La théorie des cofinalités possibles et ses applications

Grégory Lafitte

Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme

École Normale Supérieure de Lyon
Unité Mixte de Recherche CNRS-INRIA-ENS LYON
n° 5668

La théorie des cofinalités possibles et ses applications

Grégory Lafitte

Septembre 1996

Research Report N° 1999-48

École Normale Supérieure de Lyon
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France
Téléphone : +33(0)4.72.72.80.37
Télécopieur : +33(0)4.72.72.80.80
Adresse électronique : `lip@ens-lyon.fr`

La théorie des cofinalités possibles et ses applications

Grégory Lafitte

Septembre 1996

Abstract

Cardinal arithmetic, which has given birth to set theory, seemed to be until lately either simple (addition and multiplication of infinite cardinals are simple), or quite elastic (by forcing methods, it seemed possible to show the consistency with set theory of any reasonable behaviour of cardinal exponentiation). Saharon Shelah has developped a rich theory with surprising applications in cardinal arithmetic, changing completely those beliefs. We present a state of the art of this theory and a certain number of its applications.

Keywords: Cardinal Arithmetic, Cofinality, Large Cardinals

Résumé

L'arithmétique des cardinaux, qui est à l'origine de la théorie des ensembles, semblait jusqu'il y a quelques années, soit simple (l'addition et la multiplication de cardinaux infinis sont simples), soit élastique (par le biais de forcing, on pensait pouvoir montrer la consistence avec la théorie des ensembles de tout comportement raisonnable de l'exponentiation de cardinaux). Saharon Shelah a développé une théorie ayant des applications surprenantes pour l'arithmétique des cardinaux, changeant complètement cette vision des choses. Nous présentons un état de l'art de cette théorie et un certain nombre d'applications de celle-ci.

Mots-clés: Arithmétique des cardinaux, Cofinalité, Grands cardinaux

LA THÉORIE DES COFINALITÉS POSSIBLES ET SES APPLICATIONS

GRÉGORY LAFITTE

1. Introduction

Les *nombres cardinaux* ont été introduit par Cantor à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle, et ce sont les problèmes provenant de l'étude des règles régissant l'arithmétique de ces nombres cardinaux (que l'on appellera dorénavant *cardinaux*) qui ont donné naissance à la théorie des ensembles. Il se trouve que l'addition et la multiplication de cardinaux infinis est simple : quand au moins l'un des nombres cardinaux κ, λ est infini alors $\kappa + \lambda$ et $\kappa \cdot \lambda$ sont égaux à $\max\{\kappa, \lambda\}$.

Malheureusement, on ne trouve pas cette simplicité pour l'exponentiation de cardinaux infinis. La technique de forcing, introduit par Cohen dans sa démonstration de l'indépendance de l'hypothèse du continu, a même permis de montrer que beaucoup des problèmes ouverts de l'arithmétique (et donc de l'exponentiation) des cardinaux sont indépendants des axiomes de ZFC (Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix). Ainsi, à la fin des années soixantes, l'arithmétique des cardinaux paraissait *triviale* car il semblait que tout théorème potentiel puisse être réfuté par la construction d'un *modèle* de la théorie des ensembles qui ne permettrait pas de vérifier ce théorème. En particulier Easton [5] a montré que la fonction $f(\kappa) = 2^\kappa$, restreinte aux cardinaux réguliers κ, peut avoir n'importe quel comportement en dehors de quelques prérequis évidents : si la fonction f est croissante et telle que $\mathrm{cf}(f(\alpha)) > \aleph_\alpha$ alors en supposant que ZFC est consistant, $2^{\aleph_\alpha} = f(\alpha)$ pour tout α régulier est consistant avec ZFC.

Tout le monde en théorie des ensembles pensait alors que la restriction aux cardinaux réguliers dans le théorème d'Easton était dûe à une faiblesse dans la démonstration et qu'une légère amélioration de la preuve montrerait que cela s'étend également aux cardinaux singuliers et que donc il n'y a pas de théorèmes importants qui puissent être prouvés à propos de l'arithmétique des cardinaux dans ZFC.

Silver [34] changea complètement cette analyse de l'arithmétique des cardinaux en montrant qu'il y avait des théorèmes non triviaux à propos de l'exponentiation de cardinaux singuliers: si $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ pour tout $\alpha < \omega_1$, alors $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$. Galvin et Hajnal [7] ont également montré à partir du résultat de Silver que si $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\omega_1}$ pour tout $\alpha < \omega_1$, alors $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{(2^{\aleph_1})^+}$. Beaucoup d'autres résultats ont alors suivi jusqu'à celui dû à Shelah [21] montrant que pour tout ordinal limite δ, $\aleph_\delta^{\mathrm{cf}(\delta)} < \aleph_{(|\delta|^{\mathrm{cf}(\delta)})^+}$. La preuve de ce résultat utilise très fortement l'étude de cofinalités de produits réduits d'ensemble de cardinaux. C'est à ce moment là que Shelah réalisa l'importance de l'étude des cofinalités possibles que l'on va décrire en partie dans ce rapport.

Ce qui découla de cette étude est une théorie magnifique qui a permis de démontrer beaucoup de résultats aussi importants qu'inatendus. Parmi ces résultats, il y a la borne de Shelah que l'on démontrera : si $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, alors $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$.

Received by the editors Septembre 1996.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 03E10, Secondary: 03E75.

Cette théorie permit de trouver beaucoup d'applications importantes concernant l'existence d'algèbres de Jonsson, et des applications de la théorie des ensembles à l'algèbre et la topologie. Par tous ses aspects, la théorie des cofinalités possibles semble être au centre de la théorie des ensembles et en particulier de l'étude des ordinaux et cardinaux et de leur arithmétique, et prouve être plus importante et certainement plus fructueuse que l'étude de la cardinalité de l'exponentiation de cardinaux.

Ce rapport constitue un état de l'art de l'étude de l'arithmétique des cardinaux et de l'influence des cofinalités possibles sur celle-ci. Notre travail a été de réécrire des démonstrations incomplètes, à faire un travail de synthèse afin d'exposer en un rapport toute la théorie et les applications les plus importantes et de chercher des moyens pour pouvoir trouver des applications de cette théorie à des domaines moins proches de la théorie des ensembles.

Ce rapport constitue l'aboutissement du stage de $2^{\text{ème}}$ année du magistère de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon. Ce stage a été effectué à l'*Institute of Mathematics* de la *Hebrew University of Jerusalem* sous la direction du Professeur Menachem Magidor. Je tiens à remercier les différentes personnes de cette équipe de logique et de théorie des ensembles pour avoir bien voulu accueillir pendant ces 3 mois une personne qui a tout à apprendre dans le domaine. Je remercie tout spécialement Menachem Magidor pour son dévouement, pour sa patience ainsi que pour toutes les discussions très intéressantes que l'on a pu avoir autour de la théorie des ensembles. Ce fut un grand privilège de l'avoir comme directeur de stage.

Dans une première partie, nous rappellerons quelques résultats et définitions essentielles de la théorie naïve des ensembles et de la théorie des modèles. On peut néanmoins trouver une étude détaillée de la théorie des ensembles dans [9] et de la théorie des modèles dans [4]. Ensuite nous introduirons la théorie des cofinalités possibles et nous étudierons les résultats principaux la concernant. On exposera ensuite brièvement d'autres résultats plus avancés de la théorie. A partir de cette étude de la théorie, on montrera les implications en arithmétique des cardinaux, en particulier on démontrera la borne de Shelah. Enfin on présentera deux autres applications de la théorie: une, à l'existence d'algèbres de Jonsson et l'autre à l'étude d'une vieille conjecture de Tarski.

2. Quelques rappels

2.1. **Les ordinaux, les cardinaux.** Nous ne rappellerons dans cette section que quelques résultats et définitions de base sur les ordinaux et les cardinaux. Le lecteur est invité à se reporter à [9] pour une étude détaillée.

Définition 1. L'ensemble P muni de la relation d'ordre totale $<$ est bien ordonné si toute partie non vide de P possède un plus petit élément a .

Définition 2. Un ensemble T est *transitif* si tout élément de T est aussi une partie de T.

En d'autres termes, T est un sous-ensemble de $P(T)$.

Définition 3. Un ensemble est un *nombre ordinal* (un *ordinal*) s'il est transitif et bien ordonné par la relation $\in$.

On note *Ord* la classe de tous les ordinaux. Les ordinaux seront notés par des lettres grecques minuscules $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. On définit une relation d'ordre sur *Ord* en posant

$$\alpha < \beta \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha \in \beta$$

On montre que la relation d'ordre $\leq$ pour les ordinaux est la relation d'inclusion. Il en résulte que la borne supérieure d'un ensemble d'ordinaux est l'union de cet ensemble: pour tout ensemble d'ordinaux X,

$$\sup X = \bigcup X$$

On définit le *successeur* de l'ordinal α par $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ et on note $0 = \emptyset$.

Soit α un ordinal. S'il existe un ordinal β tel que $\alpha = \beta + 1$, on dit que α est un ordinal *successeur*. Sinon α est appelé un ordinal *limite*. L'ensemble des ordinaux successeurs (respectivement limites) est noté *Succ* (respectivement *Lim*). On montre qu'un ordinal est limite si et seulement si $\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beta = \bigcup \alpha$. On considère que $0 \notin Lim$.

On note ω le plus petit ordinal limite. Les ordinaux inférieurs à ω (éléments de $\mathbb{N}$) sont appelés *ordinaux finis*, ou *entiers naturels*. On a ainsi

$$0 = \emptyset, 1 = 0 + 1 = \{\emptyset\}, 2 = 1 + 1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \text{etc.}$$

On note ω_1 le plus petit ordinal non dénombrable.

On définit les opérations arithmétiques sur les ordinaux par induction de la manière suivante :

- l'addition: $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ et $\alpha + \xi = \sup_{\beta<\xi}\{\alpha + \beta\}$ où α, $\beta \in Ord$, $\xi \in Lim$;
- la multiplication: $\alpha \cdot 0 = 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$ et $\alpha \cdot \xi = \sup_{\beta<\xi}\{\alpha \cdot \beta\}$ où α, $\beta \in Ord$, $\xi \in Lim$;
- l'exponentiation: $\alpha^0 = 1$ pour $\alpha \neq 0$, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ et $\alpha^\xi = \sup_{\beta<\xi}\{\alpha^\beta\}$ où α, $\beta \in Ord$, $\xi \in Lim$.

A partir de ces ordinaux, on définit les cardinaux qui forment un sous-ensemble de ceux-ci.

Définition 4. Un ordinal κ est un *cardinal* s'il n'existe pas d'ordinal $\lambda < \kappa$ qui puisse être mis en bijection avec κ.

Ainsi, $|\alpha|$ est égal au plus grand cardinal inférieur ou égal à α.

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.1.

i. *Pour tout α, il existe un cardinal supérieur à α.*
ii. *Si X est un ensemble de cardinaux, alors* $\sup(X)$ *est un cardinal.*

Pour tout α, on note α^+ le plus petit cardinal supérieur à α (le *cardinal successeur de* $|\alpha|$).

On peut donc définir d'après le lemme précédent la suite normale de tous les cardinaux infinis (*alephs*). On utilise usuellement $\aleph_\alpha$ pour dénoter le nombre cardinal, et ω_α pour dénoter l'ordinal :

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega, \qquad \aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = {\aleph_\alpha}^+$$

$$\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\} \qquad \text{si } \alpha \text{ est limite}$$

$\aleph_\alpha$ est appelé cardinal *limite* si α est un ordinal limite.

On dit qu'un ensemble X est de cardinalité κ si κ est un cardinal et si X peut être mis en bijection avec κ.

On définit alors les opérations arithmétiques usuelles sur les cardinaux de la façon suivante :

- l'addition: $\kappa + \lambda$ est égal à la cardinalité de l'union de deux ensembles disjoints de cardinalités respectives κ et λ,
- la multiplication: $\kappa \cdot \lambda$ est égal à la cardinalité du produit cartésien de deux ensembles disjoints de cardinalités respectives κ et λ,
- l'exponentiation: κ^λ est égal à la cardinalité de l'ensemble des fonctions de X dans Y avec Y et X respectivement de cardinalités κ et λ.

Rappelons le théorème de Cantor :

Théorème 2.2. *Pour tout cardinal* κ, $2^\kappa > \kappa$.

Comme on a fait remarquer dans l'introduction, l'addition et la multiplication de cardinaux sont triviales :

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$$

On verra plus de résultats sur l'arithmétique des cardinaux dans la partie 4.

2.2. **Cofinalités.**

Définition 5. Une *suite transfinie* est une fonction dont le domaine est un ordinal γ que l'on note

$$\langle \alpha_\beta \rangle_{\beta<\gamma}, \gamma \in \mathit{Ord}$$

On dit que $\langle \alpha_\beta \rangle_{\beta<\gamma}$ est une γ-suite.

Définition 6. Soit Γ un ensemble d'ordinaux inférieurs à $\xi \in \mathit{Lim}$, Γ est *cofinal en* ξ si et seulement si pour tout ordinal $\alpha < \xi$, il existe un ordinal $\beta \in \Gamma$ tel que $\alpha < \beta$.

Si $(\alpha_\beta)_{\beta<\gamma}$ est une suite transfinie d'ordinaux inférieurs à ξ, alors on dira que $(\alpha_\beta)_{\beta<\gamma}$ est cofinale en ξ si et seulement si l'image de cette suite est cofinale en ξ.

Exemple 2.1

La ω-suite $\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \omega \cdot 4, \ldots$ est cofinale en $\omega \cdot \omega = \omega^2$.

Exemple 2.2

La ω-suite $\omega^3, \omega^4, \omega^5, \ldots$ est cofinale en ω^ω.

On définit alors la cofinalité d'un ordinal :

Définition 7. Si α est un ordinal limite infini, la *cofinalité* de α est

$$\begin{aligned} \mathrm{cf}\ \alpha = &\text{ le plus petit ordinal limite } \beta \text{ tel qu'il existe} \\ &\text{ une } \beta\text{-suite d'ordinaux} (\alpha_\xi)_{\xi<\beta} \text{ cofinale en } \alpha \end{aligned}$$

Remarque . On a donc $\mathrm{cf}(0) = 0$, $\mathrm{cf}(\alpha + 1) = 1$, $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$, $\mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$, $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0$ et pour un ordinal limite δ, $\mathrm{cf}(\aleph_\delta) = \mathrm{cf}(\delta)$.

On a la propriété suivante qui est très importante :

Proposition 2.1. $\mathit{cf}(\mathit{cf}\ \alpha) = \mathit{cf}\ \alpha$.

On dira désormais qu'un cardinal infini $\aleph_\alpha$ est *régulier* si $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$. Il est *singulier* si $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) < \omega_\alpha$.

Exemple 2.3

$\aleph_\omega$ est un cardinal singulier alors que $\aleph_{\alpha+1}$ est régulier.

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 2.2.

i. *$\mathit{cf}\ \alpha$ est toujours un cardinal régulier.*
ii. *Un cardinal infini κ est singulier si et seulement s'il existe un cardinal $\lambda < \kappa$ et une famille $\{S_\xi : \xi < \lambda\}$ de sous-ensembles de κ tels que $|S_\xi| < \kappa$ pour tout $\xi < \lambda$, et $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$. (Et le plus petit cardinal λ qui satisfait cette condition est en fait égal à $\mathit{cf}\ \kappa$.)*

2.3. **Filtres.** Les filtres et les idéaux jouent un rôle important dans la théorie des ensembles. La notion d'idéal extrapole la notion d'ensemble petit: Soit un idéal I sur S, un ensemble $X \subset S$ est considéré petit s'il appartient à I.

Un *filtre* sur un ensemble S est une famille F de sous-ensembles de S telle que :

i. $S \in F$;
ii. si $X \in F$ et $Y \in F$, alors $X \cap Y \in F$;
iii. si $X, Y \subseteq S$, $X \in F$, et $X \subseteq Y$, alors $Y \in F$.

Un *idéal* sur un ensemble S est une famille I de sous-ensembles de S telle que :

i. $\emptyset \in I$;
ii. si $X \in I$ et $Y \in I$, alors $X \cup Y \in I$;
iii. si $X, Y \subseteq S$, $X \in I$, et $Y \subseteq X$, alors $Y \in I$.

Exemple 2.4

Soit X_0, un sous-ensemble non vide de S. Le filtre $F = \{X \subseteq S : X \supseteq X_0\}$ est appelé un filtre *principal*.

Un filtre D sur S est un *ultrafiltre* si

$$\text{pour tout } X \subseteq S, \quad \text{soit } X \in D \text{ soit } S - X \in D$$

Un filtre F sur S est *maximal* s'il n'existe aucun filtre F' sur S tel que $F \subset F'$.

Le lemme suivant permet de caractériser les ultrafiltres :

Lemme 2.3. *Un filtre F sur S est un ultrafiltre si et seulement s'il est maximal.*

Enfin, par le théorème de Tarski, tout filtre sur S peut être étendu en un ultrafiltre.

2.4. **Clubs.** Soit κ un cardinal régulier non dénombrable. On appelle un ensemble $C \subseteq \kappa$ un *club* (*closed unbounded*) de κ si

i. pour toute suite $(\alpha_\xi)_{\xi<\gamma}$ d'éléments de C, de *longueur* $\gamma < \kappa$, on a $\lim_{\xi\to\gamma} \alpha_\xi \in C$ (clos);
ii. pour tout $\alpha < \kappa$, il existe $\beta > \alpha$ tel quel $\beta \in C$ (non borné).

On a les résultats suivants sur l'intersection de clubs :

Lemme 2.4.

i. *Si C et D sont des clubs de κ, alors $C \cap D$ est également un club de κ;*
ii. *L'intersection de moins de κ clubs de κ est un club de κ.*

On dit qu'un ensemble $S \subseteq \kappa$ est *stationnaire* dans κ si $S \cap C \neq \emptyset$ pour tout club C de κ.

Exemple 2.5

Pour κ cardinal régulier, le sous-ensemble $S = \{\alpha < \kappa^+ : \text{cf}\ \alpha = \kappa\}$ de κ est stationnaire dans κ^+.

2.5. **Un peu de théorie des modèles.** Un *langage* est un ensemble de symboles : des symboles pour des relations, des fonctions et des constantes.

Un *modèle* pour un langage donné $\mathcal{L}$ est un couple $\mathcal{A} = (A, \mathcal{I})$, où A est l'univers de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$ la fonction d'*interprétation* qui assigne les relations, fonctions et constantes appropriées de A aux symboles de $\mathcal{L}$. Un modèle pour $\mathcal{L}$ est habituellement noté de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \langle A, P, \ldots, F, \ldots, c, \ldots \rangle$$

Par récurrence sur la longueur des termes et des formules, on définit la *valeur* d'un terme

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]$$

et la *satisfiabilité*

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

Deux modèles $\mathcal{A} = \langle A, P, \ldots, F, \ldots, c, \ldots \rangle$ et $\mathcal{A}' = \langle A', P', \ldots, F', \ldots, c', \ldots \rangle$ sont *isomorphes* s'il existe un *isomorphisme* entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, c'est-à-dire une bijection f de A sur A' telle que :

1. $P(x_1, \ldots, x_n)$ ssi $P'(f(x_1), \ldots, f(x_n))$,
2. $f(F(x_1, \ldots, x_n)) = F'(f(x_1), \ldots, f(x_n))$,
3. $f(c) = c'$,

pour toutes relations, fonctions et constantes de $\mathcal{A}$.

Un *sous-modèle* de $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble $B \subseteq A$ muni des relations $P^{\mathcal{A}} \cap B^n, \ldots$, des fonctions $F^{\mathcal{A}} \mid B^m, \ldots$, et des constantes $c^{\mathcal{A}}, \ldots$; B doit être tel que toute constante $c^{\mathcal{A}}$ appartienne à B, et que B soit clos par toute fonction $F^{\mathcal{A}}$.

Un sous-modèle $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ est un sous-modèle *élémentaire*

$$\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$$

si pour toute formule φ, et tous $a_1, \ldots, a_n \in B$,

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ ssi } \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

Le lemme clef pour la construction de sous-modèles élémentaires est: un sous-ensemble $B \subseteq A$ forme un sous-modèle élémentaire de $\mathcal{A}$ si et seulement si pour toute formule φ, et tous $a_1, \ldots, a_n \in B$,

$$\text{si } \exists a \in A \text{ tel que } \mathcal{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n],$$

$$\text{alors } \exists a \in B \text{ tel que } \mathcal{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$$

Une fonction $h : A^n \to A$ est une *fonction de Skolem* pour φ si

$$\exists a \in A \; \mathcal{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[h(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n]$$

pour tout $a_1, \ldots, a_n$.

On définit maintenant $H(\chi)$ qui, pour χ cardinal régulier assez grand, contient *tout ce que l'on utilise* en théorie des ensembles : $H(\chi)$ est la famille d'ensembles x tels que pour un certain ensemble A, on ait

- $x \in A$,
- A est transitif,
- $|A| < \chi$.

3. Cofinalités possibles

3.1. **La base.** Soit a un ensemble infini de cardinaux réguliers. On supposera dans la plupart de ce rapport que $\min(a) > |a|$ (on supposera certaines fois des conditions plus fortes sur a comme $|a|^+ < \alpha$ pour tout $\alpha \in a$). Soit I un idéal sur a. Le *produit réduit de a par I*, $\prod a/I$, consiste en classes d'équivalence de fonctions f qui ont pour domaine a et prennent leurs valeurs dans la classe des ordinaux, telles que $f(\alpha) \in \alpha$ pour tout $\alpha \in a$ (ce sont les éléments de $\prod a$) : f et g sont équivalents modulo I si $\{\alpha : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in I$. Ce produit est ordonné partiellement par la relation $f <_I g$ définie par $\{\alpha : f(\alpha) \geq g(\alpha)\} \in I$. Si I est le dual d'un ultrafiltre D, alors le produit (que l'on appelle alors *ultraproduit*) est totalement ordonné.

On appelle *vraie cofinalité* de ce produit réduit, le cardinal régulier λ tel qu'il y ait une suite $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ dans $\prod a$ telle que $\alpha < \beta \Rightarrow f_\alpha <_I f_\beta$ et pour tout $h \in \prod a$, il existe α, tel que $h \leq_I f_\alpha$. On note cette vraie cofinalité par $\mathrm{tcf} \prod a/I$. Dans le cas d'un ultraproduit, puisqu'il est totalement ordonné, on a toujours une vrai cofinalité (on la note alors $\mathrm{cf} \prod a/D$); ce n'est pas toujours le cas pour un produit réduit avec I qui n'est pas premier (i.e. le *dual* d'un ultrafiltre).

Si $\lambda = \text{tcf}\prod a/I$ ou $\lambda = \text{cf}\ \prod a/D$, où I est un idéal de a et D un ultrafiltre de a, on dit alors que λ est une *cofinalité possible* (de $\prod a$), et pcf(a) est l'ensemble de ces cofinalités possibles :

$$\begin{aligned}\text{pcf}(a) &= \{\text{cf}\ \prod a/D : D \text{ ultrafiltre sur } a\}\\ &= \{\text{tcf}\prod a/I : I \text{ idéal sur } a\}\end{aligned}$$

On peut d'abord remarquer quelques propriétés assez élémentaires de pcf(a) :

Proposition 3.1.

i. $a \subseteq pcf(a)$,
ii. $\min(a) = \min(pcf(a))$,
iii. *pcf*(a) *a un plus grand élément* $\max(pcf\ a)$,
iv. *si* $a_1 \subseteq a_2$, *alors* $pcf(a_1) \subseteq pcf(a_2)$,
v. $pcf(a_1 \cup a_2) = pcf(a_1) \cup pcf(a_2)$.

Preuve. i. Il suffit de prendre pour chaque $\alpha \in a$, l'ultrafiltre principal $D_\alpha = \{a' \subseteq a : \alpha \in a'\}$: on a alors $\prod a/D_\alpha$ qui est isomorphe à $(\alpha, <)$ et donc $\text{cf}(\prod a/D_\alpha) = \text{cf}(\alpha) = \alpha$ puisque α est régulier.

ii. D'après le point précédent, on a $\min(a) \geq \min(\text{pcf}(a))$. Remarquons alors que $\prod a$ est $\min(a)$-dirigé[1] [si $F \subseteq \prod a$, $|F| < \min(a)$, $g \in \prod a$ définie par $g(\theta) = \bigcup_{f\in F} f(\theta) + 1$ majore tous les $f \in F$]. D'où, $\prod a/D$ est $\min(a)$-dirigé pour tout ultrafiltre D et donc $\text{cf}(\prod a/D) \geq \min(a)$. C'est vrai pour tout D, donc clairement $\theta \in \text{pcf}(a) \Rightarrow \theta \geq \min(a)$ et $\min(\text{pcf}(a)) \geq \min(a)$.

iii. voir plus bas dans la partie sur les générateurs (on utilisera bien évidemment jamais cette propriété de pcf avant de l'avoir démontré dans cette partie).

$\square$

Une propriété intéressante de pcf découle du lemme suivant :

Lemme 3.1. *Si* $\min(a) > |pcf(a)|$, *alors* $pcf(pcf(a)) = pcf(a)$.

Preuve. On a par la proposition précédente que $\text{pcf}(a) \subseteq \text{pcf}(\text{pcf}(a))$. Pour l'autre inclusion, soit $\lambda \in \text{pcf}(\text{pcf}(a))$ et D, un ultrafiltre sur pcf(a) associé à λ pour obtenir cette cofinalité possible. Et soit $\langle g_\delta/D : \delta < \lambda\rangle$ une suite cofinale en $\prod \text{pcf}(a)/D$. Pour chaque $\beta \in \text{pcf}(a)$, on définit D_β, un ultrafiltre sur a associé à β pour obtenir cette cofinalité possible (de $\prod a$). Soit D', un ultrafiltre définit ainsi : pour $b \subseteq a$, $b \in D' \Leftrightarrow \{\beta \in \text{pcf}(a) : b \in D_\beta\} \in D$. Pour chaque $\beta \in \text{pcf}(a)$, soit $\langle f^\beta_\delta/D_\beta : \delta < \beta\rangle$ une suite transfinie croissante cofinale en $\prod a/D_\beta$. Pour $\delta < \lambda$ et $\alpha \in a$, soit $h_\delta(\alpha) = \sup\{f^\beta_{g_\delta(\beta)}(\alpha) : \beta \in b\}$. On a $h_\delta(\alpha) < \alpha$ pour chaque $\alpha \in a$ puisque $\min(a) > |\text{pcf}(a)|$.

Prenons un élément h/D' de $\prod a/D'$. Pour chaque $\beta \in \text{pcf}(a)$, il existe δ_β tel que $h/D_\beta \leq f^\beta_{\delta_\beta}/D_\beta$. Il existe également δ_1 tel que $\langle\delta_\beta\rangle_{\beta\in b}/D \leq g_{\delta_1}/D$. Pour tout $\delta \geq \delta_1$, on a alors un $d \in D$ tel que pour tout $\beta \in d$, $\delta_\beta \leq g_\delta(\beta)$. Soit $A = \{\alpha \in a : h(\alpha) \leq h_\delta(\alpha)\}$. Pour un $\beta \in d$ et un $A_\beta \in D_\beta$, $\forall\alpha \in A_\beta, h(\alpha) \leq f^\beta_{\delta_\beta}(\alpha) \leq f^\beta_{g_\delta(\beta)}(\alpha) \leq h_\delta(\alpha)$ et donc $\alpha \in A$. D'où $A \in D_\beta$ pour tout $\beta \in d$ et donc $A \in D'$.

On a donc montré que pour $h/D' \in \prod a/D'$, il existe $\delta_1 < \lambda$ tel que $\forall\delta, \delta_1 \leq \delta < \lambda \Rightarrow h/D' \leq h_\delta/D'$. Il y a donc une sous-suite transfinie de $\langle h_\delta/D' : \delta < \lambda\rangle$ qui soit croissante et cofinale en $\prod a/D'$ et donc $\lambda \in \text{pcf}(a)$. $\square$

D'après le lemme et la proposition précédente, pcf est l'opération d'*adhérence* d'un espace topologique car on a :

[1] X est α-dirigé si pour tout $F \subseteq X$ tel que $|F| < \alpha$, il existe $g \in X$ qui majore F

- si $a \subseteq b$, alors $\mathrm{pcf}(a) \subseteq \mathrm{pcf}(b)$,
- $\mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(a)) = \mathrm{pcf}(a)$,
- $\mathrm{pcf}(a \cup b) = \mathrm{pcf}(a) \cup \mathrm{pcf}(b)$.

Pour vérifier la deuxième condition, on doit imposer aux *fermés* F de notre espace topologique de vérifier $|F| < \min F$. On peut caractériser les ouverts (les fermés étant directement caractérisés par l'adhérence : $\overline{F} = F$) de notre espace topologique en remarquant ce que signifie l'*intérieur* d'un ensemble de notre espace :

$$\lambda \in \overset{\circ}{X} \text{ si et seulement si pour tout ultrafiltre } D,\ \mathrm{cf}(\prod a/D) = \lambda \Rightarrow X \in D.$$

On tentera pour les autres résultats sur les cofinalités possibles, de donner une interprétation topologique.

On appelle μ la limite de a selon l'ultrafiltre D, $\mu = \lim_D a$, l'unique cardinal tel que pour tout $\beta < \mu$, $\{\alpha \in a : \beta < \alpha \leq \mu\} \in D$.

Théorème 3.2. *Soit $\lambda = cf(\prod a/D)$ et $\mu = \lim_D a$. Alors pour chaque cardinal régulier ν tel que $\mu < \nu < \lambda$, il existe un ensemble a' de cardinaux réguliers, tel que $|a'| \leq |a|$, et un ultrafiltre D' sur a' tel que $\lim_{D'} a' = \mu$ et $cf(\prod a'/D') = \nu$.*

Un corollaire direct, mais très utile pour la suite, de ce théorème est :

Corollaire 3.3. *Si $a = (\beta, \mu)$ est un intervalle de cardinaux réguliers, $\lambda \in pcf(a)$, ν est un cardinal régulier et $\mu < \nu < \lambda$, alors $\nu \in pcf(a)$.*

Ce corollaire nous dit que l'adhérence d'un intervalle de cardinaux réguliers est un intervalle de cardinaux réguliers. C'est ce qui nous permettra de trouver une application de pcf à l'arithmétique des cardinaux.

3.2. **Les générateurs.** On dit que $b \subseteq a$ *impose à* $\prod a$ *une cofinalité* $< \lambda$ (ou simplement 'impose cof $< \lambda$') si pour chaque ultrafiltre D sur a, si $b \in D$, alors $\mathrm{cf}(\prod a/D) < \lambda$.

Si b impose cof $< \lambda$ et $c \subseteq b$, alors c impose cof $< \lambda$. Aussi, si b_1 et b_2 imposent tous deux cof $< \lambda$, alors $b_1 \cup b_2$ impose cof $< \lambda$. On définit donc l'idéal $J_{<\lambda}(a)$:

$$J_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : b \text{ impose cof} < \lambda\}$$

On montre alors que $\prod a/J_{<\lambda}(a)$ est λ-dirigé (si $X \subseteq \prod a/J_{<\lambda}(a)$ et $|X| < \lambda$, alors X est borné dans $\prod a/J_{<\lambda}(a)$). Pour la démonstration de ce résultat, le lecteur est invité à lire [2], on ne refaira pas toutes les démonstrations ici, notre but étant d'exposer et de comprendre la théorie afin de pouvoir présenter en détail les applications de celle-ci.

Ce résultat nous permet de caractériser les cofinalités possibles par rapport aux $J_{<\lambda}(a)$:

Théorème 3.4. *Pour un ultrafiltre D donné, $cf(\prod a/D) < \lambda$ si et seulement si $D \cap J_{<\lambda}(a) \neq \emptyset$.*

Preuve. On montre le sens $\Rightarrow$, l'autre sens découlant directement de part la définition de l'idéal $J_{<\lambda}(a)$. Par l'absurde : on suppose que $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$. Soit $\mu = \mathrm{cf}(\prod a/D) < \lambda$ et $\langle g_\alpha/D : \alpha < \mu\rangle$ une suite cofinale en $\prod a/D$. Puisque $\prod a/J_{<\lambda}(a)$ est λ-dirigé, il existe $g \in \prod a$ telle que $\forall \alpha < \mu, g_\alpha \leq_{J_{<\lambda}(a)} g$ et donc $g_\alpha \leq_D g$ (puisque $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$) ce qui contredit que les g_α forment une suite cofinale en $\prod a/D$. □

On peut faire les observations suivantes sur les idéaux $J_{<\lambda}(a)$:

- $\mu \leq \lambda$ implique que $J_{<\mu}(a) \subseteq J_{<\lambda}(a)$,
- pour λ cardinal limite, $J_{<\lambda}(a) = \bigcup_{\mu<\lambda} J_{<\mu}(a)$,
- si κ est singulier, alors $J_{<\kappa^+}(a) = J_{<\kappa}(a)$.

Lemme 3.5. *$\lambda \in pcf(a)$ si et seulement si $J_{<\lambda}(a) \neq J_{<\lambda^+}(a)$.*

Ce lemme permet de donner une borne à la cardinalité de $\mathrm{pcf}(a)$: en effet puisque $\langle J_{<\lambda}(a) : \lambda \text{ est un cardinal}\rangle$ est une suite croissante de sous-ensembles de $P(a)$ qui est continue[2] aux limites (ordinaux limites) et satisfait $J_{<\lambda}(a) \neq J_{<\lambda^+}(a)$ là où $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$, on a $|\mathrm{pcf}(a)| \leq 2^{|a|}$. Borner la cardinalité de $\mathrm{pcf}(a)$ est très important pour les applications de pcf à l'arithmétique (lire exponentiation) de cardinaux. On améliora d'ailleurs sensiblement cette borne grossière. Il faut remarquer que l'on ne sait toujours pas aujourd'hui si $|\mathrm{pcf}(a)| = |a|$ – cela reste une question ouverte.

On revient maintenant sur un point que l'on a promis de montrer dans cette partie, qui est l'existence d'un plus grand élément de $\mathrm{pcf}(a)$: il existe un plus petit cardinal λ tel que $J_{<\lambda}(a) = P(a)$ (ou de façon équivalente, $a \in J_{<\lambda}(a)$). (Si cela n'est pas le cas, soit D un ultrafiltre qui étend le filtre dual de $\bigcup\{J_{<\lambda}(a) : \lambda \text{ est un cardinal}\}$ et soit $\lambda = \mathrm{cf}(\prod a/D)$. Pour un certain $b \in D$, b impose $\mathrm{cof} < \lambda^+$, et donc $b \in J_{<\lambda^+}(a)$, $\Rightarrow$ contradiction.) D'après la deuxième observation plus haut sur les idéaux $J_{<\lambda}(a)$, λ n'est pas un cardinal limite, et donc il existe un κ tel que $\lambda = \kappa^+$. Si κ était singulier, alors on aurait $J_{<\lambda}(a) = J_{<\kappa}(a)$ ce qui contredit la minimalité de λ. Ainsi, κ est régulier et puisque $J_{<\kappa} \neq J_{<\kappa^+}(a)$, $\kappa \in \mathrm{pcf}(a)$ est le plus grand élément de $\mathrm{pcf}(a)$.

En étudiant les cofinalités de $\prod a/I$ où I n'est pas maximal, on arrive au théorèmes et corollaires suivants :

Théorème 3.6. *Soit I un idéal sur a, λ un cardinal régulier et $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ une suite d'éléments de $\prod a$. Si $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$ est croissante et non bornée dans $\prod a/I$, alors il existe une suite $\langle b_\gamma : \gamma < \lambda\rangle$ de sous-ensembles de a telle que :*

1. *$b_0 \notin I$,*
2. *$\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow b_{\gamma_1} \subseteq_I b_{\gamma_2}$4 (c'est-à-dire $b_{\gamma_1} - b_{\gamma_2} \in I$),*
3. *$\langle (f_\rho \mid b_\gamma)/I : \rho < \lambda\rangle$ est cofinale en $\prod b_\gamma/I$,*

et il existe une fonction $g \in \prod a$ qui est un majorant de $\langle f_\gamma : \gamma > \lambda\rangle$ modulo l'idéal engendré par $I \cup \{b_\gamma : \gamma < \lambda\}$.

Corollaire 3.7. *Soit I un idéal sur a tel que pour chaque ultrafiltre D sur a, disjoint de I, on a $cf(\prod a/D) = \lambda$. Alors $tcf(\prod a/I) = \lambda$.*

Corollaire 3.8. *Si $b \in J_{<\lambda^+} - J_{<\lambda}(a)$, alors $tcf(\prod b/J_{<\lambda}(a)) = \lambda$.*

Du théorème, on en déduit :

Théorème 3.9. *En supposant que $2^{|a|} < min(a)$, $J_{<\lambda^+}(a)$ est engendré à partir de $J_{<\lambda}(a)$ en ajoutant un seul ensemble.*

D'après ce théorème, on peut construire pour un a donné, les générateurs b_λ de la façon suivante : pour chaque cardinal λ, b_λ est l'ensemble qui engendre $J_{<\lambda^+}(a)$ à partir de $J_{<\lambda}(a)$ ($b_\lambda \neq \emptyset$ exactement lorsque $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$). Ces générateurs ont les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.

1. *$\lambda = \max b_\lambda$ où $\lambda \in a$,*
2. *$\lambda = \max pcf(b_\lambda)$,*
3. *$\lambda \notin pcf(a - b_\lambda)$.*

Remarquons que pour tout $a' \subseteq a$, $b'_\lambda = b_\lambda \cap a$ est un générateur de $J_{<\lambda^+}(a')$ à partir de $J_{<\lambda}(a')$. Il faut également noter que :

$$\mathrm{cf}(\prod a/D) = \min\{\lambda : b_{\lambda \in D}\}$$

et que $\max b_\lambda = \lambda$ pour tout $\lambda \in a$.

[2] $f : Ord \to X$ est continue aux limites si $f(\lambda) = \bigcup_{\mu<\lambda} f(\mu)$ pour λ ordinal limite.

Remarque . L'existence des b_λ et leurs propriétés permettent de mieux caractériser notre espace topologique défini à partir de l'opération d'adhérence pcf. En effet, on sait maintenant que c'est un espace de *Hausdorff* car si $\lambda < \mu$ sont des éléments de $c = \mathrm{pcf}(a)$, alors $\mu \notin \mathrm{pcf}(b_\lambda(c))$ et $\lambda \notin \mathrm{pcf}(c - b_\lambda(c))$.

On obtient le corollaire suivant qui permet de caractériser $\max \mathrm{pcf}(a)$:

Corollaire 3.10. *Si a est un ensemble infini de cardinaux réguliers, tel que $|a|^+ < \min(a)$, alors $\max(pcf(a)) = cf(\prod a)$, où $\prod a$ est ordonné par $f < g \Leftrightarrow \forall \delta \in a$, $f(\delta) < g(\delta)$.*

Preuve. On a clairement d'après la définition de pcf que $\max(\mathrm{pcf}(a)) \leq \mathrm{cf}(\prod a)$.

Pour l'autre sens, puisque l'on suppose $|a|^+ < \min(a)$ (on montre que cette condition suffit en réalité pour montrer le théorème 3.9), on a l'existence des générateurs de $J_{<\lambda}(a)$. Soit alors $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ la suite classique de fonctions cofinale en $\prod b_\lambda / J_\lambda(a)$.

Soit $h \in \prod a$ et $\lambda_0 = \max(\mathrm{pcf}(a))$. D'après la définition de la suite $\langle f^\lambda_\alpha\rangle_{\alpha<\lambda}$, il existe α_0 tel que $h \leq_{J_{<\lambda_0}} f^{\lambda_0}_{\alpha_0}$.

On pose alors $X_0 = \{\delta \in a : h(\delta) > f^{\lambda_0}_{\alpha_0}(\delta)\}$ et $\lambda_1 = \max \mathrm{pcf}(X_0)$. On remarque que $X_0 \in J_{<\lambda_0}(a)$ et donc $\lambda_1 < \lambda_0$. On a $X_0 \in J_{<\lambda_1^+}(a) - J_{<\lambda_1}(a)$ et il existe donc $\alpha_1 < \lambda_1$ tel que $h \restriction X_0 \leq_{J_{<\lambda_1}(a)} f^{\lambda_1}_{\alpha_1} \restriction X_0$.

On obtient ainsi de cette façon une suite finie $\langle(\lambda_k, \alpha_k, X_k)\rangle_{k\leq n}$ telle que pour tout $i < n$, $X_i \neq \emptyset$, $\lambda_{i+1} = \max \mathrm{pcf}(X_i) < \lambda_i$, $X_{i+1} = \{\delta \in X_i : h(\delta) > f^{\lambda_{i+1}}_{\alpha_{i+1}}(\delta)\} \in J_{<\lambda_{i+1}}(a)$, $h \restriction (X_i - X_{i+1}) \leq f^{\lambda_{i+1}}_{\alpha_{i+1}} \restriction (X_i - X_{i+1})$ et $X_n = \emptyset$. Ainsi $h \leq \sup\{f^{\lambda_0}_{\alpha_0}, f^{\lambda_1}_{\alpha_1}, \ldots, f^{\lambda_n}_{\alpha_n}\}$ et donc

$$F_{\langle f^\lambda_\alpha\rangle_{\alpha<\lambda,\lambda}} = \{\sup(F) : F \text{ est un sous-ensemble fini de } \{f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \in \mathrm{pcf}(a)\}\}$$

est cofinal en $\prod a$. D'où d'après sa définition, $|F_{\langle f^\lambda_\alpha\rangle_{\alpha<\lambda,\lambda}}| \leq \max \mathrm{pcf}(a)$ et ainsi $\mathrm{cf}(\prod a) \leq \max \mathrm{pcf}(a)$. □

On démontre le lemme suivant :

Lemme 3.11. *Pour chaque $c \subseteq a$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_2 \in pcf(c)$ tels que $c \subseteq b_{\lambda_1} \cup \cdots \cup b_{\lambda_2}$.*

Preuve. Soit l'idéal $I = \{b \subseteq c : \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{pcf}(c), b \subseteq b_{\lambda_1} \cup \cdots \cup b_{\lambda_n}\}$. Si I n'est pas propre, alors $c \in I$ et on a fini. Soient donc un ultrafiltre D sur a tel que $c \in D$ et tel que $D \cap I = \emptyset$ et $\lambda = \mathrm{cf}(\prod a/D) \in \mathrm{pcf}(c)$. On a donc $b_\lambda \in D$ et ainsi $b_\lambda \cap c \in D$. Par définition de I, $b_\lambda \cap c \in I$, ce qui contredit $D \cap I = \emptyset$. □

Remarque . Le théorème précédent nous permet de noter que notre espace topologique est compact.

Un théorème important pour la suite sur les générateurs est le théorème suivant :

Théorème 3.12. (Transitivité des générateurs) *il existe des générateurs b_ν, $\nu \in pcf(a)$, tels que si $\eta \in b_\nu$, alors $b_\eta \subseteq b_\nu$.*

3.3. **Les théorèmes importants.** De la transitivité des générateurs b_λ, on montre le théorème suivant :

Théorème 3.13. (Théorème de Localisation) *Soit $b \subseteq pcf(a)$ où $\lambda > |b|$ pour tout $\lambda \in b$. Si $\mu \in pcf(b)$ alors $\mu \in pcf(a)$, et pour un certain $c \subseteq b$ de cardinalité au plus $|a|$, on a $\mu \in pcf(c)$.*

Sous certaines conditions sur a, on arrive à calculer le plus grand élément de $\mathrm{pcf}(a)$, ce qui nous aidera bien pour l'application à l'arithmétique des cardinaux :

Théorème 3.14. *Soit a un intervalle de cardinaux réguliers, $a = [\min(a), \sup(a))$, tel que* $\min(a)^{|a|} < \sup(a)$. *Alors* $\max(pcf(a)) = |\prod a|$.

Le lemme suivant permet de construire des générateurs pour $\mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(a))$ à partir de ceux pour $\mathrm{pcf}(a)$:

Lemme 3.15. *Supposons que* $2^{|a|} < \min(a)$ *et soit* $\lambda \in pcf(a) = pcf(pcf(a))$. *Si* b_λ *engendre* $J_{<\lambda^+}(a)$ *à partir* $J_{<\lambda}(a)$, *alors* $d_\lambda = pcf(b_\lambda)$ *engendre* $J_{<\lambda^+}(pcf(a))$ *à partir de* $J_{<\lambda}(pcf(a))$.

4. L'arithmétique des cardinaux

4.1. **pcf et l'arithmétique des cardinaux.** Rappelons quelques propriétés de l'exponentiation de cardinaux :

Proposition 4.1.

1. **(Formule d'Hausdorff)** $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$,
2. **(Calcul récursif de $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$)**
   (a) *si* $\alpha \leq \beta$, *alors* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$,
   (b) *s'il existe* $\gamma < \alpha$ *tel que* $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$, *alors* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$,
   (c) *si* $\alpha > \beta$ *et si* $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ *pour tout* $\gamma < \alpha$, *alors :*
      (i) *si* $\aleph_\alpha$ *est régulier ou* $cf(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta$, *alors* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$,
      (ii) *si* $cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha$, *alors* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{cf(\aleph_\alpha)}$.

Remarquons que si $\aleph_\delta$ est un cardinal limite fort (c'est-à-dire si $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\delta$ pour tout $\alpha < \delta$), alors

$$2^{\aleph_\delta} = \aleph_\delta^{\mathrm{cf}(\delta)}$$

Ceci nous permettra donc sous l'hypothèse de cardinal limite fort, de considérer $2^{\aleph_\omega}$ comme $\aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Nous allons maintenant voir la relation entre la théorie des cofinalités possibles et l'arithmétique des cardinaux.

On travaille désormais sous l'hypothèse selon laquelle $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$.

Soit $a = \{\aleph_n : n > 1\}$. On vérifie bien au pire la condition $|a|^+ < \min(a)$, que l'on a fait à plusieurs reprises en plus de $|a| < \min(a)$. Remarquons que puisque l'on a $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, on a également $\forall n, {\aleph_n}^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ [on montre par récurrence sur n que ${\aleph_n}^{\aleph_0} = \max\{\aleph_n, 2^{\aleph_0}\}$: pour $n = 0$, ${\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ et par Hausdorff, ${\aleph_{n+1}}^{\aleph_0} = {\aleph_n}^{\aleph_0} \cdot \aleph_{n+1} = \max\{\aleph_n, 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_{n+1}\} = \max\{\aleph_{n+1}, 2^{\aleph_0}\}$]. On peut donc appliquer le théorème 3.14 : $\max(\mathrm{pcf}(a)) = \prod_n \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Or on sait également d'après le corollaire 3.3, que $\mathrm{pcf}(a)$ est un intervalle de cardinaux réguliers. On a donc que $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \max(\mathrm{pcf}(a)) < \aleph_{|\mathrm{pcf}(a)|^+}$. Il nous suffit donc de trouver la meilleure borne possible pour $|\mathrm{pcf}(a)|$ pour obtenir des résultats intéressants en arithmétique des cardinaux.

Remarque . On rappelle que l'on sait déjà que $|\mathrm{pcf}(a)| < 2^{|a|}$. Cette borne couplée avec l'hypothèse $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ nous permet de noter qu'il n'y a pas de cardinaux limites dans $\mathrm{pcf}(a)$ (des *faibles inaccessibles* puisque réguliers) : puisque $|\mathrm{pcf}(a)| \leq 2^{|a|} = \lambda$, on a pour un certain δ limite, $\mathrm{pcf}(a) \subseteq \{\aleph_{\delta+\alpha} : \alpha < 2^{|a|^+}\}$ et donc pour un ordinal limite $\alpha < \lambda^+$, on a $\mathrm{cf}(\aleph_{\delta+\alpha}) = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \lambda < \min(a) < \aleph_{\delta+\alpha}$ et donc $\aleph_{\delta+\alpha}$ est singulier, contradiction.

Remarquons également que si $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$, alors on a trivialement que $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$. A partir de cette borne grossière pour $|\mathrm{pcf}(a)|$, on a donc, sans conditions, comme première borne :

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$$

En prenant maintenant $a = [(2^{|\delta|})^+, \aleph_\delta)$ où δ est un ordinal limite, on arrive exactement de la même manière au résultat :

$$\aleph_\delta^{|\delta|} < \aleph_{(2^{|\delta|})^+} \qquad \text{où } \delta \text{ est un ordinal limite}$$

4.2. **La borne de Shelah.** On cherche à montrer le théorème suivant qui nous permettra comme nous avons vu ci-dessus de trouver une autre borne à $\aleph_\omega^{\aleph_0}$:

Théorème 4.1. *Si a est un intervalle de cardinaux réguliers, tel que $|a|^+ < \min(a)$, alors $|pcf(a)| \leq |a|^{+3}$.*

D'après ce que l'on a vu ci-dessus, ce résultat implique

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{|\mathrm{pcf}(a)|^+} < \aleph_{|a|^{+4}} = \aleph_{\omega_4}$$

qui constitue ce que l'on appelle la *borne de Shelah.*

Le premier lemme dont on a besoin, est fortement lié aux théorèmes de Silver [34] et de Galvin et Hajnal [7].

Lemme 4.2. *Soit κ un cardinal régulier non-dénombrable, $\aleph_\eta$ un cardinal singulier de cofinalité κ, I un idéal de sous-ensembles non-stationnaires de η et on suppose que $2^\kappa < \aleph_\eta$. Alors $tcf(\prod_{\xi<\eta}\aleph_{\xi+1}/I) = \aleph_{\eta+1}$.*

Preuve. Fixons une suite croissante continue $\langle \eta(\xi) : \xi < \kappa\rangle$ qui a pour limite η telle que $2^\kappa < \aleph_{\eta(0)}$; il suffit alors de considérer $\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta(\xi)+1}/I$ où I est un idéal non-stationnaire sur κ. Il n'est pas difficile de voir que ce produit réduit est $\aleph_{\eta+1}$-dirigé.

Par l'absurde : supposons qu'il existe un sous-ensemble S_0 stationnaire de κ tel que tout ensemble contenant $\aleph_{\eta+1}$ fonctions de $\prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\eta(\xi)+1}$ est borné sur S_0 (et tel que chaque $\xi \in S_0$ est un ordinal limite).

Pour chaque ordinal limite $\beta < \aleph_{\eta+1}$, on choisit un club C_β de β de type ordinal $\mathrm{cf}(\beta) < \aleph_\eta$ et on définit $E_\alpha = \{C_\beta \cap \alpha : \beta < \aleph_{\eta+1}\}$ pour chaque $\alpha < \aleph_{\eta+1}$. Remarquons que chaque E_α a une cardinalité inférieure à $\aleph_{\eta+1}$ et est constitué d'ensembles de cardinalité inférieure strictement à $\aleph_\eta$.

On construit, par induction transfinie sur α, une suite strictement croissante $\langle f_\alpha : \alpha < \aleph_{\eta+1}\rangle$ sur S_0. On suppose que $\{f_\nu : \nu < \alpha\}$ ait déjà été construit. Soit alors pour chaque $E \in E_\alpha$, g_E^α une fonction définie par $g_E^\alpha(\xi) = \sup\{f_\nu(\xi) : \nu \in E\}$ où ξ est un élément assez grand de S_0 pour que $\aleph_{\eta(\xi)+1} > |E|$. Soit alors $f_\alpha \in \prod_{\xi\in S_0}\aleph_{\eta(\xi)+1}$ un majorant de l'ensemble $\{g_E^\alpha : E \in E_\alpha\} \cup \{f_\nu : \nu < \alpha\}$ de cardinalité $\leq \aleph_{\eta+1}$.

Maintenant, soit $h \in \prod_{\xi\in S_0}\aleph_{\eta(\xi)+1}$ le plus petit majorant de $\{f_\alpha : \alpha < \aleph_{\eta+1}\}$. Puisque $h(\xi) < \aleph_{\eta(\xi)+1}$ pour tout $\xi \in S_0$ et que $\aleph_{\eta(\xi)}$ est singulier pour tout ordinal limite ξ, on a $\mathrm{cf}(h(\xi)) < \aleph_{\eta(\xi)}$ pour tout $\xi \in S_0$. Il existe donc un sous-ensemble stationnaire $S \subseteq S_0$ et $\gamma < \eta$ tels que $\mathrm{cf}(h(\xi)) \leq \aleph_\gamma$ pour tout $\xi \in S$ (et tels que $\gamma < \eta(\xi)$ pour tout $\xi \in S$). Pour chaque $\xi \in S$, on choisit un ensemble cofinal D_ξ en $h(\xi)$ de cardinalité $\leq \aleph_\gamma$.

On construit alors, par induction transfinie sur $\nu < \aleph_{\gamma+1}$, une suite strictement croissante (sur S modulo I) de fonctions $h_\nu \in \prod_{\xi\in S}D_\xi$ une suite croissante continue $\langle\alpha(\nu)\rangle_\nu$ telles que $f_{\alpha(\nu)} <_I h_\nu <_I f_{\alpha(\nu+1)}$ sur S, pour tout $\nu < \aleph_{\gamma+1}$. Soit $\beta = \lim_{v\to\aleph_{\gamma+1}}\alpha(\nu)$.

On considère à nouveau le club $C = C_\beta \subseteq \beta$ (de cardinalité $\aleph_{\gamma+1}$). Pour chaque $\nu < \aleph_{\gamma+1}$, soit ν', le plus petit $\nu' > \nu$ tel que $\alpha(\nu') \in C$. Soit $\xi_\nu \in S$ tel que

$$g^{\alpha(\nu)}_{C\cap\alpha(\nu)} \leq f_{\alpha(\nu)}(\xi_\nu) < h_\nu(\xi_\nu) < f_{\alpha(\nu')}(\xi_\nu)$$

Puisque $|S| < \aleph_{\gamma+1}$, il existe $Z \subseteq \aleph_{\gamma+1}$ de cardinalité $\aleph_{\gamma+1}$ et $\xi \in S$ tels que $\xi_\nu = \xi$ pour tout $\nu \in Z$. On peut imposer, en plus, que si $\nu_1 < \nu_2 \in Z$, alors ${\nu'}_1 < \nu_2$. Puisque $\nu_1 < \nu_2 \in Z$, alors $\alpha({\nu'}_1) \in C \cap \alpha(\nu_2)$, et donc

$$f_{\alpha({\nu'}_1)}(\xi) \leq g^{\alpha(\nu_2)}_{C\cap\alpha(\nu_2)}(\xi)$$

Ainsi

$$h_{\nu_1}(\xi) < f_{\alpha(\nu'_1)}(\xi) \leq g^{\alpha(\nu_2)}_{C\cap\alpha(\nu_2)}(\xi) \leq f_{\alpha(\nu_2)}(\xi) < h_{\nu_2}(\xi)$$

$\{h_\nu(\xi) : \nu \in Z\}$ est un sous-ensemble de D_ξ de cardinalité $\aleph_{\gamma+1}$, contradiction. $\square$

On montre alors le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Soit κ un cardinal régulier non-dénombrable et $\aleph_\eta$ un cardinal singulier de cofinalité κ tel que $2^\kappa < \aleph_\eta$. Alors il existe un club $C \subset \eta$ tel que* $\max(pcf\{\aleph_{\alpha+1} : \alpha \in C\}) = \aleph_{\eta+1}$.

Preuve. Soient C_0 un club de η de type ordinal κ, $a = \{\aleph_{\alpha+1} : \alpha \in C_0\}$, $\lambda = \aleph_{\eta+1}$, et $X = \{\alpha \in C_0 : \aleph_{\alpha+1} \in b_\lambda(a)\}$. Si D est un ultrafiltre sur C_0 qui étend le filtre des clubs, alors par le lemme précédent, $\mathrm{cf}(\prod_{\alpha\in C_0} \aleph_{\alpha+1}/D) = \lambda$ et donc $X \in D$. Donc X contient un club C. Puisque $\max b_\lambda = \lambda$, on a $\max \mathrm{pcf}(\{\aleph_{\alpha+1} : \alpha \in C\}) \leq \lambda$ et est donc égal à λ. $\square$

Soit $\mu < \kappa$ deux cardinaux réguliers et $T \subseteq \{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$ un sous-ensemble stationnaire de κ. $\diamondsuit_{\mathrm{club}}(\kappa,\mu)(T)$ signifie alors qu'il existe une suite $\langle S_\alpha : \alpha \in T\rangle$ telle que

1. $\forall\alpha \in T$, $S_\alpha \subseteq \alpha$ est un club de α,
2. pour chaque club $C \subseteq \kappa$, $\{\alpha \in T : S_\alpha \subseteq C\}$ est stationnaire dans κ.

Remarque . On remarque que dans la suite, pour la démonstration de la borne de Shelah, on a seulement besoin que pour chaque club $C \subseteq \kappa$, il existe un $\alpha \in T$ tel que $S_\alpha \subseteq C$. On montre facilement que cette assertion, qui *a priori* semble plus faible, est équivalente au deuxième point dans la définition de $\diamondsuit_{\mathrm{club}}(\kappa,\mu)(T)$. On n'est donc pas en train de faire du zèle pour rien.

$\diamondsuit_{\mathrm{club}}(\kappa,\mu)$ n'est pas un théorème de ZFC mais le lemme suivant tient dans ZFC.

Lemme 4.4. *Soit $\mu^+ < \kappa$ deux cardinaux réguliers et $T \subseteq \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) = \mu\}$ un sous-ensemble stationnaire de κ. Alors $\diamondsuit_{club}(\kappa,\mu)(T)$.*

Preuve. En fait on montre que si $\langle S_\alpha : \alpha \in T\rangle$ est une suite transfinie telle que S_α est un club de α de type ordinal μ pour chaque $\alpha \in T$, alors il existe un club $C \subseteq \lambda$ tel que la suite $\langle {S_\alpha}' : \alpha \in T\rangle$ est une suite vérifiant $\diamondsuit_{\mathrm{club}}(\kappa,\mu)(T)$, où ${S_\alpha}' = S_\alpha \cap C$ si c'est un club de α, et ${S_\alpha}' = \alpha$ sinon. Pour la preuve, voir [2]. $\square$

Remarque . Pour poursuivre la preuve de la borne de Shelah, on a en fait seulement besoin d'avoir $\diamondsuit_{\mathrm{club}}(\omega_3,\omega_1)$ car on prend $a = \{\aleph_n : n > 1\}$ et donc $|a| = \omega$.

On montre donc le lemme suivant, sachant que la preuve du lemme précédent est similaire à celle de notre lemme réduit.

Lemme 4.5. *Soit $T^\star = \{\alpha < \omega_3 : cf(\alpha) = \omega_1\}$ un sous-ensemble stationnaire de ω_3. Il existe une suite $\langle S_\alpha : \alpha \in T^\star\rangle$ qui vérifie $\diamondsuit_{club}(\omega_3,\omega_1)(T^\star)$.*

Preuve. Il suffit de trouver une suite $\langle S_\alpha : \alpha \in T^\star\rangle$ telle que chaque S_α est un sous-ensemble de α et pour chaque club $C \subset \omega_3$, $\{\alpha \in T^\star : S_\alpha \subset C\}$ est stationnaire dans ω_3.

Supposons qu'il n'y a pas de telle suite $\langle S_\alpha\rangle_\alpha$. Soit alors $\{S^0_\alpha : \alpha \in T^\star\}$ une famille de clubs de α telle que $|S^0_\alpha| = \aleph_1$. Par induction transfinie sur $\nu < \omega_2$, on construit des clubs $E_\nu \subseteq \omega_3$ et des familles $\{S^\nu_\alpha : \alpha \in T^\star\}$ comme suit : $S^\nu_\alpha = S^\nu_\alpha \cap \bigcap_{\xi\in\nu} E_\xi$ et E_ν est tel que $\{\alpha \in T^\star : S^\nu_\alpha$ est un club de α et $S^\nu_\alpha \subset E_\nu\}$ n'est pas stationnaire.

Soit le club $E = \bigcap_{\nu<\omega_2} E_\nu$ et $S_\alpha = S^0_\alpha \cap E$ pour chaque α. L'ensemble $S = \{\alpha \in T^\star : E \cap \alpha$ est un club de $\alpha\}$ est stationnaire, et pour chaque $\alpha \in S$, il existe $\nu(\alpha) < \omega_2$ tel que $S_\alpha = S^{\nu(\alpha)}_\alpha$ (car $S^0_\alpha \supseteq S^1_\alpha \supseteq \ldots$ de longueur ω_2).

Il existe $\nu < \omega_2$ et un ensemble stationnaire $R \subseteq S$ tels que $S_\alpha = S_\alpha^\nu$ pour tout $\alpha \in R$. Si $\alpha \in R$, alors $S_\alpha^\nu = S_\alpha^{\nu+1} = S_\alpha^\nu \cap E_\nu$ et donc $S_\alpha^\nu \subset E_\nu$, ce qui est en contradiction avec le choix de E_ν. $\square$

Preuve du théorème 4.1. Soit δ tel que $\min(a) = \aleph_{\delta+1}$, ρ tel que $\max(\mathrm{pcf}(a)) = \aleph_{\delta+\rho+1}$ et $\eta = |a|$. On définit alors l'adhérence sur $P(\rho+1)$ de la façon suivante :

$$\text{pour } X \subseteq \rho+1, \quad \overline{X} = \{\gamma \leq \rho : \aleph_{\delta+\gamma+1} \in \mathrm{pcf}(\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in X\})\}$$

On montre que cette adhérence vérifie les trois points suivants (et ensuite on verra que ces 3 points sont suffisants pour montrer le théorème 4.1) :

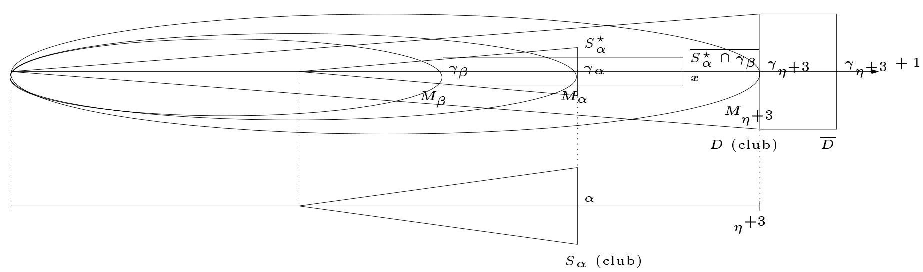
1. si $X \subset Y$, alors $\overline{X} \subset \overline{Y}$
2. si $\gamma < \rho$ et $\mathrm{cf}(\gamma) > \omega$, alors il existe un club $C \subseteq \gamma$ tel que $\overline{C} \subseteq \gamma + 1$
3. si $X \subseteq \rho + 1$, il existe $X' \subseteq X$, $|X'| \leq \eta$ tel que $\exists \gamma \in \overline{X'}, \gamma \geq \sup X$

Preuve. 1. voir le iv de la proposition 3.1.

2. si $\kappa = \mathrm{cf}(\delta+\rho)$ alors $\kappa < \aleph_\omega$ et donc $\aleph_\omega < \aleph_{\delta+\rho}$ et on applique le théorème 4.3.
3. par le théorème 3.13 en sachant d'après le iii de la proposition 3.1 que $\mathrm{pcf}(a)$ a un plus grand élément.

$\square$

On suppose que $\rho = \eta^{+4}$ et l'on montre qu'à partir des trois points ci-dessus, on arrive à une contradiction.



D'après le lemme 4.4, il existe une suite $\langle S_\alpha : \alpha < \eta^{+3}, \mathrm{cf}(\alpha) = \eta^{+1}\rangle$ vérifiant $\diamondsuit_{\mathrm{club}}(\eta^{+3}, \eta^{+1})$ (c'est le mieux que l'on puisse faire avec notre lemme car on a besoin d'avoir des α de cofinalité η^+). On choisit une chaîne élémentaire continue $\langle M_\beta : \beta \leq \eta^{+3}\rangle$ de sous-modèles de $H(\theta)$ (où θ est un cardinal régulier assez grand), telle que pour chaque $\beta < \eta^{+3}$:

1. $\eta^{+3} \subseteq M_0$,
2. $\{\langle X, \overline{X}\rangle : X \subseteq \eta^{+4} + 1\} \in M_0$,
3. $\langle S_\alpha : \alpha < \eta^{+3}, \mathrm{cf}(\alpha) = \eta^{+1}\rangle \in M_0$,
4. $|M_\beta| = \eta^{+3}$,
5. $\langle M_\gamma : \gamma \leq \beta\rangle \in M_{\gamma+1}$.

On pose $\gamma_\beta = M_\beta \cap \eta^{+4}$ pour chaque $\beta \leq \eta^{+3}$. Puisque $\eta^{+3} \subseteq M_\beta$ pour tout β, on a $\gamma_\beta \in \eta^{+4}$ et $\{\gamma_\beta : \beta \leq \eta^{+3}\}$ est un sous-ensemble clos de η^{+4}.

D'après le point 2 (propriétés que vérifie notre opération d'adhérence), puisque $\gamma_{\eta^{+3}} < \eta^{+4}$ et $\mathrm{cf}(\gamma_{\eta^{+3}}) > \omega$ (car $\gamma_\beta \geq \eta^{+3}$ et $\eta \geq \omega$), il existe un club D de $\gamma_{\eta^{+3}}$ tel que $\overline{D} \subseteq \gamma_{\eta^{+3}} + 1$. D'après la définition d'une suite vérifiant $\diamondsuit_{\mathrm{pcf}}(\eta^{+3}, \eta^{+1})$, puisque $\{\beta < \eta^{+3} : \gamma_\beta \in D\}$ est un club de η^{+3} (car D est un club de $\gamma_{\eta^{+3}}$), il existe un $\alpha < \eta^{+3}$ de cofinalité η^{+1} tel que $S_\alpha \subseteq \{\beta < \eta^{+3} : \gamma_\beta \in D\}$. On pose $S^\star_\alpha = \{\gamma_\beta : \beta \in S_\alpha\}$; puisque S_α est un club de α, $S^\star_\alpha$ est un club de γ_α. Par le point 3, il existe $Y \subseteq S^\star_\alpha$, $|Y| \leq \eta$ tel qu'il existe $x \in \overline{Y}$ avec $x \geq \sup S^\star_\alpha$. Puisque $\mathrm{cf}(\gamma_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) = \eta^+ > \eta$ (c'est donc ici que l'on utilise le fait que α est de cofinalité

η^+), il existe $\beta < \alpha$ tel que $Y \subseteq S^\star_\alpha \cap \gamma_\beta$. Ainsi il existe $\beta < \alpha$ tel que $x \in \overline{S^\star_\alpha \cap \gamma_\beta} \geq \gamma_\alpha = \sup S^\star_\alpha$ (on a utilise ici le point 1 : $Y \subseteq S^\star_\alpha \cap \gamma_\beta \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{S^\star_\alpha \cap \gamma_\beta}$).

On définit $E^\beta_\alpha = \{\gamma_\delta : \delta < \beta, \delta \in S_\alpha\}$. On a d'après le point 1, $\overline{E^\beta_\alpha} \subseteq \overline{S^\star_\alpha} \subseteq \overline{D}$. Or $\overline{D} \subseteq \gamma_{\eta^{+3}} + 1$, donc $\overline{E^\beta_\alpha}$ est borné dans η^{+4}.

Puisque l'on a $\langle \gamma_\delta : \delta < \beta \rangle \in M_{\beta+1}$ pour $\beta < \eta^{+3}$, si $\overline{E^\beta_\alpha}$ est un sous-ensemble borné de η^{+4}, alors cette borne appartient à $M_{\beta+1}$, et donc $\overline{E^\beta_\alpha} \subseteq \gamma_{\beta+1}$.

Ainsi $x \in \overline{S^\star_\alpha \cap \gamma_\beta} = \overline{E^\beta_\alpha} \subseteq \gamma_{\beta+1} < \gamma_\alpha$. Ce qui contredit $x \geq \gamma_\alpha$. ρ doit donc être différent de η^{+4}.

On suppose $|\rho| \geq \eta^{+4}$. On définit alors une autre opération d'adhérence sur $P(\eta^{+4} + 1)$ de la façon suivante :

$$\widetilde{X} = \begin{cases} \overline{X} & \text{si } \overline{X} \subseteq \eta^{+4}, \\ (\overline{X} \cap \eta^{+4}) \cup \{\eta^{+4}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que cette opération d'adhérence vérifie les trois points mentionnés plus haut lorsque l'on remplace ρ par η^{+4}. En ayant montré que pour n'importe quelle opération d'adhérence vérifiant nos trois points, on a $\rho \neq \eta^{+4}$, on a donc en fait montré que $\rho \leq \eta^{+3}$, ce qui prouve le théorème 4.1. $\square$

5. Autres applications

5.1. Les algèbres de Jonsson.

Définition 8. Une algèbre $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i<\omega})$, qui n'a qu'un ensemble dénombrable d'opérations f_i (avec un nombre fini d'arguments), est une algèbre de *Jonsson* si $\mathcal{A}$ n'a pas de sous-algèbre propre $\mathcal{B} = (A, (f_i \mid B)_{i<\omega})$ tel que $|B| = |A|$.

Le but de cette partie est d'étudier pour quels cardinaux λ, il existe une algèbre de Jonsson sur λ ($A = \lambda$) et en particulier de montrer comment on utilise pcf pour répondre à cette question.

On présente d'abord rapidement les résultats qui étaient déjà connus et ensuite ceux que pcf a permis d'obtenir.

Le lemme suivant permet de caractériser en termes de théorie des modèles s'il existe une algèbre de Jonsson sur un certain cardinal λ :

Lemme 5.1. *Pour un cardinal λ donné, il existe une algèbre de Jonsson sur λ si et seulement si pour certains (ou pour tous, c'est équivalent) cardinaux réguliers $\theta \geq \lambda^+$ et pour tout $M \prec H(\theta)$ on a: si $\lambda \in M$ et $|M \cap \lambda| = \lambda$, alors $\lambda \subseteq M$.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Puisque toute algèbre de Jonsson sur λ est dans $H(\theta)$ et que $\lambda \in M$, par élémentarité il existe une algèbre de Jonsson $\mathcal{A}$ sur λ telle que $\mathcal{A} \in M$. Soit alors $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ sur $B = \lambda \cap M$. On a supposé que $|M \cap \lambda| = \lambda$ donc $|B| = \lambda$. Or $\mathcal{A}$ est algèbre de Jonsson sur λ donc $\mathcal{B}$ n'est pas une sous-algèbre propre de $\mathcal{A}$. D'où $B = \lambda$ et $\lambda \subseteq M$.

($\Leftarrow$) Soit $M \prec H(\theta)$ tel que $|M| = \lambda$ et $\lambda \subseteq M$. On rajoute à M la bijection $f : \lambda \to M$. Alors M muni des fonctions de Skolem pour $(M, \in, f)$ forme une algèbre de Jonsson sur λ car $(M, \in, f)$ n'a pas de sous-modèle élémentaire propre de cardinalité λ : si $(N, \in, f \mid (\lambda \cap N)) \prec (M, \in, f)$ et $|N| = \lambda$, alors par élémentarité, $\lambda \in N$ et $|N \cap \lambda| = |f^{-1}(N)| = \lambda$. Ainsi $\lambda \subseteq N$ et donc $f''\lambda = M \subseteq N$, ce qui contredit que N est un sous-modèle propre de M. $\square$

Avant d'étudier cette question (quel cardinal admet une algèbre de Jonsson ?), à la lumière de pcf, on savait que s'il existe une algèbre de Jonsson sur λ, alors il existe une algèbre de Jonsson sur λ^+.

Théorème 5.2. *S'il existe une algèbre de Jonsson sur λ, alors il en existe une sur λ^+.*

Preuve. Soit $M \prec H(\theta)$ avec $\theta \geq \theta^{+2}$, tel que $\lambda^+ \in M$ et $|M \cap \lambda^+| = \lambda^+$. Alors pour certains $\alpha \in M \cap \lambda^+$, $|M \cap \alpha| = \lambda$. On a également par élémentarité que $|M \cap \lambda| = \lambda$ puisque $|\alpha| = \lambda$ et $\lambda \in M$ (car $\lambda^+ \in M$) et ainsi M contient une bijection entre λ et α. On a donc $\lambda \subseteq M$ (puisque $\lambda \in M$) et donc $\alpha \subseteq M$ pour tout $\alpha \in M \cap \lambda^+$. D'où $\lambda^+ \subseteq M$ puisque $|M \cap \lambda^+| = \lambda^+$. □

Ainsi tous les cardinaux $\aleph_n$ avec $n < \omega$ admettent une algèbre de Jonsson puisque il y a évidemment une algèbre de Jonsson sur $\aleph_0$. On ne sait toujours pas si $\aleph_\omega$ admet une algèbre de Jonsson, cela reste une question ouverte.

Comme nous allons voir, pcf permet de montrer qu'il existe une algèbre de Jonsson sur $\aleph_{\omega+1}$ (on le savait déjà (voir [19]) mais seulement avec l'hypothèse que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_{\omega+1}$).

Théorème 5.3. *Il existe une algèbre de Jonsson sur $\aleph_{\omega+1}$.*

Preuve. On pose $\lambda = \aleph_\omega$ et $a = \{\aleph_n : n < \omega\}$. Soit $M \prec H(\theta)$, où $\theta \geq \lambda^{+2}$, tel que $\lambda^+ \in M$ et $|M \cap \lambda^+| = \lambda^+$. Par élémentarité, on a $a \in M$ et $a \subseteq M$. a est un intervalle de cardinaux réguliers, donc $\mathrm{pcf}(a)$ est également un intervalle, or $\mathrm{pcf}(a)$ a un plus grand élément alors que a n'en a pas, donc puisque $a \subseteq \mathrm{pcf}(a)$, le plus petit cardinal régulier majorant a appartient à $\mathrm{pcf}(a)$. Donc $\lambda^+ \in \mathrm{pcf}(a)$. Or tout les ultrafiltres D sur a appartiennent à $H(\theta)$ donc par élémentarité, il existe un ultrafiltre D sur a tel que $D \in M$ et qu'il existe une suite $\langle f_\beta : \beta < \lambda^+ \rangle \in M$ de $\prod a$ qui soit croissante et cofinale (modulo D) en $\prod a/D$.

Si pour tout $\alpha \in a$ assez grand, on a $\sup(M \cap \alpha) < \alpha$ alors on pose $g(\alpha) = \sup(M \cap \alpha)$. On a $g/D \in \prod a/D$ et pour un certain $\beta \in M \cap \lambda^+$, $g/D < f_\beta/D$. Et donc pour un certain $\alpha \in a \subseteq M$, $g(\alpha) < f_\beta(\alpha)$, ce qui est contraire à la définition de g puisque $f_\beta(\alpha) \in M \cap \alpha$.

On a donc $|M \cap \alpha| = \alpha$ *pour un ensemble cofinal de αs.* Or puisque $\alpha \in M$ et $|M \cap \alpha| = \alpha$ pour tout $\alpha \in a$ et qu'il existe une algèbre de Jonsson sur chaque $\alpha \in a$, on a $\alpha \subseteq M$ pour tout $\alpha \in a$. Ainsi $\lambda \subseteq M$ et donc $\lambda^+ \subseteq M$ (car puisque $\lambda^+, \lambda \in M$, M contient les bijections entre λ et chaque $\mu \in M \cap [\lambda, \lambda^+)$). □

On sait également qu'il existe une algèbre de Jonsson sur certains cardinaux qui ont certaines propriétés (Erdős, Hajnal et Rado ont montré que si $2^\kappa = \kappa^+$, alors κ^+ admet une algèbre de Jonsson). Ainsi un théorème de Tryba et Woodin nous dit que si κ est un cardinal régulier, alors κ^+ admet une algèbre de Jonsson. pcf nous permet de construire également des algèbres de Jonsson sur certains successeurs de cardinaux singuliers.

Théorème 5.4. *Si λ est un cardinal régulier et qu'il existe un sous-ensemble stationnaire non-réfléchissant de λ, alors il existe une algèbre de Jonsson sur λ.*

Preuve. Soit $M \prec H(\theta)$, où $\theta \geq \lambda^+$, tel que $\lambda \in M$ et $|M \cap \lambda| = \lambda$. Soit S un sous-ensemble non-réfléchissant stationnaire de λ et $C = \{\alpha < \lambda : \sup(M \cap \alpha) = \alpha\}$ un club de λ.

On montre que $C \cap S \subseteq M$. Remarquons tout d'abord que $C \cap S \neq \emptyset$ car S est stationnaire. On suppose qu'il existe $\alpha \in (C \cap S) - M$. Soit alors γ le plus petit élément de M supérieur à α. Puisque S est non-réfléchissant, il existe un club $C_\gamma \in M$ de γ disjoint de S. Pour tout $\beta \in M \cap \alpha$, $[\beta, \gamma) \cap C_\gamma \neq \emptyset$ donc $C_\gamma \cap \alpha$ n'a pas de majorant dans α. Ainsi $\alpha \in C_\gamma$ puisque C_γ est un club, ce qui contredit $\alpha \in S$.

On décompose alors S en sous-ensembles stationnaires disjoints : $S = \bigcup_{\alpha<\lambda} S_\alpha$ et on suppose que $\langle S_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in M$. On a donc d'après ce que l'on montré ci-dessus, $S_\alpha \cap C \subseteq M$. D'où $S_\alpha \cap M \neq \emptyset$ puisque $S_\alpha \cap C \neq \emptyset$ ce qui implique que $\alpha \in M$ et donc $\lambda \subseteq M$. □

Corollaire 5.5. *Si κ est un cardinal régulier, alors il existe une algèbre de Jonsson sur κ^+.*

Preuve. Soit $\lambda = \kappa^+$. Puisque κ est régulier, λ l'est également. $\{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}\,\alpha = \kappa\}$ est un ensemble stationnaire non-réfléchissant de λ donc d'après le théorème précédent, il existe une algèbre de Jonsson sur $\lambda = \kappa^+$. □

pcf permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 5.6. *Si ν est un cardinal singulier, $\lambda < \nu$, et si pour chaque cardinal régulier μ, tel que $\lambda < \mu < \nu$, μ admet une algèbre de Jonsson, alors ν^+ admet une algèbre de Jonsson.*

Preuve. Soit $\theta = \mu^{+2}$ et $M \prec (H(\theta), \in, (f_i)_{i<\omega})$ où les f_i sont des fonctions de Skolem pour $(H(\theta), \in)$ et qui sont closes par composition. On suppose que $\mu^+ \in M$ et $|M \cap \mu^+| = \mu^+$.

Comme dans la démonstration du théorème 5.3, on montre que $\mu^+ \in \mathrm{pcf}(a)$. Et par le théorème 3.2, il existe $a \subseteq \mu$ de cardinaux réguliers et D un ultrafiltre sur a, tel que $\max(|\alpha|, \lambda) < \min a$ et $\lim_D a = \mu$, tels que $\mu^+ = \mathrm{cf}(\prod a/D)$. On peut également supposer que D et a appartiennent à M et choisir une suite de fonctions $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha<\mu^+}$ appartenant à M, qui soit croissante et cofinale en $\prod a/D$.

Si $A = \{\alpha \in M \cap a : \sup(M \cap \alpha) = \alpha\}$ est cofinal en μ alors puisqu'il existe une algèbre de Jonsson sur chaque $\alpha \in a$, on a $\mu \subseteq M$ et donc $\mu^+ \subseteq M$ et c'est fini. On suppose donc que $\sup^+(A) = \mu' < \mu$. Soit alors M' la cloture de $M \cup \alpha$ par les f_i. Pour chaque $\alpha \in M \cap [\mu^+, \mu)$, $\sup(M \cap \alpha) < \alpha$ et on montre alors que $\sup(M' \cap \alpha) < \alpha$. On remarque ensuite que pour un certain $\nu \in [\mu^+, \mu)$, $\sup(M' \cap \beta) < \beta$ pour tout $\beta \in a \cap [\nu, \mu)$.

On pose alors pour tout β suffisamment grand $(a \cap [\nu, \mu))$, $g(\beta) = \sup(M' \cap \beta) < \beta$. Ainsi $g/D \in \prod a/D$ et pour un certain $\alpha \in M' \cap \mu^+$, $g/D < f_\alpha/D$. En particulier, pour un certain $\beta \in a \subseteq M'$, on a $g(\beta) < f_\alpha(\beta)$ ce qui contredit le fait que $f_\alpha(\beta)$ appartienne à $M' \cap \beta$. □

5.2. **La conjecture de Tarski.** Tarski a démontré au tout début de la théorie des ensembles une famille de règles régissant l'arithmétique des cardinaux. En particulier dans [35], il a montré que l'on avait en particulier la propriété suivante sur le produit transfini de cardinaux :

$$\prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta^{|\beta|}$$

En outre, il avait conjecturé que cette propriété pouvait s'étendre de la façon suivante :

$$\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} = \aleph_\alpha^{|\beta|} \text{ où } \sigma_\xi \text{ est une suite croissante vérifiant } \lim_{\xi<\beta} \sigma_\xi = \alpha$$

Jusque là, cette conjecture restait inéclaircie. Cependant, en utilisant le modèle de Magidor décrit dans [14], on trouva une suite croissante de cardinaux de longueur $\beta = \omega_1 + \omega$ réfutant la conjecture.

Dans [11], Jech et Shelah montrent que la théorie des cofinalités possibles nous permet de démontrer que si la conjecture est réfutable, alors il y a un contre-exemple de longueur $\beta = \omega_1 + \omega$.

6. Conclusion

On voit à travers les différents résultats obtenus grâce à la théorie des *cofinalités possibles* (arithmétique des cardinaux, existence d'algèbres de Jonsson, ...) que cette théorie a permis d'ouvrir de nouveaux horizons dans des domaines dans lesquels certains pensaient que l'on ne pourrait pas avancer considérablement avant longtemps. Ainsi il etait commun de penser que l'arithmétique des cardinaux n'est pas régie par un ensemble de règles précises mais que l'on pouvait lui faire adopter tout comportement. La théorie des cofinalités possibles a aussi permis des percées dans des domaines qui ne sont pas directement liés à l'arithmétique des cardinaux, comme *les algèbres de Jonsson*.

Ce qui est le plus frappant, c'est de constater que cette théorie arrive *naturellement* lorsque l'on étudie la théorie des ensembles. On pourrait presque qualifier cette théorie d'élémentaire, tant elle semble apparaître souvent dans l'étude de problèmes autour de la théorie des ensembles. Il est intéressant de noter qu'en plus d'être *sous-jacente*, elle est relativement simple et n'utilise pas des notions avancés de théorie des ensembles comme le *forcing*.

Certains parlent d'ailleurs de proposer comme remplacement[3] de l'axiome potentiel de l'hypothèse généralisée du continu un axiome autour de pcf.

Pour pouvoir appliquer la théorie des cofinalités possibles à une théorie n'ayant pas de liens directes avec la théorie des ensembles et donc traitant que de questions avec des ensembles dénombrables (comme la théorie de la récursion), il faut pouvoir introduire une nouvelle espèce de cardinaux réguliers qui nous permette de rester parmi les ordinaux dénombrables. Tout est alors perçu en fonction de cette nouvelle définition de la cardinalité et la cofinalité. Une théorie qui nous permet de franchir cette étape est la théorie des *ensembles admissibles* à partir de laquelle Rathjen [17] a établi des équivalents *cohérents* des cardinaux réguliers en dessous de $\aleph_1$ (*cohérent* signifiant ici que ces nouveaux cardinaux réguliers ont les mêmes propriétés que les cardinaux réguliers classiques lorsque l'on adopte une nouvelle définition pour la cardinalité et la cofinalité). Il y aurait alors à établir une théorie des *cofinalités possibles admissibles* basée sur ces nouvelles définitions qui nous permettrait d'étendre la vague de résultats étonnants en théorie des ensembles aux théories traitant seulement en apparence du dénombrable.

References

1. J. Barwise, *Admissible sets and structures*, Springer-Verlag, Berlin, (1975).
2. M. Burke et M. Magidor, *Shelah's pcf theory and its applications*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. **50** (1990), 207-254.
3. G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, **21** (1883), 545-591.
4. C.C. Chang et H.J. Keisler, *Model Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **73**, North-Holland, Amsterdam, (1973).
5. W.B. Easton, *Powers of regular cardinals*, Ann. Math. Logic **1(2)** (1970), 139-178.
6. P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté et R. Rado, *Combinatorial Set Theory : Partition Relations for Cardinals*, North-Holland, Amsterdam, (1984).
7. F. Galvin et A. Hajnal, *Inequalities of cardinal powers*, Ann. of Math. **101** (1975), 491-498.
8. M. Gitik et M. Magidor, *The singular cardinals problem revisited*, Preprint.
9. T. Jech, *Set Theory*, Academic Press, New York, (1978).
10. T. Jech, *Singular cardinal problem : Shelah's theorem on* $2^{\aleph_\omega}$, Bulletin of the London Mathematical Society, **24** (1992), 127-139.
11. T. Jech et S. Shelah, *On a conjecture of Tarski on products of cardinals*, Preprint.
12. K. Kunen, *Set Theory. An introduction to Independance Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **102**, North-Holland, Amsterdam, (1980).

---

[3]

Définition 9. $\mathrm{pp}_\kappa(\lambda)$ est le supremum des cofinalités de l'utra-produit $\prod a/D$ tel que a ait au plus κ cardinaux réguliers inférieurs à λ et que D sur a ne contienne aucun ensemble borné par une borne inférieure à λ.

L'Hypothèse Forte. *Pour tout cardinaux singuliers* λ, $pp_{cf(\lambda)}(\lambda) = \lambda^+$

L'Hypothèse Faible. *Pour tout cardinal singulier* λ, *il existe au plus un nombre dénombrable de cardinaux singuliers* $\mu < \lambda$ *tel que* $pp_{cf(\mu)}(\mu) \geq \lambda$.

13. M. Magidor, *Chang's conjecture and powers of singular cardinals*, The Journal of Symbolic Logic, **42** (1977), 272-276.
14. M. Magidor, *On the singular cardinal problem I*, Israel Journal of Mathematics, **28** (1977), 1-31.
15. M. Magidor, *On the singular cardinal problem II*, Annals of Mathematics, **106** (1977), 517-547.
16. M. Magidor, *Changing cofinality of cardinals*, Fundamenta Mathematicae, **99** (1978), 61-71.
17. M. Rathjen, *Recent advances in ordinal analysis :* $\prod_2^1 - CA$ *and related systems*, Bulletin of Symbolic Logic, vol. **1** num. **4**, (1995).
18. J.G. Rosenstein, *Linear ordering*, Academic Press, New York, (1982).
19. S. Shelah, *Jonsson algebras in successor cardinals*, Israel Journal of Mathematics, **30** (1978), 57-64.
20. S. Shelah, *A note on cardinal exponentiation*, The Journal of Symbolic Logic, **45** (1980), 56-66, [Sh 71].
21. S. Shelah, *Proper Forcing*, Lecture Notes in Mathematics **940** (Springer, Berlin, 1982).
22. S. Shelah, *The singular cardinals problem : independance results*, Surveys in set theory (A. R. D. Mathias, editor), Cambridge University Press, Cambridge, (1983), 116-134, [Sh 137].
23. S. Shelah, *On power of singular cardinals*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **27** (1986), 263-299, [Sh 111].
24. S. Shelah, *More on powers of singular cardinals*, Israel Journal of Mathematics, **59** (1987), 299-326, [Sh 256].
25. S. Shelah, *Successors of singulars, cofinalities of reduced products of cardinals and productivity of chain conditions*, Israel Journal of Mathematics, **62** (1988), 213-256, [Sh 282]
26. S. Shelah, *Products of regular cardinals and cardinal invariants of products of Boolean algebras*, Israel Journal of Mathematics, **70** (1990), 129-187, [Sh 345].
27. S. Shelah, *Cardinal arithmetic for skeptics*, Bulletin of the American Mathematical Society, **26** (1992), 197-210, [Sh 400a].
28. S. Shelah, *More on cardinal arithmetics*, Archive for Mathematical Logic, **32** (1993), 399-428, [Sh 410].
29. S. Shelah, *Cardinal arithmetic*, Oxford Logic Guides, Oxford University Press, Oxford, 1994.
30. S. Shelah, *Advances in cardinal arithmetic*, Proceedings of the Banff Conference in Alberta, to appear, [Sh 420].
31. S. Shelah, *Further cardinal arithmetic*, Israel Journal of Mathematics, to appear, [Sh 430].
32. S. Shelah, *The generalized continuum hypothesis revisited*, to appear, [Sh 460].
33. S. Shelah, *The pcf-theorem revisited*, A special volume dedicated to Paul Erd(̃o)s, edited by R. Graham and J. Nešetřil, to appear, [Sh 506].
34. J. Silver, *On the singular cardinals problem*, in: Proc. Internat. Congress of Math., Vancouver, B.C., 1974, vol. **1** (Canad. Math. Congress, Montreal, Quebec, 1975), 265-268.
35. A. Tarski, *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fundamenta Mathematicae **7** (1925), 1-14.

LIP, Ecole Normale Supérieure, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Institute of Mathematics, Hebrew University, Givat Ram, Jerusalem 91905, Israel
E-mail address: `glafitte@ens-lyon.fr, lafitte@math.huji.ac.il`