



HAL
open science

Evaluation de la résistance au choc des ouvrages de construction et des protections collectives à l'aide de sacs sphéro-coniques de 50 kg. Comportement dynamique et absorption d'énergie des corps de choc.

J. Paureau, M. Jacqmin

► To cite this version:

J. Paureau, M. Jacqmin. Evaluation de la résistance au choc des ouvrages de construction et des protections collectives à l'aide de sacs sphéro-coniques de 50 kg. Comportement dynamique et absorption d'énergie des corps de choc.. [Rapport de recherche] Notes scientifiques et techniques de l'INRS NS 167, Institut National de Recherche et de Sécurité (INRS). 1998, 76 p., ill., bibliogr. hal-01420140

HAL Id: hal-01420140

<https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal-01420140v1>

Submitted on 20 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FÉVRIER 1998

N° ISSN 0397 - 4529

167

**EVALUATION DE LA RESISTANCE
AU CHOC DES OUVRAGES DE
CONSTRUCTION ET DES PROTECTIONS
COLLECTIVES À L'AIDE DE SACS
SPHÉRO-CONIQUES DE 50 KG**

**Comportement dynamique et
absorption d'énergie des
corps de choc**

J. PAUREAU, M. JACQMIN

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE ET DE SECURITE

**SIEGE SOCIAL :
30, RUE OLIVIER-NOYER, 75680 PARIS CEDEX 14**

**CENTRE DE RECHERCHE :
AVENUE DE BOURGOGNE, 54501 VANDŒUVRE CEDEX**



Service Machines et Dispositifs de Protection
Avenue de Bourgogne
BP 27
54501 VANDOEUVRE CEDEX

Projet de publication n°
Note Scientifique et Technique

Février 1998

**EVALUATION DE LA RESISTANCE AU CHOC DES OUVRAGES
DE CONSTRUCTION ET DES PROTECTIONS COLLECTIVES
À L'AIDE DE SACS SPHÉRO-CONIQUES DE 50 KG**

Comportement dynamique et absorption d'énergie des corps de choc

par J. PAUREAU et M. JACQMIN

Document diffusé pour raison de service aux services publics et aux instances de la Sécurité Sociale mandatées pour la prévention des accidents du travail et des maladies professionnelles. Il peut être utilisé par eux, sans réserve, comme document de travail interne ou pour des réunions qu'ils provoqueraient. Il ne peut en revanche, être placé en l'état dans les circuits documentaires, car il fera ultérieurement l'objet d'une publication dans une revue.

RESUME

Les essais de choc des éléments de couverture légère sont réalisés à l'aide de sacs remplis de sable ou de billes de verre. Les coefficients de sécurité de ces éléments, déterminés à partir de ces essais, dépendent du comportement dynamique du sac et de l'énergie absorbée par celui-ci pendant le choc. Les auteurs ont effectué des essais de choc sur une plaque montée sur ressorts, avec deux sacs sphéro-coniques de 50 kg, l'un rempli de billes de verre, l'autre de sable. Ceux-ci ont été lâchés d'une hauteur comprise entre 0,05 m et 1 m pour le premier et entre 0,05 m et 2 m pour le second. Les relations entre la force de choc agissant sur les ressorts du banc d'essais et la hauteur de chute ont été indiquées pour chacun des sacs et pour les différentes raideurs adoptées du banc d'essais. Les essais montrent que les sacs se comportent pratiquement comme des masses indéformables pendant toute la durée du choc, lorsque la raideur des ressorts du banc d'essais est inférieure ou égale à 98,5 kN/m et pendant la phase de descente en effort, lorsque la raideur est supérieure ou égale à 247 kN/m. Lors de la phase de montée en effort, dans ce dernier cas, les sacs se comportent en première approximation, comme un ensemble de deux masses couplées par une raideur. Il est en outre montré que l'énergie absorbée lors du choc, E_A , varie en fonction de la force de choc maximale R_M selon une loi de la forme $E_A = E_0 (R_M / R_0)^n$ où $E_0 = 1\text{J}$; R_0 et n sont des constantes valant respectivement 1,1 kN et 2 pour un remplissage de billes de verre, pour un remplissage de sable, elles valent respectivement 1,25 kN et 1,85.

1 - INTRODUCTION

Les méthodes d'essai permettant d'évaluer la résistance au choc de certains composants d'ouvrages de construction et de matériels de chantier tels que les éléments de couvertures légères, garde-corps et protections collectives périphériques pour travaux sur toitures, consistent à laisser tomber, d'une hauteur convenue, un sac de masse donnée, rempli de sable ou de billes de verre [1-4]. Le résultat de l'essai est satisfaisant si le sac reste retenu par l'élément de couverture à l'issue du choc. D'après les recommandations actuelles [1], un élément de couverture est jugé suffisamment résistant si le choc d'un sac de sable de 80 kg, lâché de 1,5 m de haut (énergie cinétique = 1,2 kJ à l'impact) ne provoque pas la rupture de cet élément avec traversée du sac. D'autres méthodes [3, 5] font usage du sac sphéro-conique normalisé de 50 kg [6].

Les praticiens supposent implicitement qu'à énergie cinétique donnée à l'impact, les effets sur un élément de couverture d'une chute de plain-pied sont identiques à ceux de l'essai de choc à l'aide du sac de sable ou de billes de verre. Ils évaluent l'énergie de la chute de plain-pied à 0,8 kJ et admettent qu'un élément de couverture résistant au choc d'un sac de sable d'énergie cinétique à l'impact de 1,2 kJ, présente un coefficient de sécurité supérieur ou égal à 1,5 [2]. Ceci n'est ni tout à fait complet ni tout à fait exact. Il existe en effet, une infinité de chutes possibles de plain-pied ; c'est pourquoi il est nécessaire avant toute chose de définir parmi celles-ci, une chute dite de référence, aussi bien caractérisée et aussi sévère que possible [7]. Par ailleurs, le corps humain et le corps d'essai au choc ne se comportent pas de la même manière et n'absorbent pas la même quantité d'énergie. Le choc du corps humain dans la chute de référence et celui produit par l'essai conventionnel ne présentent donc pas la même sévérité à énergies égales. Un essai trop sévère pourrait conduire inutilement à un surcoût des toitures. Un essai trop peu sévère pourrait, au contraire, conduire à surestimer la résistance des plaques de couverture et par suite leur sécurité. Il est donc très souhaitable de pouvoir évaluer en grandeur et signe, la différence de sévérité des chocs produits, à énergie donnée, par la chute de plain-pied de référence et par celle du sac dans l'essai conventionnel. Pour cette évaluation, il est nécessaire de connaître le comportement dynamique du corps d'essai de choc utilisé et la loi d'absorption d'énergie suivie par celui-ci.

L'objet de cet article est de proposer un modèle analogique équivalent des sacs sphéro-coniques de 50 kg remplis de billes de verre ou de sable, d'en déterminer les lois de variation de la force de choc en fonction de la hauteur de chute et du temps et d'en établir celles de l'énergie absorbée en fonction de la force maximale de choc.

2 - MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

2.1 - Corps de choc considéré

Les investigations ont porté sur deux sacs sphéro-coniques de 50 kg, conformes en ce qui concerne leurs dimensions, à la norme NF P33-301 [6], l'un rempli de billes de verre, en accord avec cette norme, l'autre rempli de sable, solution adoptée par certains praticiens [1, 2].

2.2 - Principe de la méthode

Elle consiste à laisser tomber d'une hauteur donnée, le sac à étudier sur une plaque montée sur ressorts et à comparer l'énergie totale de la chute

$$E = M_s g(h + f) + \mu g f \quad (1)$$

à l'énergie élastique maximale emmagasinée dans les ressorts $E_e = \frac{K_R f^2}{2}$ où : M_s est la masse du sac, μ , celle de l'équipement mobile du banc d'essais, g , l'accélération de la pesanteur, h , la hauteur de chute du sac, f , la course maximale des ressorts et K_R leur raideur globale. La plaque du banc d'essais doit être aussi légère que possible.

Soit δE la somme de l'énergie dissipée par frottements et de l'énergie élastique emmagasinée dans la plaque de choc et dans la plaque-bâti du banc d'essais. La différence $\Delta E = E - E_e - \delta E$ est la somme de l'énergie dissipée lors du choc et de celle emmagasinée sous forme élastique, dans la paroi du sac. Il est démontré dans l'annexe II que la conception du banc d'essais rend δE négligeable, de sorte que l'on peut écrire avec une approximation suffisante : $\Delta E = E - E_e$.

2.3 - Dispositif expérimental (fig. 1)

2.3.1 Description

La plaque ①, destinée à recevoir le choc du sac, est guidée verticalement le long de 4 colonnes ② solidaires du bâti ③, par des douilles à billes ④. Elle est supportée par 1, 5 ou 10 ressorts ⑤, identiques, disposés de manière axisymétrique. Deux types de ressorts, souples et raides, ont été utilisés. Les ressorts reposent sur le bâti du banc d'essais par l'intermédiaire des capteurs à jauges de contraintes ⑥ au nombre de cinq au maximum, d'étendue de mesure égale à 5 kN. A tout instant, la résultante des forces élastiques transmises au bâti est prise égale à la somme de forces indiquées par les capteurs lorsque leur nombre est égal à celui des ressorts. Lorsque le nombre des ressorts est de dix, un ressort sur deux seulement est monté sur capteur. On admet alors que la résultante des forces élastiques transmise au bâti est le double de la somme des indications des capteurs.

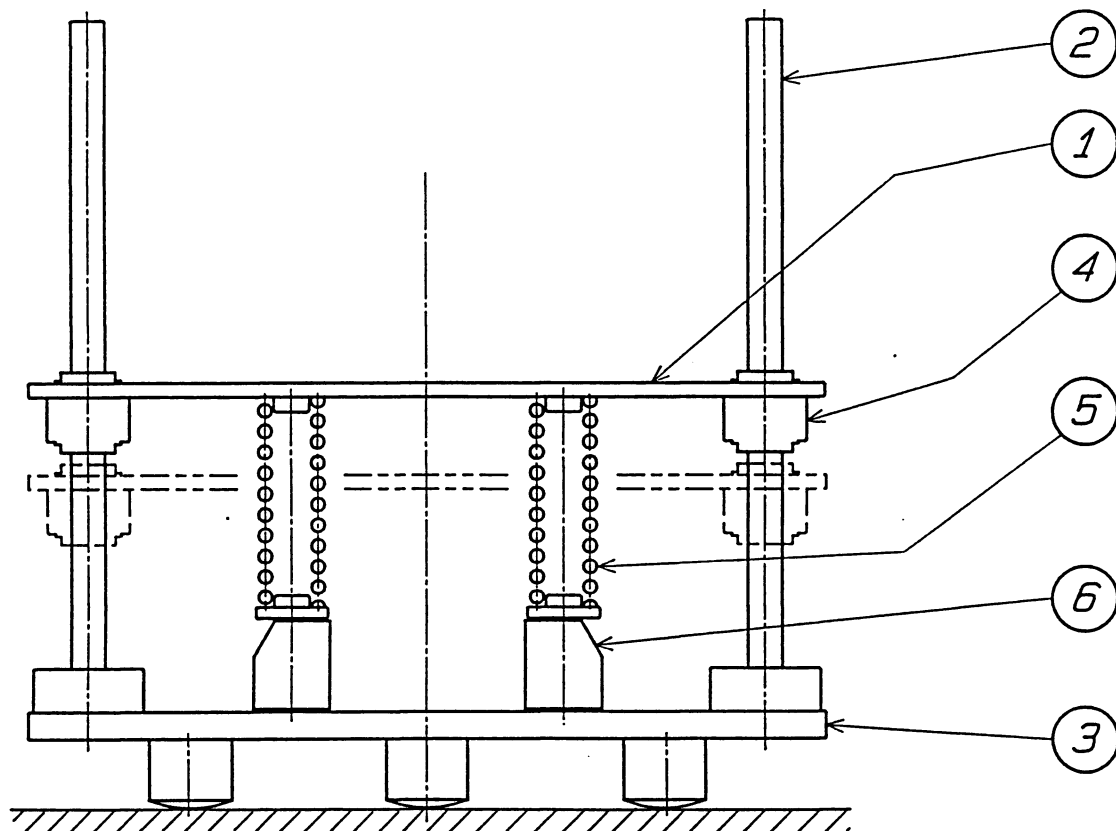


Fig. 1 Banc d'essais de chocs

1 - plaque de choc, 2 - colonne de guidage, 3 - plaque-bâti, 4 - douilles à billes, 5 - ressorts, 6 - capteurs de force de 5 kN d'étendue de mesure

2.3.2 Caractéristiques du banc d'essais

2.3.2.1 Plaque masse = 4.7 kg

2.3.2.2 Ressorts

Les caractéristiques des deux types de ressorts utilisés sont données dans le tableau I

| Type | Masse (kg) | Raideur (kN/m) |
|--------|------------|----------------|
| Souple | 0,315 | 9,85 |
| Raide | 0,935 | 232,6 |

Tableau I

Caractéristiques des ressorts du banc d'essais

2.3.2.3 Equipement mobile

On peut tenir compte avec une bonne approximation de l'influence de la masse des ressorts sur la dynamique du système en majorant la masse de la plaque du tiers de celle des ressorts [8]. Le tableau II donne les caractéristiques statiques et dynamiques de l'équipage mobile du banc d'essais ainsi que l'étendue de variation des hauteurs de chute en fonction des différentes raideurs du banc d'essais.

| Type de ressorts | Nombre de ressorts | Raideur globale K_R (kN/m) | Masse effective μ de l'équipage mobile (kg) | $\omega_2^2 = K_R / \mu$ [(rd/s) ² en milliers] | $z = 1 + (\mu / M_s)$ | h (m) |
|------------------|--------------------|------------------------------|---|--|-----------------------|-----------|
| Souple | 10 | 98,5 | 5,75 | 1,713 | 1,115 | 0,25-0,75 |
| Raide | 1 | 247 | 5,01 | 49,40 | 1,100 | 0,05-0,25 |
| | 5 | 1 176 | 6,26 | 188,0 | 1,125 | 0,25-1 |
| | 10 | 2 325 | 7,82 | 297,4 | 1,156 | 0,25-2* |

Tableau II

Caractéristiques statiques et dynamiques de l'équipage mobile du banc d'essais

* Le sac de billes s'est décousu lors du premier essai de chute d'une hauteur de 1 m. Aucun résultat d'essais à des hauteurs supérieures à 0,5 m n'est disponible avec la raideur de 2325 kN/m.

2.3.3 Acquisition des données

La chaîne de mesure est constituée des capteurs et des conditionneurs de signal associés qui permettent le réglage du zéro et du gain de celle-ci. Les sorties des conditionneurs sont connectées aux entrées de deux enregistreurs graphiques autonomes, notés A et B, à 2 et 3 voies respectivement. Les signaux analogiques d'entrées sont convertis en données numériques ; celles-ci sont stockées dans une mémoire-tampon puis traduites ensuite graphiquement en coordonnées efforts-temps. Les fréquences d'échantillonnage des enregistreurs A et B sont respectivement égales à 20 kHz et 33,3 kHz et leur bande passantes à -3 dB est de 3 kHz.

3 - ANALYSE DU COMPORTEMENT DES SACS AU CHOC

Considérons la phase de chute libre d'un sac donné. Aucune force extérieure ne s'exerce sur lui, à l'exception des forces aérodynamiques, tout à fait négligeables en pratique, par rapport aux forces en jeu lors du choc. L'enveloppe du sac est alors presque complètement détendue.

Lors d'un choc sévère, les grains du remplissage subissent une décélération dont la composante verticale, varie en fonction de la position du grain considéré. Au début du choc, la forme du sac est peu modifiée ; les forces de contention de ce sac sont faibles. Elles génèrent sur tout élément interne de celui-ci, des forces extérieures dont l'intensité est négligeable par rapport aux forces d'inertie. Le remplissage tend à évoluer au début du choc, vers la configuration qu'il prendrait en l'absence de paroi. Il tend à prendre la forme d'un cône d'angle au sommet égal à $(180^\circ - 2\varphi)$, φ étant l'angle de frottement solide en degrés, des grains élémentaires du remplissage sur eux-mêmes. La déformation de celui-ci met alors progressivement en tension l'enveloppe du sac. Cette dernière s'oppose de plus en plus à l'étalement du remplissage, lequel tend à se stabiliser sous la forme d'un tronc de cône raccordé grossièrement au plan de base par une portion de tore. De cette analyse, il semble pouvoir en être conclu que le remplissage se déformera d'autant plus que le coefficient de frottement solide sera faible, la paroi du sac souple et la décélération du sac forte.

Le coefficient de frottement solide relatif à un remplissage de billes étant plus faible que celui relatif à un remplissage de sable, il faut s'attendre à un étalement plus grand du premier que du second, ainsi qu'à une plus grande sollicitation de l'enveloppe du sac dans le cas d'un remplissage de billes de verre que dans celui d'un remplissage de sable, à conditions de choc identiques.

4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

4.1 - Variations de la force de choc en fonction du temps

Les figures 2 et 3 permettent de comparer en fonction du temps, les allures des variations d'efforts enregistrées par 2 ou 3 des 5 capteurs ou par le seul capteur dans le montage à un seul ressort, dans différentes conditions d'énergie de choc et de raideur des ressorts du banc, pour les deux types de sac. Les valeurs indiquées en ordonnées sont égales aux indications des capteurs multipliées par le nombre de ressorts sollicités. La courbe "moyenne" qui serait obtenue à partir des enregistrements issus d'une expérience, représenterait donc approximativement à l'échelle des ordonnées, la variation de l'effort résultant appliqué par la plaque au système de ressorts au cours de cette expérience.

Le choc excite différents modes de vibrations verticales du système. Les enregistrements ne laissent apparaître que les fréquences inférieures à 1 500 hertz environ. La réponse d'un capteur quelconque, exprimée en termes de force, apparaît comme étant la somme :

- 1) d'un terme $P_1(t)$ traduisant l'effet de la force appliquée par la plaque de choc, au ressort relatif au capteur considéré,
- 2) d'un terme sinusoïdal $P_{II}(t)$ de fréquence égale à 83 Hz ou à 260 Hz selon que les ressorts sont du type souple ou raide,
- 3) de termes sinusoïdaux de fréquences comprises dans la bande 1,1 kHz-1,5 kHz.

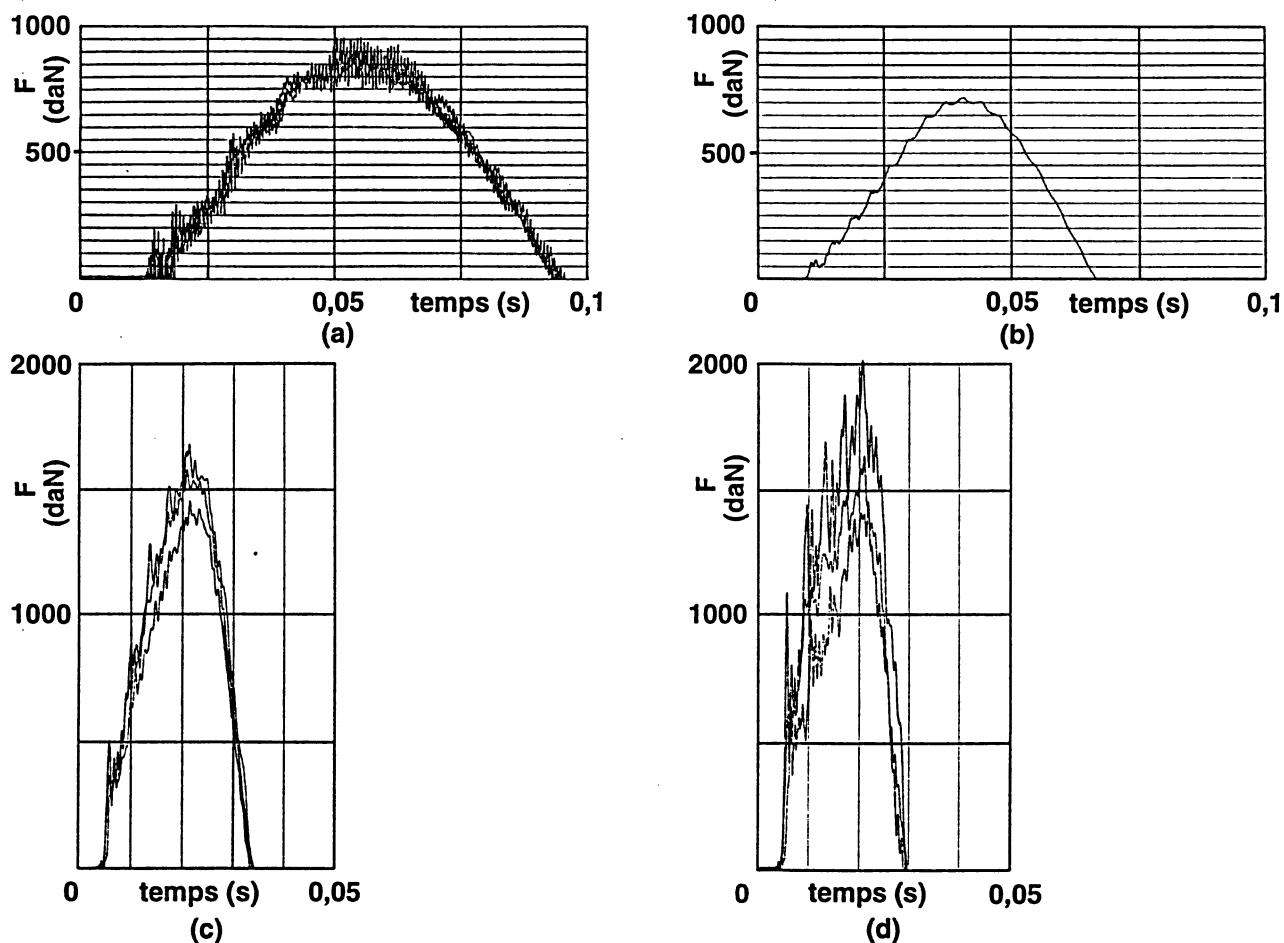


Fig. 2 Variation des efforts enregistrés par les capteurs du banc d'essais dans le cas de chocs produits par un sac sphéro-conique de 50 kg rempli de billes de verre, pour différentes valeurs de la raideur globale K_R des ressorts du banc d'essais et de la hauteur de chute du sac. Les figures a, c et d ne représentent que 2 ou 3 enregistrements d'efforts sur les cinq obtenus. Les axes des ordonnées sont gradués en valeurs de l'effort résultant.

a) $K_R = 98,5 \text{ kN/m}$ $h = 0,75 \text{ m}$ - b) $K_R = 247 \text{ kN/m}$ $h = 0,25 \text{ m}$ - c) $K_R = 1\,176 \text{ kN/m}$
 $h = 0,50 \text{ m}$ - d) $K_R = 2\,325 \text{ kN/m}$, $h = 0,50 \text{ m}$

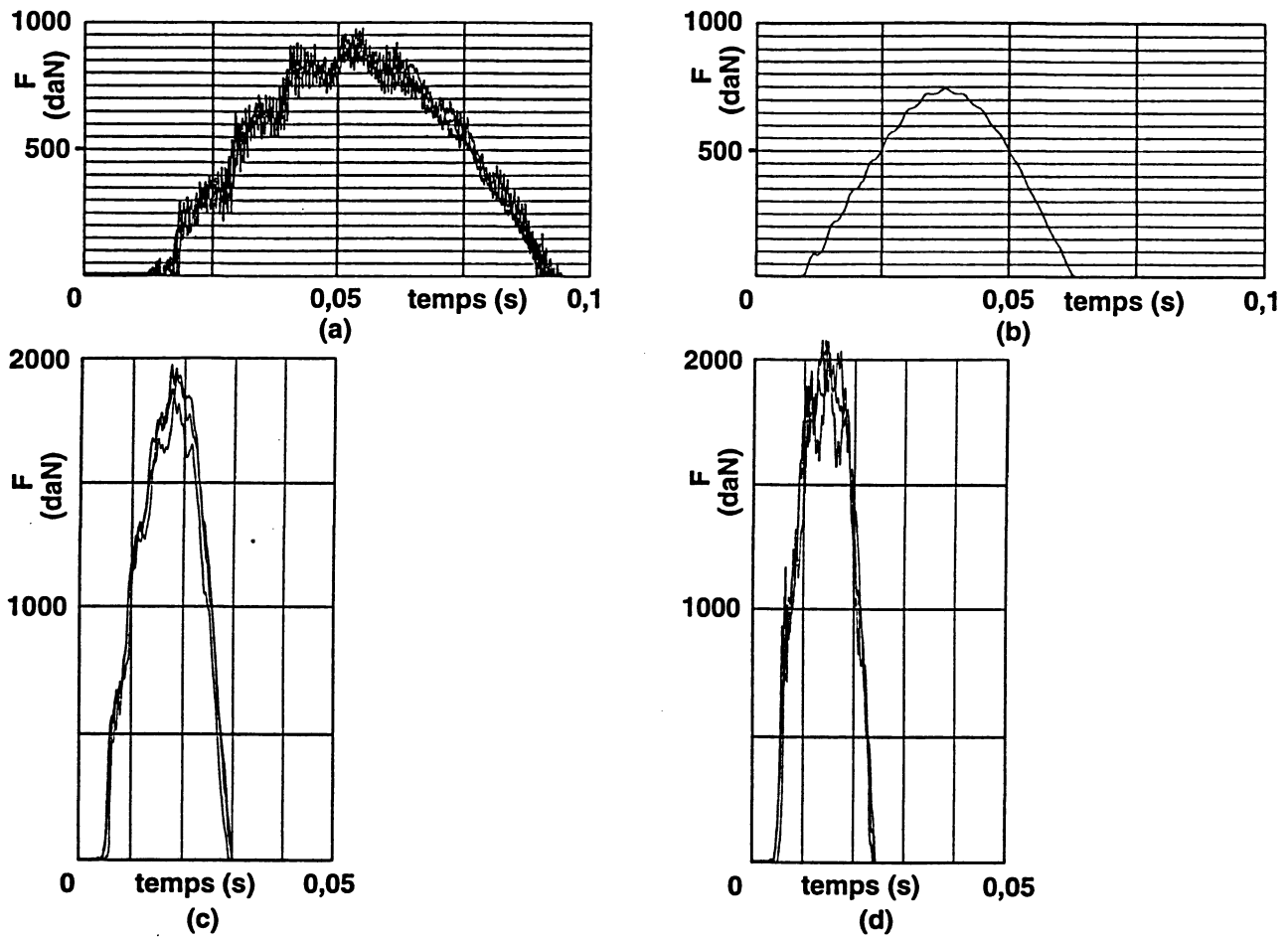


Fig. 3 Variation des efforts enregistrés par les capteurs du banc d'essais dans le cas de chocs produits par un sac sphéro-conique de 50 kg rempli de sable, pour différentes valeurs de la raideur globale K_R des ressorts du banc d'essais et de la hauteur de chute du sac. Les figures a, c et d ne représentent que 2 ou 3 enregistrements d'efforts sur les cinq obtenus. Les axes des ordonnées sont gradués en valeurs de l'effort résultant.

a) $K_R = 98,5 \text{ kN/m}$ $h = 0,75 \text{ m}$ - b) $K_R = 247 \text{ kN/m}$ $h = 0,25 \text{ m}$ - c) $K_R = 1\,176 \text{ kN/m}$ $h = 0,50 \text{ m}$ - d) $K_R = 2\,325 \text{ kN/m}$ $h = 0,50 \text{ m}$

La force de choc génère dans les ressorts, une onde de compression dont la vitesse de propagation est égale à $l\sqrt{k/m}$, l , k et m désignant respectivement la longueur, la raideur et la masse des ressorts. La fréquence théorique de ce mode de vibrations est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{k/m}$ [8] soit respectivement 88 Hz et 250 Hz pour les ressorts souples et raides. Le bon accord entre ces valeurs et celles des fréquences du second terme de réponse, laisse supposer que ce terme correspond au premier mode de vibrations des ressorts. Celles-ci tendent généralement à s'amortir subitement dès que le maximum de l'effort de choc est atteint. Les raisons de cette variation brutale de l'amortissement n'apparaissent pas clairement.

Pour comprendre l'origine des troisièmes termes, la plaque-bâti a été dépouillée de tous ses accessoires à l'exception de ses trois pièces d'appui au sol et d'un capteur. Sur la tête de celui-ci a été conservé le pion de centrage des ressorts. Les réponses du capteur à une excitation impulsionnelle (coup de marteau) ont été enregistrées pour différentes positions de ce capteur sur la plaque-bâti. Ces réponses présentent approximativement des allures de battements (annexe II). Elles résultent donc, en première approximation, de la somme de deux composantes sinusoïdales très faiblement amorties, de fréquences voisines ν_1^* et ν_2^* dont les valeurs, situées dans la bande 1,1 kHz 1,5 kHz, dépendent légèrement de la position du capteur sur la plaque-bâti. Le système plaque-bâti/capteur peut alors être assimilé, en première approximation à un système à deux degrés de liberté non amorti.

Sur les enregistrements de choc, les fréquences des troisièmes termes observées dans les cas de montage avec les ressorts de type raide sont légèrement inférieures aux fréquences observées dans ceux avec les ressorts de type souple. Cette différence pourrait être due au fait qu'une fraction de la masse des ressorts, en venant s'ajouter à celle de la masse effective des capteurs, abaisse leur fréquence propre, plus fortement lorsque ces ressorts sont de type raide que lorsqu'ils sont de type souple, parce que la masse des premiers est supérieure à celle des seconds.

Pour les plus faibles raideurs ($K_R < 247$ kN/m), l'allure de la fonction $P_i(t)$ est sensiblement sinusoïdale. Pour les plus fortes raideurs ($K_R > 176$ kN/m), le temps de montée en effort jusqu'à la valeur maximale τ_m , est environ le double du temps de descente τ_d dans le cas du sac de billes de verre. Dans le cas du sac de sable, τ_m est compris entre τ_d et $1,5 \tau_d$ environ.

La valeur moyenne de la force de choc varie sensiblement selon une loi du type :

$$F(t) = f_0(t) + F_1 t - F_2(t) \quad 0 \leq t \leq \tau_m \quad (2)$$

$$F(u) = F_3 u - F_4(u) \quad \tau_m < t \leq \tau \quad (3)$$

avec $u = \frac{\tau - t}{\tau - \tau_m}$ où $\tau = \tau_m + \tau_d$ est la durée du choc.

$f_0(t)$ est une fonction nulle pour $t = 0$ et égale à une constante F_0 pour $\tau_0 < t < \tau_m$, τ_0 étant beaucoup plus petit que τ_m ; F_1 et F_3 sont deux constantes et F_2 et F_4 , des fonctions monotones développables, respectivement, suivant des polynômes de t et de u , ceux-ci devant satisfaire à la condition de maximum de F au temps $t = \tau_m$:

$$F_1 = \frac{dF_2(\tau_m)}{dt}$$

$$F_3 = \frac{dF_4(1)}{du}$$

Les courbes représentant les variations moyennes en fonction du temps de la force de choc transmise aux ressorts, peuvent être approchées par leur courbe enveloppe d'équations :

$$F^*(t) = F_0 + F_1 t \quad t \leq \frac{F_M - F_0}{F_1} \quad (4)$$

$$F^*(u) = F_3 u \quad \tau - \frac{F_M}{F_3}(\tau - \tau_m) \leq t \leq \tau \quad (5)$$

$$F^*(t) = F_M \quad \frac{F_M - F_0}{F} \leq t \leq \tau - \frac{F_M}{F_3}(\tau - \tau_m) \quad (6)$$

où F_M est la valeur maximale de $F(t)$.

Les figures 4 à 7 représentent les variations de F_M , en fonction de la hauteur de chute des sacs et pour les différentes valeurs de la raideur du banc d'essais ($K_R = 98,5$ kN/m, $K_R = 247$ kN/m, $K_R = 1176$ kN/m, $K_R = 2325$ kN/m) Les figures 6 et 7 représentent en outre, celles de F_0 et F_1 pour les deux cas de raideurs les plus élevées, les variations de F_3 étant sans grand intérêt pratique. La figure 8 indique les valeurs de τ_m et de τ pour ces deux raideurs et pour différentes hauteurs de chute.

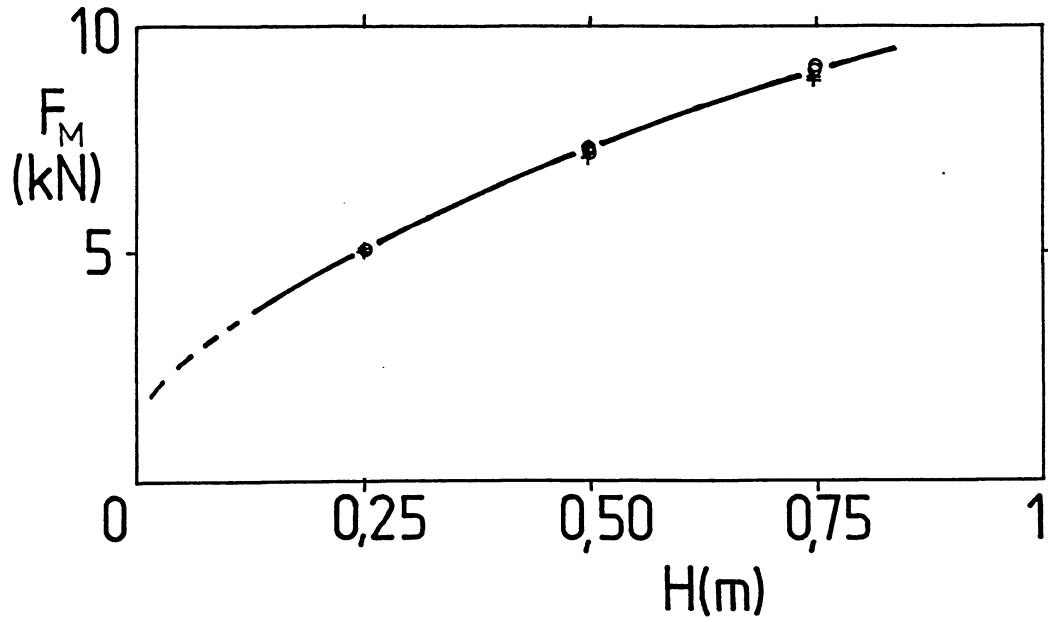


Fig. 4 Force moyenne de choc sur les ressorts du banc d'essais en fonction de la hauteur de chute pour $K_R = 98,5$ kN/m.

—○— sac de sable —+— sac de billes

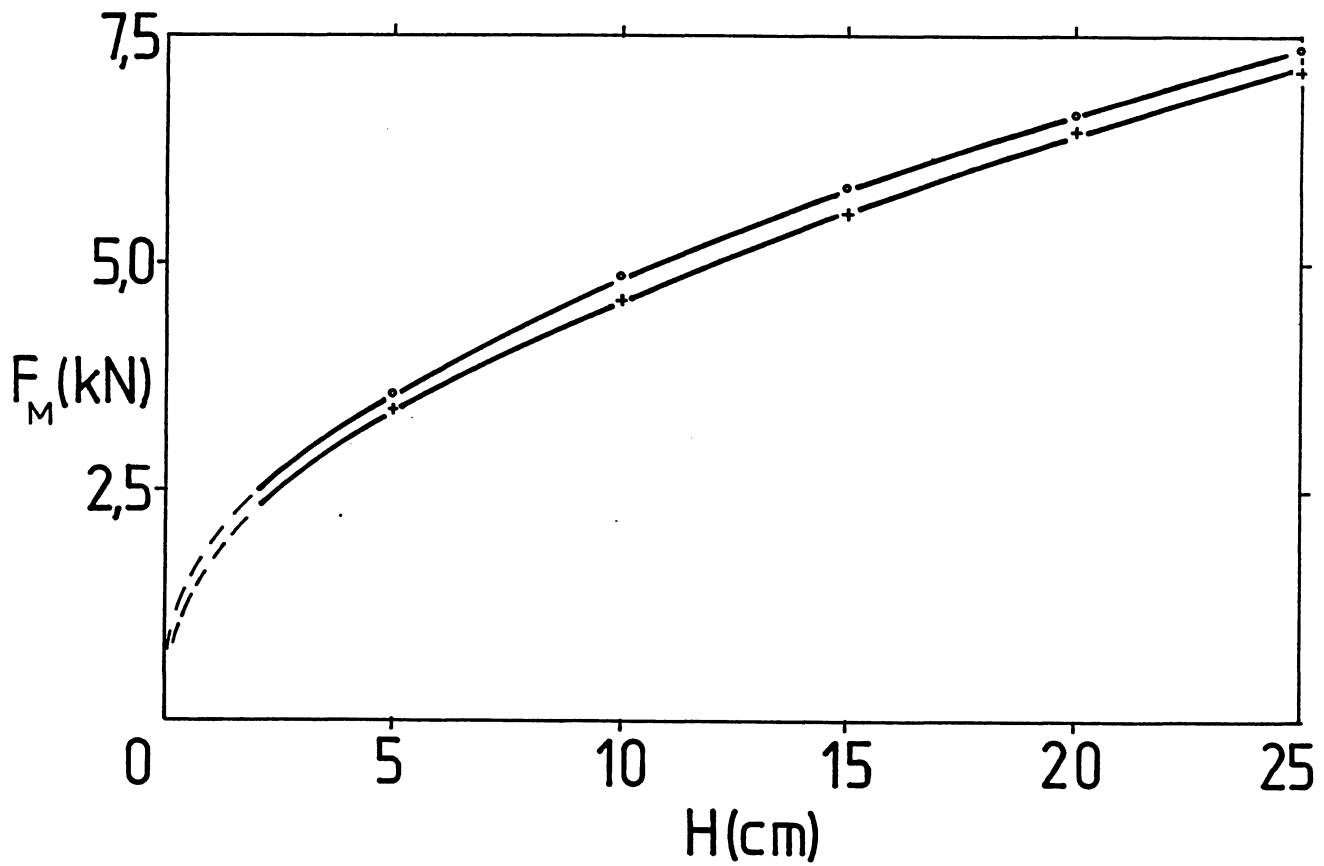


Fig. 5 Force moyenne de choc sur les ressorts du banc d'essai en fonction de la hauteur de chute pour $K_R = 247$ kN/m.

—○— sac de sable —+— sac de billes

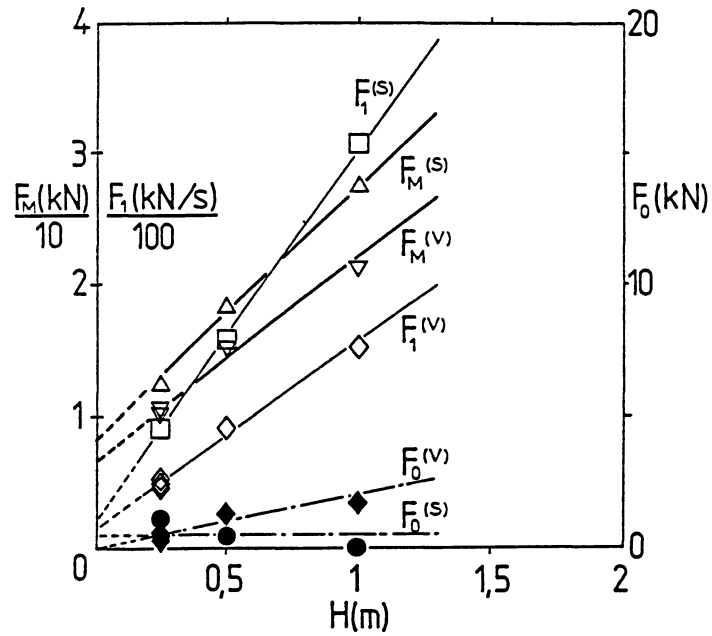


Fig. 6 Paramètres F_o et F_1 de la relation (4) et force maximale de choc F_M sur les ressorts en fonction de la hauteur de chute $K_R = 1176$ kN/m.

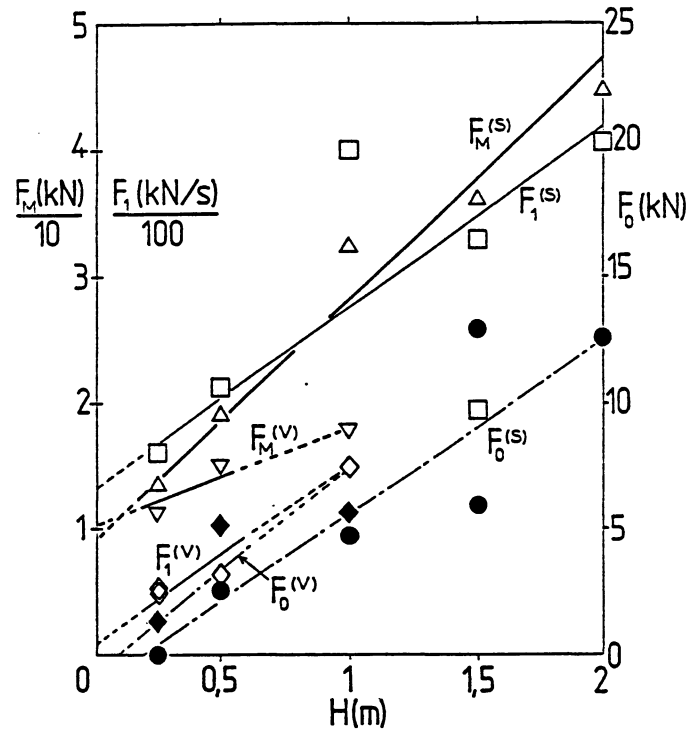


Fig. 7 Paramètres F_o et F_1 de la relation (4) et force maximale de choc F_M sur les ressorts en fonction de la hauteur de chute $K_R = 2325$ kN/m.



Les coutures du sac de billes ont cédé lors de l'essai sous une hauteur de chute de 1 m.

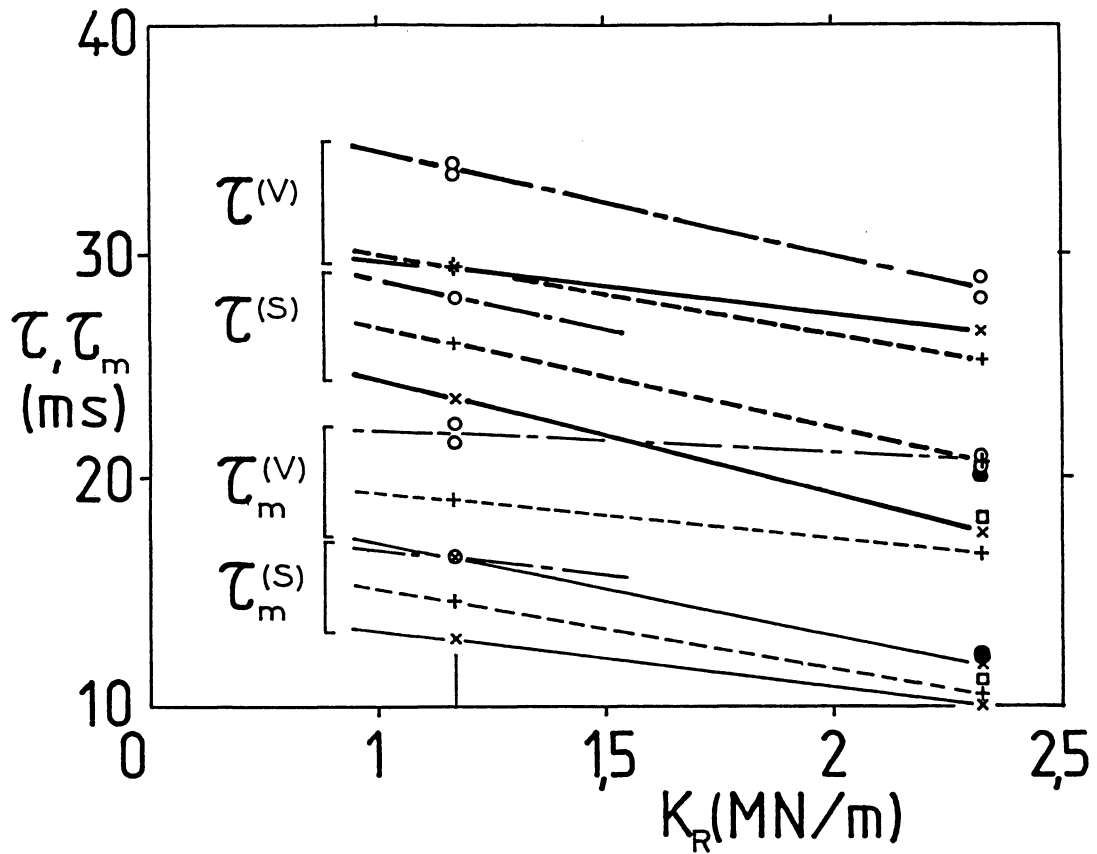


Fig. 8 Valeurs de τ et de τ_m pour différentes hauteurs de chute et raideurs

Sac de sable

$\tau_m^{(S)}$
 O - - - H = 0,25 m
 + - - - + H = 0,5 m
 x - - - x H = 1 m
 ● H = 1,5 m
 □ H = 2 m

$\tau^{(S)}$
 O - - - H = 0,25 m
 + - - - + H = 0,5 m
 x - - - x H = 1 m
 ● H = 1,5 m
 □ H = 2 m

Sac de billes

$\tau_m^{(V)}$
 O - - - O H = 0,25 m
 + - - - + H = 0,5 m
 x - - - x H = 1 m

$\tau^{(V)}$
 O - - - O H = 0,25 m
 + - - - + H = 0,5 m
 x - - - x H = 1 m

Les coutures du sac de sable ont cédé lors de l'essai d'une hauteur de chute de 1 m sur la raideur de 2325 kN/m.

4.2 - Energie absorbée lors du choc

Les déformations du sac lors du choc se traduisent par une dissipation d'énergie et par une conversion d'une partie de l'énergie du choc en énergie élastique, notamment dans la paroi du sac. La somme de ces énergies représente l'énergie absorbée E_A lors du choc. La somme des énergies dissipée et emmagasinée dans le banc d'essais étant au plus de l'ordre de 8% de E_A , nous admettons que cette énergie E_A est égale à la différence de l'énergie potentielle de position, donnée par la relation (1) et de l'énergie élastique maximum emmagasinée dans le banc d'essais

$$E_0 = \frac{K_R f^2}{2}$$

La force de choc R_M exercée au temps τ_m par le sac sur la plaque de choc, s'exprime en première approximation par la relation (voir annexe I) :

$$R_M = F_M \left(1 - \frac{\mu}{M_s + \mu} \right)$$

La corrélation entre E_A et R_M est représentée sur la figure 9 pour les deux types de sacs utilisés. Elle est meilleure dans le cas du sac de billes que dans celui du sac de sable. Elle s'écrit sous la forme

$$E_A = E_0 \left(\frac{R_M}{R_0} \right)^n$$

où E_0 , pris égal par convention à 1J, est introduit pour des raisons d'homogénéité de cette relation. Pour le sac de billes, $R_0 = 1,10$ kN et $n = 2$. Pour le sac de sable, $R_0 = 1,25$ kN et $n = 1,85$.

Remarque :

La valeur maximale de la force de choc exercée par le sac sur la plaque de choc et l'instant où elle est maximale, diffèrent légèrement, dans l'ordre respectif, de R_M et de τ_m (Cf. annexe I).

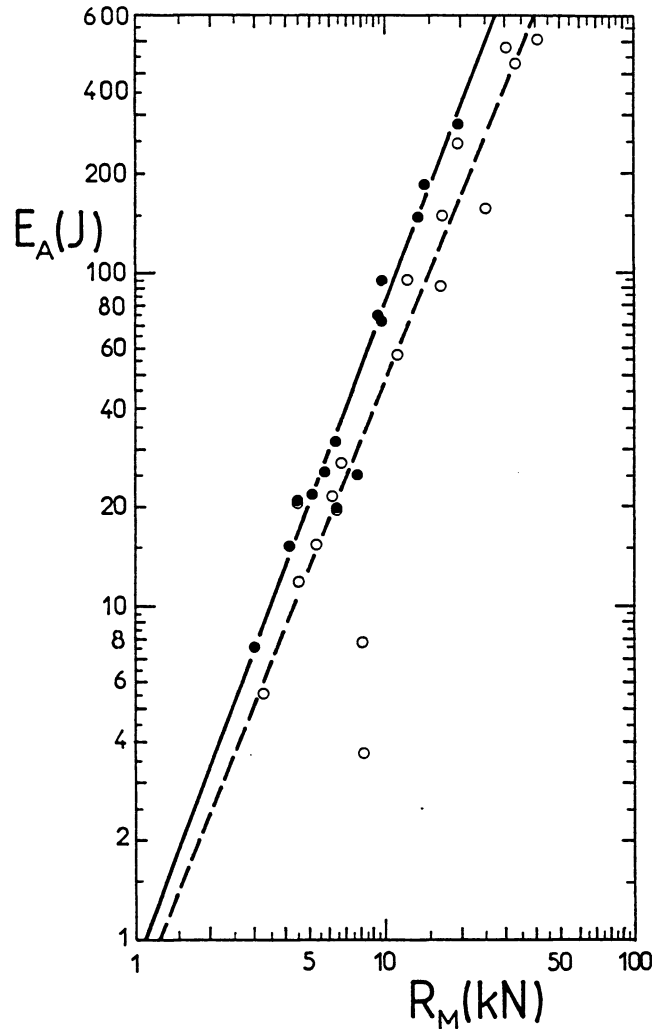


Fig. 9 Corrélation entre la force de choc et l'énergie absorbée lors du choc par des sacs sphéro-coniques de 50 kg.

— ● — remplissage de billes de verre
- - - ○ - - - remplissage de sable

5 - DISCUSSION DES RESULTATS

5.1 - Sur les mesures des forces appliquées aux capteurs

Il est démontré dans l'annexe II que les erreurs relatives théoriques sur les forces "moyennes" appliquées aux capteurs sont négligeables. Celles-ci ne sont cependant obtenues, après lissage, qu'avec une marge d'erreur ne pouvant être inférieure à 5%. La

détermination de la force de choc peut aussi être entachée d'une erreur de quelques pourcents, dans les cas du montage à 10 ressorts, en raison de la dispersion des raideurs qui, typiquement, est de 6% par rapport à leur moyenne à pleine compression.

L'inclinaison de la plaque de choc par rapport à l'horizontale, tend à se produire lorsque la force d'impact résultante est décentrée. En négligeant les réactions des guidages à billes qui tendent à s'opposer à cette inclinaison de la plaque de choc, on démontre dans l'annexe II, que pour un décentrage de la force de choc de 1 cm, l'inclinaison de cette plaque atteint $0,9^\circ$ et le rapport de la réaction la plus élevée à la réaction la moins élevée des ressorts, la valeur de 1,37.

Les variations moyennes des forces mesurées ne diffèrent pas de plus de 10% dans les cas des montages à 10 ressorts faibles ou à 5 ressorts raides ; ceci laisse supposer que dans ces cas, la plaque de choc reste horizontale, les guidages jouant alors parfaitement leur rôle. Par contre, dans le montage à 10 ressorts raides, un rapport de 0,75 a été observé entre la réponse moyenne la plus faible et la réponse moyenne la plus forte des capteurs, lors de l'essai sous une hauteur de chute de 1,5 m du sac de sable. Une telle différence de réponse laisse supposer que le couple de basculement, égal au produit de la force de choc par le décentrage de celle-ci, est d'une intensité telle que le système de guidage n'est plus capable de s'opposer totalement à l'inclinaison de cette plaque de choc. Dans l'annexe II, on démontre que dans le cas du montage à 10 ressorts, l'estimation de la résultante des forces exercées par les ressorts sur la plaque de choc à partir du double de la somme des réactions mesurées (une sur deux), est théoriquement exacte dans l'hypothèse où les raideurs de ces ressorts sont identiques.

5.2 - Sur les résultats

Les figures 4 à 7 mettent en évidence une grande dispersion des résultats. Celle-ci est due aux sources d'erreur exposées au paragraphe 5.1 sur la détermination de la force de choc, mais aussi aux frottements internes des sacs.

D'autre part, l'essai sous une hauteur de chute de 1 m avec le sac de billes de verre dans le cas du montage à 10 ressorts raides s'est soldé par la rupture des coutures de ce sac, de sorte que les résultats de cet essai, quoique représentés sur les figures 4 à 8 ne peuvent être pris en compte.

6 - INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

6.1 - Absorption d'énergie

La déformation du sac, lors d'un choc, se traduit par une dissymétrie de la courbe représentative de la force de choc en fonction du temps, puisque, ainsi qu'il le sera vu au paragraphe 6.2, le sac se comporte comme une masse indéformable lors de la remontée du plateau du banc d'essais. Le sac de billes apparaît nettement plus déformable que le sac de sable dans les essais avec $K_R \geq 247$ kN/m. Ceci pourrait être dû au fait que le coefficient de frottement entre les billes de verre est inférieur à celui entre les grains de sable. Cette plus grande aptitude du sac de billes à se déformer pourrait aussi expliquer qu'il absorbe plus d'énergie, à force de choc donnée, que le sac de sable.

Les lois gouvernant les forces de choc et l'absorption d'énergie d'un sac sont probablement en relation étroite avec son aptitude à la déformation. Celle-ci dépend de la nature du remplissage, mais aussi de la souplesse de l'enveloppe. La norme NFP 08-301 n'en spécifie pas les caractéristiques mécaniques. Il s'ensuit que la sévérité des essais de choc est également susceptible de varier d'un sac à l'autre, fussent-ils remplis des mêmes matériaux.

La sévérité d'un essai, à énergie de choc donnée, est susceptible de dépendre aussi de l'échantillon, ne serait-ce qu'en raison de la relation entre l'énergie absorbée et la force maximale de choc.

Dans le cas d'un essai de choc d'une plaque de couverture "souple" du type polyester armé de classe 4 par exemple, qui oppose typiquement une force de 6 kN à la déformation, l'énergie dissipée dans le sac de billes aurait été de l'ordre de 30 J, soit environ 3% de l'énergie de choc et de moins de 20 J avec le sac de sable. Le choix du sac influe alors peu sur la sévérité des essais des plaques de couverture dites "souples" car les forces et énergies à la rupture se situent respectivement dans les fourchettes 2 kN - 6 kN et 0,25 kJ - 1,2 kJ. La réaction au choc sur le sac, d'une plaque de couverture rigide du type fibres-ciment à résistance élevée, aurait été notablement plus élevée que celle des plaques du type "souple". L'énergie dissipée dans le sac au cours du choc aurait pu alors n'être plus négligeable par rapport à l'énergie du choc. Dans le cas des plaques de couverture du type "rigide" à résistance élevée, l'essai avec un sac de sable peut alors être notablement plus sévère que celui avec un sac de billes.

6.2 - Loi de variation de la force de choc en fonction du temps

Pour les essais effectués avec une raideur des ressorts du banc d'essais égale à 98,5 kN/m, les résultats expérimentaux suggèrent que le sac se comporte comme une masse indéformable. Sur la base de cette hypothèse, on démontre alors [8] que la durée τ du choc s'écrit :

$$\tau \approx \frac{\pi + 2\varphi}{\omega}$$

lorsque $\varphi \ll 1$

avec

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{g}{V\omega}$$

et

$$\omega = \sqrt{K_R / (M_s + \mu)}$$

où V est la vitesse du sac juste avant le choc. D'après les valeurs du tableau II, ω est égal à 42 rad/s. La hauteur de chute h a varié entre 0,25 m et 0,75 m. φ a donc varié entre 0,105 et 0,0608. Les valeurs théoriques de τ s'échelonnent donc de 0,080 s pour $h = 0,25$ m à 0,078 s pour $h = 0,75$ m. D'après les enregistrements des forces de choc en fonction du temps, les valeurs expérimentales de τ se situent dans l'intervalle 0,078 s - 0,083 s. Le bon accord ainsi constaté entre les valeurs théoriques et expérimentales confirme l'hypothèse de l'absence de déformations notables du sac pendant le choc.

Pour les trois valeurs supérieures de la raideur du banc d'essais, l'allure des variations de la force de choc en fonction du temps, correspondant à la phase de remontée du plateau, suggère que le sac est pratiquement indéformable pendant cette phase. Selon cette hypothèse, le temps de descente en effort s'exprime par la relation

$$\tau_d = \frac{\pi + 2\varphi}{2\omega}$$

Le calcul de τ_d selon cette formule donne des nombres inférieurs aux valeurs expérimentales de 6 à 8 % pour les raideurs globales des ressorts égales à 247 kN/m et 1 176 kN/m et de 12 % environ pour la raideur égale à 2 325 kN/m. L'hypothèse selon laquelle les sacs sont indéformables pendant la phase de descente en effort est donc encore assez bien vérifiée.

Cette hypothèse ne peut plus être admise par contre, pendant la phase de montée en effort, en raison de la dissymétrie des courbes représentatives de la force de choc en fonction du temps. Pour expliquer cette dissymétrie, il faut admettre que l'ensemble sac-plateau du banc d'essais se comporte comme un ensemble de deux masses (éventuellement variables), couplées par une liaison élastique (éventuellement non linéaire), de raideur K_1 notablement inférieure à celle du système élastique du banc d'essais. Ce couplage élastique ne peut trouver son origine que dans les forces de contention exercées par l'enveloppe sur le remplissage du sac. Le système, selon cette interprétation, peut être modélisé comme l'indique la figure 10. Dans l'hypothèse de lois de comportement linéaires des éléments élastiques, on démontre [9] qu'en première approximation, le déplacement du plateau x_2 s'exprime par une relation de la forme

$$x_2 = \frac{A}{a} [\sin(at - \varphi) + \sin \varphi] \quad (7)$$

où $\varphi = \text{Arctg}(g/Va)$ et $a = \omega_1[1 - (z/2u) + \varepsilon(1/u)]$. $\varepsilon(1/u)$ est une fonction tendant vers 0 avec $(1/u)$ où $u = \omega_2^2 / \omega_1^2$, $\omega_1 = K_1 / m_1$ et $\omega_2 = K_R / m_2$ (fig. 10).

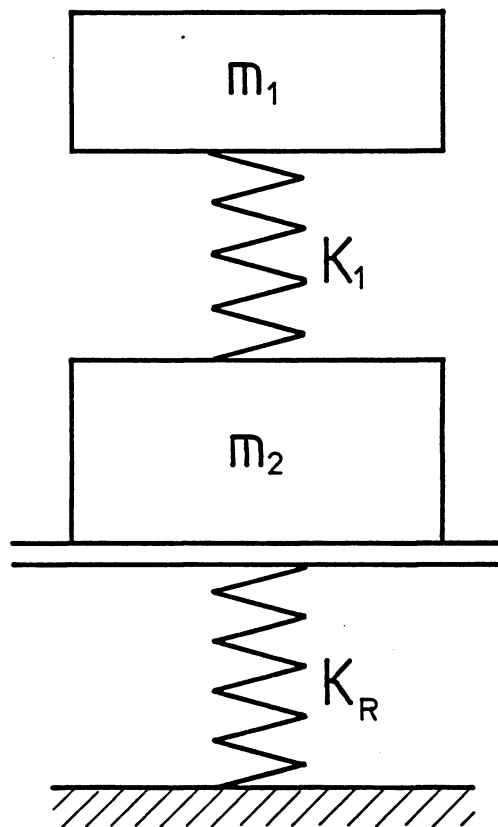


Fig. 10 Modélisation du choc d'un sac sphéro-conique sur une plaque montée sur ressorts. La dissipation d'énergie dans les sacs est négligée.

Le temps de montée en effort est :

$$\tau_m = \frac{\pi + 2\varphi}{2a} \approx \frac{\pi}{2\omega_1} [1 + (z/2u) + \theta(1/u)] \quad (8)$$

$\theta(1/u)$ étant une nouvelle fonction tendant vers 0 avec $1/u$. Si $u \gg z$, τ_m ne dépend pratiquement que de K_1 , donc de la raideur de l'enveloppe du sac et de la masse m_1 (puisque $z > 1$). Si les chocs donnent toujours lieu aux mêmes masses m_1 et m_2 , le temps de montée en effort ne dépend plus que de la raideur du banc d'essais. C'est ce qui est observé avec une approximation relativement bonne dans le cas du sac de billes pour des hauteurs variant de 0,25 à 0,5 m lorsque la raideur du banc d'essais est égale ou supérieure à 1176 kN/m. En négligeant φ qui est au plus de l'ordre de 0,1, et les termes en $1/u$, on obtient d'après la relation (8)

$$\omega_1 \equiv \frac{\pi}{2\tau_m}$$

Comme $\tau_m \equiv 2 \times 10^{-3}$ s, $\omega_1 \equiv 0,8 \times 10^2$ rd/s

La variation presque linéaire et non sinusoïdale de la force de choc en fonction du temps, dans le cas des essais avec le sac de billes, montre que les hypothèses du modèle ne sont pas très bien respectées en réalité. La valeur déterminée de ω_1 ne peut donc être considérée que comme un ordre de grandeur.

La condition $u \gg 1$, s'écrit aussi :

$$m_2 \ll \frac{K_R}{\omega_1^2}$$

soit pour $K_R = 1176$ kN/m

$$m_2 \ll 183 \text{ kg}$$

Cette condition est probablement assez bien vérifiée, à plus forte raison lorsque $K_2 = 2\,325$ kN/m, puisque m_2 n'est que la somme d'une partie de la masse du sac et de celle de l'équipage mobile.

Le médiocre accord entre les variations théoriques et expérimentales de la force de choc pendant la montée en effort, ne permet pas de déterminer avec une précision suffisante, les valeurs des masses m_1 et m_2 .

Dans le cas des essais avec le sac de sable, les valeurs de τ_m et de τ sont plus faibles que dans celui avec le sac de billes. Tout se passe comme si les deux masses m_1 et m_2 étaient plus fortement couplées dans le premier cas que dans le second.

CONCLUSION

Des essais de chocs ont été réalisés avec deux sacs sphéro-coniques de 50 kg, l'un rempli de billes de verre, l'autre de sable, en les laissant tomber d'une hauteur comprise entre 0,05 m et 2 m, sur un équipement mobile monté sur ressorts, de masse comprise entre 5 et 8 kg. Ces essais ont permis pour chacun de ces sacs d'établir des modèles approximatifs de comportement.

Les sacs se comportent, approximativement comme une masse indéformable pendant toute la durée du choc, lorsque la raideur globale des ressorts est inférieure à 10^2 kN/m et pendant la remontée de l'équipage mobile seulement, lorsque la raideur est supérieure à cette valeur. Lorsqu'elle est supérieure à $2,5 \times 10^2$ kN/m, les sacs se comportent en toute première approche au cours de la descente de l'équipage mobile, comme un ensemble de deux masses couplées par un ressort. Ce degré d'approximation avec laquelle ce modèle rend compte de la réalité, ne permet toutefois pas d'en déterminer les caractéristiques de masses et de raideurs avec suffisamment de précision.

L'énergie dissipée au sein des sacs est proportionnelle au carré de la réaction maximale de l'équipage mobile pour le sac rempli de billes de verre et à la puissance 1,85 de cette réaction pour celui rempli de sable. A force de choc donnée, l'énergie dissipée au sein du sac est plus faible dans le cas du remplissage de sable que dans celui du remplissage de billes. A énergie totale de choc donnée, l'énergie disponible pour provoquer l'endommagement ou la rupture de l'élément à essayer est donc supérieure, dans le cas du sac de sable, à celle qui serait obtenue avec le sac de billes. L'essai avec le sac de sable est donc plus sévère que celui avec le sac de billes. Les caractéristiques mécaniques de la toile constituant le sac et la nature de l'échantillon sont aussi de nature à influencer sur la sévérité du choc à hauteur de chute donnée.

Dans le cas d'un essai de choc sur une plaque de couverture du type polyester armé de classe 4 qui oppose typiquement une force de 6 kN à la déformation, l'énergie dissipée dans le sac de billes est de l'ordre de 30 J, soit environ 3 % de l'énergie de choc. Elle serait de moins de 20 J avec un sac de sable. Cette différence est faible voire négligeable vis-à-vis des énergies habituelles de rupture qui se situent dans la fourchette 250-1200 J pour les plaques de types PVC ou polyester armé. Dans le cas d'un essai de choc sur une plaque de couverture rigide du type fibres-ciment à résistance élevée, l'énergie dissipée

au sein du sac peut n'être plus négligeable par rapport à l'énergie totale du choc. L'essai à l'aide d'un sac de sable peut alors être notablement plus sévère que celui avec un sac de billes.

Le fait que l'énergie dissipée, à valeur donnée de la réaction de l'équipage mobile du banc d'essai, soit plus faible au sein du sac de sable, qu'au sein du sac de billes, peut s'expliquer par la moins grande aptitude à se déformer du premier que du second.

L'information acquise sur le comportement au choc des sacs est en pratique suffisante pour évaluer la sévérité des essais de choc réalisés à l'aide de ces sacs, notamment sur des éléments de couverture, par rapport à celle d'une chute de référence de plain-pied. Cette évaluation fait l'objet d'un autre article [7].

ANNEXE I

EXPRESSION DE LA FORCE DE CHOC

Lors de la phase de remontée du plateau, le sac se comporte pratiquement, comme une masse indéformable. Les équations du mouvement de ce sac et du plateau s'écrivent respectivement (Fig. I-1) :

$$(M_s + \mu)(\ddot{x}_2 - g) = -F_M \quad (I-1)$$

$$\mu(\ddot{x}_2 - g) = R_M - F_M \quad (I-2)$$

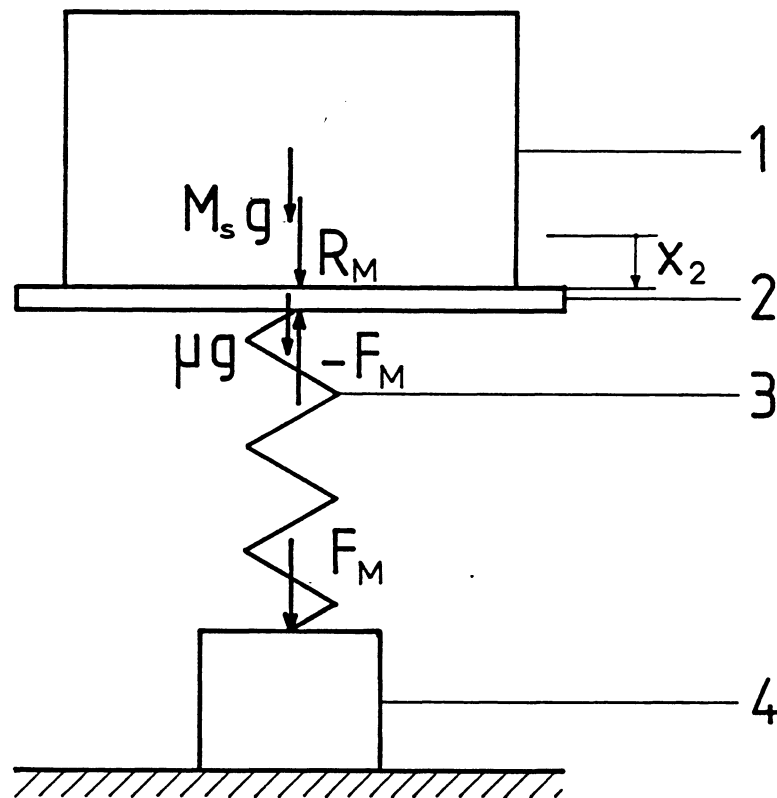


Fig. I-1 **Forces appliquées au plateau du banc d'essais**
1 - corps de choc, 2 - plateau du banc d'essais, 3 - ressorts du bancs d'essais
4 - capteur

En résolvant ce système d'équations par rapport à R_M , on obtient :

$$R_M = F_M \left(1 - \frac{\mu}{M_s + \mu} \right) \quad (I-3)$$

A une valeur quelconque de t ,

$$R(t) - F(t) = \mu \ddot{x}_2(t) \quad (I-4)$$

$R(t)$ étant la force exercée par le sac sur la plaque de choc.

Or,

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{\dot{F}(t)}{K_R}$$

D'où, en reportant cette expression de $\ddot{x}_2(t)$ dans (I-4)

$$\frac{\dot{F}(t)}{\Omega^2} + F(t) = R$$

Or, d'après les enregistrements, la courbe représentant F en fonction de t tourne sa concavité vers les valeurs négatives de F . $\dot{F}(t)$ est donc négatif. En valeur absolue, $\dot{F}(t)$ croît rapidement à partir d'un temps un peu inférieur à τ_m , passe par un maximum au voisinage de τ_m puis redécroît. Le maximum de $R(t)$ est donc, tout comme R_M , inférieur à F_M et décalé vers l'origine.

Dans l'hypothèse d'une variation sinusoïdale de $F(t)$, la valeur maximum de $\mu \ddot{x}_2(t)$ serait égale à $\frac{\pi^2 F_M}{\Omega^2 \tau^2}$. Alors le maximum R_m de $R(t)$ serait donné par la relation

$$R_m = F_M \left(1 - \frac{\pi^2}{\Omega^2 \tau^2} \right)$$

Or,

$$\Omega^2 \tau^2 = \frac{K_R}{\mu} \tau^2 = \frac{M_s + \mu}{\mu} \frac{K_R}{M_s + \mu} \tau^2$$

Mais,

$$\frac{K_R}{M_s + \mu} \tau^2 = \pi^2$$

d'où :

$$R_m = F_M \left(1 - \frac{\mu}{M_s + \mu} \right)$$

On retrouve dans ce cas le résultat donné par (I-3).

ANNEXE II

BANC D'ESSAIS POUR L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT AU CHOC DES SACS SPHÉRO CONIQUES DE FORMES NORMALISÉES DE 50 kg - COMPLEMENTS -

Calcul de l'énergie dissipée par frottements dans le système de guidage linéaire de la plaque de choc et de l'énergie élastique emmagasinée dans les éléments structuraux du banc d'essais. Précision des mesures.

RÉSUMÉ

L'énergie $\delta_1 E$ dissipée en frottement de roulement dans le système de guidage de la plaque de choc du banc d'essais est évaluée à 7% environ de l'énergie E_a absorbée par le sac au cours du choc, dans les cas les plus défavorables, en supposant que l'axe de la chute est situé au plus à 2 cm du centre de cette plaque de choc. L'énergie emmagasinée dans les plaques du banc d'essais. W_T est évaluée à environ de 1% de E_a . La somme $\delta_1 E + W_T$ est inférieure à la dispersion des valeurs de E_a par rapport à la loi théorique. L'imprécision sur la détermination des composantes de la force maximale de choc est évaluée à 5% environ.

NOTATIONS

| | | |
|---------------|---|---|
| a | : | diamètre "équivalent" de la plaque-bâti |
| D | : | module de rigidité à la flexion de la plaque considérée |
| \mathcal{D} | : | masse volumique de la plaque concernée |
| E | : | énergie de la chute du sac |
| E_a | : | somme des énergies emmagasinée et dissipée dans le sac |
| E_e | : | partie de E transmise au système élastique du banc d'essais |
| $\delta_1 E$ | : | partie de E dissipée par roulement dans le système de guidage de la plaque de choc |
| $\delta_2 E$ | : | partie de E emmagasinée en énergie élastique dans la plaque de choc |
| $\delta_3 E$ | : | partie de E emmagasinée dans la plaque-bâti du banc d'essais |
| e | : | épaisseur de la plaque considérée |
| \mathcal{E} | : | module d'Young de la plaque concernée |
| R | : | réaction des ressorts du banc d'essais sur la plaque considérée |
| f | : | coefficient de roulement des douilles à billes sur les volumes |
| h | : | hauteur utile des douilles à billes |
| K | : | raideur équivalente de la plaque-bâti dans le mode fondamental de vibration |
| k | : | raideur de l'élément élastique du composant concerné du système plaque-bâti/capteur |
| k_R | : | raideur des ressorts du banc d'essais |
| m | : | masse équivalente du composant concerné du système plaque-bâti/capteur |
| m_o | : | masse équivalente de la tête nue des capteurs |
| Δm | : | masse ajoutée sur la tête du capteur |
| N | : | fréquence propre du mouvement de la masse équivalente du composant concerné du système plaque-bâti/capteur, considéré isolément |
| n | : | nombre de ressorts du banc d'essais |

- P : force appliquée à un capteur
- P_m : force mesurée par le capteur
- P_o : valeur à l'origine de la force de choc
- Q : composantes normales des actions des colonnes sur les douilles de guidage à billes de la plaque de choc
- p : contrainte normale au contact du sac sur la plaque de choc
- F : action du sac sur la plaque de choc
- R_o : Constante de la loi d'absorption d'énergie du sac de bille spéro-conique de 50 kg
- W : énergie emmagasinée dans la plaque considérée
- W_1 : énergie emmagasinée dans la plaque considérée sous l'effet de la réaction du (ou des) ressort(s)
- W_2 : énergie emmagasinée dans la plaque considérée sous l'effet du changement reparti
- W_3 : travail des réactions des ressorts lors de l'application des charges réparties sur la plaque de choc
- W_T : somme des énergies emmagasinées dans les éléments structuraux du banc d'essais
- r : rapport des masse effectives m_1 de la plaque bâti et m_2 du capteur
- w_1 : flèche de la plaque considérée sous l'effet de la réaction du (ou des) ressort(s) (chargement (i))
- w_2 : flèche de la plaque considérée sous l'effet des forces de pression
- $w_B(o)$: déplacement de la plaque-bâti au point de chargement central
- w_i : déplacement de la plaque considérée au droit d'un capteur i sous l'action des forces R_j appliquées au droit des capteurs j
- x_2 : déplacement de la plaque de choc
- x : déplacement de la masse équivalente concernée du système plaque-bâti/capteur

| | | |
|---------------|---|--|
| α | : | pulsation de l'excitation |
| β | : | inclinaison de la plaque par rapport à l'horizontale |
| δ | : | distance de R au centre de la plaque de choc |
| Ω | : | pulsation angulaire propre du mouvement de la masse concernée du système plaque-bâti/capteur lorsque le mouvement de l'autre masse est bloqué |
| ν | : | fréquence propre du mouvement de la masse équivalente concernée du système plaque-bâti/capteur lorsque le mouvement de l'autre masse équivalente est bloquée |
| ν_b | : | fréquence de battement des vibrations du système plaque-bâti/capteur |
| ν^* | : | fréquence d'un mode normal |
| \emptyset | : | diamètre du cercle de contact sur la plaque de choc |
| \emptyset_R | : | diamètre de la circonférence de chargement des ressorts |
| τ_M | : | instant du maximum de la force de choc |
| τ | : | durée de choc |
| σ | : | coefficient de POISSON |
| ω | : | pulsation angulaire du mouvement de la masse du composant concerné du système plaque-bâti/capteur |
| ω^* | : | pulsation angulaire des modes normaux du système plaque-bâti/capteur |
| $\Delta(t)$ | : | erreur de mesure en fonction du temps des capteurs |
| ρ | : | rapport m_2/m_1 |

INDICES :

| | | |
|-----|---|--------------------------|
| C | : | plaque de choc |
| B | : | plaque-bâti |
| 1 | : | relatif à la plaque-bâti |
| 2 | : | relatif au capteur |

II-1 - INTRODUCTION

Il est supposé que l'énergie dissipée et emmagasinée dans les éléments structuraux du banc d'essais représenté par la figure 1 est négligeable. Il est également fait un certain nombre d'hypothèses pour calculer la force de choc. L'objet de cette note est de démontrer le bien fondé de ces diverses hypothèses.

II-2 - RAPPEL DU PRINCIPE DE LA MÉTHODE D'ESSAIS

La méthode consiste à laisser tomber le sac d'une certaine hauteur et à déterminer la partie E_e de l'énergie de la chute du sac E transmise au système élastique du banc d'essais. Soient $\delta_1 E$, $\delta_2 E$ et $\delta_3 E$, les parties de E respectivement dissipées en roulement dans le système de guidage de la plaque, emmagasinée en énergie élastique dans celle-ci et emmagasinée en énergie élastique dans la plaque-bâti (figure 1). La différence $E_a = E - E_e - \delta_1 E - \delta_2 E - \delta_3 E$ représente la somme de l'énergie dissipée par frottements dans le sac et de l'énergie élastique emmagasiné dans celui-ci, notamment dans sa paroi. Pour faciliter les calculs de E_a , le banc d'essais doit être conçu pour que $\delta_1 E + \delta_2 E + \delta_3 E$ soit négligeable.

Il est démontré aux paragraphes suivants que cette condition est bien vérifiée.

II-3 - EVALUATION DE L'ÉNERGIE DISSIPÉE PAR ROULEMENT DANS LE SYSTÈME DE GUIDAGE

La figure II-1 représente la plaque de choc.

Des réactions sur les guidages à billes (fig II-2) n'apparaissent théoriquement que lorsque la résultante R des actions du sac sur la plaque est décentrée et/ou si le parallélisme des colonnes de guidage est détruit, par exemple, par suite des déformations élastiques de la plaque-bâti induites par le choc. Celles-ci sont extrêmement difficiles à évaluer. Nous ne traiterons que du cas du décentrage de la force de choc.

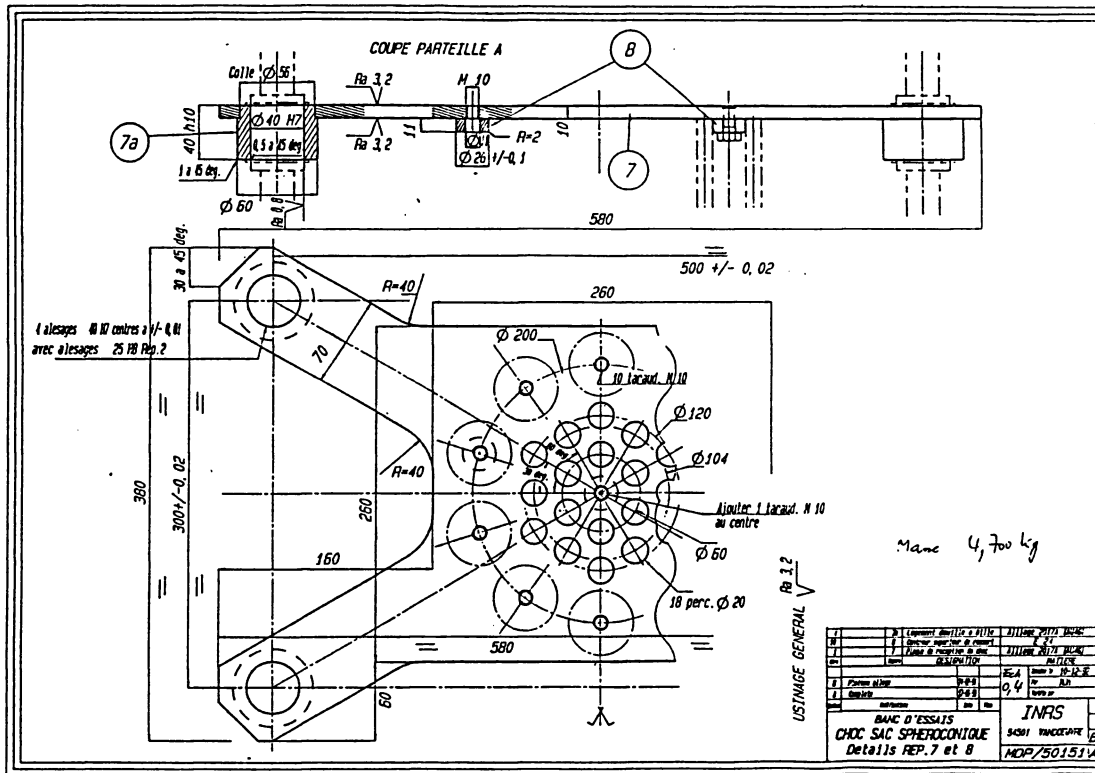


Fig. II-1 Plaque de choc du banc d'essais

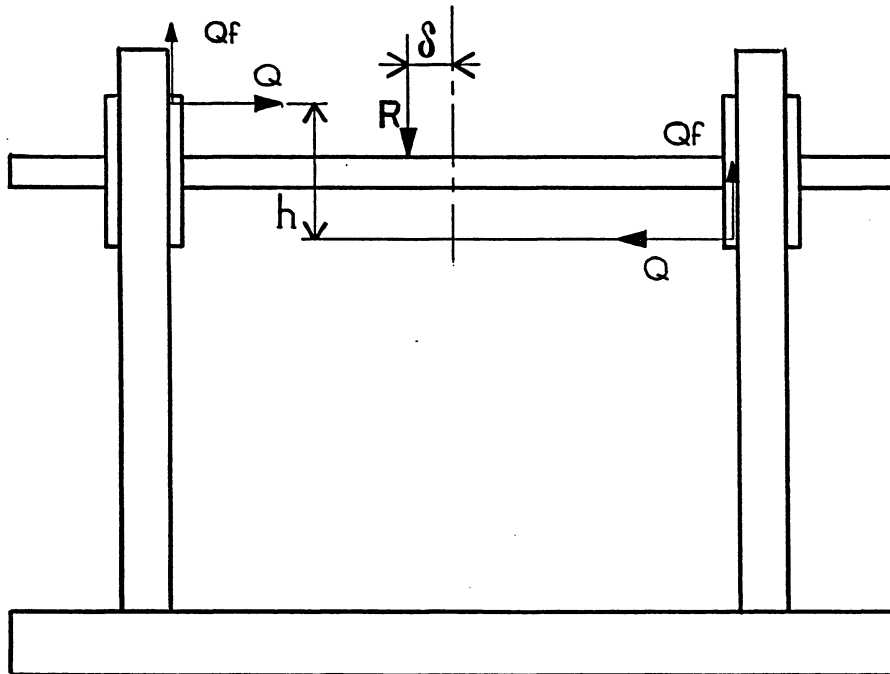


Fig. II-2 Équilibre statique de la plaque de choc

Soit δ la distance de R à l'axe du banc d'essais et Q les composantes normales des actions des colonnes de guidage sur les douilles à billes. Ces forces Q donnent lieu à des forces résistantes Qf , f étant le coefficient de roulement de ces douilles sur les colonnes de guidage. Si on néglige l'inertie de la plaque, ce qui est légitime dans le cas de la recherche d'ordres de grandeurs et si F désigne la réaction des ressorts du banc d'essais, les équations d'équilibre de celle-ci s'écrivent :

$$2Qf+F=R \quad (\text{II-1})$$

$$Q=R\delta/h \quad (\text{II-2})$$

où h est la hauteur utile des douilles à billes.

Le rapport de l'énergie $\delta_1 E$ dissipée par roulement à l'énergie emmagasinée dans les ressorts s'écrit alors :

$$\frac{\delta_1 E}{E_e} = \frac{\int_0^{x_{2M}} 2Qf dx_2}{\int_0^{x_{2M}} F dx_2} \quad (\text{II-3})$$

x_2 et x_{2M} étant respectivement, le déplacement courant et le déplacement maximal de la plaque du banc d'essais.

D'après la relation (II-2), la relation (II-3) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\delta_1 E}{E_e} = \frac{2\delta f}{h} \frac{\int_0^{x_{2M}} R dx_2}{\int_0^{x_{2M}} F dx_2} \quad (\text{II-4})$$

$$= \frac{2\delta f}{h} \frac{E}{E_e}$$

$$\frac{\delta_1 E}{E - E_e} = \frac{\delta_1 E}{E_e} \frac{E_e}{E - E_e} = \frac{2\delta f}{h} \frac{E}{E - E_e}$$

Valeurs numériques

Les valeurs les plus faibles de $E-E_e$ ont été obtenues sur le banc d'essais équipé de 10 ressorts de faible raideur (raideur résultante = 98,5kN/m). Hormis le cas des deux points aberrants de la figure 9, la différence $E-E_e$ est supérieure à 0,06 E . Par ailleurs, $h = 5$ cm, δ est au plus de l'ordre de 2 cm et f de l'ordre de 0,005 [10].

d'où :

$$\frac{\delta_1 E}{E - E_e} < \frac{2 \times 2 \times 0,005}{5 \times 0,06}$$

soit

$$\frac{\delta_1 E}{E - E_e} < 6,7 \times 10^{-2}$$

II-4 - EVALUATION DE L'ÉNERGIE ÉLASTIQUE W_e EMMAGASINÉE DANS LA PLAQUE DE CHOC ET DU RAPPORT DE CETTE ÉNERGIE À CELLE E_e ABSORBÉE DANS LE SAC

Des calculs ne sont possibles que si l'on admet des hypothèses simplificatrices. Ils permettent d'obtenir un premier ordre de grandeur de l'énergie emmagasinée. Un deuxième ordre de grandeur est ensuite obtenue en corrigeant les résultats obtenus pour tenir compte de certains écarts entre les hypothèses de la première approche et la réalité. Ces approximations ne sont acceptables que dans la mesure où l'énergie emmagasinée dans la plaque de choc est faible par rapport à la somme des énergies emmagasinée et dissipée dans le sac.

II-4.1 Répartition de la force de choc sur la plaque

Il a été vérifié qu'au cours d'un choc, la surface de contact entre le sac et la plaque était sensiblement circulaire. Les diamètres des traces des cercles de contact ont été mesurés après un poser et après un lâcher d'une hauteur de 75 cm des sacs sur un sol de béton, un tel lâcher constituant un choc très sévère dans ces conditions. Les valeurs mesurées de ces diamètres sont données dans le tableau II.1.

| Remplissage du sac | hauteur de chute (m) 0 | 0,75 |
|--------------------|---------------------------|------|
| billes | 0,24 | 0,31 |
| sable | 0,31 | 0,32 |

Tableau II.1

Diamètres exprimés en mètres des cercles de contact des sacs sur un sol de béton après une chute.

Dans le cas du sac de billes, le diamètre du cercle de contact augmente avec l'intensité de la force. Il varie entre les deux valeurs extrêmes $\varnothing_m=0,24\text{m}$ et $\varnothing_M=0,31\text{m}$. Dans le cas du sac de sable, il est pratiquement invariable et sera pris égal à $\varnothing_M=0,31\text{m}$.

La contrainte normale moyenne appliquée à la plaque est égale au rapport de la force de choc par l'aire du cercle de contact. Soit p cette contrainte, R la force de choc, \varnothing le diamètre du cercle de contact. Alors,

$$p = \frac{4R}{\pi\varnothing^2} \quad (\text{II-5})$$

\varnothing prenant les valeurs comprises entre $\varnothing_m=0,24\text{ m}$ et $\varnothing_M=0,31\text{ m}$.

Dans le cas du sac de billes, on peut calculer deux valeurs extrêmes de p correspondant aux valeurs extrêmes de \varnothing .

II-4.2 Hypothèses de la première approche

- 1 Le chargement de la plaque est supposé quasi statique.
- 2 La plaque est d'épaisseur e_B constante ; elle est sans évidements.
- 3 Elle est assimilée à une plaque circulaire de diamètre \varnothing égal à celui du cercle de contact du sac.
- 4 La pression s'appliquant sur la plaque est uniforme.
- 5 Dans le cas d'un montage à un seul ressort, la plaque est en appui en son centre.
- 6 Dans le cas d'un montage à plus d'un ressort, la plaque est en appui simple sur la circonférence de diamètre $\varnothing_R=200$ mm sur laquelle sont implantés les ressorts.

II-4.3 Calcul en première approche de l'énergie emmagasinée dans la plaque

II-4.3.1 Cas du montage de la plaque sur plus d'un ressort

Dans le cas du sac de billes, le calcul est effectué pour les deux valeurs de \varnothing extrêmes. Les distributions de pressions dans ces deux cas sont représentées sur la figure II-3(a).

La figure II-3(b) montre que le chargement de la plaque peut être considéré comme résultant de la superposition des chargements (i) et (ii) de la figure II-3(b).

Soit W_{1c} l'énergie emmagasinée dans la plaque de choc sous le chargement (i), W_{2c} l'énergie emmagasinée dans cette plaque sous le chargement (ii) et W_{3c} le travail des forces R distribuées sur le cercle de diamètre \varnothing_R lorsqu'on applique le chargement (ii). L'énergie emmagasinée dans la plaque s'écrit :

$$W_C = W_{1c} + W_{2c} + W_{3c} \quad (\text{II-6})$$

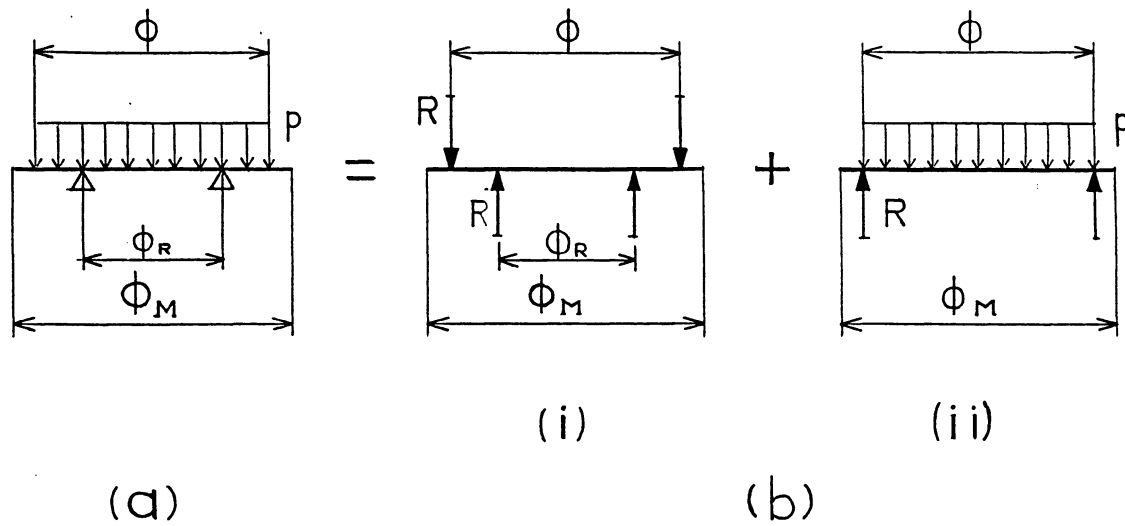


Fig. II-3 Répartition des charges sur la plaque de choc supportée par plusieurs ressorts distribués régulièrement sur la circonférence de diamètre ϕ_R
 a) distribution des pressions et des forces concentrées
 b) décomposition des charges.

Pour simplifier l'indice C relatif à la plaque de choc sera omis dans les calculs suivants, excepté dans les cas où il pourrait y avoir confusion.

II-4.3.1.1 Calcul de W ,

Posons $u = \phi_R / \phi$

La flèche w , de la plaque, à la distance $r = u\phi/2$ du centre, sous l'effet des forces R dans le chargement (i) est d'après la référence [11] :

$$w_1(u) = \frac{R}{8\pi D} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 [(1-u^2)(q-su^2) + 2u^2 L_N u]$$

avec

$$q = \frac{3+\sigma}{2(1+\sigma)} \quad s = \frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)} \quad \text{et} \quad D = \frac{\mathcal{E}e^3}{12(1-\sigma^2)}$$

où \mathcal{E} est le module d'Young, σ , le coefficient de POISSON et e l'épaisseur de la plaque.

Le travail fourni par les forces R est alors :

$$W_1 = \frac{R}{2} w_1(u)$$

d'où

$$\frac{W_1}{R^2} = \frac{1}{16\pi D} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 [(1-u^2)(q-su^2) + 2u^2 L_N u] \quad (II-7)$$

II-4.3.1.2 Calcul de W_2

La flèche $w_2(v)$ de la plaque à distance du centre $r=v\phi/2$ sous l'effet du chargement (ii) de la figure II-3(b) est donnée par la relation suivante [11] :

$$w_2(v) = \frac{p\phi^4}{1024D} (1-v^2)(z-v^2)$$

avec :

$$z = \frac{5+\sigma}{1+\sigma}$$

où p est la pression agissant sur cette plaque.

La pression agissant sur une bande circulaire de largeur dr accomplit un travail égal à :

$$w\pi r p dr$$

L'énergie communiquée à la plaque par les forces de pression au cours du chargement (ii) s'exprime alors par la relation :

$$\begin{aligned} W_2 &= \pi p \int_0^{\phi/2} w_2\left(\frac{2r}{\phi}\right) r dr \\ &= \pi p \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \int_0^1 w_2(v) v dv \\ &= \pi p^2 \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \frac{\phi^4}{1024D} \underbrace{\int_0^1 (1-v^2)(z-v^2) v dv}_Q \end{aligned}$$

$$Q = \left| \frac{v^6}{6} - \frac{z+1}{4} v^4 + z \frac{v^2}{2} \right|_0^1 = \frac{3z-1}{12}$$

Tous calculs faits,

$$W_2 = \frac{\pi p^2 \phi^6}{49152D} (3z-1) \quad (\text{II-8})$$

Après report dans cette relation de l'expression (II-5) de p , on obtient tous calculs faits, l'expression suivante :

$$\frac{W_2}{R^2} = \frac{\phi^2}{3072\pi D} (3z-1) \quad (\text{II-9})$$

II-4.3.1.3 Calcul de W_3

Le travail W_3 des forces R au cours du chargement (ii) s'écrit :

$$W_3 = -Rw_2(u) \quad (\text{II-10})$$

où $w_2(u)$ est la flèche de la plaque à la distance $r = \phi/2$ du centre, lors du chargement (ii). D'après la référence [11],

$$w_2(u) = \frac{p}{64D} \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 (1-u^2)(z-u^2) \quad (\text{II-11})$$

En substituant p par son expression (II-5) dans le second membre de l'équation (II-11) puis en reportant l'expression w_2 ainsi obtenue dans la relation (II-10), on obtient l'expression suivante :

$$\frac{W_3}{R^2} = -\frac{\phi^2}{256\pi D} (1-u^2)(z-u^2) \quad (\text{II-12})$$

II-4.3.1.4 Calcul de W/R^2

En portant les expressions (II-7) (II-9) et (II-12) de W_1 , W_2 et W_3 dans l'équation (II-6) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{W}{R^2} &= \frac{\varnothing^2}{3072\pi D} \left\{ 48[(1-u^2)(q-su^2) + 2u^2L_Nu] + (3z-1) + 12(1-u^2)(z-u^2) \right\} \\ &= \frac{\varnothing^2}{3072\pi D} \left\{ (1-u^2)[48(q-su^2) + 12(z-u^2)] + 96u^2L_Nu + (3z-1) \right\} \\ &= \frac{\varnothing^2}{3072\pi D} \left\{ (1-u^2)[48q - u^2(48s+12) + 12z] + 96u^2L_Nu + (3z-1) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

II-4.3.2 Cas du montage de la plaque sur un seul ressort

La figure II-4 montre que le chargement de la plaque peut être considéré comme la superposition des chargements (i) et (ii). Le principe du calcul de l'énergie W emmagasinée dans la plaque est en tous points conforme à celui exposé aux paragraphes II-4.3.1.

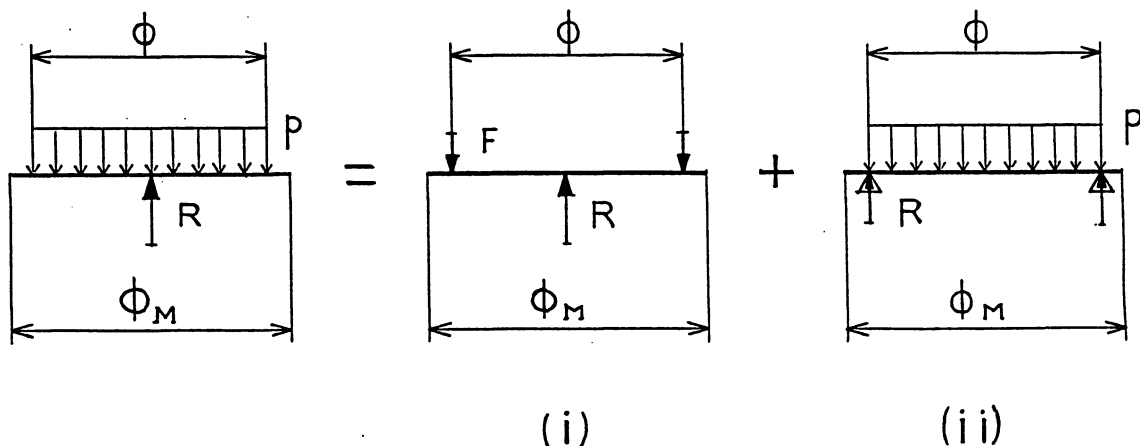


Fig. II-4 Répartition des charges sur la plaque de choc supportée par un ressort central
 a) distribution des pressions et localisation de la charge concentrée
 b) décomposition des charges

II-4.3.2.1 Calcul de W_1

L'énergie fournie à la plaque par le chargement (i), W_1 , s'exprime par la relation :

$$W_1 = \frac{1}{2} R w_1(0)$$

où $w_1(0)$ est le déplacement du centre par rapport aux appuis. D'après la référence [11],

$$w_1(0) = \frac{R \varnothing^2}{64 \pi D} z' \quad (\text{II-14})$$

avec

$$z' = \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} = 2,53$$

En reportant l'expression de $w_1(0)$ dans celle de W_1 , on obtient l'expression suivante :

$$\frac{W_1}{R^2} = \frac{\varnothing^2}{128 \pi D} z' \quad (\text{II-15})$$

II-4.3.2.2 Calcul de W_2

W_2 prend la même valeur que dans le cas de l'appui circulaire.

$$\frac{W_2}{R^2} = \frac{\varnothing^2}{3072 \pi D} (3z - 1) \quad (\text{II-16})$$

II-4.3.2.3 Calcul de W_3

Le travail des forces R lors du chargement (ii) s'écrit :

$$W_3 = -R w_2(0) \quad (\text{II-17})$$

où $w_2(0)$ est le déplacement du centre de la plaque par rapport aux appuis dans le chargement (ii) de la figure II-4.

D'après la référence [11],

$$w_2(0) = \frac{p\varnothing^4}{1024D} z$$

En substituant dans cette relation, p par son expression (II-5) et en portant le résultat obtenu dans la relation (II-17), on obtient l'expression suivante :

$$\frac{W_3}{R^2} = -\frac{\varnothing^2}{256\pi D} z \quad (\text{II-18})$$

II-4.3.2.4 Expression de W/R^2

En reportant dans (II-6) les expressions (II-15), (II-16) et (II-17) de W_1 , W_2 et W_3 , on obtient :

$$\frac{W}{R^2} = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{R^2} = \frac{\varnothing^2}{3072\pi D} (24z' + 3z - 1 - 12z)$$

soit :

$$\frac{W}{R^2} = \frac{\varnothing^2}{3072\pi D} (24z' - 9z - 1) \quad (\text{II-19})$$

II-4.4 Calculs numériques

II-4.4.1 Valeurs des constantes

$$\varnothing = 0,2 \text{ m}$$

$$e = 0,01 \text{ m}$$

$$\mathcal{E} = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \text{ (alliage d'aluminium)}$$

$$\sigma = 0,3$$

$$q = \frac{3,3}{2,6} = 1,269$$

$$s = \frac{0,7}{2,6} = 0,269$$

$$z = \frac{5,3}{1,3} = 4,077$$

$$D = \frac{7 \times 10^{10} \times 10^{-6}}{12(1 - 0,3^2)} = 0,641 \times 10^4 \text{ Nm}$$

II-4.4.2 Energie emmagasinée dans la plaque de choc

II-4.4.2.1 Cas du montage de la plaque sur plus d'un ressort

II-4.4.2.1.1 Cas $\varnothing = \varnothing_M = 0,31\text{m}$

$$\frac{W}{R^2} = \frac{0,31^2}{3072 \times \pi \times 0,641 \times 10^4} \left\{ \begin{array}{l} 0,584 \times [48 \times 1,269 - 0,416 \times (48 \times 0,269 + 12) + 12 \times 4,077] \\ + 96 \times 0,416 L_N 0,645 + [(3 \times 4,077) - 1] \end{array} \right\} = 1,55 \times 10^{-9} \text{ m/N}$$

II-4.4.2.1.2 Cas $\varnothing = \varnothing_M = 0,24\text{m}$

$$u = \frac{0,2}{0,24} = 0,833 \quad u^2 = 0,694 \quad 1 - u^2 = 0,306$$

$$\frac{W}{R^2} = \frac{0,24^2}{3072 \times \pi \times 0,641 \times 10^4} \left\{ \begin{array}{l} 0,306 \times [48 \times 1,269 - 0,694 \times (48 \times 0,269 + 12) + (12 \times 4,077)] \\ + 96 \times 0,694 L_N 0,833 + [(3 \times 4,077) - 1] \end{array} \right\} = 0,93 \times 10^{-9} \text{ m/N}$$

II-4.4.2.2 Cas du montage de la plaque sur un seul ressort

II-4.4.2.2.1 Cas $\varnothing = \varnothing_M = 0,31\text{m}$

$$z' = \frac{3,3}{1,3} = 2,53$$

$$\frac{W}{R^2} = \frac{0,31^2}{3072 \times \pi \times 0,641 \times 10^4} [24 \times 2,53 - (9 \times 4,077) - 1] = 1,6 \times 10^{-9} \text{ m/N}$$

II-4.4.2.2.2 Cas $\varnothing = \varnothing_M = 0,24\text{m}$

L'énergie emmagasinée dans la plaque est égale au produit de l'énergie calculée

dans le cas $\varnothing = \varnothing_M$ par le rapport $\left(\frac{\phi_m}{\phi_M} \right)^2 = \left(\frac{0,24}{0,31} \right)^2 = 0,6$.

II-4.5 Calcul du rapport de l'énergie emmagasinée dans la plaque de choc W_c à l'énergie E_a absorbée par le sac

De nouveau l'indice C relatif à la plaque de choc est omis.

$$\frac{W}{E_a} = \frac{W}{R^2} \frac{1}{\frac{E_a}{R^2}}$$

Or, $E_a = E_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^n$, d'après le paragraphe 4.2 dans l'hypothèse où W est négligeable par rapport à E_a .

Pour le sac de billes $E_0 = 1J$, $R_0 = 1,1kN$ et $n = 2$. Pour le sac de sable, E_a est du même ordre que pour le sac de billes. On n'effectuera donc le calcul que pour le cas du sac de billes. Dans ce cas,

$$\frac{E_a}{R^2} = \frac{E_0}{R_0^2}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{W}{E_a} &= \frac{W}{R^2} \frac{R_0^2}{E_0} \\ &= 1,21 \times 10^6 \frac{W(J)}{R(N)^2} \end{aligned} \quad (II-20)$$

D'après le paragraphe II-4.4.2.2.1, le maximum de l'énergie emmagasinée est obtenue dans le cas du montage à un seul ressort lorsque le diamètre du cercle de contact est de 0,31 m. En portant la valeur de $\frac{W}{R^2}$ obtenue dans ce cas dans le second membre de la relation (II-19), on obtient

$$\frac{W}{E_a} = 1,21 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-9} = 1,94 \times 10^{-3}$$

II-5 - EVALUATION DE L'ÉNERGIE ÉLASTIQUE W_B EMMAGASINÉE DANS LA PLAQUE-BÂTI

La figure II-5(a) schématise la plaque-bâti. Le fait qu'elle repose sur le sol par 3 plots constituant les sommets d'un triangle équilatéral de 346 mm de côté, rend difficile l'étude théorique de cette plaque. Le recours à l'expérimentation a été préféré.

II-5.1 Hypothèses

- Comme au paragraphe II-4.2, le chargement de la plaque-bâti est quasi statique.

II-5.2 Expressions de l'énergie élastique maximale emmagasinée, W_B et du rapport W_B/E_a

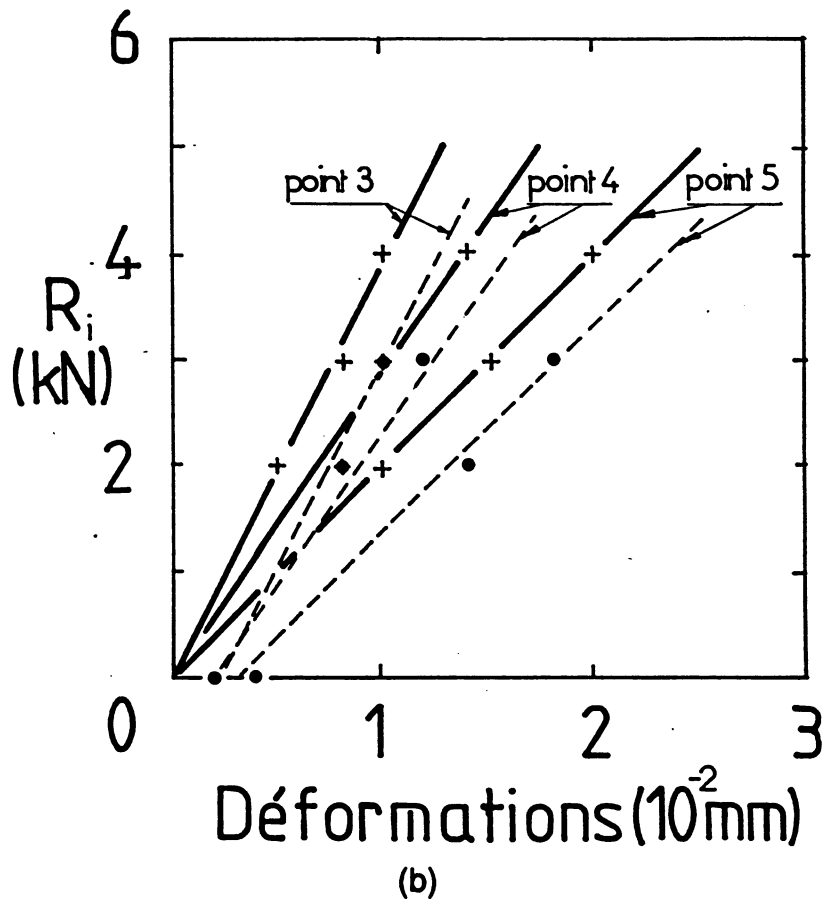
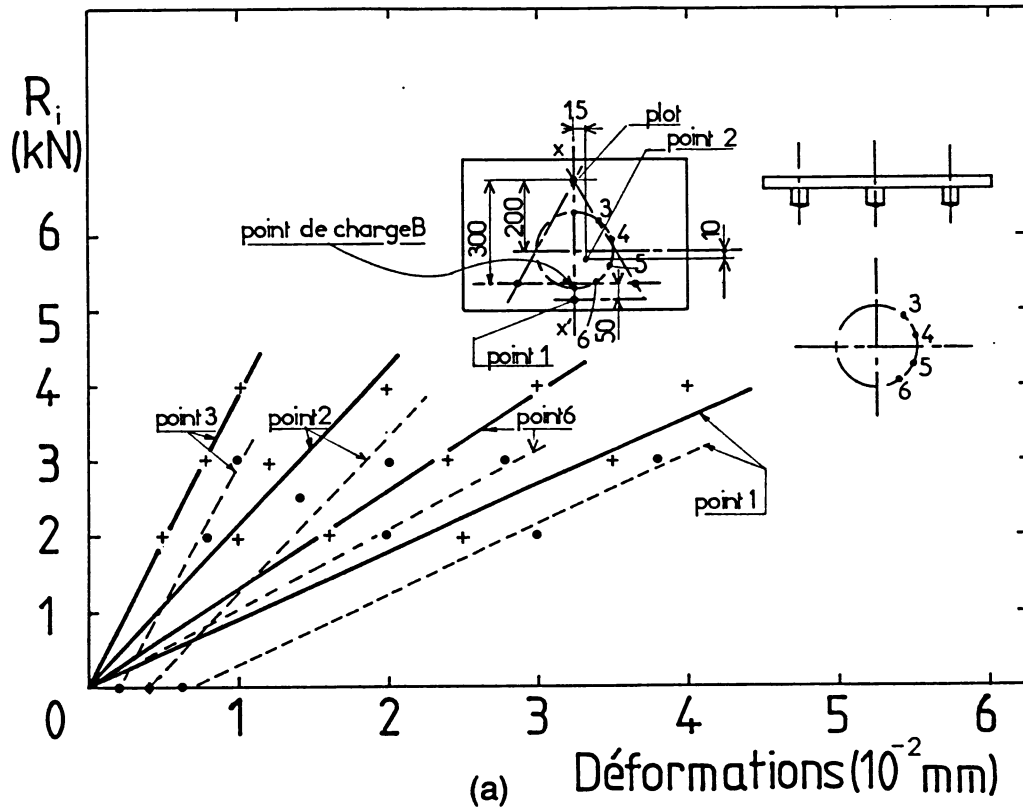
II-5.2.1 Cas du montage à un seul ressort

$$W_B = \frac{1}{2} R_B w_B(0)$$

R_B étant la valeur maximale de l'effet appliqué au centre de la plaque et $w_B(0)$ le déplacement de cette force.

Les figures II-5(a) et II-5(b) représentent les déformations de la plaque-bâti en différents points de fixation des capteurs, pour une force de chargement de 4 kN au maximum, appliquée aux points de fixation du capteur B situé sur l'axe de symétrie de la plaque. La figure II-5(c) représente les déformations des points 7, 8 et 9, pour un chargement central de la plaque de 7 kN. Obtenue à partir de ces figures, la figure II-6 représente la déformée de la plaque le long de l'axe xx' de la figure II-5(a). $w_B(0) \approx 5 \times 10^{-5}$ m pour $R_B = 7$ kN, la force la plus élevée expérimentée dans ce cas.

$$\frac{W}{E_a} = \frac{1}{2} \frac{R_B w_B(0) R_0^2}{E_0 R^2}$$



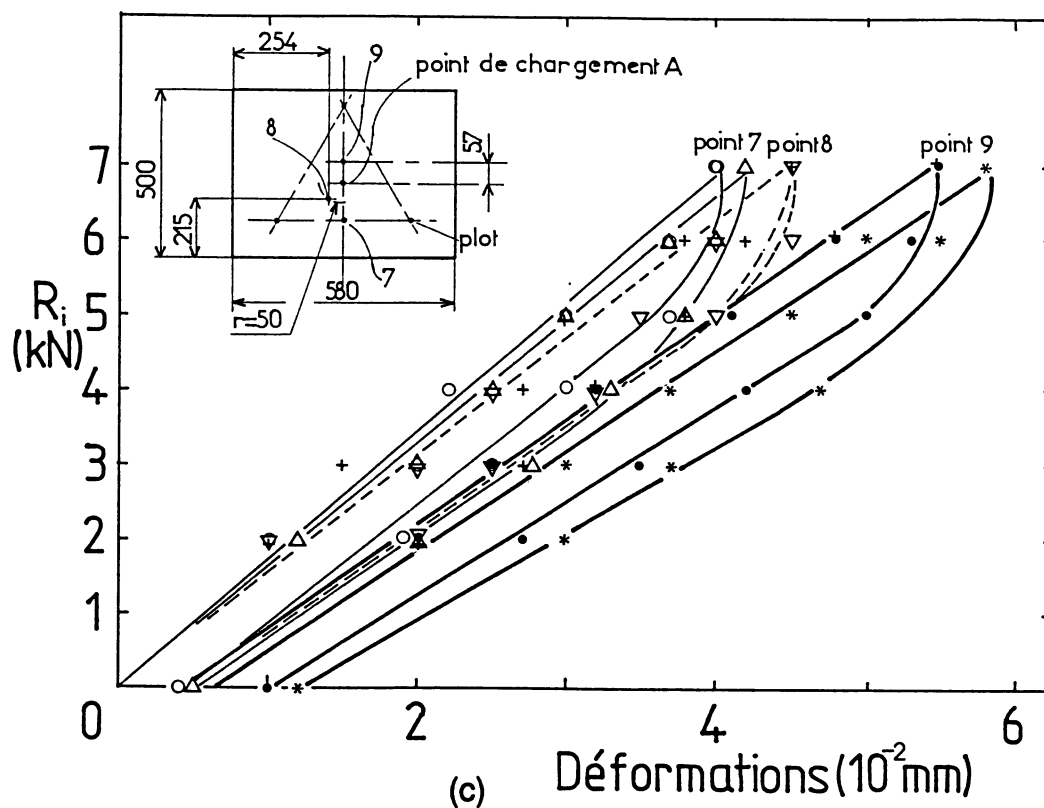


Fig. II-5(a), (b), (c). Courbes forces-déformations de la plaque-bâti du banc d'essais de chocs

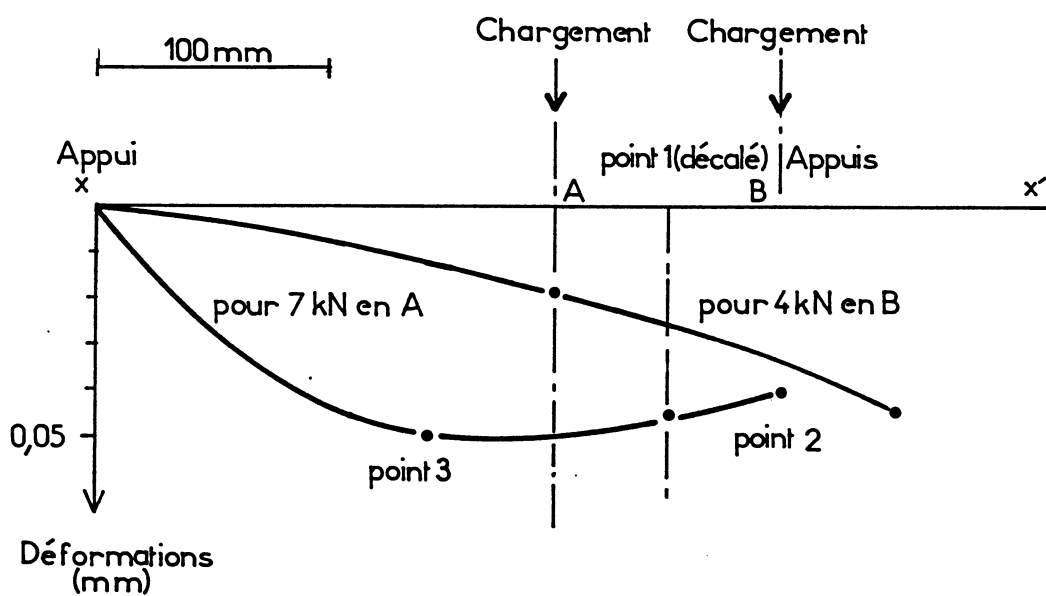


Fig. II-6 Déformations de la plaque-bâti du banc d'essais de chocs suivant l'axe x' de la figure II-5a.

avec $E_0 = 1 \text{ J}$ et $R_0 = 1,1 \text{ kN}$

Or, R_B est peu différent de R . Par suite,

$$\frac{W}{E_a} \approx \frac{1}{2} \frac{w_B(0)R_0^2}{E_0R_B}$$

En reportant les valeurs numériques prises par $w_B(0)$, R_0 , E_0 et R_B on obtient

$$\frac{W}{E_a} = \frac{1}{2} \frac{5 \times 10^{-5} \times 1,21 \times 10^6}{1 \times 7000} = 4,3 \times 10^{-3}$$

II-5.2.2 Cas du montage à 10 ressorts

L'indice B relatif à la plaque-bâti est désormais omis sauf exception en cas de confusion.

La flèche de la plaque au droit d'un capteur i , sous l'action des forces R_j appliquées au droit des capteurs s'exprime par la relation :

$$w_i = \sum_j c_{ij} R_j$$

et l'expression du potentiel interne par la relation suivante due à Clapeyron :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i R_i w_i$$

soit en reportant dans cette dernière l'expression de w_i :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} R_i R_j$$

Du fait de la symétrie de la plaque, les capteurs ont sensiblement la même réponse.

Alors, $R_i \approx R_j \approx R/10$.

D'autre part, $c_j = c_j$ d'après le théorème de Maxwell-Betti. Alors,

$$W \approx \frac{R^2}{200} \sum_i \sum_j c_{ij} \tag{II-21}$$

Compte tenu de la symétrie de la plaque, on peut démontrer que le nombre de coefficients c_{ij} à déterminer est au nombre de 31. Pour éviter un travail long et fastidieux, il est préférable d'effectuer le calcul de W à partir d'une valeur majorée de $\sum_i \sum_j c_{ij}$.

Renombrons les positions des capteurs et convenons que le capteur situé à l'intersection de l'axe $x'x$ et du triangle de sustentation de la plaque porte le numéro 1 et que les autres capteurs soient numérotés de 2 à 10 à la suite dans le sens de rotation inverse des aiguilles d'une montre.

Le tableau II-2 donne les valeurs des coefficients c_{ij} pour $1 \leq j \leq 6$ déterminés à partir des flèches de la plaque sous une force de 4 kN (valeur la plus élevée atteinte) appliquée au point B de figure 6a. Ce tableau et l'intuition suggèrent :

| | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| c_{1j} | 0,83 | 0,75 | 0,50 | 0,40 | 0,25 | 0,18 |

Tableau II-2 : Valeurs des coefficients c_{ij} multipliées par 10^8 , exprimées en mètres par Newton

que le coefficient c_{11} est le plus élevé de tous. La somme de c_{ij} est alors majorée par la quantité $100 c_{11}$ (puisque i et j varient de 1 à 10). On peut alors écrire d'après (II-21) :

$$W < \frac{R^2}{2} c_{11}$$

et

$$\frac{W}{E_a} < \frac{c_{11} R_0^2}{2E_0}$$

avec $R_0 = 1,1$ kN et $E_0 = 1$ J. En remplaçant c_{11} par sa valeur tirée du tableau II-2, on obtient

$$\frac{W}{E_a} < \frac{0,83 \times 10^{-8} \times 1,21 \times 10^6}{2}$$

II-6 - VALIDITE DE LA METHODE DE MESURE

II-6.1 Enoncé du problème

Les capteurs de forces sont constitués par un corps élastique dont les déformations mesurées par des jauges de contraintes sont traduites en efforts. Ces capteurs sont munis d'un pion de centrage de l'ordre de 0,2 kg, qui permet de positionner le ressort dans l'axe du capteur. Une fraction de la masse du ressort vient s'ajouter à celle du pion de centrage. Les capteurs sont fixés sur la plaque-bâti qui est elle même le siège de vibrations sous l'effet du choc.

Soit $P(t)$ la force appliquée au capteur à l'instant t et $P_m(t)$ la force qu'il indique au même instant. La différence

$$P_m(t) - P(t) = \Delta(t) \quad (\text{II-22})$$

est égale à l'erreur de mesure.

En régime quasi statique, $P_m(t) \approx P(t)$. L'erreur de mesure est négligeable ; mais en régime rapidement variable, elle peut ne plus l'être.

L'objet de ce chapitre est de déterminer l'expression de $\Delta(t)$ et d'estimer les erreurs de mesure réalisées.

II-6.2 Comportement dynamique des capteurs d'efforts et de la plaque-bâti

II-6.2.1 Capteurs d'efforts

L'un des capteurs a été fixé sur un massif très rigide (machine de traction). Des masses de 32 g, 178 g, 196 g, 330 g et 490 g ont été successivement fixées sur la tête du

capteur. La réponse de celui-ci à une excitation impulsionnelle provoquée par un coup de marteau sur la masse ajoutée, a été enregistrée pour chacune des quatre valeurs de celle-ci. Ces réponses sont approximativement celles d'un oscillateur très faiblement amorti à un degré de liberté dans les cas où la masse ajoutée est de 32 g, 178 g, 196 g et 490 g. Dans le cas où cette masse est de 330 g, la réponse est approximativement celle d'un oscillateur à deux degrés de liberté dont les fréquences des modes de vibrations, peu différentes, donnent lieu à un phénomène de battement.

Dans le cas où le capteur se comporte sensiblement comme un oscillateur à un degré de liberté, la relation entre la masse m_o de la tête nue du capteur, la masse Δm ajoutée sur celle-ci, la raideur k_2 de l'élément élastique de ce capteur et la fréquence propre de N_2 de ce dernier, équipé de la masse Δm s'écrit :

$$\frac{m_o + \Delta m}{k_2} = \frac{1}{(2\pi N_2)^2} \quad (\text{II-23})$$

Les enregistrements des réponses du capteur en fonction du temps permettent d'en déterminer les fréquences N_2 en fonction de Δm . Dans le cas où la masse ajoutée est de 330 g, l'on peut déterminer approximativement la fréquence de la composante vibration de plus grande amplitude à partir du nombre entier d'oscillations sur une durée de temps la plus voisine possible d'un nombre entier de périodes du battement ; mais cette fréquence diffère de N_2 . La relation (II-23) est représentée par la figure II-7. Celle-ci permet de déterminer les valeurs de k_2 et de m_o , soit : $k_2 = 18\text{MN/m}$ et $m_o = 60\text{ g}$.

Remarque : Sur la figure II-7, l'abscisse du point correspondant au cas où $\Delta m = 330\text{ g}$ est la fréquence du mode propre de plus grande amplitude. La fréquence N_2 relative à ce cas est l'abscisse du point de la droite représentative de (II-23) qui correspond à $\Delta m = 330\text{ g}$. Les mesures étant réalisées à 1% près sur Δm et N_2 , le couplage du capteur et du support pour $\Delta m = 330$, crée un glissement significatif de la fréquence du mode de vibrations considéré par rapport à la fréquence N_2 du capteur placé sur un support massif indéformable.

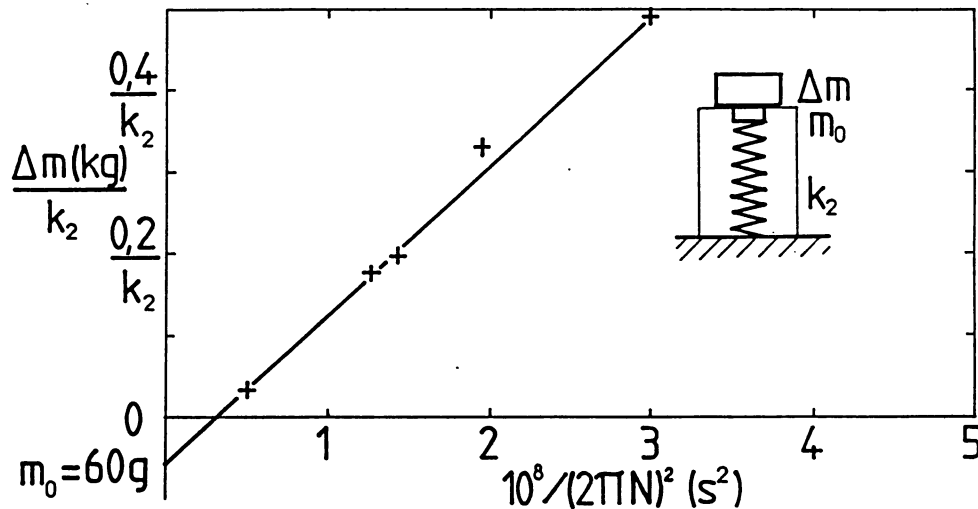


Fig. II-7 Relation entre la masse ajoutée sur la tête des capteurs d'effort, leur raideur et leur fréquence propre de vibration.

II-6.2.2 Système plaque-bâti/capteurs

Lorsque l'on fixe un capteur sur la plaque-bâti en l'un des points prévus à cet effet et que l'on excite le système ainsi constitué par un coup de marteau sur la tête du capteur, la réponse de celui-ci se manifeste dans ses grandes lignes, sous la forme d'un phénomène de battement. En première approximation, cette réponse peut être considérée comme la somme de deux composantes vibratoires faiblement amorties de fréquences voisines. Le système plaque-capteur peut alors être assimilé à un système à deux degrés de liberté (fig. II-8). Dans ce modèle, les paramètres m_1 , k_1 , m_2 , k_2 représentent respectivement, la masse effective de la plaque, la raideur de celle-ci, la masse effective de la tête équipée du capteur de forces et la raideur de son élément élastique.

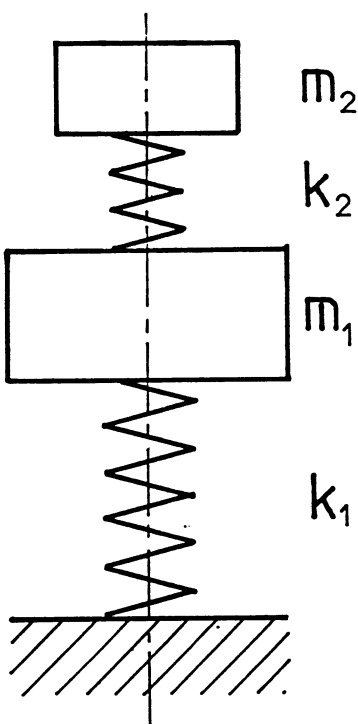


Fig. II-8 Modélisation simplifiée du système plaque-bâti/capteur.

Le système plaque-bâti/capteur pour une position définie du capteur, est caractérisé par quatre pulsations angulaires Ω_1 , Ω_2 , ω_1^* et ω_2^* où Ω_1 est la pulsation angulaire du mouvement de la masse m_1 lorsque celui de la masse m_2 est bloqué ; Ω_2 la pulsation angulaire de la masse m_2 lorsque celui de la masse m_1 est bloqué ; ω_1^* et ω_2^* , les pulsations angulaires des modes normaux du système. Or $\Omega_2^2 = (2\pi N_2)^2$. Ω_2^2 calcule donc à partir de la relation (II-23).

Notons respectivement ν_b la fréquence de battement, ν_1^* , la fréquence de l'un des modes normaux du système et ν_2^* , celle de l'autre. Alors,

$$\nu_b = |\nu_1^* - \nu_2^*|$$

La fréquence ν_1^* ou ν_2^* du mode de plus grande amplitude se détermine en première approximation, à partir du plus grand nombre entier de vibrations comprises entre deux minima ou deux maxima du signal résultant délivré par le capteur d'efforts.

D'autre part, on démontre [13] que les fréquences des modes normaux ν_1^* et ν_2^* encadrent les fréquences $\nu_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}$ et $\nu_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi}$. Il est alors théoriquement possible de déterminer approximativement les fréquences de ces modes normaux. Plus précisément, on démontre les formules suivantes :

$$\Omega_1^2 = \omega_1^{*2} + \omega_2^{*2} - \Omega_2^2 \quad (\text{II-24})$$

avec $\Omega_1^2 = (k_1 + k_2)m_1$,

$$\omega_1^2 = \Omega_1^2 + \frac{1 - \left(\frac{\omega_1^{*2} - \omega_2^{*2}}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \right)^2}{4\Omega_2^2} (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \quad (\text{II-25})$$

$$\Omega_1^2 - \omega_1^2 = \frac{k_2}{m_1} \quad (\text{II-26})$$

A partir des enregistrements, on détermine Ω_2 et les pulsations angulaires des modes normaux ; mais on ne sait pas encore si ω_1^*/ω_2^* est supérieur ou inférieur à l'unité. A partir de la relation (II-24), on détermine Ω_1^2 . On doit théoriquement pouvoir ranger $\omega_1^{*2}, \Omega_1^2, \Omega_2^2$ et ω_2^{*2} dans l'ordre des valeurs croissantes ou décroissantes selon que la valeur du rapport Ω_1/Ω_2 est supérieure ou inférieure à l'unité. Les relations (II-25) et (II-26) permettent ensuite de calculer théoriquement ω_1^2 et m_1 . En réalité, en raison des imprécisions sur la détermination de $\omega_1^{*2}, \Omega_1^2, \Omega_2^2$ et ω_2^{*2} et du fait que ces grandeurs sont voisines, il est illusoire de vouloir déterminer avec une précision acceptable les valeurs de m_1 pour chacune des positions des capteurs. On sait cependant, vu la nature des composants, que $m_2 \ll m_1$. Globalement, les fréquences des modes normaux se situent dans la bande 1,1 kHz - 1,5 kHz.

II-6.3 Mise en équation

II-6.3.1 Expression de l'erreur de mesure

Soient x_1 et x_2 les déplacements des masses et m_2 par rapport à leur position d'équilibre. La force mesurée par un capteur a pour expression :

$$P_m(t) = k_2(x_2(t) - x_1(t))$$

L'équation (II-22) peut alors de mettre sous la forme :

$$\Delta(t) = k_2(x_2(t) - x_1(t)) - P(t)$$

ou encore en prenant les transformées de Laplace des deux membres, sous la forme :

$$\mathcal{L} \Delta(t) = k_2(X_2(p) - X_1(p)) - \mathcal{P}(t) \quad (\text{II-27})$$

II-6.3.2 Solution générale

Les forces de pesanteur sont tout à fait négligeables par rapport aux forces en jeu. L'application de la loi de NEWTON permet alors d'écrire les équations suivantes :

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (\text{II-28})$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = P(t)$$

$P(t)$ étant la force appliquée au capteur

Conditions initiales

On suppose le système au repos aux temps négatifs et nul.

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \ddot{x}_1(0) \quad (\text{II-29})$$

$$x_2(0) = \dot{x}_2(0) = \ddot{x}_2(0)$$

Prenons la transformée de Laplace des deux membres de chaque équation du système (II-28), et ordonnons en les termes. On obtient alors le nouveau système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} [m_1 p^2 + (k_1 + k_2)] X_1 - k_2 X_2 &= 0 \\ -k_2 X_1 + (m_2 p^2 + k_2) X_2 &= \mathcal{P}(p) \end{aligned} \quad (\text{II-30})$$

En résolvant ce système d'équations par rapport à X_1 et X_2 puis en reportant les expressions dans (II-27), on obtient la relation suivante :

$$\mathcal{L}\Delta(t) = \left(\omega_2^2 \frac{p^2 + \omega_1^2}{p^4 + [\omega_1^2 + \omega_2^2(1 + \rho)]p^2 + \omega_1^2 \omega_2^2} - 1 \right) \mathcal{P}(p) \quad (\text{II-31})$$

en notant $\omega_1 = k_1/m_1$, $\omega_2 = k_2/m_2$ et $\rho = m_2/m_1$.

Les enregistrements suggèrent qu'en première approximation, $P(t)$ peut être approché, par des relations de la forme :

$$P(t) = P_I(t) + P_{II}(t) \quad (\text{II-32})$$

où $P_I(t)$ est le terme dû à la force de choc et $P_{II}(t)$, celui dû au mode de vibrations des ressorts (Cf. §. 4.1).

Lorsque la raideur globale des ressorts est inférieure à 0,25 MN/m, les réponses des capteurs suggèrent que $P_I(t)$ peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_I(t) &= P_{IM} \sin \alpha_1 t & (t \leq \frac{\pi}{\alpha_1}) \\ P_I(t) &= 0 & (t > \frac{\pi}{\alpha_1}) \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

où $\alpha_1 = \pi/\tau$, τ étant la durée du choc.

Lorsque la raideur globale des ressorts est supérieure à 1,2 MN/m, on observe que la force de choc "moyenne" monte d'abord très rapidement de zéro à une certaine valeur P_{10} . La courbe de variations de $P_I(t)$ présente, ensuite, une portion sensiblement rectiligne jusqu'au temps $t = \tau^*$, puis une portion, de concavité tournée vers les valeurs négatives de $P_I(t)$, qui passe par le maximum de $P_I(t)$ au temps τ_M , puis enfin, une portion sensiblement rectiligne, coupant l'abscisse au temps τ (durée de choc). L'excitation "moyenne" peut alors être approchée sur les deux premières portions de courbes, le domaine qui nous intéresse, par les relations suivantes :

$$P_I(t) = P_{10}H(t) + (P_I^* - P_{10}) \frac{t}{\tau^*} \quad (t \leq \tau^*) \quad (a)$$

$$P_I(t) = P_I^* + \frac{P_I^* - P_{10}}{\alpha_1 \tau^*} \sin \alpha_1 (t - \tau^*) \quad 0 < t - \tau^* \leq \frac{\pi}{\alpha_1} \quad (b) \quad (II-34)$$

avec

$$\alpha_1 = \pi/2(\tau_M - \tau^*)$$

$H(t)$ est l'échelon unité.

Remarque :

(1) Pour $t > \tau$, le système vibre de part et d'autre de sa configuration d'équilibre, mais ces vibrations ne présentent pas d'intérêt pratique.

(2) Les réponses des capteurs n'ont pas été étudiées pour les raideurs globales comprises entre 0,25 MN/m et 1,2 MN/m.

Les enregistrements d'efforts en fonction du temps suggèrent également que $P_{II}(t)$ dans (32) peut être mis sous la forme suivante :

$$P_{II}(t) = P_{II\max}(t) \sin \alpha_{II} t \quad (II-35)$$

α_{II} étant la pulsation angulaire du mode de vibrations des ressorts utilisés. $P_{II}(t)$ dépend du sens de variation de $P_I(t)$ et des conditions d'essais.

Lors d'un essai de choc, la valeur de $P_{IIM}(t)$ peut souvent être considérée comme constante en toute première approche, tant que les variations de $P_I(t)$ restent monotones, mais la valeur de $P_{IIM}(t)$ à la montée en effort est généralement très supérieure à celle de $P_{IIM}(t)$ à la descente sans que l'on puisse expliquer ce subit changement de valeur (Cf. § 4.1).

6.3.3 Résolution de l'équation (II-31) dans le cas où $P(t)$ est semi-sinusoidal

Posons $\pi/2\tau = \alpha_p$, alors,

$$\mathcal{P}(p) = P_{IM} \frac{\alpha_I}{p^2 + \alpha_I^2} (1 + e^{p\tau}) + P_{IIM} \frac{\alpha_{II}}{p^2 + \alpha_{II}^2} \quad (\text{II-36})$$

Puisque l'on ne s'intéresse qu'aux mesures obtenues pour $t < \tau$, la solution peut être recherchée pour $P(t) = P_{IM} \sin \alpha_I t$, c'est à dire pour :

$$\mathcal{P}(p) = P_{IM} \frac{\alpha_I}{p^2 + \alpha_I^2} + P_{IIM} \frac{\alpha_{II}}{p^2 + \alpha_{II}^2} = \sum_{k=I}^{II} P_{kM} \frac{\alpha_k}{p^2 + \alpha_k^2} \quad (k = I, II)$$

L'équation (II-31) s'écrit :

$$\mathcal{L} \Delta(t) = \omega_2^2 \sum_k \alpha_k P_{kM} \left(\frac{p^2 + \omega_1^2}{(p^4 + bp^2 + c)(p^2 + \alpha_k^2)} - \frac{1}{\omega_2^2 (p^2 + \alpha_k^2)} \right) \quad (k = I, II) \quad (\text{II-37})$$

avec

$$b = \omega_1^2 + \omega_2^2 (1 + \rho) \text{ où } \rho = \frac{m_2}{m_1} \text{ et } c = \omega_1^2 \omega_2^2$$

L'équation (II-37) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathcal{L}\Delta(t)}{\omega_2^2} = \sum_{k=1}^n \alpha_k P_{km} \left(\frac{A_k}{(p^2 + \omega_1^{*2})} + \frac{B_k}{p^2 + \omega_2^{*2}} + \frac{C_k}{p^2 + \alpha^2} - \frac{1}{\omega_2^2(p^2 + \alpha_k^2)} \right) \quad (\text{II-38})$$

$-\omega_1^{*2}$ et $-\omega_2^{*2}$ étant les racines de l'équation

$$p^4 + bp^2 + C = 0$$

Par suite,

$$\omega_1^{*2} = \frac{b}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C}{b^2}} \right)$$

$$\omega_2^{*2} = \frac{b}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4C}{b^2}} \right)$$

Les signes étant choisis de sorte que ω_1^* , Ω_1 , Ω_2 et ω_2^* soient rangés dans un ordre de valeurs croissantes ou décroissantes.

Signe du discriminant

$$1 - \frac{4C}{b^2} = 1 - \frac{4\omega_1^{*2}\omega_2^{*2}}{[\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}(1+\rho)]^2}$$

$$= \frac{[\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}(1+\rho)]^2 - 4\omega_1^{*2}\omega_2^{*2}}{[\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}(1+\rho)]^2}$$

Le discriminant est positif si

$$\omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}(1+\rho) > 2\omega_1\omega_2$$

Cette inéquation s'écrit encore sous la forme :

$$(\omega_1\omega_2)^2 > \omega_2^2\rho$$

Elle est donc toujours vérifiée. Le discriminant est toujours positif et donc ω_1^{*2} et ω_2^{*2} sont toujours réels.

Le calcul, classique, des coefficients A_k , B_k et C_k de (II-38) donne :

$$A_k = \frac{-\omega_1^{*2} + \omega_1^2}{(\omega_2^{*2} - \omega_1^{*2})(\alpha_k^2 - \omega_1^{*2})} \quad (\text{II-39})$$

$$B_k = \frac{-\omega_1^{*2} + \omega_1^2}{(\omega_1^{*2} - \omega_2^{*2})(\alpha_k^2 - \omega_2^{*2})} \quad (\text{II-40})$$

$$C_k = \frac{-\alpha_k^2 + \omega_1^2}{(\omega_1^{*2} - \alpha_k^2)(\omega_2^{*2} - \alpha_k^2)} \quad (\text{II-41})$$

En prenant les transformées inverses des deux membres de (II-38), on obtient la relation :

$$\frac{\Delta(t)}{\omega_2^2} = \sum_{k=1}^n P_{kM} \left[\frac{A_k \alpha_k}{\omega_1^*} \sin \omega_1^* t + \frac{B_k \alpha_k}{\omega_2^*} \sin \omega_2^* t + \left(C_k - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \sin \alpha_k t \right] \quad (\text{II-42})$$

Aux valeurs t^* de t telles que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k \alpha_k}{\omega_1^*} \sin \omega_1^* t^* - \frac{B_k \alpha_k}{\omega_2^*} \sin \omega_2^* t^* = 0$$

$$\Delta(t^*) = \sum_{k=1}^n P_{kM} (C_k \omega_2^2 - 1) \sin \alpha_k t^* \quad (\text{II-43})$$

Si ω_1^* et ω_2^* sont beaucoup plus élevés que les α_k , il existe un grand nombre de valeurs t^* de t .

$$\Delta(t) = \sum_{k=1}^n P_{kM} (C_k \omega_2^2 - 1) \sin \alpha_k t \quad (\text{II-44})$$

s'interprète comme étant l'erreur de mesure sur la réponse "moyenne".

C_k peut s'écrire d'après (II-41).

$$C_k = \frac{1}{\omega_1^{*2} \omega_2^{*2}} \frac{\omega_1^2 - \alpha_k^2}{\left(1 - \frac{\alpha_k^2}{\omega_1^{*2}}\right) \left(1 - \frac{\alpha_k^2}{\omega_2^{*2}}\right)}$$

Or, $\omega_1^{*2} \omega_2^{*2} = \omega_1^2 \omega_2^2$, d'où :

$$C_k \omega_2^2 = \frac{1 - \frac{\alpha_k^2}{\omega_1^2}}{\left(1 - \frac{\alpha_k^2}{\omega_1^{*2}}\right) \left(1 - \frac{\alpha_k^2}{\omega_2^{*2}}\right)}$$

Dans le cas présent, m_1 est de toute évidence très supérieur à m_2 , k_2/m_2 est donc très inférieur à ω_1^2 et par suite Ω_1^2 et ω_1^2 sont du même ordre d'après (II-24). Comme ω_1^{*2} , ω_2^{*2} et Ω_1^2 sont de l'ordre de 1,1 kHz - 1,5 kHz (Cf. § II-6.2.2) et que $\alpha_k \leq 88$ Hz (Cf. § 4.1), le numérateur et les termes entre parenthèses du dénominateur de $C_k \omega_2^2$ sont voisins de l'unité. Par suite,

$$C_k \omega_2^2 - 1 \approx -\frac{\alpha_k^2}{\omega_1^2} + \frac{\alpha_k^2}{\omega_1^{*2}} + \frac{\alpha_k^2}{\omega_2^{*2}}$$

soit encore puisque ces termes sont du même ordre,

$$C_k \omega_2^2 - 1 \approx \alpha_k^2 / \omega_2^{*2}$$

L'expression (II-44) s'écrit alors,

$$\Delta(t) = P_{IM} \frac{\alpha_I^2}{\omega_2^{*2}} \sin \alpha_I t + P_{IIM} \frac{\alpha_{II}^2}{\omega_2^{*2}} \sin \alpha_{II} t \quad (\text{II-45})$$

$\Delta'(t) = P_{IM} \frac{\alpha_I^2}{\omega_2^{*2}} \sin \alpha_I t$ représente l'erreur "moyenne" de mesure sur la composante $P_I(t)$ de

l'excitation. Cette erreur s'identifie à $\Delta(t)$ aux instants $t = \tilde{t}$ où $\alpha_I \tilde{t} = k' \pi$, k' étant un entier positif. L'erreur relative "moyenne" sur $P_I(t)$ a pour expression :

$$\varepsilon = \frac{\Delta'(t)}{P_{IM} \sin \alpha_I t} = \frac{\alpha_I^2}{\omega_2^{*2}} \quad (\text{II-46})$$

Dans le cas d'une raideur globale des ressorts du banc d'essais de 250 kN/m, $\tau \approx 0,05$ s.

En prenant $\nu_2^* = \omega_2^* / 2\pi = 1,3\text{kHz}$, on obtient :

$$\varepsilon = \frac{1}{(2\nu_2^*)^2} = \frac{1}{(0,1 \times 1,3 \times 10^3)^2} = 6 \times 10^{-5}$$

6.3.4 Résolution de l'équation (II-31) dans le cas d'une excitation décrite par le système d'équation (II-34)

L'excitation du capteur est toujours donnée par l'équation (II-32) dans laquelle $P_I(t)$ s'exprime par les relations (II-34), $P_{II}(t)$ prenant toujours la forme de la relation (II-35).

Pour $0 < t - \tau^* \leq \frac{\pi}{\alpha_I}$, $P_I(t)$ peut être considérée comme la somme des composantes

suivantes pour toute valeur de t de cet intervalle, soit :

$$P_{II}(t) = P_{IO} H(t)$$

$$P_{I2}(t) = (P_I^* - P_{IO}) \frac{t}{\tau^*}$$

$$P_{I3}(t) = 0 \text{ pour } t \leq \tau^*$$

$$P_{I3}(t) = -2 \frac{P_I^* - P_{IO}}{\tau^*} (t - \tau^*) \text{ pour } t > \tau^*$$

$$P_{I4}(t) = 0 \text{ pour } t \leq \tau^*$$

$$P_{I4}(t) = \frac{P_I^* - P_{IO}}{\alpha_I \tau^*} \sin \alpha_I (t - \tau^*) \text{ pour } t > \tau^*$$

La réponse à chacune de ces composantes est la somme de deux termes de vibrations sinusoïdales selon les modes normaux du système et d'un terme représentant la réponse "moyenne" au terme d'excitation considéré. En vertu des hypothèses de

linéarité du système, la réponse à la somme des termes d'excitation est la somme des réponses à chacun de ces termes. Aux instants où la somme des termes de vibrations selon les modes normaux s'annule, la réponse du capteur s'identifie à la réponse "moyenne" à l'excitation. Si les durées τ et π/α_j sont très supérieures à l'inverse des fréquences des modes propres, il existe un grand nombre de ces points. Ces durées étant respectivement de l'ordre de 10 ms et 4 ms dans les cas le plus défavorables, cette condition est toujours réalisée. La réponse "moyenne" du capteur est la somme des réponses "moyennes" à chacun des termes d'excitation $P_{i1}(t)$ et $P_{ij}(t)$ de l'équation (II-32). La réponse "moyenne" au terme $P_{ij}(t)$ est, d'après la relation (II-37), de la forme :

$$P_{ijM} C_{ij} \sin \alpha_j t$$

C_{ij} étant donné par la relation (II-41). Ce terme de réponse s'annule aux temps \tilde{t} tels que $\alpha_j t = k\pi$. A ces instants, la réponse "moyenne" du capteur s'identifie à la réponse "moyenne" au terme d'excitation $P_{ij}(t)$.

L'erreur de mesure "moyenne" sur le terme d'excitation en échelon $P_{i1}(t)$ est nulle puisque cette excitation est constante.

On peut exprimer l'erreur de mesure relative aux termes d'excitation $P_{i2}(t)$ et $P_{i3}(t)$ suivant une rampe en assimilant celle-ci à une portion de sinusoïde d'équation $P_{ij}(t) = P_{ijM} \sin \alpha_j t$ dans laquelle $\alpha_j t$ tend vers zéro et $P_{ijM} \alpha_j$ vers le coefficient angulaire de la fonction rampe considérée.

L'erreur relative "moyenne" sur la somme des composantes P_{i2} et P_{i3} est toujours donnée par la relation (II-46) dans laquelle α_j tend vers zéro. Par suite, cette erreur relative moyenne tend vers zéro.

L'erreur moyenne sur $P_{\mu}(t)$ est de la forme du premier terme du second nombre de (II-45). La valeur maximale de cette erreur est égale à $\frac{\alpha_1^2}{\omega_2^2}$ fois l'amplitude de la composante sinusoïdale. Or celle-ci est au plus égale au tiers de l'excitation maximale P_{IM} . Le rapport de l'erreur moyenne de mesure sur $P_{\mu}(t)$ à P_{IM} est donc au plus de $\frac{\alpha_1^2}{3\omega_2^2}$.

La valeur maximale de $\alpha_1^2/3\omega_2^2$ est de l'ordre de 4×10^{-3} .

En conclusion, l'erreur moyenne des mesures de forces est dans tous les cas négligeable.

II-7 - DISTRIBUTION DES RÉACTIONS SUR LA PLAQUE DE CHOC ET CALCUL DE LEUR RÉSVLTANTE

Lorsque la force de choc est décentrée, la plaque de choc tend à s'incliner sur l'horizontale. Les ressorts et le système de guidage exercent des réactions sur cette plaque de choc qui tendent, à leur tour, à s'opposer à cette inclinaison. Celle-ci résulte de l'équilibre de toutes ces forces. L'inclinaison de la plaque de choc entraîne des différences entre les réactions des ressorts. L'objet de cette annexe est d'évaluer ces différences en fonction du décentrage de la force de choc et de calculer la résultante de ces réactions.

II-7.1 Hypothèses

- 1) Le couple de réaction du système de guidage est supposé négligeable.
- 2) Les déformations de la plaque de choc sont négligeables par rapport aux différences de compression des ressorts.

3) La masse de cette plaque est négligeable.

4) Le décentrage δ de la force de choc est inférieur à $\frac{\varnothing_R}{2} \sin 36^\circ$.

II-7.2 Équation d'équilibre de la plaque de choc (Fig. II-9)

Numérotons les points d'application des forces exercées par les ressorts sur la plaque de choc de 1 à n (n valant 5 ou 10), dans le sens trigonométrique. Soient F_i l'une quelconque de ces forces et η_i , l'angle au centre de la plaque interceptant l'arc de cercle compris entre les points d'application n et i . Pour simplifier l'étude, il est supposé que l'axe u' u situé dans le plan de la plaque et distant de son centre de δ , est parallèle à une ligne passant par les points d'application de deux forces F_i diamétralement opposées.

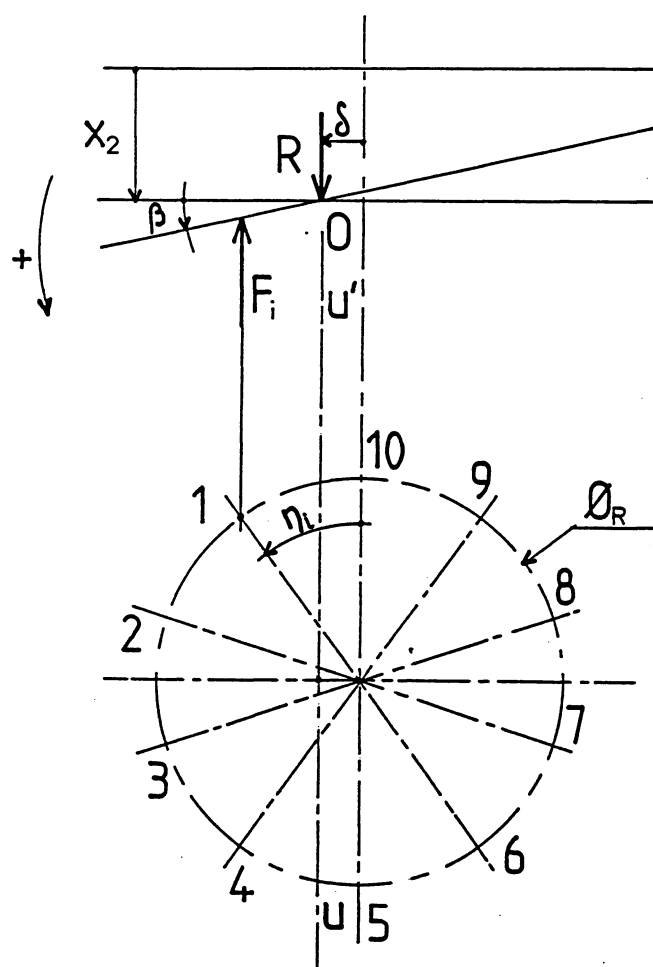


Fig. II-9 Effet d'une force de choc décentrée sur l'inclinaison de la plaque de choc.

Les équations d'équilibre de cette plaque de choc s'écrivent avec les conventions de signe de la figure II-9

$$\sum_i^n \vec{F}_i = -\vec{R} \quad (\text{II-47})$$

$$\sum_i \mathcal{M}_{x_2}^i \vec{F}_i = 0 \quad (\text{II-48})$$

Or,

$$F_i = -k_R \left[x_2 + \beta \left(\frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta \right) \right] \quad (\text{II-49})$$

où k_R est la raideur des ressorts.

$$\mathcal{M}_{x_2}^i \vec{F} = F_i \left(\frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta \right) \quad (\text{II-50})$$

k_R étant la raideur des ressorts. Nous supposons que le nombre des ressorts est égal à 10. Le calcul serait conduit de la même manière avec $n=5$.

II-7.3 Résolution des équations d'équilibre

L'équation (II-47) s'écrit :

$$\frac{R}{k_R} = 10x_2 + \beta \left[\sum_{i=1}^{i=10} \left(\frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta \right) \right] \quad (\text{II-51})$$

Or, $\sin \eta_i = \sin \eta_{i+5}$ (II-52)

d'où, $\sum_{i=1}^{i=10} \frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta = -10\delta$

(II-51) s'écrit alors :

$$\frac{R}{k_R} = 10(x_2 - \beta\delta) \quad (\text{II-53})$$

On obtient une équation à deux inconnues x_2 et β , qui pourront être calculées à partir de la résolution de (II-50). Cette équation, compte tenu de (II-49), s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{i=10} \left[x_2 + \beta \left(\frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta \right) \right] \left(\frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta \right) = 0 \quad (\text{II-54})$$

soit encore :

$$x_2 \sum_{i=1}^{i=10} \frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta + \beta \sum_{i=1}^{i=10} \left(\frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta \right)^2 = 0$$

Compte tenu de (II-52), on obtient :

$$x_2 \sum_{i=1}^{i=10} \frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta = -10x_2\delta$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=10} \left(\frac{\varnothing_R}{2} \sin \eta_i - \delta \right)^2 &= \left(\frac{\varnothing_R}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{i=10} \sin^2 \eta_i - \delta \varnothing_R \sum_{i=1}^{i=10} \sin \eta_i + 10\delta^2 \\ &= 2 \left(\frac{\varnothing_R}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{i=5} \sin \eta_i + 10\delta^2 \end{aligned}$$

(II-54) s'écrit alors :

$$-10x_2\delta + \beta \left[\frac{\varnothing_R}{2} \sum_{i=1}^{i=5} \sin^2 \eta_i + 10\delta^2 \right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=5} \sin^2 \eta_i = 3,078$$

d'où

$$-10x_2\delta + 1,539\beta\varnothing_R^2 + 10\beta\delta^2 = 0 \quad (\text{II-55})$$

D'après (II-53), $10x_2 = \frac{R}{k_R} + 10\beta\delta$

En reportant cette expression de $10x_2$ dans (II-55) on obtient après simplifications :

$$-\frac{R\delta}{k_R} + 1,539\beta\varnothing_R^2 = 0$$

d'où

$$\beta = \frac{R\delta}{1,539\varnothing_R^2 k_R} \quad (\text{II-56})$$

En reportant cette expression dans (II-53), on obtient :

$$x_2 = \frac{R}{k_R} \left(\frac{1}{10} + \frac{\delta^2}{1,539\varnothing_R^2} \right) \quad (\text{II-57})$$

D'après (II-49), compte tenu de (II-52)

$$\frac{F_i}{F_{i+5}} = \frac{x_2 + \beta \left(\frac{\varnothing_R \sin \eta_i}{2} - \delta \right)}{x_2 - \beta \left(\frac{\varnothing_R \sin \eta_i}{2} + \delta \right)} \quad (\text{II-58})$$

Après élimination de R/k_R entre (II-56) et (II-57), on obtient la relation suivante :

$$\beta = \frac{10\delta x_2}{1,539\varnothing_R^2 + 10\delta^2} = \frac{10\delta x_2}{1,539\varnothing_R^2 \left(1 + \frac{10\delta^2}{1,539\varnothing_R^2} \right)}$$

Le deuxième terme entre parenthèses au dénominateur étant normalement négligeable devant 1,

$$\beta \approx \frac{10\delta x_2}{1,539\varnothing_R^2}$$

(II-58) décrit alors,

$$\frac{F_i}{F_{i+5}} = \frac{1 + \frac{10\delta}{1,539\varnothing_R^2} \left(\frac{\varnothing_R \sin \eta_i - \delta}{2} \right)}{1 - \frac{10\delta}{1,539\varnothing_R^2} \left(\frac{\varnothing_R \sin \eta_i + \delta}{2} \right)}$$

pour $\eta_i = 72^\circ$, $\delta = 1 \text{ cm}$, $\varnothing_R = 20 \text{ cm}$

$$\frac{\varnothing_R \sin \eta_i - \delta}{2} = 8,51 \text{ cm}$$

$$\frac{\varnothing_R \sin \eta_i + \delta}{2} = 10,51 \text{ cm}$$

$$\frac{10\delta}{1,539\varnothing_R^2} = 0,016$$

$$\beta \approx 0,9^\circ$$

$$\frac{F_i}{F_{i+5}} \approx \frac{1 + 0,016 \times 8,51}{1 - 0,016 \times 10,51} = \frac{1,136}{0,832} \approx 1,37$$

II-7.4 Calcul de la résultante des réactions des ressorts dans le cas d'un montage à 10 ressorts

La résultante F des réactions F_j des ressorts est estimée par la quantité F^* donnée par la relation suivante :

$$F^* = 2 \sum_{j=0}^{j=4} F_{2j+1} \quad (\text{II-59})$$

une réaction sur deux étant mesurée.

Plaçons nous dans la configuration de la figure II-9. D'après la relation (II-49),

$$-\frac{F^*}{2k_R} = 10(x_2 - \beta\delta) + \varnothing_R \beta \sum_{j=0}^{j=4} \sin \eta_{2j+1}$$

Toujours d'après la relation (II-49)

$$-\frac{F}{2k_R} = 10(x_2 - \beta\delta) + \frac{\varnothing_R}{2} \beta \sum_{i=1}^{i=10} \sin \eta_i$$

Or, on peut aisément démontrer en s'appuyant sur la figure II-9 que

$$\sum_{i=1}^{i=10} \sin \eta_i = 2 \sum_{j=0}^{j=4} \sin \eta_{2j+1}$$

Par suite, $F^*=F$. On pourrait démontrer qu'il en est ainsi quelque soit l'orientation de l'axe u' u (fig. II-9) autour duquel la plaque de choc s'incline. Le calcul de F par la relation (II-59) n'est donc pas biaisé.

II-7.5 Interprétation

Le rapport entre les plus grandes et plus petites réactions des ressorts dans l'essai de chute du sac de sable sous une hauteur de 1,5 m (montage à 10 ressorts raides) est de 1,3 environ, soit de l'ordre de grandeur du rapport théorique obtenu avec un décentrage de la force de choc de 1 cm, qui d'un point de vue pratique apparaît comme étant une valeur assez faible.

Or, on n'observe de rapports notablement supérieurs à 1,1 entre la réaction la plus élevée des ressorts et la réaction la plus faible au cours d'un même essai, que lorsque le montage à 10 ressorts raides est utilisé. Cela laisse supposer que le système de guidage assure parfaitement son rôle, tant que la raideur totale des ressorts est inférieure ou égale à 1176 kN/m, mais qu'il ne peut plus s'opposer totalement à l'inclinaison de la plaque de choc lorsque cette raideur est de 2325 kN (10 ressorts raides) en raison de la valeur élevée que peut prendre le couple de basculement dans cette configuration.

II-8 - DISCUSSION

II-8.1 Sur les hypothèses

L'hypothèse 1 du paragraphe II-4.2 et celle du paragraphe II-5.1 sont vérifiées si la période de vibration propre du mode fondamental est très inférieure ou double de la durée du choc.

L'hypothèse d'une plaque circulaire simplement appuyée sur son pourtour peut être admise en toute première approximation lorsque cette plaque est en appui circulaire sur les ressorts. La période propre du mode fondamental dans ce cas est alors donnée par la relation suivante [II-9] :

$$T = \frac{2\pi}{5,9} \sqrt{\frac{\mathcal{D}\mathcal{O}^4(1-\sigma^2)}{\mathcal{E}e^2}}$$

avec $\mathcal{E} = 7 \times 10^{10}$ N/m², $e = 10^{-2}$ m, $\mathcal{D} = 2700$ kg/m² (alliage d'aluminium), $\mathcal{O} = 0,31$ m, $\sigma = 0,3$, on obtient $T \approx 10^2$ s. Dans les cas les plus défavorables, la durée du choc est de l'ordre de 2×10^{-2} . L'hypothèse de changement statique peut donc être considérée comme assez bien vérifiée.

Il a été supposé dans l'hypothèse 2 que la plaque était sans évidements. En réalité, la plaque est percée de 18 trous de diamètre égal à 20 mm, régulièrement distribués sur des circonférences de diamètres égaux à 60 mm, 104 mm et 120 mm. L'existence de ces trous revient à enlever les 2/3 de la matière dans une bande circulaire comprise entre les cercles de 60 mm et 120 mm de diamètre. En toute première approximation, tout se passe comme si, dans cette zone circulaire, le module de rigidité D_c de la plaque était divisé par 3 par rapport à celui pris en compte dans les calculs. L'énergie W emmagasinée dans la plaque étant inversement proportionnelle à ce module d'inertie, l'hypothèse 2 conduit à sous-évaluer les énergies emmagasinées dans la plaque. Celles-ci sont toutefois moins de 3 fois supérieures aux valeurs calculées sur la base de cette hypothèse.

L'hypothèse 3 n'est pas parfaitement vérifiée car la plaque n'est pas circulaire, mais en X avec une partie centrale carrée de 0,26 m de côté. Intuitivement, l'hypothèse 3 tend à majorer les valeurs calculées de l'énergie emmagasinée dans la plaque. L'hypothèse consistant à prendre le diamètre de la plaque égal au diamètre de chargement conduit à majorer la valeur calculée de l'énergie emmagasinée dans la plaque puisque celle-ci devient plus déformable en ôtant la couronne de diamètres intérieur et extérieur \varnothing et \varnothing_M .

L'hypothèse 4 n'est probablement pas parfaitement vérifiée. La pression est vraisemblablement décroissante au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre. Cette hypothèse tend à majorer les valeurs calculées de l'énergie emmagasinée, dans le cas du montage à un seul ressort où elle est la plus élevée. Rien ne peut être conclu a priori en ce qui concerne le cas du montage à plusieurs ressorts.

Les hypothèses 5 et 6 sont assez bien vérifiées.

Les hypothèses admises, hormis la deuxième, tendent à majorer les valeurs de l'énergie emmagasinée dans la plaque. Pour tenir compte de l'effet minorant découlant de l'hypothèse 2, il convient de multiplier les valeurs calculées de l'énergie par 3. On en obtient alors, des valeurs majorées. Le rapport W_c/E_s de l'énergie emmagasinée dans la plaque à l'énergie absorbée par le sac est donc au maximum de 6×10^{-3} .

II-8.2 Sur les hypothèses II-7.1

L'hypothèse 1) n'est certainement pas vérifiée en raison même du rôle du système de guidage. Cependant, sous l'action des réactions des colonnes de guidage sur les douilles à billes, le système se déforme. Vouloir prendre en compte ces déformations conduirait à des calculs très compliqués. En négligeant l'effet des réactions du système de guidage, on effectue un calcul qui majore les différences entre les réactions des ressorts.

L'hypothèse 2) est probablement bien vérifiée dans le cadre de l'hypothèse 1) car les différences de compression extrêmes des ressorts sont de 3 mm, soit une valeur beaucoup plus forte que les déformations de la plaque qui sont de l'ordre de 0,1 mm d'après le paragraphe II-4.4.2 pour une force de choc de 40 kN.

L'hypothèse 3) est admissible dans une première approche, la masse effective de la plaque étant de l'ordre de 10% de celle du sac.

L'hypothèse 4) qui conduit à une valeur de δ inférieure à 5,9 cm est normalement vérifiée.

II-8.3 Sur la précision de la mesure des forces de choc

La réponse "moyenne" des capteurs à la force de choc est "parasitée" par les modes de vibrations propre du système plaque-bâti/capteur et par le mode principal de vibration des ressorts. Il a été vu aux paragraphes II-6.3.3 et II-6.3.4 que la réponse "moyenne" à la superposition de l'excitation par la force de choc et de celle due au mode de vibrations des ressorts pouvait être obtenue par lissage de la réponse réelle. Ce lissage revient à interpoler la réponse entre les instants t^* où la somme des termes de vibrations suivant

les modes normaux du système s'annule. Ce lissage peut théoriquement s'effectuer avec une précision suffisante car le nombre de valeurs t^* est suffisamment élevé sur les intervalles de temps considérés pendant la durée du choc. La réponse "moyenne" à la force de choc peut ensuite être obtenue par interpolation entre les instants $t = \tilde{t}$ où la réponse au mode de vibrations des ressorts s'annule. Dans le cas où les 10 ressorts de type raide sont utilisés, le nombre de ces valeurs de \tilde{t} est de deux à trois à la montée et de deux à la descente. Les conditions d'interpolation restent cependant acceptables tant que les variations relatives de la réponse "moyenne" à la force de choc entre deux valeurs successives de \tilde{t} sont suffisamment faibles, ou lorsque le terme de réponse aux vibrations des ressorts est fortement amorti, ce qui est presque toujours le cas à la descente en effort. Théoriquement donc, les zones d'imprécision de l'interpolation se situent au commencement du choc (front de montée raide de la réponse) et au voisinage du maximum de l'effort. Les difficultés d'interpolation de la réponse à la force de choc au début de celui-ci est sans conséquences pratiques puisque l'on ne s'intéresse qu'à la valeur maximum de cette force. Par contre elles ne sont pas sans conséquences sur la précision de la détermination de cette force, notamment dans les cas où les 10 ressorts de type raide sont utilisés. Pratiquement, il n'est pas possible de déterminer les valeurs de t^* et de \tilde{t} dont il a été question ci-dessus. Les courbes ont été lissées globalement au "juger" avec une précision qui peut être estimée à 5%, valeur bien plus élevée que les erreurs théoriques de mesure sur la réponse "moyenne" à la force de choc. Une autre source d'imprécisions non évaluable, provient de l'hypothèse selon laquelle la force de choc est égale au produit du nombre de ressort par la moyenne des forces mesurées agissant sur les ressorts.

II-9 - CONCLUSION

L'énergie élastique emmagasinée dans la plaque est inférieure au centième de l'énergie E absorbée par le sac. Elle est tout a fait négligeable par rapport aux incertitudes expérimentales sur E_a . L'énergie dissipée dans le système de guidage par frottements de roulement peut atteindre 7% de E_a mais seulement dans les cas les plus défavorables du montage de la plaque, sur les 10 ressorts de faible raideur. Même dans ces cas, l'énergie dissipée par frottement reste inférieure à la dispersion des valeurs individuelles de E_a par rapport à la loi théorique. On peut donc légitimement admettre que l'énergie absorbée par le sac lors du choc est égal à la différence de l'énergie de la chute E et de l'énergie maximale emmagasinée dans les ressorts E_p . L'imprécision sur la détermination de la force maximale de choc due au lissage des réponses est évaluée à 5%. Une autre source d'imprécision, non évaluable, est due au mode de calcul de cette force maximale, à partir de la moyenne des forces mesurées agissant sur les ressorts.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Conception des lieux de travail, ED 178, INRS, PARIS 1991, 70 p.
- [2] DUBOIS J.C. - Les toitures en matériaux fragiles. Rouen, Caisse Régionale d'Assurance Maladie de Normandie, avril 1988.
- [3] PAUREAU J. et PARISOT E. - Résistance au choc des plaques de couverture légère. Cahier de Notes Documentaires 159, pp. 231-242.
- [4] PAUREAU J. - Efficacité des protections collectives périphériques utilisées pour les travaux sur toitures. Fiche d'étude terminée A.7/2.07. 1995, INRS, Vandoeuvre, 23 p.
- [5] Projet de norme NF P 33-303-1. Couverture de bâtiments. Plaques profilées en fibres-ciment. Résistance à la traversée d'un corps mou de grandes dimensions. Méthodes d'essais. Paris - La Défense, AFNOR, 4 juin 1997.
- [6] NF P 08-301. Ouvrages verticaux des constructions. Essais de résistance aux chocs. Corps de chocs. Principes et modalités générales des essais de choc. Paris - La Défense, AFNOR, 1991, 10 p.
- [7] PAUREAU J. - Plaques de couverture légère. Méthodes d'essais et coefficients de sécurité. Cahier de Notes Documentaires, 1997, 168, pp. 453-461.
- [8] STOKEY W.F. - Vibration of systems having distributed mass and elasticity in shock and vibration, 1er ed., HARRIS C.M. (éd.), PARIS Mc Graw-Hill, 1961, pp. 7-1, 7-44.

- [9] PAUREAU J. - Modélisation d'une chute de plain-pied sur une plaque de couverture légère. NST, 1996, INRS Vandoeuvre, à paraître.

- [10] DUCHAINE P.J. - Guidages rectilignes en translation. Glissières. Techniques de l'Ingénieur, Paris, B 5410, 5-1998, pp. 1-19.

- [11] COURBON J. - Résistance des matériaux. 1, 1964, DUNOD, Paris, 782 p.

- [12] HARRIS C.M. et CREDE C.E. - Introduction to the handbook. In. HARRIS C.M. (ed.) Shock and Vibration Handbook, third edition, New York, Mc Graw-Hill, 1988. pp 1-1, 1-26.

- [13] SALLES F. et LESUEUR C. - Les vibrations mécaniques. Tome I. 1972, MASSON, Paris, 218 p.