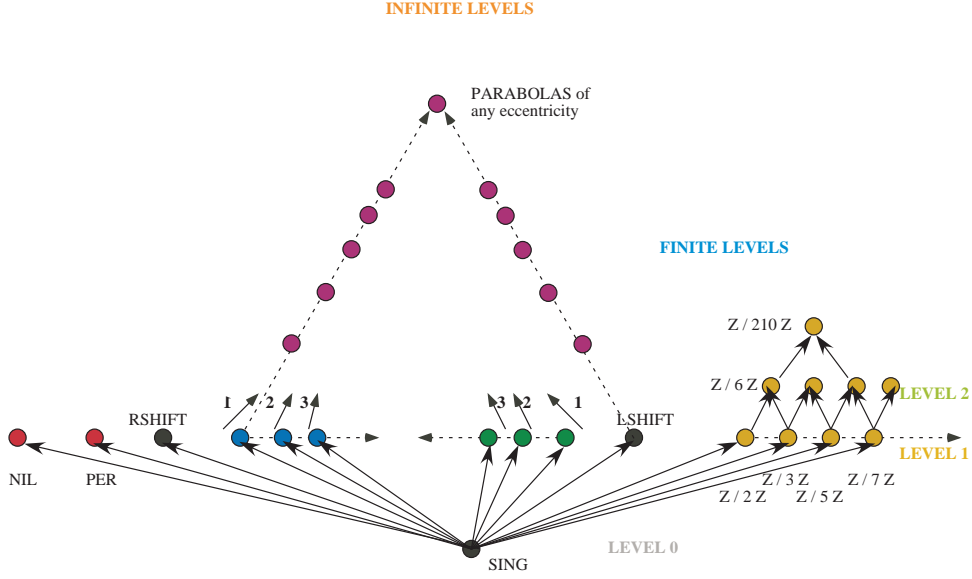
**Proposition 10** Les relations  $\preceq_{\square_1}$ ,  $\preceq_{\square_2}$  et  $\preceq_{\square_3}$  sont des relations de pré-ordre (voir [23, 20]).

On obtient alors des relations d'ordre, encore notées  $\preceq_{\square_1}$ ,  $\preceq_{\square_2}$  et  $\preceq_{\square_3}$ , en passant aux classes d'équivalence,  $\sim_1^{\square}$ ,  $\sim_2^{\square}$  et  $\sim_3^{\square}$ , induites par ces préordres. Les classes d'équivalence d'un automate cellulaire pour  $\sim_i^{\square}$

sont notées  $\overset{\square}{\mathcal{A}}^i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

L'ordre sur les classes obtenues par groupage carré avec injection est étudié dans [23, 15] et est illustré par la Figure 17. On a un plus petit élément (automates à un seul état) ; puis immédiatement au-dessus plusieurs classes (celles des automates nilpotents, les automates qui évoluent toujours vers une configuration périodique, les classes concernant ou  $\sigma$  ou  $\text{Id}^k \circ \sigma$  ou  $\sigma^{-1}$  ou  $\text{Id}^k \circ \sigma^{-1}$ , et les automates de voisinage  $\{-1, +1\}$  sur  $S_p$  représentant  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$  avec  $p$  premier). Il existe des chaînes infinies croissantes et, donc, des classes avec une infinité de classes plus petites. Notons [23] qu'il n'existe pas d'élément maximal. Dans [18], il est montré que savoir si un automate appartient à la classe des nilpotents (toute configuration évolue vers la même configuration uniforme) est indécidable. Ainsi l'appartenance à une classe pour  $\square_1$  peut être indécidable et on conjecture que c'est le cas général.

L'ordre obtenu par groupage rectangulaire avec injection est étudié dans [20] et est illustré par la Figure 18. Il présente des différences attendues : toutes les classes de  $\square_1$  correspondant à  $\text{Id}^k \circ \sigma$  - resp.  $\text{Id}^k \circ \sigma^{-1}$  - avec  $k \in \mathbb{N}$  sont regroupées en une classe (« avoir une particule vers la droite - resp. la gauche -). Le fait marquant est la présence d'un plus grand élément : les automates dits « intrinsèquement universels » [22] avec un représentant  $\mathcal{U}$  à seulement 6 états [21]. En outre, pour chaque sous-automate cellulaire  $\mathcal{A}$ , il existe un groupage rectangulaire de paramètres  $(n, m, 0)$  tel que  $\mathcal{A}^{(n, m, 0)} \square_2 \mathcal{U}$  (voir [20]).


 FIG. 17 – Ordre des classes  $\bar{\mathcal{A}}_1$ , obtenues par groupage carré avec injection.

Qui plus est, dans [22], il est montré qu'entre toute classe  $\bar{\mathcal{A}} \in \bar{\mathcal{U}}_2$  et  $\bar{\mathcal{U}}_2$ , il existe une suite infinie croissante de classes pour  $\bar{\mathcal{U}}_2$ . L'absence d'élément maximum pour  $\bar{\mathcal{U}}_1$  [17], montre que pour avoir un automate intrinsèquement universel, il faut avoir de la redondance, donc avoir  $m > n$ .

L'ordre sur les classes obtenues par groupage rectangulaire avec décalage et injection est semblable à l'ordre induit par  $\bar{\mathcal{U}}_2$  : simplement, il regroupe les classes  $\bar{\mathcal{A}} \in \bar{\mathcal{U}}_2$  et  $\bar{\mathcal{B}} \in \bar{\mathcal{U}}_2$  quand  $\mathcal{A} = \sigma \circ \mathcal{B}$ . Son intérêt principal est que dans toute classe il existe un représentant de voisinage  $\{-1, 0\}$  via la simulation de tout automate par un automate de voisinage  $\{-1, 0\}$  de [5].

Dans tous les cas, on montre que les classes des automates de voisinage  $\{-1, 0\}$  sur  $S_p$  représentant  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$  ont une structure de treillis qui correspond à celle des groupes  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ . Cela n'est pas général. Si on note par  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  le produit de  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{B}$ , de même voisinage et défini à une bijection près par  $\delta_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((q_{\mathcal{A},0}, q_{\mathcal{B},0}), \dots, (q_{\mathcal{A},\ell}, q_{\mathcal{B},\ell})) = (\delta_{\mathcal{A}}(q_{\mathcal{A},0}, \dots, q_{\mathcal{A},\ell}), \delta_{\mathcal{B}}(q_{\mathcal{B},0}, \dots, q_{\mathcal{B},\ell}))$ , on a toujours  $\bar{\mathcal{A}} \in \bar{\mathcal{U}}_i \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$ ,  $\bar{\mathcal{B}} \in \bar{\mathcal{U}}_i \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$  mais  $\bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$  n'est pas en général le maximum de  $\bar{\mathcal{A}} \in \bar{\mathcal{U}}_i$  et de  $\bar{\mathcal{B}} \in \bar{\mathcal{U}}_i$  [20].

### 7.3 D'autres ordres

La Figure 19 montre l'automate  $\mathcal{P}$  produit  $54 \times 184$  de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$  codé ainsi : il a 4 états  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Pour obtenir  $\delta_{\mathcal{P}}(q_\ell, q_c, q_r)$  on procède comme suit : soit  $\alpha \in \{\ell, c, r\}$

- si  $q_\alpha \geq 2$  on pose  $q'_\alpha = q_\alpha - 2$ , et on calcule  $q = \delta_{54}(q'_\ell, q'_c, q'_r)$  ;
- aux états  $q_\ell, q_c, q_r$  on fait correspondre  $q^*_\ell, q^*_c, q^*_r$  de  $\{0, 1\}$  par  $q^*_\alpha = 0$  si  $q_\alpha \in \{0, 1\}$  et  $q^*_\alpha = 1$  si  $q_\alpha \in \{2, 3\}$  puis on calcule  $q^\sharp = \delta_{184}(q^*_\ell, q^*_c, q^*_r)$  ;
- $\delta_{\mathcal{P}}(q_\ell, q_c, q_r)$  est enfin  $q$  si  $q^\sharp = 0$  et  $q + 2$  sinon.

Alors  $54 \in \bar{\mathcal{U}}_1 54 \times 184$  et  $184 \in \bar{\mathcal{U}}_1 54 \times 184$ . Les états 0 et 1 (resp. 2 et 3) forment un sous-automate dont la règle est 54. On observe que (Figure 19 b) en identifiant les états 0 et 1 d'une part et les états 2 et 3 d'autre part, on obtient encore un sous-automate cellulaire de  $\mathcal{P}$  qui est 184 et que (Figure 19 c) en identifiant les états 0 et 2 d'une part et les états 1 et 3 d'autre part, on obtient aussi un sous-automate cellulaire de  $\mathcal{P}$  qui est 54. Cette idée d'identifier des états nous donne une autre façon de comparer des automates.

**Définition 25** Soient  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  et  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  avec  $V_{\mathcal{A}} \subseteq V_{\mathcal{B}}$  deux automates cellulaires, on dit que

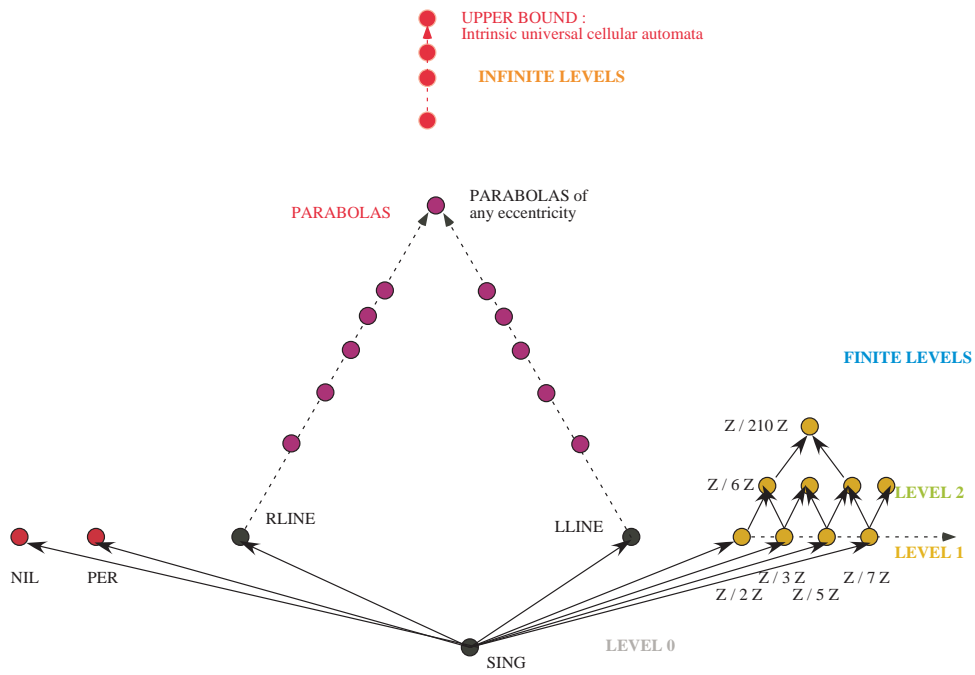
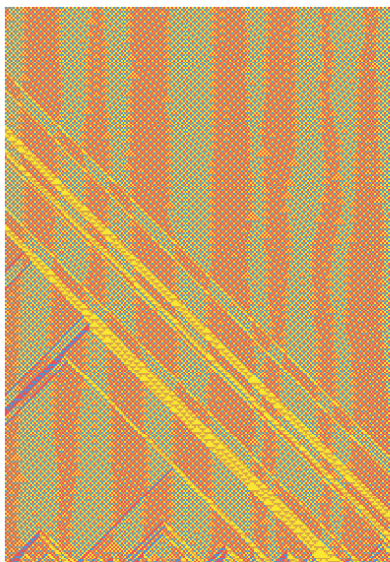


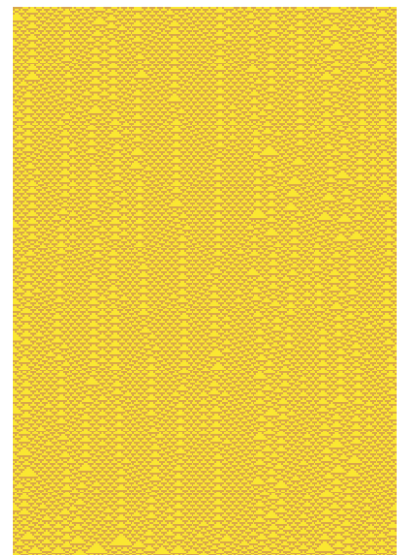
FIG. 18 – Ordre des classes  $\mathcal{A}_2$ , obtenues par groupage rectangulaire avec injection.



(a) Automate  $\mathcal{P}$ .



(b) Sous-automate 184 de S. Wolfram.



(c) Sous-automate 54 de S. Wolfram.

FIG. 19 – Automate  $54 \times 184$ .

1.  $\mathcal{A}$  est un automate projeté de  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}$ , s'il existe une surjection  $s$  de  $Q_{\mathcal{B}}$  sur  $Q_{\mathcal{A}}$  telle que  $\forall q_0, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1} \in Q_{\mathcal{B}}, \forall q_0^*, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1}^* \in Q_{\mathcal{B}},$  si  $s(q_0) = s(q_0^*), \dots, s(q_{V_{\mathcal{A}}-1}) = s(q_{V_{\mathcal{A}}-1}^*),$  alors  $\delta_{\mathcal{A}}(s(q_0), \dots, s(q_{V_{\mathcal{A}}-1})) = s(\delta_{\mathcal{B}}(q_0, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1})) = s(\delta_{\mathcal{B}}(q_0^*, \dots, q_{V_{\mathcal{A}}-1}^*)).$
2.  $\mathcal{A}$  est  $\triangleleft$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage carré, noté  $\mathcal{A} \triangleleft_{\square_1} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}, 0)} \triangleleft \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{B}}, 0)}.$
3.  $\mathcal{A}$  est  $\triangleleft$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire, noté  $\mathcal{A} \triangleleft_{\square_2} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, 0)} \triangleleft \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, 0)}.$
4.  $\mathcal{A}$  est  $\triangleleft$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire avec décalage, noté  $\mathcal{A} \triangleleft_{\square_3} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  et  $s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}} \in \mathbb{Z}$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}})} \triangleleft \mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}})}.$

**Proposition 11** Les relations  $\triangleleft_{\square_1}, \triangleleft_{\square_2}$  et  $\triangleleft_{\square_3}$  sont des relations de pré-ordre (voir [15]).

On obtient alors des relations d'ordre, encore notées  $\triangleleft_{\square_1}, \triangleleft_{\square_2}$  et  $\triangleleft_{\square_3}$ , en passant aux classes d'équivalence  $\sim_1^{\triangleleft}, \sim_2^{\triangleleft}$  et  $\sim_3^{\triangleleft}$ , induites par ces préordres. Les classes d'équivalence d'un automate cellulaire pour  $\sim_i^{\triangleleft}$  sont notées  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

La structure des classes via  $\sim_1^{\triangleleft}, \sim_2^{\triangleleft}, \sim_3^{\triangleleft}$  reste à étudier. Néanmoins, on a encore un élément minimum; des classes de  $\sim_1^{\square}, \sim_2^{\square}, \sim_3^{\square}$  sont conservées comme les nilpotents et on a aussi des chaînes infinies croissantes. Par contre, on ignore s'il existe un élément maximum.

Dans le cas des classes obtenues via  $\sim_1^{\square}, \sim_2^{\square}, \sim_3^{\square}$  (section 7.2), l'interprétation naturelle était : « dans  $\overset{\square}{\mathcal{A}}_i$  se trouvent tous les automates qui présentent par un groupage de type  $i$  les mêmes propriétés d'orbites ». Dans le cas des classes obtenues via  $\sim_1^{\triangleleft}, \sim_2^{\triangleleft}, \sim_3^{\triangleleft}$ , une interprétation naturelle de la surjection est la notion de *paramètre caché*. Considérons l'automate  $54 \times 184$  de la Figure 19; on a 4 paramètres (les états); selon qu'on les observe tous (cas a)), qu'on observe des groupes de deux par la surjection 0022 (cas b)) ou par la surjection 0101 (cas c)), on observe des propriétés globales très différentes (184 ou 54).

L'automate de la Figure 20 a 6 états et est construit ainsi :

1. *Mélange de deux automate via un troisième* On se donne deux automates  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  de même nombre d'états  $n$  et de même voisinage  $V = \{-1, 0, +1\}$ . Les états de  $\mathcal{A}_1$  sont nommés  $0, \dots, n-1$  et ceux de  $\mathcal{A}_2$   $n, \dots, 2n-1$ . A tout élément  $x$  de  $Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  on fait correspondre son numéro d'automate  $\nu$  (0 si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$  et 1 sinon) et son numéro d'ordre  $\zeta$  ( $x$  si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $x-n$  sinon). On se donne un troisième automate  $\mathcal{B}$  à deux états  $\{0, 1\}$  encore de voisinage  $V$  et vérifiant  $\delta_{\mathcal{B}}(0, 0, 0) = 0$  et  $\delta_{\mathcal{B}}(1, 1, 1) = 1$ .

On construit alors le mélange de  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  par  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2$  par :

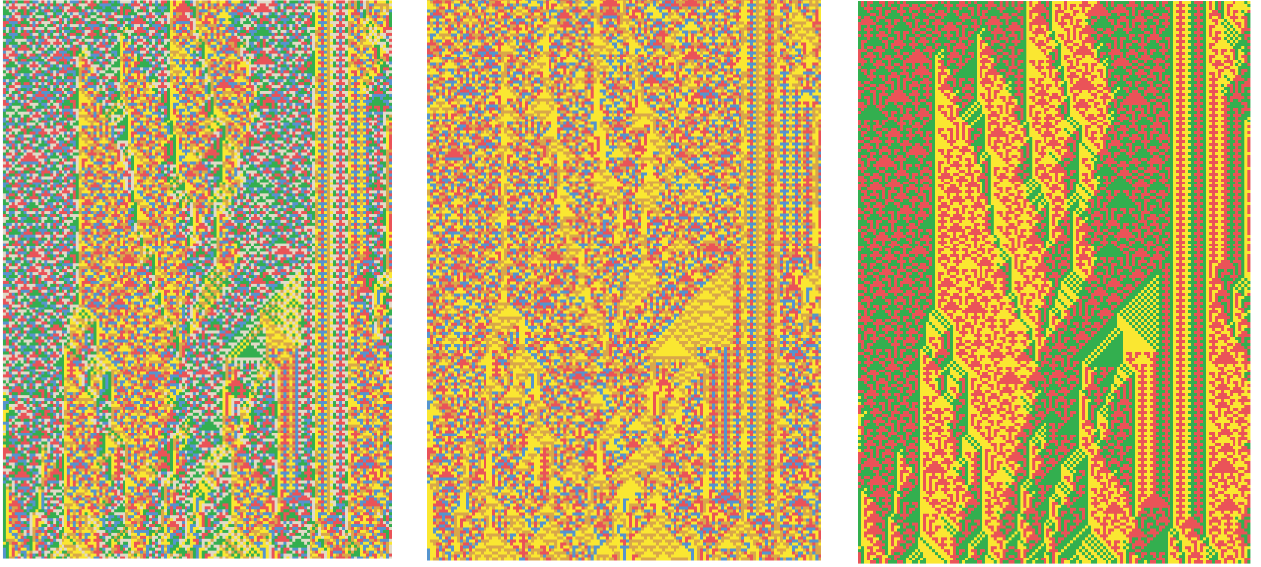
- (a)  $Q_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2} = Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  et  $V_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2} = V$ ;
- (b)  $\forall q_{\ell}, q_c, q_r \in Q_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2},$

$$\delta_{\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2}(q_{\ell}, q_c, q_r) = \begin{cases} \delta_{\mathcal{A}_1}(\zeta(q_{\ell}), \zeta(q_c), \zeta(q_r)) & \text{si } \delta_{\mathcal{B}}(\nu(q_{\ell}), \nu(q_c), \nu(q_r)) = 0 \\ \delta_{\mathcal{A}_2}(\zeta(q_{\ell}) + n, \zeta(q_c) + n, \zeta(q_r) + n) & \text{si } \delta_{\mathcal{B}}(\nu(q_{\ell}), \nu(q_c), \nu(q_r)) = 1 \end{cases}$$

2. *Mélange de trois automates via quatre autres* On se donne trois automates  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  de même nombre d'états  $n$  et de même voisinage  $V = \{-1, 0, +1\}$ . Les états de  $\mathcal{A}_0$  sont nommés  $0, \dots, n-1$ , ceux de  $\mathcal{A}_1$   $n, \dots, 2n-1$  et ceux de  $\mathcal{A}_2$   $2n, \dots, 3n-1$ . A tout élément  $x$  de  $Q_{\mathcal{A}_0} \cup Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  on fait correspondre son numéro d'automate  $\nu$  (0 si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$ , 1 si  $x \in \{n, \dots, 2n-1\}$  et 2 sinon) et son numéro d'ordre  $\zeta$  ( $x$  si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $x-n$  si  $x \in \{n, \dots, 2n-1\}$  et  $x-2n$  sinon). On se donne trois automates  $\mathcal{B}_{0,1}, \mathcal{B}_{1,2}$  et  $\mathcal{B}_{2,1}$  à deux états  $\{0, 1\}$  encore de voisinage  $V$  et vérifiant  $\delta_{\mathcal{B}_{0,1}}(0, 0, 0) = \delta_{\mathcal{B}_{1,2}}(0, 0, 0) = \delta_{\mathcal{B}_{2,0}}(0, 0, 0) = 0$  et  $\delta_{\mathcal{B}_{0,1}}(1, 1, 1) = \delta_{\mathcal{B}_{1,2}}(1, 1, 1) = \delta_{\mathcal{B}_{2,0}}(1, 1, 1) = 1$ . On se donne, en outre, un automate  $\mathcal{C}$  à trois états  $\{0, 1, 2\}$  encore de voisinage  $V$  et vérifiant  $\delta_{\mathcal{C}}(0, 0, 0) = 0, \delta_{\mathcal{C}}(1, 1, 1) = 1$  et  $\delta_{\mathcal{C}}(2, 2, 2) = 2$ . On construit alors le mélange de  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  par  $\mathcal{B}_{0,1}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,1}$  et  $\mathcal{C}$ , noté  $\mathcal{D}$ , par :

- (a)  $Q_{\mathcal{D}} = Q_{\mathcal{A}_0} \cup Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$  et  $V_{\mathcal{D}} = V$ .

- (b) Les états  $Q_{\mathcal{A}_0} \cup Q_{\mathcal{A}_1}$  ( $Q_{\mathcal{A}_1} \cup Q_{\mathcal{A}_2}$ ,  $Q_{\mathcal{A}_2} \cup Q_{\mathcal{A}_0}$ ) engendrent un sous-automate de  $\mathcal{D}$  isomorphe à  $\mathcal{A}_0 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_1$  ( $\mathcal{A}_1 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_2 \oplus_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_0$ ) par la bijection  $\phi$  avec  $\forall x \in \{0, \dots, 2n-1\}$ ,  $\phi(x) = x$  ( $\forall x \in \{n, \dots, 3n-1\}$ ,  $\phi(x) = x-n$ ,  $\forall x \in \{0, \dots, n-1\}$   $\phi(x) = x+n$  et  $\forall x \in \{2n, \dots, 3n-1\}$ ,  $\phi(x) = x-2n$ ).
- (c)  $\forall q_\ell, q_c, q_r \in Q_{\mathcal{D}}$ ,
- i. Si  $\nu(q_\ell) \neq \nu(q_c)$ ,  $\nu(q_c) \neq \nu(q_r)$  et  $\nu(q_r) \neq \nu(q_\ell)$ , soit  $\eta = \delta_{\mathcal{C}}(\nu(q_\ell), \nu(q_c), \nu(q_r))$ , alors il existe un seul état  $q^*$  de  $\{q_\ell, q_c, q_r\}$  tel que  $\nu(q^*) = \eta$ , et  $\delta_{\mathcal{C}}(q_\ell, q_c, q_r) = \eta n + q^*$ .
  - ii. Sinon il existe  $i_1$  et  $i_2$  dans  $\{0, 1, 2\}$  tels que  $\nu(q_\ell)$ ,  $\nu(q_c)$ ,  $\nu(q_r)$  appartiennent tous à  $\{i_1, i_2\}$  et la valeur de  $\delta_{\mathcal{C}}(q_\ell, q_c, q_r)$  est fixée par le point (b) précédent.
3. *Cas de la Figure 20* L'automate de la Figure 20 a les caractéristiques suivantes :  $\mathcal{A}_0 = 54$ ,  $\mathcal{A}_1 = 184$ ,  $\mathcal{A}_2 = 54$ ,  $\mathcal{B}_{0,1} = 150$ ,  $\mathcal{B}_{1,2} = 150$ ,  $\mathcal{B}_{2,0} = 184$  et  $\mathcal{C}$  est l'identité.



(a) Automate  $\mathcal{K}$ .

(b) Automate  $\mathcal{K}$  avec la surjection (012301).

(c) Automate  $\mathcal{K}$  avec la surjection (002244).

FIG. 20 – Automate  $\mathcal{K}$ .

Par la surjection (002244), on obtient un sous-automate à 3 états (points 2)b) et 2)c)). Ce sous-automate contient  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$  comme sous-automates. En outre, la surjection (012301) donne un sous-automate à 4 états puisque  $\mathcal{B}_{1,0} = \mathcal{B}_{1,1} = \mathcal{B}_{3,0} = \mathcal{B}_{3,1} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_3$ . Ce sous-automate à 4 états contient  $\mathcal{A}_2$  comme sous-automate. Donc  $\mathcal{A}_2$  est sous-automate de  $\mathcal{K}$  et aussi par injection dans un projeté. Ici  $\mathcal{A}_1$  est seulement sous-automate d'un projeté de  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 12** *Si  $\mathcal{A}$  est sous-automate d'un projeté de  $\mathcal{B}$ , alors  $\mathcal{A}$  est projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}$ .*

*Preuve* Soient  $s : Q_{\mathcal{B}} \rightarrow Q_{\mathcal{C}}$  et  $\iota : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow Q_{\mathcal{C}}$  les surjection et injection rendant compte des hypothèses. Désignons par  $\mathcal{E}$  l'ensemble  $\{q \in Q_{\mathcal{B}} \mid \exists c \in Q_{\mathcal{A}} \text{ tel que } s(q) = \iota(c)\}$ . On définit  $\tilde{s}, \tilde{\iota} : \mathcal{E} \rightarrow Q_{\mathcal{A}}$  par : soit  $q \in \mathcal{E}$ , il existe  $a \in Q_{\mathcal{A}}$  tel que  $s(q) = \iota(a)$ ; on pose  $\tilde{s}(q) = \iota^{-1}(s(q))$ . Comme  $\iota$  est injective,  $\tilde{s}$  est bien défini. C'est une surjection.  $(\mathcal{E}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}} \upharpoonright \mathcal{E})$  est un sous-automate de  $\mathcal{B}$  et  $(Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  est un projeté de  $(\mathcal{E}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}} \upharpoonright \mathcal{E})$ .  $\nabla$

Pour tenir compte de la possibilité de retrouver un automate comme projeté d'un sous-automate, on introduit la définition suivante.

**Définition 26** *Soient  $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, V_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$  et  $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}}, \delta_{\mathcal{B}})$  deux automates cellulaires, on dit que*

1.  $\mathcal{A}$  est  $\trianglelefteq$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage carré, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq \square_1} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}, 0)}$  soit projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
2.  $\mathcal{A}$  est  $\trianglelefteq$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq \square_2} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, 0)}$  soit projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, 0)}$ .
3.  $\mathcal{A}$  est  $\trianglelefteq$ -inférieur à  $\mathcal{B}$  pour le groupage rectangulaire avec décalage, noté  $\mathcal{A} \preceq_{\trianglelefteq \square_3} \mathcal{B}$ , s'il existe  $m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}_+$  tels que  $\mathcal{A}^{(m_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{A}})}$  soit projeté d'un sous-automate de  $\mathcal{B}^{(m_{\mathcal{B}}, n_{\mathcal{B}}, s_{\mathcal{B}})}$ .

**Proposition 13** Les relations  $\preceq_{\trianglelefteq \square_1}$ ,  $\preceq_{\trianglelefteq \square_2}$  et  $\preceq_{\trianglelefteq \square_3}$  sont des relations de pré-ordre.

On obtient alors des relations d'ordre, encore notées  $\preceq_{\trianglelefteq \square_1}$ ,  $\preceq_{\trianglelefteq \square_2}$  et  $\preceq_{\trianglelefteq \square_3}$ , en passant aux classes d'équivalence  $\sim_1^{\trianglelefteq \square}$ ,  $\sim_2^{\trianglelefteq \square}$  et  $\sim_3^{\trianglelefteq \square}$ , induites par ces préordres. Les classes d'équivalence d'un automate cellulaire pour  $\overset{\trianglelefteq \square_i}{\mathcal{A}}$  sont notées  $\overset{\trianglelefteq \square_i}{\mathcal{A}}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

On ne sait rien sur la réciproque. On remarque que  $\trianglelefteq \square \trianglelefteq$  est  $\trianglelefteq \square$ .

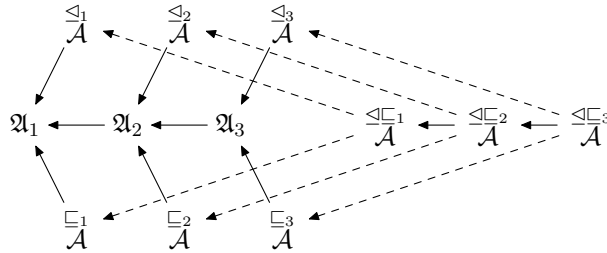


FIG. 21 – Comparaisons entre les classes (une flèche indique que la relation de départ raffine la relation d'arrivée).

On ne sait pas si les classes  $\overset{\square_i}{\mathcal{A}}$  et  $\overset{\trianglelefteq \square_i}{\mathcal{A}}$  sont distinctes. Les relations indiquées dans la Figure 21 sont évidentes. Les classes  $\mathfrak{A}_i$  et  $\overset{\square_i}{\mathcal{A}}$  sont distinctes : les classes de  $\mathfrak{A}_i$  où  $\mathcal{A}$  est non-autosimilaire au sens de [15] ne contiennent que  $\mathcal{A}$  contrairement aux classes  $\overset{\square_i}{\mathcal{A}}$ .

L'étude de ces classifications permet de mettre en lumière certains phénomènes. Nous allons l'illustrer de deux façons. D'abord en montrant l'existence de suites croissantes infinies de classes pour  $\overset{\square_i}{\mathcal{A}}$  dont le nombre minimal d'états des représentants croît puis chute. Puis en montrant l'existence d'un treillis de classes pour  $\overset{\trianglelefteq \square_i}{\mathcal{A}}$  dont des chaînes présentent la même propriété (en utilisant le nombre d'aller-retours d'une tête de machine de Turing).

## 8 Pouvoir d'expression du nombre d'états

Considérons un ensemble de classes parmi celles définies précédemment, et supposons que pour l'ordre considéré  $\triangleleft$  on ait une chaîne infinie croissante. Dans une classe  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$ , on a des automates de voisinage minimal : en fait, il s'agit du voisinage  $\{-1, 0, +1\}$  pour les groupages carré et rectangulaire et  $\{-1, 0\}$  (ou  $\{0, +1\}$ ) pour le groupage rectangulaire avec décalage [6, 5]. Parmi tous les automates  $\mathcal{A}^*$  appartenant à  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$  et de voisinage minimal, il y en a un de plus petit nombre d'état noté  $n_{\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}}$ . Lorsqu'on a une chaîne infinie croissante  $\left(\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i \mid i \in \mathbb{N}\right)$  majorée par  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$ , les nombres minimaux d'états  $n_{\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i}$  des classes  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i$  ne sont pas majorés car on a un nombre fini d'automates de voisinage fixé. Donc, pour un nombre infini d'indices  $i$ , le représentant minimal de  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}_i$  a plus d'états que  $n_{\mathcal{A}}$ , nombre d'états minimal de  $\overset{\triangleleft}{\mathcal{A}}$ . Avec notre interprétation des classes de la section 7, cela signifie que l'automate  $\mathcal{A}^\#$  avec  $n_{\mathcal{A}}$  états a plus de pouvoir d'expression que les automates  $\mathcal{A}_i^\#$  avec un nombre d'états arbitrairement plus grand. Nous allons donner une explication (partielle) de ce phénomène. Mais pour cela nous montrons l'existence de chaînes infinies croissantes bornées (voir [17]) en introduisant les notions nécessaires.

**Définition 27** On définit deux familles d'automates de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$

1.  $\mathcal{G}_n = (S_n, \zeta_n)$  avec

$$\zeta_n(q_\ell, q_c, q_r) = \begin{cases} q_\ell & \text{si } x = y = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.  $\mathcal{H}_n = (S_n, \eta_n)$  avec  $\eta_n(q_\ell, q_c, q_r) = \min(q_\ell, q_c, q_r)$ .

**Lemme 8** Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$

1.  $\mathcal{G}_1 \sim_{\sqsubseteq}^{\sqsubseteq} \mathcal{H}_i$  et  $\mathcal{NIL} \sqsubseteq_i \mathcal{G}_1$  où  $\mathcal{NIL}$  est la classe des sous-automates nilpotents ( $\mathcal{NIL} = \bar{\mathcal{N}}^{\sqsubseteq_i}$  avec  $Q_{\mathcal{N}} = \{0, 1\}$  et  $\delta_{\mathcal{N}}(q_\ell, q_c, q_r) = 0$ ).
2.  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \mathcal{G}_n \sqsubseteq_i \mathcal{G}_{n+1}$  et  $\mathcal{H}_n \sqsubseteq_i \mathcal{H}_{n+1}$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \mathcal{G}_{n+1} \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_n$  et  $\mathcal{H}_{n+1} \not\sqsubseteq_i \mathcal{H}_n$ .
4.  $\forall n \geq 2, \forall m \geq 2, \mathcal{G}_n \not\sqsubseteq_i \mathcal{H}_m$  et  $\mathcal{H}_m \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_n$ .

*Preuve* Une preuve détaillée pour  $\sqsubseteq_1$  se trouve dans [17]. L'image par l'injection  $\iota$  de  $Q_{\mathcal{N}}$  qui à  $q$  fait correspondre  $0q$  dans  $\mathcal{G}_2^{(2,2,0)}$  ou  $\mathcal{H}_2^{(2,2,0)}$  est stable; d'où 1). Le point 2) est évident : il suffit de prendre l'identité.

Intuitivement, si on ne considère que des configurations initiales périodiques de période  $p$ ,  $\mathcal{G}_n$  a  $n - 1$  points fixes atteints en une étape ( $q \dots q$  avec  $q \neq 0$ ) et un point fixe  $0 \dots 0$  pouvant être atteint en 0 à  $p - 1$  étapes;  $\mathcal{H}_n$  a aussi  $n$  points fixes mais tous les points fixes  $q \dots q$  ont une transitoire de longueur de 0 à  $p - 1$ . Un groupage quelconque de paramètres  $(\mu, \nu, s)$  de la section 7.1 ne change pas le nombre de cycles des configurations périodiques mais il « divise » la longueur des transitoires par  $\nu$ . D'où le point 3) car un automate ne peut avoir un sous-automate avec plus de cycles-limites de configurations périodiques que lui.

Puisque tout groupé de  $\mathcal{H}_n$  a des transitoires d'itérées de configurations périodiques de longueur non bornée conduisant à  $n$  points fixes différents, il ne peut être sous-automate d'un groupé de  $\mathcal{G}_m$  dont les transitoires d'itérées de configurations périodiques sont de longueur non bornée qui conduisent toutes au même point fixe  $0 \dots 0$  (l'injection enverrait tout état  $q \dots q$  de  $S_n^{\mu\gamma}$  sur  $0 \dots 0$  de  $S_n^{\mu\sigma}$ ) et donc  $\mathcal{H}_n \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_n$  si  $n \geq 2$ . Sur les configurations périodiques de période  $2p$ , de la forme  $x \dots xy \dots y$  ( $x, y \in S_N$  tout groupé de  $\mathcal{G}_n$  conduit au point fixe  $0 \dots 0$ , alors que tout groupé de  $\mathcal{G}_m$  conduit au point fixe  $\min(x, y) \dots \min(x, y)$ ), une injection de  $\mathcal{G}_n^{(\mu\sigma, \nu\sigma, s\sigma)}$  dans  $\mathcal{H}_m^{(\mu\gamma, \nu\gamma, s\gamma)}$  donnerait pour image de  $0 \dots 0$  de  $S_n^{\mu\sigma}$  à la fois  $0 \dots 0$  de  $S_m^{\mu\gamma}$  et  $1 \dots 1$  de  $S_m^{\mu\gamma}$ . D'où 4).  $\nabla$

**Définition 28 (FSSP : Firing Squad Synchronization Problem)** Le problème de la synchronisation avec deux généraux en temps  $t(n)$  est de construire un sous-automate cellulaire  $\mathcal{F}$  de voisinage  $\{-1, 0, +1\}$  tel que :

1. L'automate comporte 5 états particularisés : ! (extérieur avec,  $\forall X, Y \in Q_{\mathcal{F}}, \delta_{\mathcal{F}}(X, !, Y) = !$ ),  $L$  (état quiescent avec  $\delta_{\mathcal{F}}(L, L, L) = L$ ),  $G_\ell, G_r$  (généraux de gauche et de droite) et  $F$  (feu).
2. Partant de la configuration initiale  $c$  de taille  $n : \infty ! G_\ell \underbrace{L \dots L}_{n-2} G_r ! \infty$ , l'évolution est telle que
  - Pour  $\theta \in \{0, \dots, t(n) - 1\}$ , l'état  $F$  n'apparaît pas dans  $\Delta_{\mathcal{F}}^\theta(c)$ ;
  - $\Delta_{\mathcal{F}}^{t(n)}(c)$  est  $\infty \underbrace{! F \dots F}_{n-1} ! \infty$ .

Dans [19], le résultat suivant est montré.

**Proposition 14** Il existe une solution  $\mathcal{F}^o$  au problème de la synchronisation avec deux généraux en temps  $t(n) = n$  et ce temps est optimal.

Des modifications [16] à la solution de [19] permettent de définir un automate  $\mathcal{F}$  comme suit :

**Définition 29** L'automate  $\mathcal{F}$

1. a 2 états particularisés  $G$  (général) et  $F$  (feu);
2. partant de la configuration initiale périodique  $\gamma$  de période  $n : \infty (G \underbrace{F \dots F}_{n-1} G)^\infty$  avec  $\gamma(0) = G$ ,  
l'évolution est telle que

- Pour  $\theta \in \{0, \dots, n-1\}$ , les états  $F$  et  $G$  n'apparaissent pas dans  $\Delta_{\mathcal{F}}^{\theta}(\gamma)$  ;
- $\Delta_{\mathcal{F}}^n(\gamma)$  est  $\infty(G \underbrace{F \dots F}_n G) \infty$  avec  $\gamma(c) = G$ .

**Définition 30** On définit un nouvel automate  $\mathcal{D}$  en deux temps.

1.  $\mathcal{S} = (\{0, 1\}^3, V_{\mathcal{S}} = \{-1, 0, +1\}, \delta_{\mathcal{S}})$  est défini pour tous  $(q_{\ell_1}, q_{\ell_2}, q_{\ell_3}), (q_{c_1}, q_{c_2}, q_{c_3}), (q_{r_1}, q_{r_2}, q_{r_3})$  de  $\{0, 1\}$  par  $\delta_{\mathcal{S}}((q_{\ell_1}, q_{\ell_2}, q_{\ell_3}), (q_{c_1}, q_{c_2}, q_{c_3}), (q_{r_1}, q_{r_2}, q_{r_3})) = (q_{\ell_1}, q_{c_2}, q_{r_3})$ .
2.  $\mathcal{D} = (Q_{\mathcal{F}} \times Q_{\mathcal{S}}, V_{\mathcal{D}} = \{-1, 0, +1\}, \delta_{\mathcal{D}})$  où  $\delta_{\mathcal{D}}((q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{\ell, \mathcal{S}}), (q_{c, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{S}}), (q_{r, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{S}}))$  est défini par

$$\begin{cases} (\delta_{\mathcal{F}}(q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{F}}), 000) & \text{si } \begin{cases} \delta_{\mathcal{F}}(q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{F}}) \in \{F, G\} \\ \text{et} \\ \delta_{\mathcal{S}}(q_{\ell, \mathcal{S}}, q_{c, \mathcal{S}}, q_{r, \mathcal{S}}) \neq (111) \end{cases} \\ (\delta_{\mathcal{F}}(q_{\ell, \mathcal{F}}, q_{c, \mathcal{F}}, q_{r, \mathcal{F}}), \delta_{\mathcal{S}}(q_{\ell, \mathcal{S}}, q_{c, \mathcal{S}}, q_{r, \mathcal{S}})) & \text{sinon} \end{cases} \quad (111)$$

**Lemme 9** Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et pour  $n \geq 2$

1.  $\mathcal{G}_n \sqsubseteq_i \mathcal{D}$ ,
2.  $\mathcal{H}_n \sqsubseteq_i \mathcal{D}$ .
3.  $\mathcal{D} \not\sqsubseteq_i \mathcal{G}_n$  et  $\mathcal{D} \not\sqsubseteq_i \mathcal{H}_n$ .

*Preuve* Il suffit de montrer les points 1) et 2) pour  $\sqsubseteq_1$ . Pour montrer que  $\mathcal{A} \sqsubseteq_1 \mathcal{B}$  il suffit d'exhiber des configurations de  $\mathcal{B}$  images par  $\iota$  de l'ensemble des configurations d'un groupé de  $\mathcal{A}$ . L'intérêt de  $\mathcal{F}_{(1,0,0)}$  est que les configurations  $\infty(G \underbrace{F \dots F}_{\nu-1} G) \infty$  structurent le diagramme espace-temps en carrés

de taille  $\nu \times \nu$  en marquant les coins des carrés par l'état  $G$  et les côtés horizontaux par l'état  $F$ . L'automate  $\mathcal{S}$  est le produit de trois sous-automates sur  $\{0, 1\}$ ; le premier est le décalage à droite,  $\sigma$ , le second est l'identité, le troisième est le décalage à gauche  $\sigma^{-1}$ . Donc partant d'une configuration  $\dots (1, 1, 1) \underbrace{(0, 0, 0) \dots (0, 0, 0)}_{x-1} (1, 1, 1) \underbrace{(0, 0, 0) \dots (0, 0, 0)}_{y-1} (1, 1, 1) \dots$ , on obtiendra  $(1, 1, 1)$  en position  $x+1$

après  $x$  évolutions si et seulement si  $x = y$ .

On code alors, via  $\iota$ , un état  $x \neq 0$  de  $\mathcal{G}$  par

$$(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{x-1} (F, (1, 1, 1)) \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{n-x-1}$$

et 0 par  $(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{n-1}$ . On a alors  $\mathcal{G}_n \preceq_{\sqsubseteq_1} \mathcal{D}^{n+1}$  car sur l'évolution d'une

configuration de  $\iota(S_n^{\mathbb{Z}})$  lors de la synchronisation de sa composante  $\mathcal{F}$  au temps  $n$ , l'état de sa composante  $\mathcal{S}$  ne peut être  $(1, 1, 1)$  en  $z$  que s'il était de la forme  $(?, ?, 1)$  (resp.  $(?, 1, ?)$ ,  $(?, ?, 1)$ ) (et donc  $(1, 1, 1)$  par choix de  $\iota$ ) en  $z-n$ ,  $z$  et  $z+n$ ; en outre par définition de  $\mathcal{D}$ , s'il n'est pas  $(1, 1, 1)$  il est  $(0, 0, 0)$ .

On code alors, via  $\iota$ , un état  $x \neq 0$  de  $\mathcal{G}$  par

$$(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (1, 1, 1)) \dots (F, (1, 1, 1))}_x (F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0)) \underbrace{\dots (F, (0, 0, 0))}_{n-x-1}$$

et 0 par  $(G, (0, 0, 0)), \underbrace{(F, (0, 0, 0)) \dots (F, (0, 0, 0))}_{n-1}$  et on conclue de même.

Le point 3) provient du point 3) du lemme 8 : en raisonnant par l'absurde on observe que par 1) on aurait  $\mathcal{G}_{n+1} \sqsubseteq_i \mathcal{D}$  et donc  $\mathcal{G}_{n+1} \sqsubseteq_i \mathcal{D} \sqsubseteq_1 \mathcal{G}_n$ .  $\nabla$

L'automate  $\mathcal{D}$  de la définition 30 a moins de 300 états, donc  $n_{\mathcal{D}} < 300$  et donc on a bien lorsque l'on monte dans l'ordre  $\sqsubseteq_i$  une diminution du nombre d'états. La preuve du lemme 9 montre qu'on a codé le numéro d'un état de  $\mathcal{G}$  par la position d'un  $(1, 1, 1)$  sur le bas d'un carré fourni par  $\mathcal{F}$  et celui d'un état de  $\mathcal{H}$  par le nombre de  $(1, 1, 1)$  consécutifs et le fonctionnement de  $\mathcal{D}$  permet de « simuler » ceux de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ . La famille  $\mathcal{G}$  code dans ses états le nombre de cycles-limites (sur les configurations périodiques) avec une propriété supplémentaire sur les transitoires alors que  $\mathcal{D}$  code la présence d'un état  $(F, (1, 1, 1))$



en  $z$  en fonction de sa présence en  $z + k$ ,  $z$ ,  $z - k$  dans une  $k^{\text{ième}}$  pré-image. Cela permet de coder le nombre d'états de  $\mathcal{G}$  par la position relative des états  $(F, (1, 1, 1))$  et  $(G, (0, 0, 0))$ . *En quelque sorte, au lieu de décrire une famille avec un nombre quelconque d'états et un comportement donné, on donne le moyen de coder les états en nombre quelconque par la configuration initiale et les règles permettent de retrouver le comportement voulu en transformant les codages donnés par les configurations.*

## 9 Particules et produits cartésiens pour un treillis Turing

Dans cette section, les automates cellulaires considérés  $\mathcal{A}$  seront de voisinage  $\{-r_{\mathcal{A}}, \dots, r_{\mathcal{A}}\}$ ; en outre, pour alléger les notations, on désignera par  $\mathcal{A}$  à la fois l'automate, sa fonction locale, sa fonction globale et on notera son ensemble d'états par  $A$ .

**Définition 31** *Une dynamique  $\mathcal{D}$  associée à un alphabet  $Q$  est un ensemble de diagrammes spatio-temporels, formellement :  $\mathcal{D} \subseteq Q^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}$ . Un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  capture la dynamique  $\mathcal{D}$  s'il existe des entiers  $m, n, k$ , un ensemble  $E$  de configurations de  $(A^m)^{\mathbb{Z}}$  et une surjection  $\varsigma : A^m \rightarrow Q$  tels que, pour tout  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ , il existe  $c \in E$  avec*

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}, \mathbf{d}(z, t) = \varsigma \left( (\mathcal{A}^{(m, n, k)})(c) \right) (z, t).$$

Il résulte de la définition de  $\leq_{\square_3}$ , de la transitivité des changements d'échelle et le théorème 12 de [20], page 55, que :

**Lemme 10** *Si un automate cellulaire est intrinsèquement universel alors il capture toutes les dynamiques cellulaires (i.e. les dynamiques capturées par automate cellulaire).*

### 9.1 Dynamiques séquentielles

Le comportement de certains automates cellulaires peut être mieux compris en étudiant les trajectoires suivies par certains états particuliers. La définition suivante formalise une notion de *particule* : un ensemble d'états qui peuvent être "localisés", c'est-à-dire qui ne se dispersent pas dans l'espace itération après itération.

**Définition 32** *Soit  $\mathcal{A}$  un automate cellulaire.  $T \subseteq A$  est un type de particule pour  $\mathcal{A}$  si le nombre (éventuellement infini) de cellules dans un état de  $T$  n'augmente pas sous l'action de  $\mathcal{A}$ . Formellement, en notant  $\#_T(c) = |\{z \in \mathbb{Z} : c(z) \in T\}|$ , on a :*

$$\forall c \in A^{\mathbb{Z}}, \#_T(c) \geq \#_T(\mathcal{A}(c)).$$

Lorsque  $\#_T(c) = 1$ , on note  $\chi_T(c)$  la position de l'unique cellule de  $c$  dans un état de  $T$ . On appelle *particule* une cellule dans un état de  $T$ .

Enfin, pour tout entier  $m \in \mathbb{N}_+$  et toute configuration  $c \in (A^m)^{\mathbb{Z}}$ , on utilise les notations  $\#_T(c)$  et le cas échéant  $\chi_T(c)$  pour désigner l'extension de  $\#_T(\cdot)$  et  $\chi_T(\cdot)$  aux blocs de cellules.

On vérifie aisément que l'ensemble d'états  $A \setminus T$  induit un sous-automate que l'on appelle *automate cellulaire médium* associé à  $\mathcal{A}$  et  $T$ .

Le formalisme particule/médium que l'on vient d'introduire permet aussi de capturer la notion de calcul séquentiel dans les automates cellulaires ([24]). Étant donné une machine de Turing d'ensemble d'états  $E$  et d'alphabet de ruban  $R$ , on peut lui associer un automate cellulaire dans lequel la tête Turing sera simulée par un certain type de particule (isomorphe en un certain sens à  $E$ ) et le médium correspondant, choisi comme automate cellulaire identité sur l'ensemble d'états  $R$ , joue le rôle du ruban. Sur les configurations comportant une seule particule, la dynamique de l'automate cellulaire est isomorphe à celle de la machine de Turing. En revanche, rien ne garantit dans cet automate la présence d'une seule particule, et, selon la définition de sa règle de transition locale en présence de plusieurs particules, il peut produire des dynamiques qui n'ont rien de commun avec la machine de Turing associée.

La construction générale suivante permet, étant donné un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  et un type de particule  $T$ , de contrôler en un certain sens la présence d'une seule particule de ce type dans une configuration.

Sur les configurations comportant une seule particule de type  $T$ , le fonctionnement de l'automate construit est essentiellement celui de  $\mathcal{A}$  auquel on ajoute une couche de contrôle de la position de la particule. Dans cette couche, une cellule dans l'état  $\leftarrow$  indique que la particule est à sa gauche (au sens large) et une cellule dans l'état  $\rightarrow$  indique que la particule est à sa droite (au sens strict). Cette couche reste inchangée par itérations, sauf au voisinage de la particule où les états  $\leftarrow$  et  $\rightarrow$  sont mis à jour pour refléter les mouvements éventuels de la particule. Enfin, les contrôles suivants sont effectués en permanence de façon locale :

- à une particule de type  $T$  correspond toujours un état  $\leftarrow$  ;
- à gauche d'une particule on trouve toujours un état  $\rightarrow$  ;
- jamais un état  $\rightarrow$  n'apparaît à droite d'un état  $\leftarrow$ .

Dès que l'un de ces contrôles échoue, un état envahissant est produit pour détruire toute la configuration.

**Définition 33** Soit  $\mathcal{A}$  un automate cellulaire admettant le type de particule  $T$ . On définit  $\overline{\mathcal{A}}_T$  sur l'alphabet  $\overset{\circ}{A} = \{\kappa\} \cup (A \times \{\leftarrow, \rightarrow\})$  de rayon  $2r_{\mathcal{A}}$  de la façon suivante :

- $\kappa$  est un état envahissant (i.e.  $\overline{\mathcal{A}}(\dots\kappa\dots) = \kappa$ ) ;
- $\overline{\mathcal{A}}_T((u_{-2r_{\mathcal{A}}}, v_{-2r_{\mathcal{A}}}), \dots, (u_{2r_{\mathcal{A}}}, v_{2r_{\mathcal{A}}})) = x$  avec

$$x = \begin{cases} \kappa & \text{si } \begin{cases} \exists i, -2r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 2r_{\mathcal{A}} \text{ avec } u_i \in T \text{ et } v_i = \rightarrow, \text{ ou} \\ \exists i, -2r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 2r_{\mathcal{A}} - 1 \text{ avec } u_{i+1} \in T \text{ et } v_i = \leftarrow, \text{ ou} \\ \exists i, j, -2r_{\mathcal{A}} \leq i < j \leq 2r_{\mathcal{A}} \text{ tels que } v_i = \leftarrow \text{ et } v_j = \rightarrow \end{cases} \\ (u, v) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$u = \mathcal{A}(u_{-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{r_{\mathcal{A}}})$$

$$v = \begin{cases} \leftarrow & \text{si } \exists i, -r_{\mathcal{A}} \leq i \leq 0 \text{ avec } \mathcal{A}(u_{i-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{i+r_{\mathcal{A}}}) \in T, \\ \rightarrow & \text{si } \exists i, 0 < i \leq r_{\mathcal{A}} \text{ avec } \mathcal{A}(u_{i-r_{\mathcal{A}}}, \dots, u_{i+r_{\mathcal{A}}}) \in T, \\ v_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $\rho : \overset{\circ}{A} \setminus \{\kappa\} \rightarrow A$  la fonction définie par  $\rho(a, \leftarrow) = \rho(a, \rightarrow) = a$ .

**Lemme 11** La construction ci-dessus est croissante : si  $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$  admettent respectivement les types de particule  $T$  et  $T'$  avec  $\iota(T) \subseteq T'$  (où  $\iota$  est l'injection impliquée dans la relation  $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ ), alors  $\overline{\mathcal{A}}_T \sqsubseteq \overline{\mathcal{B}}_{T'}$ .

De plus, pour tout automate cellulaire  $\mathcal{A}$ ,  $\overline{\mathcal{A}}_T$  a les propriétés suivantes :

- il admet  $\overset{\circ}{T} = T \times \{\leftarrow\}$  comme type de particule ;
- il existe une fonction  $\Psi_T : A^{\overset{\circ}{\mathbb{Z}}} \rightarrow \overset{\circ}{A}$  telle que pour toute configuration  $c$  comportant une seule particule de type  $T$  et telle que son image comporte aussi une seule particule :  $\Psi_T(\mathcal{A}(c)) = \overline{\mathcal{A}}_T(\Psi_T(c))$  ;
- si une configuration  $c \in A^{\overset{\circ}{\mathbb{Z}}}$  est telle que  $\#_{\overset{\circ}{T}}(c) > 1$ , alors toute cellule finit par être constante dans le diagramme espace-temps  $\text{Diag}_{\overline{\mathcal{A}}_T}(c)$ .

*Preuve* La croissance de la construction se vérifie facilement d'après la définition.

Considérons un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  admettant un type de particule  $T$ . Tout d'abord, si pour une certaine configuration  $c$  de  $\overline{\mathcal{A}}_T$  on a  $\#_{\overset{\circ}{T}}(c) < \#_{\overset{\circ}{T}}(\overline{\mathcal{A}}_T(c))$  alors la configuration  $c' = \overline{\rho}(c)$  de  $\mathcal{A}$  est telle que  $\#_T(c') < \#_T(\mathcal{A}(c'))$  ce qui contredit le fait que  $T$  est un type de particule pour  $\mathcal{A}$ .

On vérifie ensuite que la fonction qui à  $c$  (configuration de  $\mathcal{A}$  comportant une seule particule de type  $T$  en  $z \in \mathbb{Z}$ ) associe la configuration  $c'$  définie par

$$c'(i) = \begin{cases} (c(i), \rightarrow) & \text{si } i < z, \\ (c(i), \leftarrow) & \text{sinon,} \end{cases}$$

convient comme choix pour  $\Psi_T$ .

Enfin, soit  $c$  une configuration de  $\overline{\mathcal{A}}_T$  telle qu'il existe deux positions  $i < j$  telles que  $c(i) \in \overset{\circ}{T}$  et  $c(j) \in \overset{\circ}{T}$ . S'il existe  $a \in A$  tel que  $c(j-1) = (a, \leftarrow)$  alors  $\kappa$  apparaît dans  $\overline{\mathcal{A}}_T(c)$  et c'est un état envahissant. Sinon, il existe un entier  $l$ ,  $i \leq l \leq j$ , tel que  $c(l) = (a, \leftarrow)$  et  $c(l+1) = (a, \rightarrow)$  et alors  $\kappa$  apparaît dans  $\overline{\mathcal{A}}_T(c)$ .  $\nabla$

L'automate  $\overline{\mathcal{A}}_T$  est en un certain sens forcé à agir de manière séquentielle (si l'on fait abstraction du médium) ce qui constitue une contrainte très forte pour le modèle des automates cellulaires : le lemme suivant montre en particulier que si l'automate médium associé à  $\mathcal{A}$  et  $T$  est neutre, alors  $\overline{\mathcal{A}}_T$  ne peut pas être intrinsèquement universel.

**Lemme 12** *Si  $\mathcal{A}$  admet un type de particule  $T$  tel que l'automate cellulaire médium associé est l'identité, alors  $\overline{\mathcal{A}}_T$  n'est pas intrinsèquement universel.*

*Preuve* Il est facile de vérifier que  $\overline{\mathcal{A}}_T$  est incapable de capturer une dynamique constituée d'un unique diagramme spatio-temporel dans lequel il y a deux zones de l'espace disjointes telles que :

1. l'état des cellules hors de ces zones ne varie pas au cours du temps,
2. l'état des cellules dans ces zones ne devient jamais constant après un certain temps.

En effet, si  $\overline{\mathcal{A}}_T$  capturait une telle dynamique, cela impliquerait la présence de deux particules et donc chaque cellule deviendrait constante après un certain temps d'après le lemme 11. Le lemme 10 permet de conclure car une telle dynamique peut être choisie cellulaire.  $\nabla$

**Définition 34** *Un automate cellulaire est universel pour le calcul [24] s'il capture toute la dynamique d'une machine de Turing universelle  $T_{univ}$  sur ses configurations valides, avec la convention qu'un diagramme spatio-temporel de  $T_{univ}$  est un élément de  $(R \times (T \cup \{\perp\}))^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}$  (où  $R$  est l'alphabet du ruban de  $T_{univ}$ ,  $T$  est son ensemble d'états et  $\perp$  désigne l'absence de tête).*

**Corollaire 5** *Il existe des automates cellulaires Turing-universels non intrinsèquement universels.*

On définit à présent une famille d'automates cellulaires à particule, appelés "automates zig-zag".

Le fonctionnement de ces automates peut être interprété de la façon suivante. Une particule  $t \in T_p$  est caractérisée par sa direction et son niveau d'énergie  $\eta(t)$ . Le médium associé au type de particule  $T_p$  est constitué de 2 sortes d'états :  $E$  (état neutre) et les  $M_i$  qui sont des barrières de potentiel asymétriques. Plus précisément, une barrière  $M_i$  ( $i > 0$ ) peut être traversée de gauche à droite par toute particule d'énergie inférieure à  $i$ , sinon il y a rebond de la particule, et elle peut être traversée de droite à gauche par toute particule d'énergie strictement supérieure à  $i$ , sinon il y a rebond et incrémentation du niveau d'énergie de la particule. Enfin, la barrière  $M_0$  est une barrière infranchissable sur laquelle toute particule rebondit, et se voit de plus vidée de son énergie (*i.e.* elle passe au niveau d'énergie 1) lorsque elle arrive par la droite.

**Définition 35** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}_+$ , soit  $\mathcal{B}_p$  l'automate cellulaire de rayon 1 suivant :*

– son alphabet est  $B_p = Q_p \cup S_p$  où  $Q_p = \{M_0, M_1, \dots, M_{p-1}, E\}$  et avec

$$S_p = \left\{ \underset{i}{\overrightarrow{X}}, X \in Q_p, 1 \leq i \leq p \right\} \cup \left\{ \underset{i}{\overleftarrow{X}}, X \in Q_p, 1 \leq i \leq p \right\}.$$

– il admet le type de particule  $S_p$  avec le comportement suivant :

$$1. \mathcal{B}_p(M_0, \underset{i}{\overrightarrow{E}}, X) = \underset{1}{\overrightarrow{E}}$$

$$2. \mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overrightarrow{E}}, M_0) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$$

$$3. \mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overrightarrow{E}}, E) = E$$

$$4. \mathcal{B}_p(\underset{i}{\overrightarrow{E}}, E, X) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$$

$$5. \mathcal{B}_p(E, \underset{i}{\overrightarrow{E}}, X) = E$$

$$6. \mathcal{B}_p(X, E, \underset{i}{\overrightarrow{E}}) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$$

7.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$  si  $i > j$
8.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j) = E$  si  $i \leq j$
9.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{E}}, M_j, X) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$  si  $i \leq j$
10.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, E) = M_j$
11.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, E, X) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$  si  $i \leq j$
12.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = \underset{j+1}{\overleftarrow{E}}$  si  $i \leq j$
13.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, X) = E$  si  $i > j$
14.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, \underset{i}{\overleftarrow{E}}) = \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}$  si  $i > j$
15.  $\mathcal{B}_p(\underset{i}{\overleftarrow{E}}, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}, X) = M_j$
16.  $\mathcal{B}_p(X, \underset{i}{\overleftarrow{E}}, \underset{i}{\overleftarrow{M_j}}) = \underset{i}{\overleftarrow{E}}$  si  $i > j$

où  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq p-1$  et  $X$  désigne indifféremment  $E$  ou  $M_j$  ;  
– c'est l'identité partout ailleurs (et notamment sur son automate médium associé à  $S_p$ ).

Enfin, on définit l'automate cellulaire "zig-zag"  $\mathcal{Z}_p$  par  $\mathcal{Z}_p = \overline{\mathcal{B}_{pS_p}}$ . On note  $T_p = \overset{\circ}{S}_p$  le type de particule associé et  $\eta : T_p \rightarrow \{1, \dots, p\}$  la fonction indicatrice sur l'état de la particule définie par  $\eta(\alpha) = i$  si  $\rho(\alpha)$  est de la forme  $\underset{i}{\overleftarrow{X}}$  ou  $\underset{i}{\overleftarrow{X}}$ .

En agençant les barrières d'un automate "zig-zag" de façon adéquate, on peut faire suivre une sorte de cycle d'hysteresis à une particule à l'intérieur d'un domaine délimité par deux états  $M_0$ . Sa trajectoire spatio-temporelle ressemble alors à un enchaînement de "zig-zag". Ce type de comportement se produit pour  $\mathcal{B}_p$  sur l'ensemble de mots de la forme  $M_0 \underset{1}{\overleftarrow{E}} U_p$  où  $U_p$  désigne les mots de la forme

$$E^{i_1} M_{p-1} E^{i_2} M_{p-2} \dots M_1 E^{i_p} M_0.$$

où  $i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}_+$ . La figure 22 a) illustre ce comportement.

**Proposition 15** Pour tout  $p \in \mathbb{N}_+$ , sur une configuration  $c$  telle que  $\#_{T_p}(c) = 1$ ,  $\mathcal{Z}_p$  a la propriété suivante, appelée propriété  $\mathcal{P}$  : s'il existe  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \in \mathbb{N}_+$  et  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{N}_+$  avec  $z_1 > z_2$ ,  $z_3 > z_2$  et  $z_4 < z_2$  vérifiant, pour  $1 \leq i \leq 4$  :

1.  $\chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^{t_1}(c)) = z_1$ ,
2.  $\forall t, t_1 < t < t_2 : z_2 < \chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_1$ ,
3.  $\forall t, t_2 < t < t_3 : z_2 < \chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_3$ ,
4.  $\forall t, t_3 < t < t_4 : z_4 < \chi_{T_p}(\mathcal{Z}_p^t(c)) < z_3$ ,

alors  $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_1}(c))(z_1)) < \eta((\mathcal{Z}_p^{t_4}(c))(z_4))$ .

*Preuve* Le fait que  $z_1 > z_2$  et  $z_3 > z_2$  implique un changement de direction de la particule (i.e. passage d'un état du type  $(\underset{i}{\overleftarrow{X}}, \leftarrow)$  à un état du type  $(\underset{j}{\overleftarrow{Y}}, \leftarrow)$ ) en position  $z_2$ . Donc  $c(z_2 - 1) = M_k$ . De plus  $k > 0$

car la tête dépasse ensuite la position  $z_2$  vers la gauche jusqu'en  $z_4$ . Or, comme il ne peut y avoir de cellule dans l'état  $M_0$  entre les positions  $z_1$  et  $z_2$  (pour la même raison que précédemment), on a nécessairement  $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_1}(c))(z_1)) \leq k$  (transition 12 de la définition 35). Ensuite, comme la particule a traversé de droite

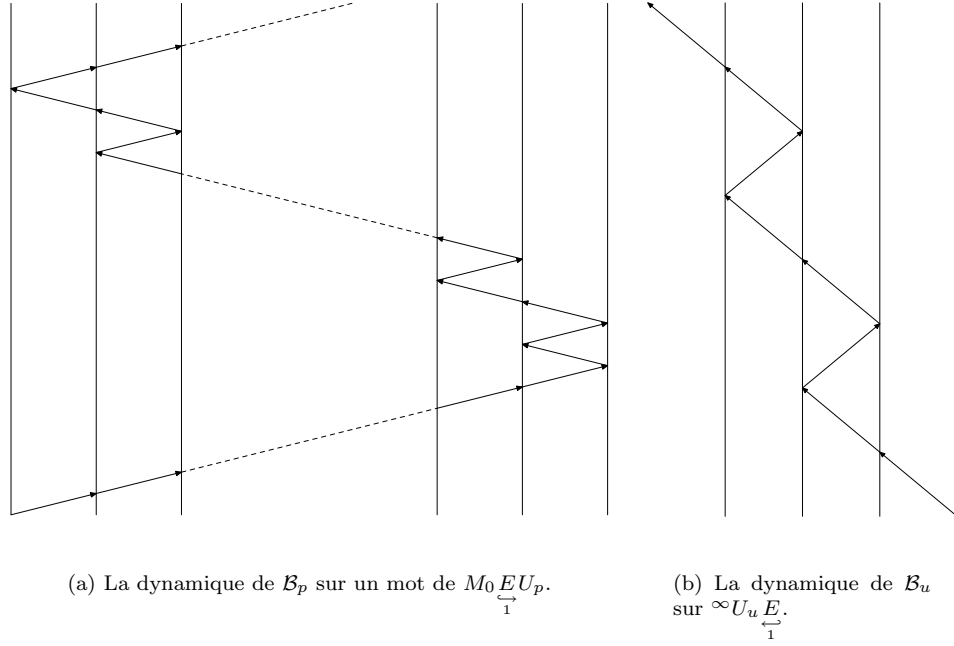


FIG. 22 – Automate  $54 \times 184$ .

à gauche la cellule  $z_2 - 1$  dans l'état  $M_k$  (car  $z_4 < z_2$ ) et puisqu'aucune cellule entre  $z_4$  et  $z_2$  (incluses) n'est dans l'état  $M_0$ , on a nécessairement  $\eta((\mathcal{Z}_p^{t_4}(c))(z_4)) > k$  (transition 14 de la définition 35).  $\nabla$

Dans la suite, si  $\mathcal{A}$  est un automate cellulaire admettant un type de particule  $T$ , on note  $c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}(t_1, z_1, t_4, z_4)$  le fait que la propriété  $\mathcal{P}$  ci-dessus s'applique, pour  $\mathcal{A}$  et son type de particule  $T$ , entre les temps  $t_1$  et  $t_4$ , sur la position de départ  $z_1$  et la position d'arrivée  $z_4$ , et à partir de la configuration  $c$  de  $\mathcal{A}$ .

Plus généralement, on note  $c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}_p$  le fait qu'il existe une suite d'instants  $t_1, t_2, \dots, t_p$  et une suite de positions  $z_1, \dots, z_p$  tels que

$$\forall i, 1 \leq i \leq p-1 : c \models_{\mathcal{A}, T} \mathcal{P}(t_i, z_i, t_{i+1}, z_{i+1}).$$

La figure 22 a) montre que  $\mathcal{Z}_p$  est capable d'enchaîner  $p$  "zig-zags" simples, formellement : le mot  $M_0 \underline{E} U_p$  permet de construire une configuration  $c$  de  $\mathcal{Z}_p$  telle que  $c \models_{\mathcal{Z}_p, T_p} \mathcal{P}_p$ . En revanche, le corollaire suivant affirme que  $\mathcal{Z}_p$  ne peut pas enchaîner plus de  $p$  zig-zag simples.

**Corollaire 6** *Si  $q > p$ , il n'existe pas de configuration  $c$  de  $\mathcal{Z}_p$  telle que  $c \models_{\mathcal{Z}_p, T_p} \mathcal{P}_q$ .*

*Preuve* En supposant qu'une telle configuration existe et en appliquant  $q$  fois la propriété 15 (une fois pour chaque zig-zag simple), on montre que le type de particule  $T_p$  possède au moins  $q$  niveaux d'énergie : il y a contradiction avec la définition de  $\mathcal{Z}_p$  si  $q > p$ .  $\nabla$

## 9.2 Un treillis d'automates cellulaires universels pour le calcul Turing

La construction proposée ci-après s'appuie sur les automates cellulaires  $\mathcal{Z}_p$  et une structure de produit cartésien contrôlée. Les automates cellulaires de la collection que l'on va définir sont caractérisés par deux paramètres : leur nombre de composantes, et la capacité énergétique de chaque composante (*i.e.* l'entier  $p$  si  $\mathcal{Z}_p$  est l'automate cellulaire associé à cette composante).

En outre, tous les automates cellulaires de la collection contiennent une couche qui assure leur universalité pour le calcul Turing. Cette couche, qui fait l'objet de la définition suivante, est de plus capable d'enchaîner un nombre non borné de "zig-zags" ce qui la rend impossible à simuler par les  $\mathcal{Z}_p$ .

**Définition 36** Soit  $T_{univ}$  une machine de Turing universelle d'ensemble d'états  $Q_T$  et d'alphabet de ruban  $Q_R$ . Soit  $Q'_R = \{M, E\}$  et

$$Q'_T = \{\underset{i}{\leftarrow} X, X \in Q'_R, i \in \{0, 1\}\} \cup \{\underset{i}{\rightarrow} X, X \in Q'_R, i \in \{0, 1\}\}.$$

On définit alors l'automate cellulaire  $\mathcal{B}_u$  sur l'alphabet  $B_u = R \times (T \cup \{\perp\}) \cup Q'_R \cup Q'_T$  de la façon suivante :

- sur  $R \times (T \cup \{\perp\})$ ,  $\mathcal{B}_u$  mime le comportement de la machine  $T_{univ}$  ( $\perp$  indique l'absence de particule et  $t \in T$  indique la présence d'une particule dans l'état  $t$ );
- pour tout  $i \in \{0, 1\}$  et tout  $X \in Q'_R$ ,  $\mathcal{B}_u$  vérifie :

$$1. \mathcal{B}_u(X, E, \underset{i}{\leftarrow} E) = \underset{i}{\leftarrow} E$$

$$2. \mathcal{B}_u(\underset{i}{\leftarrow} E, E, X) = \underset{i}{\leftarrow} E$$

$$3. \mathcal{B}_u(E, \underset{i}{\leftarrow} E, M) = \underset{i}{\leftarrow} E$$

$$4. \mathcal{B}_u(M, \underset{0}{\leftarrow} E, E) = \underset{1}{\leftarrow} E$$

$$5. \mathcal{B}_u(E, M, \underset{1}{\leftarrow} E) = \underset{1}{\leftarrow} M$$

$$6. \mathcal{B}_u(X, E, \underset{1}{\leftarrow} M) = \underset{0}{\leftarrow} E$$

- $\mathcal{B}_u$  est l'identité partout ailleurs.

$S_0 = R \times T \cup Q'_T$  est un type de particule pour  $\mathcal{B}_u$  (au sens de la définition 32). On pose enfin  $Z_u = \overline{\mathcal{B}_u}_{S_0}$ ,  $Q_u = B_u$  et  $T_u = \overset{\circ}{S}_0$ .

Comme on l'a évoqué plus haut, une particule de  $Z_u$  peut enchaîner un nombre infini de "zig-zags", simplement car elle ne suit pas le mécanisme d'hysteresis des  $Z_p$ . Pour le vérifier, on définit  $U_u$ , ensemble des mots sur l'alphabet  $B_u$  de la forme  $E^n M$ .

**Proposition 16** Soit  $c$  une configuration de  $\mathcal{B}_u$  de la forme  ${}^\infty U_u \underset{1}{\leftarrow} E E {}^\infty$ . On a alors :

$$\forall h \in \mathbb{N}_+, c \models_{\mathcal{B}_u, S_0} \mathcal{P}_h.$$

*Preuve* Voir la figure 22 b). ▽

On peut alors définir la collection d'automates cellulaires qui forme un treillis pour  $\leq_{\square_3}$ .

**Définition 37** Pour toute suite finie décroissante  $s = (n_1, \dots, n_p)$  d'éléments de  $\mathbb{N}_+$ , on définit l'automate cellulaire  $\mathcal{A}_s$  de rayon 1 sur l'alphabet

$$\{K\} \cup (Q_u \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_p})$$

comme ayant exactement le comportement de  $Z_{univ} \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_p}$ , sauf dans les cas suivants où le comportement de  $\mathcal{A}_s$  consiste à passer dans l'état  $K$  :

1. si le voisinage contient l'état  $K$ ,
2. si le voisinage contient un état dont une composante est dans l'état  $\kappa$ ,
3. si le voisinage contient deux types de particules (i.e.  $\tau_i$  et  $\tau_j$  avec  $i \neq j$ ).

$\mathcal{A}_s$  hérite naturellement des types de particules des automates cellulaires qui le composent et on note :

$$\tau_0 = T_u \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_p},$$

$$\tau_i = Q_u \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_{i-1}} \times T_i \times Z_{n_{i+1}} \times \dots \times Z_{n_p} (\forall i, 1 \leq i \leq p).$$

La comparaison de deux automates cellulaires du type  $\mathcal{A}_s$  se réduit essentiellement à la comparaison du nombre de couches ainsi qu'à la comparaison couche à couche de la capacité énergétique.

La preuve du théorème suivant qui énonce ce résultat s'appuie principalement sur le lemme 11 et le corollaire 6.

**Théorème 4** Soient  $s = (n_1, \dots, n_p)$  et  $s' = (n'_1, \dots, n'_q)$  deux suites finies décroissantes d'éléments de  $\mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$ . On a

$$\mathcal{A}_s \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{s'} \Leftrightarrow p \leq q \text{ et } n_i \leq n'_i, \forall i, 1 \leq i \leq p.$$

*Preuve* Le sens  $\Leftarrow$  est immédiat car si  $p \leq q$  et  $n_i \leq n'_i, \forall i, 1 \leq i \leq p$  alors  $\mathcal{A}_s \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{(n'_1, \dots, n'_p)}$  (puisque, pour tout  $i, \mathcal{B}_{n_i} \subseteq \mathcal{B}_{n'_i}$  et les constructions mises en jeu dans les automates cellulaires  $\mathcal{A}_x$  sont croissante vis-à-vis de  $\subseteq$  d'après le lemme 11 et la définition 37) et il est clair que  $\mathcal{A}_{(n'_1, \dots, n'_p)} \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{s'}$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe des entiers  $m, m', n, n' \in \mathbb{N}_+$  et  $k, k' \in \mathbb{N}$  tels que

$$\mathcal{A}_s^{(m, n, k)} \leq_{\square_3} \mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}$$

et notons  $\varsigma : X \rightarrow A_s^m$  la fonction surjective qui intervient dans la relation  $\leq_{\square_3}$  ci-dessus où  $X \subseteq A_{s'}^{m'}$ .

On considère à présent l'ensemble  $\mathcal{E}$  des configurations  $c$  sur l'alphabet  $B_u \times B_{n_1} \times \dots \times B_{n_p}$  qui sont de la forme suivante :

$$c = {}^\infty P_u \Xi X \Xi^{l_1} K_1 P_1 \Xi^{l_1} P_1 \Xi^{l_2} K_2 P_2 \Xi^{l_2} P_2 \Xi^{l_3} \dots \Xi^{l_p} K_p P_p \Xi^{l_p} P_p \Xi^\infty$$

où

$$\begin{aligned} \Xi &= (E, \dots, E) \\ X &= (\underbrace{E}_1, E, \dots, E) \\ K_i &= (\underbrace{EE, \dots, EE}_{i-1}, M_0 \underbrace{E}_1, \underbrace{EE, \dots, EE}_{p-i}) \\ P_u &= \{(w, E^{|w|}, \dots, E^{|w|}), w \in U_u\}, \\ P_i &= \{(\underbrace{E^{|w|}, \dots, E^{|w|}}_{i-1}, w, \underbrace{E^{|w|}, \dots, E^{|w|}}_{p-i}), w \in U_{n_i}\}, \end{aligned}$$

Comme toute configuration de ce type est telle que chaque composante  $i$  ( $0 \leq i \leq p$ ) ne contient qu'une particule du type  $S_i$ , d'après le lemme 11, on peut obtenir une configuration de  $\mathcal{Z}_s$  par application de  $\Psi_i$  sur chaque composante  $i$ .

Soit  $c' \in \Psi_{S_0} \times \dots \times \Psi_{S_p}(\mathcal{E})$  et soit  $d \in (A_{s'}^{m'})^{\mathbb{Z}}$  telle que  $\overline{\varsigma^{-1}}(d) = o_m(c')$ . Tout d'abord, l'état  $K$  ne peut pas apparaître dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}}(d)$  car sinon toute cellule deviendrait constante à partir d'un certain temps, ce qui n'est pas le cas dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_s^{(m, n, k)}}(c')$ .

Ainsi, pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ), il ne peut y avoir qu'une particule du type  $\tau_i$  dans  $d$  (d'après le lemme 11 et la définition 37). Soit  $u \in A_s^m$  un bloc apparaissant dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_s^{(m, n, k)}}(c')$ . Comme on peut choisir  $c'$  telle que tout bloc de taille  $m$  ne contenant pas de particule apparaît au moins 2 fois (on vérifie que l'on obtient cette propriété en choisissant  $c'$  suffisamment espacée car les motifs  $P_x$  apparaissent tous 2 fois au moins),  $\varsigma^{-1}(u)$  ne contient pas de particule si  $u$  n'en contient pas. Réciproquement, pour tout bloc  $u$  contenant une particule,  $\varsigma^{-1}(u)$  en contient une. En effet,  $\mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}$  est tel que tout changement d'état a lieu au voisinage d'une particule ou alors provoque l'apparition de l'état  $K$  (en au plus 2 étapes de temps) et ce deuxième cas est exclu d'après ce qui précède.

Ainsi, à toute particule de type  $\tau_i$  apparaissant dans  $c'$ , on peut associer un ensemble (non vide) de types de particules  $\{\tau_j, j \in \rho(i)\}$  de  $\mathcal{A}_{s'}$  tel que si une particule du type  $\tau_i$  apparaît dans  $u$ , alors une particule du type  $\tau_j$  apparaît dans  $\varsigma^{-1}(u)$  pour tout  $j \in \rho(i)$ . En effet, on vérifie que cette association (définie au temps initial) est préservée par itérations de  $\mathcal{A}_s^{(m, n, k)}$  et  $\mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}$  respectivement car les particules de  $\mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}$  ne peuvent disparaître sans provoquer l'apparition de l'état  $K$  (ce qui est exclu) et elles ne peuvent apparaître que dans des blocs de  $A_{s'}^{m'}$  qui correspondent, via  $\varsigma$ , à des blocs contenant une particule (or, pour  $c'$  bien choisie, jamais deux blocs de  $A_s^m$  contenant une particule ne sont voisins dans  $\text{Diag}_{\mathcal{A}_s^{(m, n, k)}}(c')$ ).

Comme il ne peut y avoir 2 particules du même type dans  $d$ , la fonction d'association  $\rho$  possède la propriété d'injectivité suivante :  $\rho(i) \cap \rho(j) \neq \emptyset \Rightarrow i = j$ . Or il apparaît  $p$  types de particules dans  $c'$  et  $\mathcal{A}_{s'}$  possède  $q$  types de particules, donc nécessairement  $p \leq q$ .

Enfin, pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq p$ , la présence d'un mot de la forme  $K_i P_i$  dans  $c'$  implique que la particule de type  $\tau_i$  de  $\mathcal{A}_s$  enchaîne  $n_i$  zig-zags simples (Pour  $c'$  choisie suffisamment espacée pour que les paramètres de décalage ne suffisent pas à "redresser" les "zig-zags"), formellement :

$$c' \models_{\mathcal{A}_s, \tau_i} \mathcal{P}_{n_i}.$$

En conséquence, pour  $c'$  bien choisie et vue la relation  $\mathcal{A}_s^{(m, n, k)} \leq_{\sqsubseteq_3} \mathcal{A}_{s'}^{(m', n', k')}$ , on en déduit que la particule de type  $\tau_j$  de  $\mathcal{A}_{s'}$  (pour tout  $j \in \rho(i)$ ) enchaîne elle aussi  $n_i$  zig-zags simples à partir de  $\overline{\sigma_{m'}}(d)$ , formellement :

$$\overline{\sigma_{m'}}(d) \models_{\mathcal{A}_{s'}, \tau_j} \mathcal{P}_{n_i}.$$

Par un raisonnement semblable et en utilisant la propriété 16, on a aussi

$$\forall j \in \rho(0), \forall h \in \mathbb{N}_+, \overline{\sigma_{m'}}(d) \models_{\mathcal{A}_{s'}, \tau_j} \mathcal{P}_h.$$

D'après le corollaire 6, on a alors  $\rho(O) = \{0\}$  donc  $0 \notin \rho(i)$  pour  $i \neq 0$ , puis  $n_i \leq n'_j$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , si  $j \in \rho(i)$ . Par la propriété d'injectivité de  $\rho$  on en déduit finalement :

$$\forall 1 \leq i \leq p, n_i \leq n'_i.$$

▽

**Corollaire 7** *L'ensemble des  $\mathcal{A}_s$  muni de l'ordre  $\leq_{\sqsubseteq_3}$  constitue un treillis (distributif).*

*Preuve* C'est (à isomorphie près) le treillis des suites finies décroissantes d'éléments d'un ensemble bien ordonné dans lequel l'opération sup est donnée par

$$\sup((n_1, \dots, n_p), (n'_1, \dots, n'_q)) = (\max(n_1, n'_1), \dots, \max(n_q, n'_q), n_{q+1}, \dots, n_p),$$

en supposant  $q \leq p$  et l'opération inf par

$$\inf((n_1, \dots, n_p), (n'_1, \dots, n'_q)) = (\min(n_1, n'_1), \dots, \min(n_q, n'_q)),$$

en supposant  $q \leq p$ .

▽

### 9.3 Produits cartésiens

Considérons un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  et définissons la famille

$$\mathcal{A}_n = \underbrace{\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_n.$$

La suite  $(\mathcal{A}_n)_n$  est toujours croissante (au sens large) pour  $\leq_{\sqsubseteq_3}$  mais le fait qu'elle soit ou non strictement croissante dépend fortement de  $\mathcal{A}$ . Par exemple, si  $\mathcal{A}$  est nilpotent ou intrinsèquement universel, alors  $\mathcal{A}$  et tous les  $\mathcal{A}_n$  sont dans une même classe d'équivalence pour  $\leq_{\sqsubseteq_3}$ . En revanche, en choisissant  $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_p$ , la suite est strictement croissante comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 13** *Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}_+$ , si  $n < m$ , alors on a*

$$\underbrace{\mathcal{Z}_p \times \dots \times \mathcal{Z}_p}_m \not\leq_{\sqsubseteq_3} \underbrace{\mathcal{Z}_p \times \dots \times \mathcal{Z}_p}_n.$$

*Preuve* On note  $\mathcal{A}_m = \underbrace{\mathcal{Z}_p \times \dots \times \mathcal{Z}_p}_m$  et  $\mathcal{A}_n = \underbrace{\mathcal{Z}_p \times \dots \times \mathcal{Z}_p}_n$ , et on suppose que  $\mathcal{A}_m \leq_{\sqsubseteq_3} \mathcal{A}_n$ . Considérons

la dynamique  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{A}_m$  sur les configurations de la forme  $c_1 \times \dots \times c_m$  où chaque  $c_i$  est de la forme  ${}^\omega EM_0 \xrightarrow{\downarrow} EU_p E^\omega$  et où les zones d'états différents de  $E$  dans les  $c_i$  sont toutes disjointes. Comme chaque

diagramme espace-temps de  $\mathcal{D}$  est temporellement périodique et spatialement ultimement périodique, si un état envahissant apparaît dans une couche  $i$  de  $\mathcal{A}_n$  pour capturer un diagramme de  $\mathcal{D}$ , alors celle-ci



est inutile (en effet, après un certain temps cette couche devient constante sur toute la zone de  $c_i$  qui n'est pas constante).

Quitte à diminuer  $n$ , on peut donc supposer qu'il existe un diagramme espace-temps de  $\mathcal{D}$  qui est capturé par  $\mathcal{A}_n$  de telle manière que jamais un état envahissant n'apparaît dans aucune couche de  $\mathcal{A}_n$ . Ceci implique en particulier d'après le lemme 11 qu'au plus une particule par couche de  $\mathcal{A}_n$  est utilisée dans la simulation. Comme le diagramme espace-temps de  $\mathcal{D}$  possède par définition  $m$  zones non constantes distinctes et qu'un changement d'état ne peut avoir lieu qu'au voisinage d'une particule dans  $\mathcal{A}_n$ , on a alors nécessairement  $m \leq n$ .  $\nabla$

Nous proposons ci-après une construction qui, à partir d'un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  quelconque, fournit un majorant naturel pour la suite  $(\mathcal{A}_n)_n$  définie ci-dessus, qu'elle soit strictement croissante ou non. Cette construction repose sur une modification de l'automate  $\mathcal{F}$  de la définition 28 qui peut alors être vu comme un métronome robuste dont la période peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. Précisément, l'automate modifié possède un sous-ensemble  $X$  d'états particuliers utilisés pour marquer des temps. La robustesse prend alors le sens suivant :

- soit chaque cellule finit par ne plus jamais prendre un état de  $X$  après un temps fini (les temps ne sont plus marqués) ;
- soit il existe  $n$  tel que toutes les cellules prennent un état de  $X$  simultanément et tous les  $n$  temps exactement.

Cet automate cellulaire s'appuie sur un équivalent réversible  $\mathcal{F}_R$  de  $\mathcal{F}$  [10] dont le temps de synchronisation peut être choisi de la forme  $t(n) = pn$ .

**Définition 38** On définit l'automate cellulaire  $\mathcal{H}$  d'alphabet  $Q_{\mathcal{F}_R} \cup \{\kappa\}$  où  $Q_{\mathcal{F}_R}$  est l'alphabet de  $\mathcal{F}_R$  de la façon suivante :

1.  $\kappa$  est un état envahissant ;
2. pour  $q_{-1}, q_0, q_1 \in Q_{\mathcal{F}_R}$ ,  $\mathcal{H}$  vérifie

$$\mathcal{H}(q_{-1}, q_0, q_1) = \begin{cases} \kappa & \text{si } \exists i, j : q_i \in X_F \cup \{G\} \text{ et } q_j \notin X_F \cup \{G\}, \\ \kappa & \text{si } q_{-1}q_0 = GG \text{ ou } q_0q_1 = GG, \\ \mathcal{F}_R(q_{-1}, q_0, q_1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $X_F$  est l'ensemble d'états "feu" de  $\mathcal{F}_R$  (voir [10]).

Le comportement de  $\mathcal{H}$  est caractérisé par le lemme suivant.

**Lemme 14** Soit  $c$  une configuration de  $\mathcal{H}$ . Alors on a l'une des alternatives suivantes :

1.  $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists t_0, \forall t \geq t_0 : (\mathcal{H}^t(c))(z) \notin X_F \cup \{G\}$  et alors on est dans l'un des cas suivants :
  - toute cellule devient constante après un certain temps car un état envahissant est produit, ou
  - il existe une automate cellulaire  $\mathcal{R}$  tel que,  $\forall t \in \mathbb{N}, \mathcal{R}^t(\mathcal{H}^t(c)) = c$  (la dynamique est réversible) et  $t_0 = 0$  (jamais un état de  $X_F \cup \{G\}$  n'est apparu) ;
2.  $\exists n \in \mathbb{N}_+, \exists t_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{N} :$

$$(\mathcal{H}^t(c))(z) \in X_F \cup \{G\} \Leftrightarrow t = t_0 \bmod n.$$

*Preuve* Si les états  $X_F \cup \{G\}$  n'apparaissent jamais dans  $\text{Diag}_{\mathcal{H}}(c)$  alors on est dans l'alternative 1 et alors, selon que  $\kappa$  apparaît ou non dans  $c$ , soit toute cellule devient constante égale à  $\kappa$  après un temps fini, soit la dynamique est réversible car elle suit le comportement de  $\mathcal{F}_R$  qui est réversible. Sinon, si un état quelconque de  $X_F \cup \{G\}$  apparaît dans  $\mathcal{H}^t(c)$  alors cette configuration est de la forme

$$\cdots G \underbrace{X_F \cdots X_F}_{n_{-1}} G \underbrace{X_F \cdots X_F}_{n_0} G \underbrace{X_F \cdots X_F}_{n_1} G \cdots$$

d'après la deuxième partie de la définition de  $\mathcal{H}$ . Ensuite, soit tous les  $n_i$  sont égaux dans la configuration ci-dessus et on est alors dans l'alternative 2 car tous les segments se synchronisent périodiquement et au même rythme (sauf si les  $n_i$  sont tous nuls auquel cas l'état envahissant  $\kappa$  est généré et on est dans l'alternative 1), soit il existe  $i$  tel que  $n_i \neq n_{i+1}$  et alors, par définition de  $\mathcal{F}_R$ , le segment  $i$  ne synchronise pas à la même vitesse que le segment  $i + 1$  ce qui fait apparaître le motif  $XGX_F$  ou  $X_FGX$

(avec  $X \notin X_F \cup \{G\}$ ) après  $\min(n_i, n_{i+1})$  étapes, ce qui fait apparaître l'état envahissant  $\kappa$  : on est alors dans l'alternative 1.  $\nabla$

Il n'est pas difficile de généraliser la construction ci-dessus de façon à produire non pas un signal (par un état de  $X_F \cup \{G\}$ ) tous les  $n$  temps, mais plusieurs types de signaux qui apparaissent successivement et cycliquement à des intervalles égaux à une constante près. Pour la suite, les intervalles utilisés seront de la forme  $n, n-2, n+2, n+1$  et  $1$ . La proposition suivante formalise cette généralisation à travers l'automate cellulaire  $\mathcal{I}$ . Celui-ci contient 5 copies de  $\mathcal{H}$  qui sont activées successivement. Des états supplémentaires sont utilisés pour retarder d'un temps constant le passage d'une copie à la suivante lorsque c'est nécessaire.

**Proposition 17** *Il existe un automate cellulaire  $\mathcal{I}$  dont l'ensemble d'états contient des sous-ensembles d'états spéciaux  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  et tel que pour toute configuration  $c$ , on a l'une des possibilités suivantes :*

1.  $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists t_0, \forall t \geq t_0 : (\mathcal{I}^t(c))(z) \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$  et alors on est dans l'un des cas suivants :
  - toute cellule devient constante après un certain temps car un état envahissant est produit, ou
  - il existe une automate cellulaire  $\mathcal{R}$  tel que,  $\forall t \in \mathbb{N}, \mathcal{R}^t(\mathcal{I}^t(c)) = c$  (la dynamique est réversible) et  $t_0 = 0$  (jamais un état de l'un des  $S_i$  n'est apparu) ;
2.  $\exists n \in \mathbb{N}_+, \exists t_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} :$

$$(\mathcal{I}^t(c))(z) \in S_i \Leftrightarrow t = \begin{cases} t_0 \bmod 4n + 2 & \text{si } i = 1 \\ t_0 + n \bmod 4n + 2 & \text{si } i = 2 \\ t_0 + 2n - 2 \bmod 4n + 2 & \text{si } i = 3 \\ t_0 + 3n \bmod 4n + 2 & \text{si } i = 4 \\ t_0 + 4n + 1 \bmod 4n + 2 & \text{si } i = 5 \end{cases}$$

De plus, des valeurs multiples de 3 arbitrairement grandes peuvent être obtenues pour  $n$  dans le cas 2 ci-dessus sur des configurations  $c$  bien choisies.

Cet automate cellulaire  $\mathcal{I}$  permet de découper régulièrement le temps en cycles de 5 intervalles de longueurs respectives  $n, n-2, n+2, n+1, 1$ , et ce de manière synchrone pour toutes les cellules. En s'appuyant sur ce découpage temporel, on peut définir un automate cellulaire  $\mathcal{A}_\pi$  qui travaille en 5 phases et qui permet de simuler un produit cartésien quelconque d'un même automate cellulaire  $\mathcal{A}$  de rayon 1. L'idée est d'utiliser des macro-cellules composées de 3 cellules de  $\mathcal{A}$  : si  $n = 3k$ , la macro cellule numéro  $i$  contient, dans l'ordre, une cellule pour son état courant, une cellule pour l'état de sa voisine virtuelle de gauche, la macro-cellule numéro  $i-k$ , et une pour sa voisine virtuelle de droite, la macro-cellule numéro  $i+k$ . De plus, à chaque macro-cellule est associée une tête (dans une autre couche de l'ensemble d'états) qui peut se déplacer jusqu'aux voisines virtuelles de celle-ci pour ramener les informations utiles localement. Les cinq phases de l'action de  $\mathcal{A}_\pi$  sont alors les suivantes pour la tête associée à une macro-cellule  $i$  (l'enchaînement cyclique des phases est assuré par une couche qui indique le numéro de la phase en cours, et qui est mis à jour de façon adéquate à chaque fois que  $\mathcal{I}$  rentre dans un état spécial d'un des ensembles  $S_i$ ) :

1. aller lire l'état de la macro-cellule  $i+k$  (distance  $n$ )
2. revenir et écrire l'information à l'emplacement prévu dans la macro-cellule  $i$  (distance  $n-2$ ) ;
3. aller lire l'état de la macro-cellule  $i-k$  (distance  $n+2$ ) ;
4. revenir et écrire l'information à l'emplacement prévu dans la macro-cellule  $i$  (distance  $n+1$ ) ;
5. se repositionner sur la cellule d'état de la macro-cellule  $i$  (distance 1).

À la fin de ce cycle, la macro-cellule possède localement toutes les informations utiles pour pouvoir effectuer une transition selon la règle de  $\mathcal{A}$ . Ainsi,  $\mathcal{A}_\pi$  simule le comportement de  $\mathcal{A}_k$ , les  $k$  composantes de ce dernier étant juxtaposées dans l'espace sous la forme de  $k$  macro-cellules consécutives.

En outre,  $\mathcal{A}_\pi$  vérifie en permanence d'une part que la couche contenant les têtes contient bien une tête toutes les 3 cellules (ceci peut être contrôlé localement avec un rayon 2), et d'autre part que  $n$  est bien un multiple de 3. Cette dernière vérification est rendue possible par une numérotation modulo 3 des cellules (qui peut, elle, être vérifiée localement) : il suffit de contrôler que les cellules de départ et

d'arrivée de la première phase du cycle ont le même numéro modulo 3. Enfin, la couche contenant le numéro de phase en cours doit toujours être uniforme.

Dans le cas où l'une de ces vérifications échoue, ou si un état envahissant est produit dans la couche de l'automate  $\mathcal{I}$ , un état envahissant global est produit.

**Proposition 18** *Pour tout  $\mathcal{A}$  et tout entier  $n \in \mathbb{N}_+$ , on a :*

$$\underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n \trianglelefteq_{\square_3} \mathcal{A}_\pi.$$

De plus, si  $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_p$  ou  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u$ , alors  $\mathcal{A}_\pi$  n'est pas intrinsèquement universel.

*Preuve* La première partie de la proposition se vérifie aisément par construction de  $\mathcal{A}_\pi$  car  $\mathcal{A}_\pi$  permet de simuler des  $\underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n$  pour  $n$  arbitrairement grand.

Ensuite, d'après la proposition 17, on vérifie que pour tout  $\mathcal{A}$  et toute configuration  $c$  de  $\mathcal{A}_\pi$ , on est dans l'une des possibilités suivantes :

1. soit un état envahissant global est produit (soit parce que la couche de l'automate  $\mathcal{I}$  a produit un état envahissant, soit parce que l'une des vérifications effectuées par  $\mathcal{A}_\pi$  a échoué) ;
2. soit aucun état de l'un des  $\mathcal{S}_i$  n'apparaît jamais dans la couche de  $\mathcal{I}$  et la dynamique de  $\mathcal{A}_\pi$  à partir de  $c$  est réversible (car la dynamique de la couche  $\mathcal{I}$  l'est et que toutes les autres couches restent constantes sauf la couche des têtes qui effectue un simple décalage) ;
3. soit il existe un entier  $i$ , des paramètres  $m, n, k$  et une configuration  $c'$  de  $\mathcal{A}_i$  tels que la dynamique de  $\mathcal{A}_i$  sur  $c'$  est isomorphe à la dynamique de  $\mathcal{A}_\pi^{(m,n,k)}$  sur  $o_m(c)$ .

Pour conclure, il suffit de considérer la dynamique d'un automate cellulaire  $\mathcal{B}$  sur une configuration  $d$  avec les propriétés suivantes :

- la dynamique n'est pas réversible,
- sur une demi-configuration il existe des zones de plus en plus larges et de plus en plus espacées sur lesquelles la dynamique est périodique avec des périodes de plus en plus longues.

$\mathcal{A}_\pi$  ne peut pas capturer cette dynamique si  $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_p$  ou  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u$ . En effet, la non-réversibilité de  $\text{Diag}_{\mathcal{B}}(d)$  et la présence de zones où le comportement ne devient pas constant après un certain temps force la possibilité 3 ci-dessus et quels que soient les paramètres  $m, n, k$ , la dynamique  $\text{Diag}_{\mathcal{B}^{(m,n,k)}}(o_m(d))$  ne peut pas être capturée par  $\mathcal{A}_i$  quel que soit  $i$  par un raisonnement de comptage de particules analogue à celui du lemme 13.  $\nabla$

**Corollaire 8** *Il existe un automate cellulaire universel pour le calcul Turing séparé de la classe des automates cellulaires intrinsèquement universels par une chaîne strictement croissante de longueur  $\omega \cdot 2$ .*

*Preuve* Cela découle de la proposition 18 et de [22].  $\nabla$

## 10 Conclusion

Les classifications présentées dans la section 7 conduisent à des définitions formelles (universalité intrinsèque (section 7.2), particule (section 9.1)) qui permettent de démontrer des résultats négatifs : non existence d'intrinsèquement universel pour  $\square_1$ , existence d'une chaîne infinie de longueur  $\omega \cdot 2$  de classes d'automates au-dessus de la Turing-universalité (corollaire 8). Nous avons en particulier mis en lumière deux points. D'une part, il est possible de transporter une « complexité » due au nombre d'états des automates dans les configurations initiales considérées (section 8). D'autre part, la notion d'universalité pour le calcul Turing classique qui s'appuie sur la « finitude » des configurations en jeu est beaucoup moins puissante que la notion d'universalité intrinsèque, de nature *a priori* catégorique, mais qui peut aussi être vue comme relevant d'un calcul (non Turing) (section 9).

On aimerait donner sens à une notion de « complexité » en définissant une notion de distance pertinente entre une classe et l'élément minimum d'une classification.

Nous avons tenté d'exprimer de façon formelle des intuitions sur la « complexité » qui viennent du monde des automates cellulaires. Cette formalisation a conduit à des résultats. Il reste à voir s'ils peuvent contribuer significativement à la compréhension de phénomènes complexes naturels.

## Références

- [1] T. Baldwin and S. Shelah. On the classifiability of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 230 :117–129, 2000.
- [2] N. Boccara, J. Nasser, and M. Roger. Particle-like structures and their interactions in spatio-temporal patterns generated by one-dimensional deterministic cellular automata rules. *Physical Review A*, 44 :866–875, 1991.
- [3] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara, and G. Mauri. *Topological chaos and Cellular Automata*, pages 213–259. Springer Verlag, delorme and mazoyer edition, 1999.
- [4] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara, and J. Mazoyer. Shift invariant distance on  $s^{\mathbb{Z}}$  with non trivial topology. In *Proceeding of MFCS'97*, pages 376–381. Springer Verlag, 1997.
- [5] C. Choffrut and K. Čulik. On real-time cellular automata and trellis automata. *Rairo*, pages 417–457, 1984.
- [6] S. Cole. Real time computation by n dimensional iterative arrays of finite-state machines. *IEEE Transactions on Computers*, 18, n 4 :349–362, 1969.
- [7] K. Culik and S. Yu. Undecidability of ca classification schemes. *Complex Systems*, 2 :177–190, 1988.
- [8] R. Gilman. Classes of linear cellular automata. *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, 6 :105–118, 1987.
- [9] G. Hedlund. Endomorphism and automorphism of the shift dynamical system. *Mathematical System Theory*, 3 :320–375, 1969.
- [10] K. Imai and K. Morita. Firing squad synchronization problem in reversible cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 165 :475–482, 1996.
- [11] S. Ishii. Measure theoretic approach to the classification of cellular automata. *Discrete Applied Mathematics*, 39 :125–136, 1992.
- [12] P. Kůrka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, 17 :417–433, 1997.
- [13] B. Martin. Damage spreading and  $\mu$ -sensitivity on cellular automata. *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, 6 :105–118, 1987.
- [14] B. Martin. A group interpretation of particles generated by one-dimensional cellular automata. *Int. Journ. of Mod. Phys. C*, 11 :101–123, 2000.
- [15] B. Martin. *Automates cellulaires, information et chaos*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2001.
- [16] J. Mazoyer. Solutions au problème de la synchronisation d'une ligne de fusiliers. Habilitation à diriger des recherches, 1989.
- [17] J. Mazoyer and I. Rapaport. Inducing an order on cellular automata by a grouping operation. In *Proceeding of STACS'98*, pages 128–227. Springer Verlag, 1998.
- [18] J. Mazoyer and I. Rapaport. Global fixed points attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane. *Discrete Mathematics*, 199 :103–122, 1999.
- [19] J. Mazoyer and N. Reimen. A linear speed-up theorem for cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 101 :59–98, 1992.
- [20] N. Ollinger. *Automates cellulaires : structures*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [21] N. Ollinger. The quest for small universal cellular automata. In *Proceeding of ICALP'02*, pages 376–381. Springer Verlag, 2002.
- [22] N. Ollinger. The intrinsic universality problem of one-dimensional cellular automata. In *Proceeding of STACS'03*, pages 376–381. Springer Verlag, 2003.
- [23] I. Rapaport. *Ordre induit sur les automates cellulaires par l'opération de regroupement*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1998.
- [24] A. Smith. Real time languages by one-dimensional cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 6 :233–253, 1972.
- [25] J. von Neumann. *Theory of Self-reproducing*. University of Illinois Press, Urbana Ill., 1966.
- [26] S. Wolfram. *Theory and applications of cellular automata*. World Scientific, Singapore., 1986.
- [27] K. Zuse. *Rechnender Raum*, volume 1. Friedrich Viexeg & Sohn, Braunschweig, 1969.